ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

На правах рукописи

УДК 531.011+531.3+681.5.01

Адамов Борис Игоревич

ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА НЕГОЛОНОМНЫХ СВЯЗЕЙ В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ И УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ

Специальность 01.02.01 —
«Теоретическая механика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д-р. физ.-мат. наук, проф.
Кобрин Александр Исаакович

Москва — 2016

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования и степень её разработанности. Разработка и исследование мобильных роботизированных платформ является перспективным и динамично развивающимся научно-техническим направлением. Многочисленные проблемы, возникающие в процессе человеческой деятельности, стимулируют развитие и внедрение разработок этой области науки. Потребность в мобильных робототехнических системах возникает в связи с организацией работы в опасной или недоступной для человека среде (разминирование, разбор завалов, исследование других планет, разведка), а также выполнением рутинных операций (складская логистика, сельскохозяйственные работы, транспортировка грузов, обслуживание пациентов медицинских учреждений, работы по дому).

Вопросы динамики, управления, стабилизации движения, навигации мобильных роботов рассмотрены, в частности, в работах Ю. В. Болотина, А. А. Голована, Е. А. Девянина, А. В. Карапетяна, А. И. Кобрина, А. В. Ленского, Ю. Г. Мартыненко, В. Е. Павловского, Л. Б. Раппопорта, Д. Е. Охоцимского, А. М. Формальского.

Комплектование мобильной платформы робота манипулятором позволяет существенно расширить функциональные возможности аппарата. Вопросы динамики и управления манипуляционными роботами, в том числе мобильными манипуляторами, рассматривались такими авторами, как В. В. Белецкий, С. Л. Зенкевич, Ю. Г. Мартыненко, И. В. Орлов, Е. И. Юревич, А. С. Ющенко, М. Вукобратович (*M. Vukobratović*), М. Спонг (*M. W. Spong*), М. Шахинпур (*M. Shahinpoor*), Дж. Янг (*J. F. Young*). Среди серийных разработок мобильных манипуляторов последних лет можно отметить роботы *G-WAM* и *X-WAM* совместного производства *Robotnik Automation* и *Barrett Technologies*, *UBR*-1 компании *Unbounded Robotics*, *youBot* компании *KUKA*.

Особенностью упомянутых мобильных роботов *X-WAM* и *youBot* является возможность осуществления всенаправленного движения платформ этих устройств. Это свойство достигается за счёт их оснащения роликонесущими колёсами. Мобильные платформы всенаправленного движения прекрасно подходят для работы в стеснённых средах, таких как складские и производственные помещения. Исследования механики систем с роликонесущими колёсами различных типов проводились А. Д. Бобыкиным, А. А. Зобовой, А. А. Килиным, Ю. Г. Мартыненко, В. Е. Павловским, Я. В. Татариновым, А. М. Формальским, И. Дорофтеи (*I. Doroftei*), П. Мьюром (*P. F. Muir*), Ч. Ньюманом (*C. P. Neuman*).

Роботизированная платформа всенаправленного движения *KUKA youBot* является системой с открытым программным обеспечением, поддержка которого осуществляется широким кругом разработчиков. Это делает удобным использование рассматриваемого робота для научно-исследовательских и образовательных целей. Среди публикаций, посвящённых применению робота *youBot* в прикладных задачах, отметим работы Р. Кнеппера (*R. A. Knepper*), Д. Расс (*D. Russ*) и их соавторов.

В задачах реализации мобильным роботом движения по требуемой траектории, перемещения в стеснённой среде с использованием карты препятствий важную роль играет система навигации, определяющая текущее положение платформы. В качестве датчика инерциальной навигации мобильных роботизированных платформ могут использоваться волновые твердотельные гироскопы. Это — перспективные компактные приборы среднего и низкого классов точности. Исследованию волновых твердотельных гироскопов посвящены работы М. А. Басараба, Н. Е. Егармина, Ю. К. Жбанова, В. Ф. Журавлёва, Д. М. Климова, В. Ф. Кравченко, Е. П. Кубышкина, Ю. Г. Маркова, Ю. Г. Мартыненко, В. А. Матвеева, И. В. Меркурьева, В. В. Подалкова, Д. Линча (*D. D. Lynch*).

Разработка алгоритмов управления мобильными роботами требует использования детализированной и проработанной математической модели для повышения качества регулирования и его точности, оптимизации переходных процессов и энергозатрат, стабилизации программных движений. Аналогичное требование возникает и в задаче повышения точности гироскопического датчика, поскольку для этого необходима модель погрешностей, источники которых весьма разнообразны.

Зачастую значения некоторых коэффициентов в уравнениях движения рассматриваемых систем неизвестны и, в случае гироскопа, могут медленно изменятся в процессе функционирования системы. Величины этих коэффициентов подлежат определению с целью их дальнейшего использования для расчёта управляющих воздействий и алгоритмической компенсации погрешностей.

Таким образом, возникает задача идентификации параметров математических моделей рассматриваемых систем. Алгоритмы, позволяющие оценить искомые значения параметров в процессе работы системы, а также отслеживать их медленные эволюции, разрабатываются в рамках теорий оценивания и адаптивной идентификации. Этой проблематике посвящены работы Б. Р. Андриевского, С. В. Арановского, А. А. Бобцова, Ю. В. Болотина, А. А. Голована, А. И Матасова, В. А. Терехова, И. Ю. Тюкина, А. Л. Фрадкова, П. Ионанноу (*P. Ioannou*), Л. Льюнга (*L. Ljung*), С. Састри (*S. Sastry*), Ж.-Ж. Слотина (*J. J. E. Slotine*).

Количество оцениваемых коэффициентов в уравнениях движения мобильного робота всенаправленного движения и резонатора волнового твердотельного гироскопа может быть настолько большим, что реализация алгоритмов идентификации параметров на бортовом компьютере робота в реальном времени становится невозможной.

В некоторых задачах удаётся установить дополнительные зависимости, которым удовлетворяют искомые параметры. Организовав алгоритм идентификации таким образом, чтобы оценки параметров также удовлетворяли этим дополнительным соотношениям, можно добиться не только улучшения точности работы алгоритма, но и снизить его размерность.

Примеры алгоритмов адаптивной идентификации параметров и калмановской фильтрации, учитывающих такого рода ограничения на оценки приведены в работах П. Ионанноу (*P. Ioannou*), С. Састри (*S. Sastry*), Д. Саймона (*D. Simon*).

Для синтеза новых алгоритмов идентификации параметров, учитывающих ограничения в виде равенств на вырабатываемые оценки (связи), можно использовать теоретические результаты, полученные в области аналитической механики. С точки зрения уменьшения размерности дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют оценки параметров, подход оправдан, поскольку он подразумевает возможность представить эти уравнения в псевдоскоростях.

Отметим, что ещё в начале XX века Я. И. Грдина использовал методы аналитической механики для получения уравнений динамики живого организма, положив в основу своих исследований принцип наименьшего принуждения Гаусса, считая интегральные принципы механики неприменимыми для живых организмов.

Аппарат связей используется также и для решения задач управления робототехническими системами: управляющие обобщённые силы ищутся в виде реакций кинематических связей, согласующихся с требуемым движением системы. Экстремальные свойства реакций связей и их работы делают такой способ реализации программного движения в некотором смысле оптимальным.

Исследованию динамики и синтезу систем со связями посвящены работы таких авторов, как Ю. В. Болотин, А. С. Галиуллин, Я. И. Грдина, Н. П. Еругин, В. В. Козлов, И. А. Мухаметзянов, Р. Г. Мухарлямов, Баумгарт (*J. Baugarte*), А. Беген (*H. Béghin*), Р. Калаба (*R. E. Kalaba*), Р. Лэйтон (*R. A. Layton*), Ф. Удвадиа (*F. E. Udwadia*).

Таким образом, задачи управления и идентификации параметров мехатронных систем можно решать, применяя один и тот же математический аппарат аналитической механики неголономных систем. В задаче параметрической идентификации такой подход позволяет уменьшить размерность алгоритма нахождения оценок, а в задаче реализации требуемых движений приводит к организации оптимального в некотором смысле движения системы.

Целью данной работы является построение алгоритмов идентификации параметров мехатронных систем с ограничениями в виде равенств на оценки параметров и алгоритмов управления движением с помощью математического аппарата неголономной механики. Ограничения на оценки параметров или программное движение интерпретируются как наложение на исследуемый объект неголономных связей. Метод неопределённых множителей и представление уравнений в псевдоскоростях используются для описания динамики систем с такими связями. Такой подход позволяет уменьшить размерность задачи и, тем самым, снизить объём необходимых вычислений.

Задача идентификации параметров с дополнительными ограничениями на вырабатываемые оценки ставится для систем различной физической природы с линейной параметрической моделью. Алгоритмы управления разрабатываются для мобильной роботизированной платформы всенаправленного движения *KUKA youBot*.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать подходящие алгоритмы оперативной идентификации (оценивания) параметров динамической системы с линейной параметриче-

ской моделью и дополнительными нелинейными ограничениями на оцениваемые величины в виде равенств.

2. Обосновать и продемонстрировать на примерах конкретных механических систем работоспособность полученных алгоритмов идентификации параметров с ограничениями в виде равенств.
3. Построить математическую модель движения мобильного робота *youBot* и оценить неизвестные коэффициенты в уравнениях движения.
4. Разработать алгоритм управления мобильным роботом *youBot* с целью отработки требуемого движения произвольной точки его платформы.

Научная новизна:

1. Получены алгоритмы идентификации параметров системы с линейной параметрической моделью с использованием представления ограничений на оценки параметров в виде неинтегрируемых уравнений связей (в псевдоскоростях), а также принципа наименьшего принуждения при выводе определяющих соотношений для оценок параметров.
2. С использованием представления ограничений на оценки параметров в виде неинтегрируемых уравнений связей (в псевдоскоростях) получены алгоритмы идентификации параметров, оптимальные по методу наименьших квадратов с ограничениями в виде равенств.
3. Предложена модификация интегрального квадратичного функционала ошибки, позволяющая получить более компактные алгоритмы идентификации параметров с ограничениями в виде равенств как в непрерывном, так и в дискретном времени.
4. Разработаны алгоритмы идентификации параметров математической модели робота *youBot*.
5. Выявлены особенности динамики платформы робота *youBot* при организации управления в виде реакций неголономных связей, согласующихся с заданным программным движением.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. В ней показано, что применение методов аналитической механики в задаче идентификации параметров с ограничениями в виде равенств приводит к уменьшению её размерности, и, следовательно, количества необходимых вычислений. В работе демонстрируется, что введение неинтегрируемых связей позволяет получить новые классы решений задач, в постановке которых связи не фигурируют. Речь идёт о задаче стабилизации аффинных управляемых систем и задаче оценивания для некоторых нелинейно параметризованных систем.

Разработанные алгоритмы идентификации параметров с ограничениями в виде равенств на оценки могут быть использованы для исследования и управления системами различной физической природы, в частности многозвенных систем с податливыми шарнирами.

Полученные алгоритмы организации управления в виде реакций связей применимы для реализации требуемых движений механическими и мехатронными системами, в частности мобильными платформами с роликонесущими колёсами. Для задачи реализации равномерного движения точки такого робота по окружности найдены условия существования и устойчивости стационарных вращений платформы. Удовлетворение таких условий позволяет организовать простое и интуитивно предсказуемое поведение системы, что является полезным при реализации платформой требуемого движения в стеснённой среде.

Методология и методы исследования. Для решения поставленных задач в работе использовались методы аналитической механики, в том числе механики неголономных систем и управляемых систем с дополнительными связями; методы теории адаптивных систем управления и идентификации; детерминированные методы теории оценивания. Для наглядного представления результатов работы алгоритмов идентификации и управления использовались численные методы математического моделирования.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Для мехатронных систем с линейными параметрическими моделями построено семейство алгоритмов идентификации параметров с ограничениями на оценки в виде равенств, полученное с помощью математического аппарата неголономной механики (использования принципа наименьшего принуждения и представления уравнений связей в терминах псевдоскоростей), позволившего снизить размерность задачи.
2. Разработаны оптимальные с точки зрения метода наименьших квадратов алгоритмы идентификации с ограничениями-равенствами на оценки параметров, представленные в терминах псевдоскоростей и множителей связей.

3. Построены оптимальные с точки зрения модифицированной интегральной квадратичной ошибки алгоритмы идентификации с ограничениями-равенствами на оценки параметров, представленные в терминах псевдоскоростей.
4. Создана математическая модель роботизированной платформы всенаправленного движения *KUKA youBot*, учитывающая силы вязкого трения в подшипниках механических передач и опорах роликов колёс, упругую податливость элементов. Разработан алгоритм идентификации параметров такой модели, использующий одометрическую информацию и измерения управляющих моментов двигателей.
5. Разработан алгоритм управления роботом *KUKA youBot* с целью отработки программного движения, которое реализуется путём воздействия на систему управляющих обобщённых сил, отождествлённых с реакциями неголономных связей. Получены условия существования и асимптотической устойчивости стационарных вращений платформы робота в процессе реализации равномерного движения произвольной точки платформы по окружности.

Степень достоверности обуславливается применением строгих математических методов, проиллюстрированных компьютерным моделированием, и обеспечивается подробным изложением промежуточных результатов в тексте работы. Разработанные в диссертации методы и подходы практически опробованы при идентификации параметров резонатора волнового твердотельного гироскопа, характеристик его установившихся колебаний, а также параметров роботизированной платформы всенаправленного движения *KUKA youBot*. Результаты диссертационной работы согласуются с результатами, ранее полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:
1. XV конференции молодых учёных «Навигация и управление движением», 12–15 марта 2013 г., Санкт-Петербург, Россия;
2. II международной научно-практической конференции «Инновационные информационные технологии», 22–26 апреля 2013 г., Прага, Чешская республика;
3. Международной конференции по механике и баллистике «VIII Окуневские чтения», 25–28 июня 2013 г., Санкт-Петербург, Россия;

4. XX международной научно-технической конференции студентов и аспирантов «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика», 27–28 февраля 2014 г., Москва, Россия;
5. The 58-th Ilmenau Scientific Colloquium — Shaping the Future by Engineering, 8–12 сентября 2014 г., Ильменау, Германия;
6. XIII международной научно-практической конференции «*NIDays*–2014», 19–20 ноября 2014 г., Москва, Россия;
7. XXI международной научно-технической конференции студентов и аспирантов «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика», 26–27 февраля 2015 г., Москва, Россия;
8. XVII конференции молодых учёных «Навигация и управление движением», 17–20 марта 2015 г., Санкт-Петербург, Россия;
9. XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, 20–24 августа 2015 г., Казань, Россия;
10. XVIII конференции молодых учёных «Навигация и управление движением», 15–18 марта 2016 г., Санкт-Петербург, Россия;
11. LII Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники, Москва, 17–19 мая 2016 г.;
12. Заседании научного семинара «Математическое моделирование процессов динамики», 23 марта 2016 г., Москва, Российский университет дружбы народов;
13. Заседании научного семинара кафедры прикладной механики и управления механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, 30 марта 2016 г., Москва;
14. Заседании научного семинара кафедры теоретической механики и мехатроники НИУ МЭИ, 16 мая 2016 г., Москва.

Автор награждён дипломом за лучший доклад молодого учёного на секции «Общая и прикладная механика» XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики.

Результаты работы были использованы при составлении заявки № 16-01-00429-а, поддержанной на конкурсе проектов РФФИ.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 15 печатных изданиях [1–15], 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1–3], 12 — в материалах конференций и тезисах докладов [4; 6–15].

Публикации по теме диссертации в журналах перечня ВАК выделены в списке литературы полужирным начертанием, список литературы составлен в порядке цитирования в тексте работы.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 206 страниц машинописного текста с 35 рисунками и 4 таблицами. Список литературы содержит 129 наименований.

Во **введении** приводится общая характеристика работы.

Глава 1 начинается с обзора публикаций, посвящённых задачам идентификации параметров и оценивания с ограничениями в виде равенств, обратным задачам динамики систем со связями. Формулируется задача идентификации параметров систем с линейной параметрической моделью и с ограничениями на оценки в виде равенств (параметрическими связями). Уравнения связей представлены в дифференциальной форме, что позволило применить методы неголономной механики для построения алгоритмов идентификации параметров в терминах псевдоскоростей. С помощью метода неопределённых множителей получены уравнения градиентного идентификатора параметров; обоснована сходимость вырабатываемых им оценок в линейном приближении. С помощью применения принципа наименьшего принуждения получен один класс алгоритмов идентификации с параметричекими связями. Приведён пример одного алгоритма такого класса — рекуррентного метода наименьших квадратов с проекцией; обоснована сходимость вырабатываемых оценок в линейном приближении. С помощью принципа наименьшего принуждения решена задача идентификации при обеспечении асимптотической устойчивости интегрального многообразия, определяемого связями. Проведена аналогия между задачами идентификации со связями и стабилизации аффинных управляемых систем, позволившая построить новый класс управлений в виде обратной связи.

Глава 2 посвящена решению задачи идентификации параметров с параметрическими связями, оптимальной с точки зрения интегральной квадратичной ошибки. Получены уравнения оптимального и субоптимального идентификаторов, установлена их аналогия с уравнениями механики систем с сервосвязями. Выведены уравнения оптимального идентификатора в терминах псевдоскоростей и множителей связей. Установлено, что размерность такой системы уравнений не зависит от количества связей и определяется только размерностью вектора коэффициентов линейной параметрической модели. Проведена регуляризация дифференциального уравнения для множителей связей. Построен алгоритм оптимальной идентификации с модифицированной интегральной квадратичной ошибкой для непрерывного и дискретного времён.

Глава 3 начинается с обзора публикаций, посвящённых задачам динамики и идентификации параметров волновых твердотельных гироскопов, а также задачам оценивания характеристик мультисинусоидальных сигналов. Решена задача идентификации параметров нелинейной математической модели установившихся колебаний кольцевого резонатора волнового твердотельного гироскопа в одномодовом приближении. Параметрическая модель системы построена в предположении о том, что нелинейные силы являются консервативными с потенциальной энергией, заданной однородной формой четвёртого порядка. Используя метод наименьших квадратов, получены оценки параметров для такой модели. Решена задача оценивания частоты установившихся колебаний резонатора, моделируемых двумя гармониками ряда Фурье. Процедура построения оценок частоты сведена к идентификации параметров линейного динамического объекта, удовлетворяющих дополнительному условию в виде равенства — параметрической связи. Показано, что её учёт в алгоритмах идентификации существенно повышает точность оценок частоты. Проведено численное моделирование работы идентификаторов параметров, исследовано влияние величин коэффициентов усиления и начальных условий на точность оценок частоты. Решена задача совместной идентификации частоты и коэффициентов Фурье установившихся колебаний резонатора. Найдены оценки перечисленных параметров, оптимальные по критерию модифицированной интегральной квадратичной ошибки.

Глава 4 начинается с обзора публикаций, посвящённых динамике, управлению и идентификации параметров манипуляционных роботов и платформ с роликонесущими колёсами. Получены уравнения кинематики и динамики мобильного робота всенаправленного движения *KUKA youBot* в псевдоскростях. Построены алгоритмы идентификации параметров робота, которые были использованы для получения оценок неизвестных коэффициентов в уравнениях движения системы. В качестве исходной информации для нахождения оценок использовались зависимости управляющих моментов и одометрических измерений от времени, снятые в процессе движения реальной системы. Решена задача управления роботом с целью отработки программного движения, согласованного с дополнительными неголономными связями. Управляющие обобщённые силы отождествлены с реакциями этих связей. Исследован один класс стационарных движений платформы с таким управлением. Построены уравнения поступательного движения платформы робота с учётом податливости элементов механических передач колёс. Установлено, что коэффициенты параметрической модели такой системы удовлетворяют уравнению связи, которая была учтена при построении алгоритма идентификации. Проведено численное моделирование работы построенных алгоритмов идентификации и управления.

В **заключении** сформулированы основные результаты работы.

В **приложении А** приводится сводка используемых в работе операций дифференцирования векторов.

В **приложении Б** приводятся результаты моделирования динамики всенаправленной платформы *youBot* под действием управляющих сил, отождествлённых с реакциями неголономных связей, согласованных с программным движением системы.

1 Методы аналитической механики в задаче адаптивной идентификации с параметрическими связями

Идентификация параметров динамического объекта подразумевает выделение информации о них из доступных данных, полученных в результате наблюдения процессов в системе. Для выработки оценок неизвестных параметров необходимо установить взаимосвязь последних с доступной измерительной информацией — то есть построить параметрическую модель объекта. Способ получения такой модели зависит от от специфики конкретного объекта: вида уравнений его динамики и структуры измерений.

Адаптивная идентификация проводится в режиме реального времени в процессе работы системы. Она позволяет как оценивать неизвестные величины параметров, так и отслеживать их медленные изменения в процессе функционирования объекта в изменяющейся среде. Идентификаторы параметров — устройства или алгоритмы, вырабатывающие оценки — являются составной частью систем прямого адаптивного управления [16–19].

Зачастую синтез алгоритмов адаптивного управления и идентификации проводится из детерминистических соображений, динамика объектов управления описываются в непрерывном времени, а оцениваемые параметры предполагаются постоянными или медленно меняющимися [16–22]. Если измерительная информация о состоянии объекта зашумлена, то проводится регуляризация и огрубление полученных алгоритмов [18; 19; 23–25].

Достаточно широко используются алгоритмы идентификации с *линейной* параметрической моделью (линейной параметризацией, линейной идентификационной моделью): градиентный, оптимальный с точки зрения наименьших квадратов [18–22], их модификации с нормализацией [19; 20] и регуляризацией [22; 25]; нейросетевые алгоритмы [26]. Отдельно отметим книгу Ж.–Ж. Слотина [21], в которой излагаются некоторые методы построения линейных параметрических моделей для механических систем и приводятся примеры алгоритмов адаптивной идентификации параметров манипуляционных роботов. Примеры алгоритмов адаптивного управления и идентификации для систем с нелинейными параметрическими моделями приведены книге [17].

В книге Л. Льюнга [27] приведено большое количество алгоритмов идентификации, в том числе рекуррентные, использующие линейную параметрическую авторегрессионную модель системы в дискретном времени. В указанной работе приводится пример системы [27, стр. 122–123] — модели жилища с солнечным подогревом, неизвестные коэффициенты авторегрессии которой зависят друг от друга. Резюмируя этот пример, автор книги [27] критикует приведённый способ построения параметрической модели, поскольку, представленные в [27] алгоритмы идентификации игнорируют взаимосвязь оцениваемых параметров.

Для того, чтобы учесть такого рода информацию, необходимо разработать алгоритмы идентификации так, чтобы вырабатываемые ими оценки удовлетворяли ограничениям в виде равенств (связям), которые выражают взаимозависимость оцениваемых параметров.

В книгах [19; 20] такая задача была решена как вспомогательная для идентификации параметров, принадлежащих некоторой области. Уравнение её границы задаёт скалярную функцию связи. Для получения оценок параметров с таким односторонним ограничением в [19; 20] используются алгоритмы идентификации переменной структуры. Внутри области оценки вычисляются по градиентному алгоритму, а на её границе — по градиентному алгоритму с проекцией. Также в [20] предлагается алгоритм наименьших квадратов с проекцией, отличающийся тем, что внутри области расчёт оценок ведётся по рекуррентному методу наименьших квадратов. Оценки, принадлежащие её границе, вырабатываются градиентным идентификатором с проекцией и, тем самым, не являются оптимальными.

Во многих практических приложениях, таких как обработка навигационной информации и комплексирование алгоритмов ориентации и навигации [28–30], задача выработки оценок параметров имеет более общую постановку, чем в адаптивных системах управления. Предполагается, что оцениваемые величины удовлетворяют системе линейных рекуррентных уравнений с аддитивным шумом, а измерения линейны и также содержат аддитивные помехи. В таких отраслях вместо терминов «идентификация параметров» и «линейная параметрическая модель» употребляют, соответственно, термины «оценивание параметров (или состояния)» и «модель измерений (или наблюдения)». Говоря в данной работе об идентификации параметров, мы, тем самым, подчёркиваем детерминированную постановку задачи. Среди алгоритмов оценивания для упомянутых линейных систем следует отметить дискретный фильтр Калмана [29–32], как один из самых применяемых в практических задачах.

Решению задач оценивания параметров состояния линейных систем в дискретном времени с дополнительными ограничениями посвящено достаточно много работ зарубежных авторов, например [31; 33–43]. Отдельно следует упомянуть статью Д. Саймона [33]. В ней приводятся примеры прикладных задач, в которых возникает необходимость оценивания при наличии ограничений; проведён подробный обзор публикаций на указанную тему; а также приводится систематизированная сводка различных алгоритмов получения оценок параметров, удовлетворяющих линейным или нелинейным ограничениям в виде равенств или неравенств.

Перечислим некоторые методы, рассмотренные в работе [33]. Часть из них применяется для оценивания состояния дискретных линейных систем с линейными уравнениями связей. Это методы понижения размерности (редукции) фильтра Калмана, псевдоизмерений, «мягких» связей, проекции оценок и проекции матрицы усиления фильтра Калмана. Рассмотрим их подробнее.

Метод *понижения размерности* состоит в переходе к таким новым переменным, что часть из них тождественно обращается в ноль в силу уравнений связи, а остальные оцениваются [31]. Аналогичный метод используется в работе [34] для случая нелинейных уравнений ограничений. Указанный подход близок по сути к методу псевдоскоростей, используемому в неголономной механике.

Метод *псевдоизмерений* состоит в рассмотрении уравнений связей как дополнительных измерений, не содержащих погрешностей (см. также [35]). Обобщение метода на случай нелинейных моделей системы и наблюдений рассмотрен в работе [36]. Рассматриваемый метод может привести к вырождению или ухудшению обусловленности уравнения для матричного коэффициента фильтра Калмана, поскольку ковариационная матрица шумов расширенного вектора измерений будет особой.

В методе *«мягких» связей (soft constraints)* к дополнительным измерениям, задаваемым уравнениями связей, добавляются малые шумы. В отличие от предыдущего подхода, в этом случае ковариационная матрица шумов наблюдения будет неособой. В работе [37] такой продход применяется для учёта ограничений в алгоритме оценивания по критерию апостериорного максимума (*Maximum A-posteriori Probability, MAP*) с нормальным законом априорного распределения. В [37] метод «мягких» связей реализуется с помощью преобразования выражения для априорной функции распределения аддитивного шума измерений путём вычитания из её показателя взвешенной суммы «штрафов» — квадратичных отклонений значений функций ограничений от требуемых величин. Такая преобразованная функция априорной плотности является совместной для двух независимых векторов: вектора шумов измерений и вектора фиктивных шумов, добавляемых в уравнения связей. Дисперсии элементов последнего тем ниже, чем больше веса соответствующих «штрафов».

Метод *проекции оценок* реализуется путём проецирования вектора оценок, на поверхности, задаваемые уравнениями связей, после этапа обработки измерений фильтром Калмана (см. также [38]). В работе [39] приводится аналогичный алгоритм, в котором также проецируются и оценки, получаемые на этапе прогноза. Обобщения метода проекции оценок на нелинейный случай рассмотрены в работах [36; 38].

Метод *проекции коэффициента усиления* заключается в таком изменении процедура расчёта матричного коэффициента усиления фильтра Калмана, чтобы на этапе обработки измерений вырабатываемые оценки удовлетворяли связям (см. также [39]).

Также в статье Д. Саймона [33] приводятся обобщения метода проекций оценок для случая нелинейных связей. Проецирование оценок $\hat{x}^+$, выработанных фильтром Калмана на этапе обработки измерений производится на поверхности, задаваемые либо линеаризованными функциями связей, либо квадратичными частями их степенных рядов (см. также [38]). В качестве точки разложения в ряд используется либо вектор $\hat{x}^+$, либо вектор прогноза состояния. В работе [40] рассматривается задача оценивания для нелинейной системы с квадратичными уравнениями связей. На поверхность связей проецируются оценки, вырабатываемые расширенным фильтром Калмана (*extended Kalman filter, EKF*).

Использование перечисленных выше алгоритмов оценивания с проекцией с нелинейными связями не приводит к снижению размерности вектора оцениваемых параметров. Среди рассмотренных в этом обзоре публикаций, только в одной статье [34] предлагается методика, позволяющая учесть связи при решении задачи оценивания и снизить размерность последней. Для этих целей, как упоминалось выше при рассмотрении метода *понижения размерности* фильтра Калмана, вводятся новые переменные, часть которых тождественно обращается в ноль в силу связей. Такой подход позволяет свести решение задачи оценивания со связями к применению алгоритмов нелинейной фильтрации [30; 31].

Среди прочих методов решения задач оценивания с нелинейными ограничениями, приведённых в [33] отметим алгоритмы, основанные на применении сигма-точечного фильтра Калмана (*unscented Kalman filter, UKF*; см. также [41]), алгоритм внутренней точки в методе максимального правдоподобия для случая ограничений в виде неравенств, алгоритм фильтра частиц (*particle filter*).

Завершая обзор публикаций по теме оценивания со связями, рассмотрим работу [42]. Она посвящена задаче калмановской фильтрации с ограничением в виде равенства на квадрат евклидовой нормы оцениваемого вектора состояния. Полученный алгоритм применён для оценивания кватерниона ориентации, удовлетворяющего условию нормировки на единицу. Аналогичная задача в непрерывном времени с ограничением в виде равенства на квадрат взвешенной евклидовой нормы оцениваемого вектора состояния рассмотрена в работе [43]. Удовлетворение условия связи достигается с помощью преобразования матрицы усиления в алгоритме фильтра Калмана.

Анализ приведённых публикаций показывает что, задачам оценивания состояния стохастических систем со связями в дискретном времени уделено большее внимание авторов, чем к аналогичным задачам в детерминированной постановке в непрерывном времени, которые, в частности возникают при синтезе адаптивных систем управления.

С одной стороны задача адаптивной идентификации параметров детерминированных систем со связями имеет достаточно идеализированную постановку, но с другой стороны она является частным случаем задачи построения дифференциальных уравнений по совокупности их первых интегралов, поставленной и решённой Н. П. Еругиным в середине прошлого века [44].

Метод Еругина был использован А. С. Галиуллиным в работе [45] для построения уравнений динамики механической системы, реализующей заданную программу движения (программную связь) и обеспечивающих её асимптотическую устойчивость.

Среди работ, опубликованных в последние годы, по динамике систем с программными связями, выделим работы Р. Г. Мухарлямова и его соавторов [46–54]. В работах [46; 47] методы управления механическими системами, направленные на реализацию и стабилизацию программных связей, были применены в задачах управления экономическими системами, а в работах [48–51] — в задачах управления системами различной физической природы. Отдельно отметим статьи [49; 51; 52], в которых рассматриваются условия применимости различных конечно-разностных схем для численного решения уравнений динамики систем со стабилизированными программными связями; а также [48; 50], в которых работоспособность описываемых методов была продемонстрирована на примерах конкретных динамических систем.

Также среди отечественных учёных, систематически занимающихся задачами динамики систем с программными связями, отметим И. А. Мухаметзянова. Среди его публикаций есть работы, посвящённые вопросам оптимальной глобальной стабилизации связей [55], в том числе при действии на систему случайных возмущений [56; 57]; описывающие синтез адаптивных алгоритмов безударной стабилизации программных многообразий для систем с неопределённостями параметров и внешних воздействий [58]. Применение разработанных методов на примерах конкретных систем демонстрируется в [59; 60].

В перечисленных выше работах по динамике систем с программными связями основной задачей является реализация и стабилизация этих связей. Алгоритм идентификации параметров не может сводится лишь к удовлетворению ограничений на оценки в виде равенств, ведь его функционирование направлено прежде всего на выработку достаточно точных оценок параметров.

Тем не менее, описанное выше развитие метода Н. П. Еругина показывает, что задачи динамики систем различной природы с программными связями могут быть решены одними и теми же методами. Значит, для целей идентификации параметров с ограничениями в виде равенств также можно привлечь математический аппарат аналитической механики систем со связями.

Обзор приведённых выше источников демонстрирует, что наиболее распространённым способом учёта ограничений в виде равенств является видоизменение существующих алгоритмов идентификации и оценивания параметров. В настоящей главе для осуществления таких изменений воспользуемся методами аналитической механики: введением множителей связей в уравнения динамики, принципом наименьшего принуждения К. Гаусса, а также методом псевдоскоростей, позволяющим снизить размерность задачи.

1.1 Постановка задачи. Ограничения на оценки параметров

Рассмотрим задачу идентификации параметров динамического объекта с линейной параметрической моделью

$$\underset{l\times 1}{y(t)} = \underset{l\times s}{N^{\mathrm{T}}(t)}\,\underset{s\times 1}{\vartheta}\,, \tag{1.1}$$

где y — l-мерный выходной вектор параметрической модели; N — сигнальная или регрессионная матрица; $t \geqslant 0$ — непрерывное время; ϑ — s-мерный вектор неизвестных постоянных параметров, удовлетворяющих независимым уравнениям связей:

$$\underset{r\times 1}{\psi(\vartheta)} = 0, \quad \operatorname{rank} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta^{\mathrm{T}}} = r, \tag{1.2}$$

где ψ — r-мерная гладкая векторная функция связи, $\partial\psi/\partial\vartheta^{\mathrm{T}}$ — её матрица Якоби (см. приложение А). Предполагается, что число искомых параметров превосходит и число выходных переменных, и число связей вместе с количеством выходов параметрической модели: $s > l$, $s > l + r$.

Вектор выходных переменных параметрической модели y и сигнальная матрица N строятся на основании измерительных данных.

Ставится задача синтеза рекуррентной детерминированной процедуры идентификации параметров модели (1.1) в непрерывном времени с учётом параметрических связей (1.2).

Ограничения на оценки параметров. Потребуем, чтобы вектор оценок параметров $\hat{\vartheta}$ удовлетворял соотношению

$$\psi(\hat{\vartheta}) = 0. \tag{1.3}$$

В этом случае функция связи $\psi = \psi(\hat{\vartheta})$ является решением уравнения

$$\dot{\psi} = 0, \quad \psi(\hat{\vartheta})\big|_{t=0} = 0,$$

задающего условие связи в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}}\dot{\hat{\vartheta}} = 0, \quad \psi(\hat{\vartheta})\big|_{t=0} = 0. \tag{1.4}$$

Здесь использовались операции векторного дифференцирования, приведённые в приложении А.

Вектор производных от оценок параметров по времени, удовлетворяющий связи (1.4), имеет вид:

$$\underset{s\times 1}{\dot{\hat{\vartheta}}} = \underset{s\times(s-r)}{C(\hat{\vartheta})} \cdot \underset{(s-r)\times 1}{\dot{\pi}}. \tag{1.5}$$

где $\dot{\pi}$ — вспомогательный $(s-r)$-мерный вектор с независимыми элементами, а матрица C удовлетворяет условию:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}} \cdot C(\hat{\vartheta}) = \underset{r\times(s-r)}{0}.$$

Действительно, подставив выражение (1.5) в уравнение связи в дифференциальной форме (1.4), имеем:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}}\dot{\hat{\vartheta}} = \underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}}C(\hat{\vartheta})}_{0}\dot{\pi} = 0.$$

Вектор $\dot{\pi}$ будем называть вектором псевдоскоростей, как это принято в неголономной механике [61; 62]. Вычислив определенным образом вектор псевдоскоростей $\dot{\pi}$, можно найти и оценки параметров модели (1.1), интегрируя уравнение (1.5).

Приведём два способа построения вектора $\dot{\pi}$ и матрицы $C(\hat{\vartheta})$.

Способ 1 [62]. Дополним уравнения связей в дифференциальной форме (1.4) следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{s\times 1}{\dot{\hat{\vartheta}}} = \underset{r\times 1}{0}, \\ D_{\pi}^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta}) \cdot \underset{s\times 1}{\dot{\hat{\vartheta}}} = \underset{(s-r)\times 1}{\dot{\hat{\pi}}}; \end{cases} \tag{1.6}$$

здесь матрица $D_{\pi}^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})$ подбирается из условия существования и единственности решения системы уравнений (1.6), линейных относительно $\dot{\hat{\vartheta}}$.

Для нахождения $C(\hat{\vartheta})$, достаточно представить обратную матрицу системы (1.6) следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \partial\psi/\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}} \\ D_{\pi}^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta}) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \underset{s\times r}{B(\hat{\vartheta})} & \underset{s\times(s-r)}{C(\hat{\vartheta})} \end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

Действительно, выразив решение системы (1.6) через обратную матрицу, получаем:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = \begin{bmatrix} \underset{s\times r}{B(\hat{\vartheta})} & \underset{s\times(s-r)}{C(\hat{\vartheta})} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underset{r\times 1}{0}, \\ \underset{(s-r)\times 1}{\dot{\hat{\pi}}} \end{bmatrix} = C(\hat{\vartheta})\dot{\hat{\pi}}.$$

Приведённый способ аналогичен построению вспомогательных переменных, в которых описывается динамика наблюдателя пониженного порядка для вектора состояния линейной системы (наблюдателя Люенбергера) [18].

Способ 2. Рассмотрим частный случай. Пусть вектор оцениваемых параметров ϑ зависит от $(s-r)$ независимых величин, составляющих вектор ϖ:

$$\vartheta = \Theta\left(\varpi\right).$$

В конкретном случае, уравнения связей (1.2) не являются явными, а в качестве псевдоскоростей можно выбрать производные по времени от оценок независимых параметров $\hat{\varpi}$:

$$\dot{\hat{\pi}} = \dot{\hat{\varpi}}.$$

Продифференцировав по времени зависимость $\hat{\vartheta} = \Theta(\hat{\pi})$, получаем:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = \frac{\mathrm{d}\Theta(\hat{\pi})}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\Theta}{\partial\hat{\pi}^{\mathrm{T}}}\dot{\hat{\pi}}.$$

С другой стороны, $\dot{\hat{\vartheta}} = C\dot{\hat{\pi}}$, что позволяет выбрать матрицу C следующего вида:

$$C = \frac{\partial\Theta}{\partial\hat{\pi}^{\mathrm{T}}}.$$

В рассматриваемом случае псевдоскорости интегрируемы — дифференциальное соотношение $\dot{\hat{\vartheta}} = C\dot{\hat{\pi}}$ можно переписать в конечной форме $\hat{\vartheta} = \Theta(\hat{\pi})$. Интегрируемость псевдоскоростей позволяет снизить размерность задачи идентификации параметров, сведя её решение к вычислению лишь оценок независимых параметров $\hat{\pi} = \hat{\varpi}$.

Приведём **пример** механической системы с линейной параметрической моделью (1.1) и дополнительными ограничениями на параметры вида (1.2). Рассмотрим движение тяжёлой точки A в вертикальной плоскости в подвесе, состоящем из стержня *2*, шарнирно соединённого с осью цилиндра *1*, катящегося по горизонтальной плоскости без отрыва и проскальзывания (см. рисунок 1.1). Тела приводятся в движение двигателем, расположенным в шарнире O и развивающим момент M. Движение системы описывается с помощью абсолютного угла поворота цилиндра φ_1 и угла отклонения стрежня от вертикали φ_2.

Описанная механическая система используется для исследования динамики и построения стабилизирующего управления транспортным средством *Segway* (см., например, [1; 7; 8]).

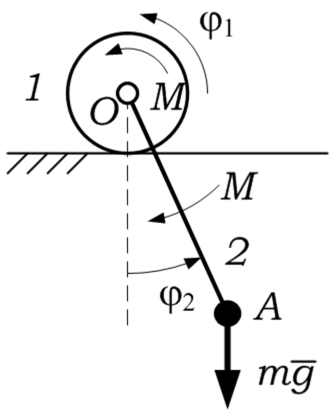


Рисунок 1.1 — Пример механической системы с ограничением на параметры в виде равенства

Масса точки m, радиус цилиндра h_1 и длина стрежня h_2 не известны. Считается, что массы цилиндра *1* и стержня *1* пренебрежимо малы. Измерению доступны обобщённые координаты φ_1, φ_2, скорости $\dot\varphi_1$, $\dot\varphi_2$ и ускорения $\ddot\varphi_1$, $\ddot\varphi_2$, а также момент M.

В качестве параметрической модели (1.1) рассматриваемой системы можно использовать её уравнения движения:

$$
\begin{aligned}
mh_1^2\ddot\varphi_1 - mh_1h_2\ddot\varphi_2\cos\varphi_2 + mh_1h_2\dot\varphi_2^2\sin\varphi_2 &= M,\\
-mh_1h_2\ddot\varphi_1\cos\varphi_2 + mh_2^2\ddot\varphi_2 + mgh_2\sin\varphi_2 &= -M,
\end{aligned}
$$

где g — ускорение свободного падения, величина которого известна.

Действительно, имеем:

$$
y = \begin{pmatrix} M \\ -M \end{pmatrix}, \quad N^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \ddot\varphi_1 & 0 & \dot\varphi_2^2\sin\varphi_2 - \ddot\varphi_2\cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & \ddot\varphi_2 & -\ddot\varphi_1\cos\varphi_2 & g\sin\varphi_2 \end{pmatrix},
$$

$$
\vartheta^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} mh_1^2 & mh_2^2 & mh_1h_2 & mh_2 \end{pmatrix}.
$$

Здесь элементы вектора параметров ϑ удовлетворяют скалярному уравнению связи:

$$
\psi(\vartheta) = \vartheta_1\vartheta_2 - \vartheta_3^2 = 0.
$$

Отметим, что элементы четырёх мерного вектора ϑ выражаются через три независимых параметра m, h_1 и h_2:

$$
\vartheta = \Theta(m, h_1, h_2).
$$

Следовательно, в рассматриваемом примере оценка коэффициентов параметрической модели выражается через оценки $\widehat{m}$, $\hat h_1$ и $\hat h_2$ как

$$
\hat\vartheta = \Theta(\widehat{m}, \hat h_1, \hat h_2) = \begin{pmatrix} \widehat{m}\hat h_1^2 & \widehat{m}\hat h_2^2 & \widehat{m}\hat h_1\hat h_2 & \widehat{m}\hat h_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},
$$

а построение вектора псевдоскоростей $\dot{\hat\pi}$ осуществляется тривиально:

$$
\dot{\hat\pi}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \dot{\widehat{m}} & \dot{\hat h}_1 & \dot{\hat h}_2 \end{pmatrix}.
$$

Зависимость производных по времени от оценок параметров от псевдоскоростей $\dot{\hat{\vartheta}} = C\dot{\hat{\pi}}$ задаётся матрицей

$$C = \frac{\partial\Theta(\widehat{m},\hat{h}_1,\hat{h}_2)}{\partial(\widehat{m}\ \ \hat{h}_1\ \hat{h}_2)^{\mathrm{T}}} = \begin{pmatrix} \hat{h}_1^2 & 2\widehat{m}\hat{h}_1 & 0 \\ \hat{h}_2^2 & 0 & 2\widehat{m}\hat{h}_2 \\ \hat{h}_1\hat{h}_2 & \widehat{m}\hat{h}_2 & \widehat{m}\hat{h}_2 \\ \hat{h}_2 & 0 & \widehat{m} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что, если измерения ускорений $\ddot{\varphi}_1$ и $\ddot{\varphi}_2$ недоступны, то построение параметрической модели рассматриваемой механической системы можно провести способами, изложенными в книге [21] и работе [63].

Замечание. В задаче идентификации параметров механических систем совершенно естественно возникают *односторонние* параметрические связи — ограничения на возможные значения параметров в виде неравенств. Примером таких ограничений являются необходимые и достаточные условия положительной определённости матрицы инерционных коэффициентов, выражающие положительность её главных диагональных миноров. Рассмотренная выше система вырождена: при $\sin\varphi_2 = 0$ определитель её инерционной матрицы обращается в ноль. Это условие и задаёт параметрическую связь в указанном примере.

Ещё один пример механической системы с параметрическими связями приведён в работе [15]. Это — двузвенный маятник Капицы, для которого дуступны только измерения угла в сочленении тел.

1.2 Градиентный алгоритм идентификации с неопределёнными множителями

Для идентификации параметров объекта (1.1) без учёта дополнительных ограничений на оценки (1.3) можно применить градиентный алгоритм [19–21], который определяется следующим уравнением:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = -M_g^{-1}\frac{\partial Q}{\partial\hat{\vartheta}}, \tag{1.8}$$

где M_g^{-1} — симметричная положительно определённая постоянная матрица коэффициентов усиления; Q — скалярная дважды непрерывно дифференцируемая положительно определённая целевая функция от вектора ошибки прогноза e:

$$e(t) = y(t) - N^{\mathrm{T}}(t)\hat{\vartheta}(t). \tag{1.9}$$

Целевую функцию $Q(e)$ будем выбирать так, чтобы в точке $e = 0$ матрица её частных производных второго порядка была положительно определена:

$$\frac{\partial^2 Q(0)}{\partial e^2} > 0.$$

1.2.1 Вывод уравнений идентификатора

Модифицируем градиентный алгоритм идентификации (1.8) так, чтобы получаемые оценки параметров удовлетворяли условиям связей (1.3).

Введём функцию Лагранжа:

$$Q_\Lambda(t) = Q\big(e(t)\big) + \psi^{\mathrm{T}}\big(\hat{\vartheta}(t)\big) \cdot \Lambda(t),$$

где Λ – r-мерный вектор множителей связей (1.3).

Для составления уравнений идентификатора параметров будем использовать градиент функции Лагранжа Q_Λ [64]:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = -M_g^{-1}\frac{\partial Q_\Lambda}{\partial \hat{\vartheta}} = -M_g^{-1}\left(\frac{\partial Q}{\partial \hat{\vartheta}} + \frac{\partial \psi^{\mathrm{T}}}{\partial \hat{\vartheta}} \cdot \Lambda\right). \tag{1.10}$$

Уравнения градиентного идентификатора (1.10) содержат неопределённые множители связей, которые подлежат исключению. Рассмотрим два способа выполнения этой процедуры.

Способ 1. Подставим в уравнения связей в дифференциальной форме (1.4) выражение для оценки параметров (1.10):

$$\frac{\partial\psi^{\mathrm{T}}}{\partial\hat{\vartheta}}\dot{\hat{\vartheta}} = -\frac{\partial\psi^{\mathrm{T}}}{\partial\hat{\vartheta}}M_g^{-1}\left(\frac{\partial Q}{\partial\hat{\vartheta}} + \frac{\partial\psi^{\mathrm{T}}}{\partial\hat{\vartheta}}\cdot\Lambda\right) = 0.$$

Разрешим последнее соотношение относительно множителей связей:

$$\Lambda = -\left[\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}}M_g^{-1}\frac{\partial\psi^{\mathrm{T}}}{\partial\hat{\vartheta}}\right]^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}}M_g^{-1}\frac{\partial Q}{\partial\hat{\vartheta}}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (1.10), получаем уравнения градиентного идентификатора со связями (1.3):

$$\dot{\hat{\vartheta}} = -M_g^{-1}\left(E - \frac{\partial\psi^{\mathrm{T}}}{\partial\hat{\vartheta}}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}}M_g^{-1}\frac{\partial\psi^{\mathrm{T}}}{\partial\hat{\vartheta}}\right]^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}}M_g^{-1}\right)\frac{\partial Q}{\partial\hat{\vartheta}}, \tag{1.11}$$

где E — единичная матрица подходящего размера.

Отметим, что в случае скалярного условия связи полученные соотношения (1.11) совпадают с уравнениями градиентного идентификатора с проекцией, приведёнными в [20]. Выражение «градиентный идентификатор с проекцией» для обозначения уравнений (1.11) будем употреблять и далее.

Способ 2. Исключим множители связей методом Маджи [62]. Умножим обе части (1.10) на $C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})M_g$:

$$C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})M_g\dot{\hat{\vartheta}} = -C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})\frac{\partial Q}{\partial\hat{\vartheta}} - \underbrace{C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})\frac{\partial\psi^{\mathrm{T}}}{\partial\hat{\vartheta}}}_{0}\Lambda. \tag{1.12}$$

В соотношении (1.12) слагаемые с неопределёнными множителями взаимно уничтожаются так как матрица C является правым делителем нуля для матрицы Якоби функции связи $\psi(\hat{\vartheta})$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}}C(\hat{\vartheta}) = 0.$$

Выразим производные от оценок в формуле (1.12) через псевдоскорости в соответствии с (1.5), получаем:

$$C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})M_g C(\hat{\vartheta})\dot{\hat{\pi}} = -C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})\frac{\partial Q}{\partial\hat{\vartheta}}.$$

Разрешив последнее уравнение относительно вектора $\dot{\hat{\pi}}$, идентификатора параметров в псевдоскоростях:

$$\dot{\hat{\pi}} = -\left[C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})M_g C(\hat{\vartheta})\right]^{-1} C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})\frac{\partial Q}{\partial\hat{\vartheta}}. \tag{1.13}$$

Перейдём к исходным переменным $\dot{\hat{\vartheta}} = C\dot{\hat{\pi}}$:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = -C(\hat{\vartheta})\left[C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})M_g C(\hat{\vartheta})\right]^{-1} C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})\frac{\partial Q}{\partial\hat{\vartheta}}. \tag{1.14}$$

Соотношение (1.14) определяет градиентный идентификатор параметров с проекцией, удовлетворяющий связи (1.3).

1.2.2 Случай интегрируемых псевдоскоростей

Рассмотрим случай интегрируемых псевдоскоростей:

$$\hat{\vartheta} = \Theta(\hat{\pi}).$$

Выразим вектор ошибки прогноза (1.9) через оценки независимых величин $\hat{\pi}$:

$$e = y - N^{\mathrm{T}}\Theta(\hat{\pi}).$$

Так как в случае интегрируемых псевдоскоростей

$$C = \frac{\partial\Theta}{\partial\hat{\pi}^{\mathrm{T}}},$$

то произведение матрицы C^{T} на градиент целевой функции будет равен:

$$C^{\mathrm{T}}\frac{\partial Q}{\partial\hat{\vartheta}} = C^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial\hat{\vartheta}}Q\big(e(\hat{\vartheta})\big) = C^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial\Theta}Q\Big(e\big(\Theta(\hat{\pi})\big)\Big) =$$
$$= C^{\mathrm{T}}\frac{\partial e^{\mathrm{T}}}{\partial\Theta}\frac{\partial Q}{\partial e} = \frac{\partial\Theta^{\mathrm{T}}}{\partial\hat{\pi}}\frac{\partial e^{\mathrm{T}}}{\partial\Theta}\frac{\partial Q}{\partial e} = \frac{\partial Q}{\partial\hat{\pi}}.$$

Последнее соотношение было получено с помощью применения правил вычисления производных сложных векторных функций, приведённых в приложении А.

Таким образом, градиентный алгоритм идентификации с проекцией (1.13) в интегрируемых псевдоскоростях принимает вид:

$$\dot{\hat{\pi}} = -\left[C^{\mathrm{T}}(\Theta(\hat{\pi}))M_g\,C(\Theta(\hat{\pi}))\right]^{-1}\frac{\partial Q}{\partial\hat{\pi}}. \tag{1.15}$$

Полученное уравнение идентификатора параметров (1.15) замкнуто относительно вектора $\hat{\pi}$. Это позволяет снизить размерность задачи идентификации, поскольку для нахождения оценок параметров необходимо решить дифференциальное уравнение (1.15), имеющее меньшую размерность, чем уравнение (1.14).

1.2.3 Исследование сходимости оценок в линейном приближении

Рассмотрим случай малых отклонений оценок $\hat{\vartheta}$ от действительных значений параметров ϑ. Введём вектор ошибок оценки параметров:

$$\tilde{\vartheta} = \vartheta - \hat{\vartheta},$$

тогда вектор ошибок прогноза (1.9) примет вид:

$$e = y - N^{\mathrm{T}}\hat{\vartheta} = N^{\mathrm{T}}\vartheta - N^{\mathrm{T}}\hat{\vartheta} = N^{\mathrm{T}}\tilde{\vartheta}.$$

Проведём исследование сходимости градиентного алгоритма идентификации с проекцией в линейном приближении.

В малой окрестности точки $\hat{\vartheta} = \vartheta$ соотношение (1.5), связывающее производную вектора оценок параметров по времени с псевдоскоростями имеет вид:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C_* \dot{\hat{\pi}},$$

где $C_* = C(\vartheta)$. Таким образом, псевдоскорости интегрируемы.

Введём следующие замены переменных:

$$\tilde{\vartheta} = C_* \tilde{\pi}, \quad \dot{\tilde{\vartheta}} = -\dot{\hat{\vartheta}} = -C_* \dot{\hat{\pi}}, \quad \dot{\tilde{\pi}} = -\dot{\hat{\pi}}, \tag{1.16}$$

В новых обозначениях вектор ошибок прогноза вычисляется по формуле:

$$e = N^{\mathrm{T}} C_* \tilde{\pi}. \tag{1.17}$$

Пренебрегая членами порядка малости выше второго, представим целевую функцию в виде квадратичной формы:

$$Q = \frac{1}{2} e^{\mathrm{T}} R_* e, \quad R_* = R_*^{\mathrm{T}} > 0,$$

где R_* — постоянная матрица.

Вычислим градиент целевой функции Q, в соответствии с правилами дифференцирования квадратичных форм, приведёнными в приложении А:

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{\vartheta}} = \frac{\partial e^{\mathrm{T}}}{\partial \hat{\vartheta}} R_* e = -\frac{\partial \hat{\vartheta}^{\mathrm{T}} N}{\partial \hat{\vartheta}} R_* e = -N R_* e. \tag{1.18}$$

С учётом соотношений (1.16), (1.17) и (1.18), проведём линеаризацию уравнения градиентного идентификатора (1.13)

$$\dot{\hat{\pi}} = -\left[C^{\mathrm{T}} M_g C\right]^{-1} C^{\mathrm{T}} \frac{\partial Q}{\partial \hat{\vartheta}}.$$

в окрестности точки $\hat{\vartheta} = \vartheta$. Получаем:

$$\dot{\tilde{\pi}} = -\left[C_*^{\mathrm{T}} M_g C_*\right]^{-1} C_*^{\mathrm{T}} N R_* N^{\mathrm{T}} C_* \tilde{\pi}. \tag{1.19}$$

Положительная определённость матрицы $C_*^{\mathrm{T}} M_g C_*$ позволяет ввести невырожденную замену переменных:

$$\xi = S_*^{-1}\tilde{\pi}_*, \quad S_* = S_*^{\mathrm{T}} > 0,$$

где матрица S_* определяется соотношением $\left[C_*^{\mathrm{T}} M_g C_*\right]^{-1} = S_* \cdot S_*$.

В новых переменных уравнение ошибки (1.19) принимает вид:

$$\dot{\xi} = -S_* C_*^{\mathrm{T}} N R_* N^{\mathrm{T}} C_* S_* \cdot \xi. \tag{1.20}$$

В соответствии с [65], для того, чтобы тривиальное решение (1.20) было экспоненциально устойчивым необходимо и достаточно, чтобы для некоторых положительных чисел α_1, α_2 и t_* в любой момент времени t выполнялось условие:

$$\alpha_1 E \leqslant S_* C_*^{\mathrm{T}} \int\limits_t^{t+t_*} N(\tau) R_* N^{\mathrm{T}}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \cdot C_* S_* \leqslant \alpha_2 E.$$

Учитывая положительную определённость матрицы S_*, условие устойчивости можно записать в виде:

$$\exists \alpha_3 > 0,\, \alpha_4 > 0,\; t_* > 0: \quad \alpha_3 E \leqslant C_*^{\mathrm{T}} \int\limits_t^{t+t_*} N(\tau) R_* N^{\mathrm{T}}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \cdot C_* \leqslant \alpha_4 E. \tag{1.21}$$

Так как $\tilde{\vartheta} = C_* \tilde{\pi}$, то условие (1.21) необходимо и достаточно для экспоненциального затухания малой ошибки оценки параметров $\tilde{\vartheta}$, полученной градиентным идентификатором с проекцией (1.14).

Критерий (1.21) может выполняться и в том случае, когда нарушено необходимое и достаточное условие сходимости градиентного идентификатора, не реализующего параметрические связи. Оно имеет вид [65]:

$$\exists \beta_1 > 0,\, \beta_2 > 0,\; t_* > 0: \quad \beta_1 E \leqslant \int\limits_t^{t+t_*} N(\tau) R_* N^{\mathrm{T}}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \leqslant \beta_2 E.$$

1.3 Принцип наименьшего принуждения в задаче идентификации параметров со связями

Для решения задачи идентификации параметров модели (1.1) без использования неопределённых множителей Лагранжа, применим принцип наименьшего принуждения Гаусса [61; 66–68].

Пусть уравнение идентификатора параметров модели (1.1), полученное без учёта связей (1.3), имеет вид:

$$M_f\dot{\hat{\vartheta}} = f\big(\hat{\vartheta},y\big), \quad M_f = M_f^{\mathrm{T}} > 0. \tag{1.22}$$

Изменив уравнения (1.22), можно «принудить» вектор оценок $\hat{\vartheta}$ удовлетворять связи $\psi(\hat{\vartheta}) = 0$. В качестве количественной величины такого «принуждения» будем использовать значения следующей функции:

$$\mathcal{Z}\big[M_f,f\big] = \frac{1}{2}\left(\dot{\hat{\vartheta}} - M_f^{-1}f\big(\hat{\vartheta},y\big)\right)^{\mathrm{T}} \cdot M_f \cdot \left(\dot{\hat{\vartheta}} - M_f^{-1}f\big(\hat{\vartheta},y\big)\right), \tag{1.23}$$

которую будем называть мерой принуждения.

Уравнения идентификатора параметров с учётом связей (1.3) получим из условия минимума принуждения по независимым линейным комбинациям компонент вектора $\dot{\hat{\vartheta}}$:

$$\mathcal{Z}\big[M_f,f\big] \to \min_{\dot{\pi}}, \tag{1.24}$$

то есть из условия

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \dot{\pi}} = 0. \tag{1.25}$$

Продифференцируем меру принуждения $\mathcal{Z}$, учитывая, что $\dot{\hat{\vartheta}} = C\dot{\pi}$:

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \dot{\pi}} = \frac{\partial \dot{\hat{\vartheta}}^{\mathrm{T}}}{\partial \dot{\pi}} \cdot M_f\left(C(\hat{\vartheta})\dot{\pi} - M_f^{-1}f\big(\hat{\vartheta},y\big)\right) = C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})M_f\left(C(\hat{\vartheta})\dot{\pi} - M_f^{-1}f\big(\hat{\vartheta},y\big)\right).$$

Таким образом, условие минимума принуждения (1.25) принимает вид:

$$C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})M_fC(\hat{\vartheta})\dot{\hat{\pi}} - C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})f\big(\hat{\vartheta},y\big) = 0.$$

Таким образом, уравнение идентификатора в псевдоскоростях имеет вид:

$$\dot{\hat{\pi}} = \Big[C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})M_fC(\hat{\vartheta})\Big]^{-1}C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})\cdot f\big(\hat{\vartheta},y\big). \tag{1.26}$$

Применив (1.5), получаем уравнения идентификатора в исходных переменных:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C(\hat{\vartheta})\Big[C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})M_fC(\hat{\vartheta})\Big]^{-1}C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})\cdot f\big(\hat{\vartheta},y\big). \tag{1.27}$$

Соотношение (1.27) позволяет сконструировать идентификатор параметров модели (1.1) со связями (1.3), взяв за основу уравнения (1.22). В соответствии с терминологией, принятой в книгах [19; 20] назовём (1.27) алгоритмом идентификации (1.22) с проекцией.

В частном случае при

$$M_f = M_g, \quad f\big(\hat{\vartheta},y\big) = -\frac{\partial Q}{\partial\hat{\vartheta}}$$

соотношения (1.26) и (1.27) полностью совпадают с уравнениями градиентного идентификатора с проекцией в формах (1.13) и (1.14) соответственно. Здесь использование принципа наименьшего принуждения позволяет решить задачу идентификации со связями, не вводя функцию Лагранжа и неопределённые множители.

Исследуем некоторые свойства класса идентификаторов параметров с проекцией (1.27).

Уравнение (1.27) инвариантно относительно любой невырожденной линейной замены псевдоскоростей

$$\dot{\hat{\pi}} = D(\hat{\vartheta})\dot{\hat{\varpi}},$$

где $\dot{\hat{\varpi}}$ — новый вектор псевдоскоростей. Соотношение (1.5) в новых переменных приобретает вид:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C(\hat{\vartheta})\dot{\hat{\pi}} = C(\hat{\vartheta})D(\hat{\vartheta})\dot{\hat{\varpi}} = C_{\varpi}(\hat{\vartheta})\dot{\hat{\varpi}}, \quad C_{\varpi} = CD.$$

Использовав новые псевдоскорости $\dot{\hat{\varpi}}$, с помощью принципа наименьшего принуждения получаются уравнения идентификатора параметров в форме:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C_{\varpi}(\hat{\vartheta}) \left[C_{\varpi}^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})M_f C_{\varpi}(\hat{\vartheta})\right]^{-1} C_{\varpi}^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta}) \cdot f\big(\hat{\vartheta},y\big). \tag{1.28}$$

Продемонстрируем, что эти уравнения полностью совпадают с (1.27). Действительно, так как $C_{\varpi} = CD$, то

$$\begin{gathered} C_{\varpi}\left[C_{\varpi}^{\mathrm{T}} M_f C_{\varpi}\right]^{-1} C_{\varpi}^{\mathrm{T}} = CD\left[D^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} M_f CD\right]^{-1} D^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} = \\ = CDD^{-1}\left[C^{\mathrm{T}} M_f C\right]^{-1}\left(D^{\mathrm{T}}\right)^{-1} D^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} = C\left[C^{\mathrm{T}} M_f C\right]^{-1} C^{\mathrm{T}}. \end{gathered}$$

Таким образом, правые части уравнений (1.27) и (1.28) тождественны. Указанное свойство означает, что оценки, получаемые идентификатором (1.27), не зависят от способа задания псевдоскоростей.

Использование меры принуждения (1.23) требует невырожденности матрицы M_f, но для конструирования идентификатора (1.27) это условие является слишком жёстким: достаточно, чтобы невырожденной была матрица $C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})M_f C(\hat{\vartheta})$.

Для того, чтобы принцип наименьшего принуждения можно было использовать и для идентификаторов вида

$$M_f \dot{\hat{\vartheta}} = f\big(\hat{\vartheta},y\big), \quad M_f = M_f^{\mathrm{T}} \geqslant 0 \tag{1.29}$$

сформулируем его в дифференциальной форме. Потребуем, чтобы:

$$\delta\mathcal{Z}\big[M_f,f\big] = \delta\dot{\hat{\vartheta}}^{\mathrm{T}} \cdot \Big(M_f \dot{\hat{\vartheta}} - f\big(\hat{\vartheta},y\big)\Big) = 0. \tag{1.30}$$

Здесь варьирование меры принуждения производится только по $\dot{\hat{\vartheta}}$ при фиксированном $\hat{\vartheta}$. Так как при наличии связей (1.4) $\delta\dot{\hat{\vartheta}} = C(\hat{\vartheta})\delta\dot{\hat{\pi}}$, а элементы вектора $\delta\dot{\hat{\pi}}$ независимы, то для выполнения условия (1.30) необходимо и достаточно, чтобы:

$$C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})\left(M_f\dot{\hat{\vartheta}} - f\big(\hat{\vartheta},y\big)\right) = 0. \tag{1.31}$$

Использование соотношения (1.31) также позволяет получить уравнения идентификатора параметров со связями в формах (1.26) и (1.27).

Замечание. Уравнения идентификатора параметров, удовлетворяющего условию (1.31), можно получить введением вектора множителей связей Λ в уравнения (1.29):

$$M_f\dot{\hat{\vartheta}} = f\big(\hat{\vartheta},y\big) + \frac{\partial\psi^{\mathrm{T}}}{\partial\hat{\vartheta}}\Lambda.$$

Действительно, равенство (1.31) будет тождественным из-за ортогональности градиентов элементов вектора $\psi(\hat{\vartheta})$ соответствующим столбцам матрицы $C(\hat{\vartheta})$:

$$C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})\left(M_f\dot{\hat{\vartheta}} - f\big(\hat{\vartheta},y\big)\right) = \underbrace{C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})\frac{\partial\psi^{\mathrm{T}}}{\partial\hat{\vartheta}}}_{0}\Lambda = 0.$$

При $M_f > 0$, удовлетворив условие связи в дифференциальной форме (1.4), получаем следующее выражение для вектора множителей связей:

$$\Lambda = -\left[\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}}M_f^{-1}\frac{\partial\psi^{\mathrm{T}}}{\partial\hat{\vartheta}}\right]^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}}M_f^{-1}f\big(\hat{\vartheta},y\big).$$

1.4 Идентификация параметров по методу наименьших квадратов с проекцией

Применим принцип наименьшего принуждения для получения ещё одного алгоритма идентификации параметров модели (1.1) с параметрическими связями (1.3) или (1.4).

Пусть оценка параметров без учёта связей производится из условия минимизации функционала

$$J\big[\hat{\vartheta}(t)\big] = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \Big\|y(\tau) - N^{\mathrm{T}}(\tau)\hat{\vartheta}(t)\Big\|_2^2 \, \mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\big(\hat{\vartheta}(t) - \vartheta_0\big)^{\mathrm{T}} M_0 \left(\hat{\vartheta}(t) - \vartheta_0\right), \quad (1.32)$$

где $M_0 = M_0^{\mathrm{T}} > 0$ — постоянная матрица, ϑ_0 — постоянный вектор.

В рассматриваемом случае оптимальная оценка удовлетворяет уравнениям, приведённым в книге [20]:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = M^{-1}Ne, \quad \hat{\vartheta}(0) = \vartheta_0, \quad (1.33)$$

$$\dot{M} = NN^{\mathrm{T}}, \quad M(0) = M_0, \quad (1.34)$$

которые являются частным случаем идентификатора (1.22) при $M_f = M$ и $f = Ne$.

Применив принцип наименьшего принуждения (1.24) для идентификатора (1.33)–(1.34), получаем следующие соотношения для псевлоскоростей оценок параметров:

$$\dot{\hat{\pi}} = \left[C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})MC(\hat{\vartheta})\right]^{-1} C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})Ne, \quad (1.35)$$

где $e = y - N^{\mathrm{T}}\hat{\vartheta}$ — ошибка прогноза.

Полная система уравнений, описывающая идентификатор параметров в исходных переменных $\dot{\hat{\vartheta}} = C\dot{\hat{\pi}}$ имеет вид:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C(\hat{\vartheta}) \left[C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})MC(\hat{\vartheta})\right]^{-1} C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})Ne, \quad \hat{\vartheta}(0) = \vartheta_0, \quad (1.36)$$

$$\dot{M} = NN^{\mathrm{T}}, \quad M(0) = M_0. \quad (1.37)$$

Уравнения (1.36) и (1.37) описывают идентификатор параметров по методу наименьших квадратов с проекцией. Постоянный вектор ϑ_0 в выражении квадратичного функционала J, являющийся начальным значение для вектора оценок параметров, должен удовлетворять уравнению связи $\psi(\vartheta_0) = 0$. Отметим, что оптимальность оценки, определяемой (1.36), с точки зрения величины функционала (1.32) требует обоснования.

Исследуем сходимость оценок, получаемых идентификатором по методу наименьших квадратов с проекцией, в линейном приближении. При малых отклонениях оценок от истинных значений параметров

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C_*\dot{\tilde{\pi}}, \quad C_* = C(\vartheta).$$

Представим вектор ошибок оценки $\tilde{\vartheta}$ следующим образом:

$$\tilde{\vartheta} = C_*\tilde{\pi}.$$

Вектор ошибки прогноза принимает вид:

$$e = y - N^{\mathrm{T}}\hat{\vartheta} = N^{\mathrm{T}}\vartheta - N^{\mathrm{T}}\hat{\vartheta} = N^{\mathrm{T}}(\vartheta - \hat{\vartheta}) = N^{\mathrm{T}}\tilde{\vartheta} = N^{\mathrm{T}}C_*\tilde{\pi}.$$

С учётом перечисленных соотношений соотношений, линеаризованные в окрестности точки $\hat{\vartheta} = \vartheta$ уравнения оптимального идентификатора с проекцией в псевдоскоростях (1.35), (1.37) приобретают следующий вид:

$$\dot{\tilde{\pi}} = -\left[C_*^{\mathrm{T}}MC_*\right]^{-1}C_*^{\mathrm{T}}NN^{\mathrm{T}}C_*\tilde{\pi}, \quad \dot{M} = NN^{\mathrm{T}}. \tag{1.38}$$

Покажем, что эти два уравнения эквивалентны одному:

$$C_*^{\mathrm{T}}MC_*\dot{\tilde{\pi}} = -C_*^{\mathrm{T}}\dot{M}C_*\tilde{\pi},$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C_*^{\mathrm{T}}MC_*\tilde{\pi}\right) = 0.$$

Из последнего соотношения следует, что решение уравнения ошибки (1.38) имеет вид:

$$\tilde{\pi}(t) = \left[C_*^{\mathrm{T}}M(t)C_*\right]^{-1}C_*^{\mathrm{T}}M(0)C_*\tilde{\pi}(0). \tag{1.39}$$

Для затухания ошибки (1.39) достаточно, чтобы все собственные значения матрицы $C_*^{\mathrm{T}}M(t)C_*$ стремились к бесконечности при неограниченном увеличении времени t. Так как $\tilde{\vartheta} = C_*\tilde{\pi}$, то приведённое условие является достаточным и для затухания малой ошибки оценки параметров $\tilde{\vartheta}$, полученной идентификатором по методу наименьших квадратов с проекцией (1.36).

В работе [21] приводится достаточное условие сходимости оценки, полученной оптимальным идентификатором, не реализующим параметрические связи. Оно состоит в том, что все собственные значения матрицы $M(t)$ должны неограниченно нарастать при $t \to \infty$. Если такое условие не выполняется, то учёт параметрических связей может способствовать получению асимптотически точных оценок параметров.

1.5 Алгоритмы идентификации со стабилизированным условием связи

Если начальные оценки параметров модели (1.1) не удовлетворяют уравнению $\psi(\hat{\vartheta}(0)) = 0$, то учет параметрических связей в дифференциальной форме (1.4) в алгоритме идентификации сделает невозможным получение точных оценок. В рассматриваемом случае необходима стабилизация условия связи, возмущенного в начальный момент времени.

Потребуем, чтобы функция связи $\psi = \psi(\hat{\vartheta})$ удовлетворяла дифференциальному уравнению

$$\underset{r\times 1}{\dot{\psi}} = \underset{r\times 1}{F(\psi)},$$

имеющему тривиальное решение, асимптотически устойчивое по Ляпунову. Указанное уравнение задаёт неголономную параметрическую связь

$$\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}}\dot{\hat{\vartheta}} = F\big(\psi(\hat{\vartheta})\big). \tag{1.40}$$

Вектор производных по времени от оценок параметров, удовлетворяющий стабилизированному условию связи (1.40), выражается через независимые псевдоскорсти следующим образом:

$$\underset{s\times 1}{\dot{\hat{\vartheta}}} = \underset{s\times(s-r)}{C(\hat{\vartheta})} \cdot \underset{(s-r)\times 1}{\dot{\pi}} + \underset{s\times r}{B(\hat{\vartheta})} \cdot \underset{r\times 1}{F\big(\psi(\hat{\vartheta})\big)}\,. \tag{1.41}$$

где матрицы C и B выбираются из условия

$$\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}}C(\hat{\vartheta}) = \underset{r\times(s-r)}{0}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}}B(\hat{\vartheta}) = \underset{r\times r}{E},$$

где E — единичная матрица. Действительно, подставив выражение (1.41) в левую часть уравнения связи (1.40), получаем:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}}\dot{\hat{\vartheta}} = \underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}}C(\hat{\vartheta})}_{0}\,\dot{\hat{\pi}} + \underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}}B(\hat{\vartheta})}_{E}\,F\big(\psi(\hat{\vartheta})\big) = F\big(\psi(\hat{\vartheta})\big).$$

В случае стабилизированного условия связи (1.40) определим вектор псевдоскоростей $\dot{\hat{\pi}}$ следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{s\times 1}{\dot{\hat{\vartheta}}} = \underset{r\times 1}{F}\big(\psi(\hat{\vartheta})\big), \\ D_{\pi}^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta}) \cdot \underset{s\times 1}{\dot{\hat{\vartheta}}} = \underset{(s-r)\times 1}{\dot{\hat{\pi}}}. \end{cases} \tag{1.42}$$

Найти матрицы C и B можно по формуле (1.7).

Построим идентификатор параметров объекта (1.1) на основе уравнений (1.29), используя принцип наименьшего принуждения в дифференциальной форме. Так как варьирование меры принуждения $\mathcal{Z}$ происходит при фиксированнном векторе оценок параметров $\hat{\vartheta}$, то, в силу (1.41), вариация вектора $\dot{\hat{\vartheta}}$ имеет вид:

$$\delta\dot{\hat{\vartheta}} = C(\hat{\vartheta})\delta\dot{\hat{\pi}}.$$

Таким образом, для равенства нулю вариации меры принуждения $\delta\mathcal{Z}$, определяемой соотношением (1.30), необходимо и достаточно, чтобы

$$C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})\left(M_f\dot{\hat{\vartheta}} - f\big(\hat{\vartheta},y\big)\right) = 0. \tag{1.43}$$

Выразим вектор псевдоскоростей $\dot{\hat{\pi}}$ из уравнения (1.43), произведя замену переменных (1.41):

$$C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})\left(M_f C(\hat{\vartheta})\dot{\hat{\pi}} + M_f B(\hat{\vartheta})F\big(\psi(\hat{\vartheta})\big) - f\big(\hat{\vartheta},y\big)\right) = 0,$$

откуда:

$$\dot{\hat{\pi}} = \left[C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})M_f C(\hat{\vartheta})\right]^{-1} C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta}) \cdot \left[f\big(\hat{\vartheta},y\big) - M_f B(\hat{\vartheta})F\big(\psi(\hat{\vartheta})\big)\right]. \tag{1.44}$$

Соотношения (1.44) задают уравнения идентификатора параметров в псевдоскоростях со стабилизированным условием связи (1.40). Вновь используя (1.41), запишем уравнения этого идентификатора в исходных переменных:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C\left[C^{\mathrm{T}} M_f C\right]^{-1} C^{\mathrm{T}} \cdot f + \left[E - C\left[C^{\mathrm{T}} M_f C\right]^{-1} C^{\mathrm{T}} M_f\right] \cdot BF(\psi). \qquad (1.45)$$

Отметим, что уравнения (1.45) инвариантны относительно линейной замены псевдоскоростей. Это следует из рассмотренного ранее свойства матрицы $C\left[C^{\mathrm{T}} M_f C\right]^{-1} C^{\mathrm{T}}$.

Рассмотрим некоторые частные случаи. При $M_f = M_g$ и $f = -\partial Q/\partial\hat{\vartheta}$ из соотношений (1.44) и (1.45) можно получить уравнения градиентного идентификатора с проекцией, реализующего стабилизированное условие связи (1.40):

$$\dot{\hat{\pi}} = -\left[C^{\mathrm{T}} M_g C\right]^{-1} C^{\mathrm{T}} \cdot \left[\frac{\partial Q}{\partial\hat{\vartheta}} + M_g BF(\psi)\right], \qquad (1.46)$$

$$\dot{\hat{\vartheta}} = -C\left[C^{\mathrm{T}} M_g C\right]^{-1} C^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial\hat{\vartheta}} + \left[E - C\left[C^{\mathrm{T}} M_g C\right]^{-1} C^{\mathrm{T}} M_g\right] \cdot BF(\psi). \qquad (1.47)$$

Аналогично, при $M_f = M$ и $f = Ne$ можно получить уравнения оптимального идентификатора с проекцией, реализующего стабилизированное условие связи (1.40):

$$\dot{\hat{\pi}} = \left[C^{\mathrm{T}} M C\right]^{-1} C^{\mathrm{T}} \cdot \left[Ne - MBF(\psi)\right], \qquad (1.48)$$

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C\left[C^{\mathrm{T}} M C\right]^{-1} C^{\mathrm{T}} \cdot Ne + \left[E - C\left[C^{\mathrm{T}} M C\right]^{-1} C^{\mathrm{T}} M\right] \cdot BF(\psi), \qquad (1.49)$$

$$\dot{M} = NN^{\mathrm{T}}, \quad M(0) = M_0 = M_0^{\mathrm{T}} > 0. \qquad (1.50)$$

Замечание 1. Уравнения идентификатора параметров, удовлетворяющего условию (1.43), можно получить введением вектора множителей связей Λ в уравнения (1.29):

$$M_f\dot{\hat{\vartheta}} = f\left(\hat{\vartheta}, y\right) + \frac{\partial\psi^{\mathrm{T}}}{\partial\hat{\vartheta}}\Lambda. \qquad (1.51)$$

При $M_f > 0$, удовлетворив стабилизированное условие связи в дифференциальной форме (1.40), получаем следующее выражение для вектора множителей связей:

$$\Lambda = \left[\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}} M_f^{-1} \frac{\partial\psi^{\mathrm{T}}}{\partial\hat{\vartheta}}\right]^{-1} \left\{F(\psi) - \frac{\partial\psi}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}} M_f^{-1} f\left(\hat{\vartheta}, y\right)\right\}.$$

Замечание 2. В задачах идентификации с интегрируемыми псевдоскоростями стабилизация функции связи не требуется — вычисление вектора оценок параметров по формуле $\hat{\vartheta} = \Theta(\hat{\pi})$ означает точное удовлетворение неявно заданных условий связей.

1.6 Взаимосвязь задач идентификации параметров со связями и стабилизации нелинейных аффинных управляемых систем

Рассмотрим задачу управления нелинейным аффинным объектом

$$\dot{x} = f(x) + D(x)u, \tag{1.52}$$

где x — n-мерный вектор состояния; u — m-мерный вектор управляющих воздействий, причём $n > m$; $f(x)$ — гладкая n-мерная векторная функция; $D(x)$ — матрица-дозатор, являющаяся гладкой функцией вектора состояния. Цель управления состоит в стабилизации требуемого стационарного состояния

$$x = x^* = \mathrm{const}.$$

Приведём одну методику построения нелинейного закона управления для решения поставленной задачи.

Уравнения состояния объекта (1.52) имеют ту же структуру, что и уравнения идентификатора параметров с множителями связей (см., например (1.51)). Опираясь на это, отождествим вектор управляющих воздействий u с вектором множителей неголономной связи вида

$$D^{\mathrm{T}}(x)\dot{x} = g(x), \tag{1.53}$$

где $g(x)$ — неизвестная гладкая функция, такая, что $g(x^*) = 0$.

Используя такую интерпретацию, выразим вектор управления u. Подставив уравнение динамики объекта (1.52) в уравнение связи (1.53), получаем:

$$u(x) = \big[D^{\mathrm{T}}(x)D(x)\big]^{-1}\big\{g(x) - D^{\mathrm{T}}(x)f(x)\big\}. \tag{1.54}$$

Поставленная задача управления, таким образом, сводится к нахождению функции $g(x)$ из условия асимптотической устойчивости решения $x = x^*$ системы (1.52), (1.54).

Отметим, что интерпретация управляющих воздействий как множителей связи (1.53) позволяет получить уравнения состояния объекта (1.52) из условия минимума функции принуждения

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{2}\big(\dot{x} - f(x)\big)^{\mathrm{T}} \cdot \big(\dot{x} - f(x)\big)$$

при условии выполнения ограничения (1.53).

Переписав выражение для меры принуждения $\mathcal{Z}$ в силу (1.52), получаем её значение в точке минимума на связи (1.53):

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}(x)D(x)u.$$

Таким образом, управление u, рассчитанное по изложенной методике в некотором смысле экстремально. Это свойство можно использовать с целью уменьшения абсолютных мгновенных значений управляющих воздействий.

Нелинейный закон обратной связи (1.54) был применён в работе [1] для решения задачи стабилизации стационарного движения одноколёсного аппарата, кинематическая схема которого схожа с приведённой на рисунке 1.1. Функция $g(x)$ задавалась в виде

$$g(x) = D^{\mathrm{T}}(x)A_g\,(x - x^*),$$

где A_g — постоянная матрица, элементы которой подбирались из условия асимптотической устойчивости системы (1.52) с управлением (1.54), линеаризованной в окрестности точки $x = x^*$.

Завершая данный параграф, отметим, что несмотря на одинаковое математическое описание аффинной нелинейной системы (1.52) со связью (1.53) и идентификатора параметров с множителями стабилизированной связи вида (1.40), цели и задачи расчёта таких систем в некотором смысле противоположны. Синтез алгоритма идентификации проводится при известном уравнении связи из условия стабилизации оценок в окрестности неизвестных истинных значений параметров. Расчёт управления производится из условия обеспечения асимптотической устойчивости заданного вектора состояния, а уравнение связи (1.53) подлежит построению. Более того выбор правой части (1.53) осуществляется из условия стабилизации объекта управления, а не одних лишь уравнений связи.

Выводы по главе 1

В настоящей главе сформулирована постановка задачи идентификации параметров при наличии дополнительных ограничений в виде равенств — параметрических связей. Представление таких связей в дифференциальной форме позволило построить алгоритмы идентификации в терминах псевдоскоростей, и, следовательно, уменьшить количество необходимых вычислений. С помощью применения принципа наименьшего принуждения Гаусса построен класс алгоритмов идентификации со связями среди которых градиентный алгоритм с проекцией и метод наименьших квадратов с проекцией. Получены достаточные условия сходимости указанных алгоритмов идентификации по первому приближению. Принцип наименьшего принуждения был применён для решения задачи идентификации параметров со стабилизированными условиями связей. Проведена аналогия задач идентификации со связями и задачей стабилизации аффинных систем управления, позволившая построить новый класс нелинейных обратных связей.

Материалы главы опубликованы в работах [1; 3; 14; 15].

2 Оптимальные алгоритмы идентификации с параметрическими связями

Обзор источников, приведённый в предыдущей главе, продемонстрировал, что наиболее распространённым способом решения задач идентификации и оценивания параметров является модификация существующих алгоритмов. Этому вопросу и была посвящена глава 1, в которой, среди прочих, был получен идентификатора параметров по методу наименьших квадратов с проекцией (1.36)–(1.37). Сохранил ли этот алгоритм оптимальность с точки зрения величины интегральной квадратичной ошибки после учёта параметрических связей?

Для ответа на этот вопрос решим задачу наименьших квадратов с ограничениями в виде равенств и построим оптимальные алгоритмы идентификации со связями.

2.1 Идентификация параметров по рекуррентному методу наименьших квадратов в непрерывном времени

Получим оценки параметров объекта (1.1) со связями (1.3) или (1.4) из условия минимума квадратичного функционала:

$$J\big[\hat{\vartheta}(t)\big] = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \Big\|y(\tau) - N^{\mathrm{T}}(\tau)\hat{\vartheta}(t)\Big\|_2^2 \,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\big(\hat{\vartheta}(t) - \vartheta_0\big)^{\mathrm{T}} M_0 \left(\hat{\vartheta}(t) - \vartheta_0\right), \tag{2.1}$$

где $M_0 = M_0^{\mathrm{T}} > 0$ — постоянная матрица, а ϑ_0 — постоянный вектор, удовлетворяющий уравнению $\psi(\vartheta_0) = 0$.

В начальный момент времени точка $\hat{\vartheta}(0) = \vartheta_0$ является точкой безусловного экстремума функционала $J\big[\hat{\vartheta}(0)\big]$ и, поскольку, $\psi(\vartheta_0) = 0$, она также является точкой условного экстремума с учётом связи (1.3).

Определим точку условного минимума в момент времени t, воспользовавшись необходимым условием экстремальности. Проварьируем функционал (2.1) на поверхностях, задаваемых связями (1.3). В соответствии с (1.5) $\delta\hat{\vartheta} = C(\hat{\vartheta})\delta\hat{\pi}$, следовательно:

$$\delta J = \delta\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}\frac{\partial J}{\partial\hat{\vartheta}} = \delta\hat{\pi}^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})\frac{\partial J}{\partial\hat{\vartheta}} = 0.$$

В силу независимости вариаций $\delta\hat{\pi}$, для выполнения полученного условия необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялось следующее соотношение:

$$C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})\frac{\partial J}{\partial\hat{\vartheta}} = 0.$$

Дифференцируя его по времени, получаем:

$$C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial J}{\partial\hat{\vartheta}} + \dot{C}^{\mathrm{T}}\frac{\partial J}{\partial\hat{\vartheta}} = 0. \tag{2.2}$$

Рассмотрим два случая получения уравнений идентификаторов параметров, используя соотношение (2.2).

2.1.1 Субоптимальный случай

Рассмотрим случай, когда слагаемым $\dot{C}^{\mathrm{T}} \cdot \partial J/\partial\hat{\vartheta}$ в уравнении (2.2) можно пренебречь. Такое допущение можно использовать в случае, если уравнения параметрических связей (1.3) близки к линейным или, если градиент функционала $J\big[\hat{\vartheta}(t)\big]$ близок к нулю. Последнего можно добиться, например, если элементы матрицы M_0 малы.

Действительно, при $M_0 = 0$ и условный, и безусловный экстремумы функционала будут находится в точке $\hat{\vartheta}(t) = \vartheta$, удовлетворяющей по условию задачи уравнению связи $\psi(\vartheta) = 0$. Следовательно, в соотношении (2.2) вектор градиента минимизируемого функционала $J\big[\hat{\vartheta}(t)\big]$ будет равен нулю.

Итак, для получения субоптимальной оценки будем использовать следующее уравнение:

$$C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial J}{\partial\hat{\vartheta}} = 0. \tag{2.3}$$

Найдём используемые в соотношении (2.3) производные в соответствии с парвилами дифференцирования, приведёнными в приложении А. Получаем:

$$\frac{\partial J\big[\hat{\vartheta}(t)\big]}{\partial\hat{\vartheta}(t)} = M_0 \cdot \big(\hat{\vartheta}(t) - \vartheta_0\big) - \int\limits_0^t N(\tau)\Big(y(\tau) - N^{\mathrm{T}}(\tau)\hat{\vartheta}(t)\Big)\,\mathrm{d}\tau. \tag{2.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial J\big[\hat{\vartheta}(t)\big]}{\partial\hat{\vartheta}(t)} = \left(M_0 + \int\limits_0^t N(\tau)N^{\mathrm{T}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\dot{\hat{\vartheta}}(t) - N(t)\Big(y(t) - N^{\mathrm{T}}(t)\hat{\vartheta}(t)\Big). \tag{2.5}$$

Подставляя выражение для производной градиента функционала $J\big[\hat{\vartheta}(t)\big]$ (2.5) в (2.3) и пользуясь определением вектора ошибки прогноза (1.9)

$$e(t) = y(t) - N^{\mathrm{T}}(t)\hat{\vartheta}(t),$$

получаем уравнение, которому удовлетворяет субоптимальная оценка параметров:

$$C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})\Big(M\dot{\hat{\vartheta}} - Ne\Big) = 0, \tag{2.6}$$

где

$$\underset{s\times s}{M(t)} = M_0 + \int\limits_0^t N(\tau)N^{\mathrm{T}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{2.7}$$

Отметим, что интегральная часть соотношения (2.7) определяют текущую матрицу (грамиан) наблюдаемости параметров модели (1.1) $M_{\mathrm{obs}}(t)$.

Выразив производную от вектора оценок параметров через независимые псевдоскорости $\dot{\hat{\vartheta}} = C(\hat{\vartheta})\dot{\hat{\pi}}$, получаем из соотношения (2.6) уравнения субоптимального по методу наименьших квадратов идентификатора в псевдоскоростях $\dot{\hat{\pi}}$:

$$\dot{\hat{\pi}} = \Big[C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})MC(\hat{\vartheta})\Big]^{-1}C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})Ne. \tag{2.8}$$

Таким образом, для получения субоптимальной оценки можно использовать следующие уравнения:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C(\hat{\vartheta}) \left[C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta}) M C(\hat{\vartheta}) \right]^{-1} C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta}) N e, \quad \hat{\vartheta}(0) = \vartheta_0, \tag{2.9}$$

$$\dot{M} = N N^{\mathrm{T}}, \quad M(0) = M_0, \tag{2.10}$$

Здесь соотношения (2.7), определяющие матрицу M, заменены эквивалентным дифференциальным уравнением (2.10).

Как отмечалось ранее, чем меньше элементы матрицы M_0, тем ближе алгоритм (2.8)–(2.10) будет к оптимальному. С другой стороны, чем меньше элементы M_0, тем сильнее будет влиять на оценки параметров аддитивная погрешность, не учтённая в модели объекта (1.1). Таким образом, начальные условия для уравнения (2.10) должны выбираться настолько малыми, насколько это позволяют погрешности параметрической модели.

Уравнения субоптимального идентификатора (2.9) полностью совпадают с формулой (1.36) параграфа 1.4, определяющей алгоритм наименьших квадратов с проекцией. Последний, таким образом, субоптимален.

Отметим, что для реализации алгоритма (2.9) требуется обращение матрицы $C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta}) M C(\hat{\vartheta})$, которая может быть лучше обусловленной, чем M. В частности, если параметры объекта (1.1) не полностью наблюдаемы и матрица Грама M_{obs} вырождена во все моменты времени t, то при $t \to \infty$ степень обусловленности матрицы M стремится к нулю. А если, в данном случае, столбцы матрицы $C(\hat{\vartheta})$ не принадлежат ядру матрицы наблюдаемости M_{obs}, то степень обусловленности $C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta}) M C(\hat{\vartheta})$ будет оставаться ненулевой и в предельном случае.

2.1.2 Оптимальный случай

Для получения оптимального алгоритма идентификации воспользуемся полной формой уравнений (2.2):

$$C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta}) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial J}{\partial \hat{\vartheta}} + \dot{C}^{\mathrm{T}} \frac{\partial J}{\partial \hat{\vartheta}} = 0. \tag{2.11}$$

Для сокращения явной записи этого соотношения введём обозначение:

$$z(t) = M_0 \vartheta_0 + \int\limits_0^t N(\tau) y(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \tag{2.12}$$

которое позволяет записать соотношение (2.4) для градиента минимизируемого функционала $J\big[\hat{\vartheta}(t)\big]$ в следующей форме:

$$\frac{\partial J\big[\hat{\vartheta}(t)\big]}{\partial \hat{\vartheta}(t)} = M(t)\hat{\vartheta}(t) - z(t). \tag{2.13}$$

Рассмотрим слагаемое, входящее в формулу (2.11). Пусть c_i — i-й столбец матрицы $C(\hat{\vartheta})$, тогда выражение для i-го элемента вектора $\dot{C}^{\mathrm{T}} \cdot \partial J / \partial \hat{\vartheta}$ имеет вид:

$$\left[\dot{C}^{\mathrm{T}} \frac{\partial J}{\partial \hat{\vartheta}}\right]_i = \dot{c}_i^{\mathrm{T}} \frac{\partial J}{\partial \hat{\vartheta}} = \dot{\hat{\vartheta}}^{\mathrm{T}} \frac{\partial c_i^{\mathrm{T}}}{\partial \hat{\vartheta}} \frac{\partial J}{\partial \hat{\vartheta}} = \dot{\hat{\pi}}^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta}) \frac{\partial c_i^{\mathrm{T}}}{\partial \hat{\vartheta}} \frac{\partial J}{\partial \hat{\vartheta}} =$$
$$= \sum_j \dot{\hat{\pi}}_j c_j^{\mathrm{T}} \frac{\partial c_i^{\mathrm{T}}}{\partial \hat{\vartheta}} \frac{\partial J}{\partial \hat{\vartheta}} = \sum_j \dot{\hat{\pi}}_j c_j^{\mathrm{T}} \frac{\partial c_i^{\mathrm{T}}}{\partial \hat{\vartheta}} \left(M\hat{\vartheta} - z\right).$$

Таким образом,

$$\dot{C}^{\mathrm{T}} \frac{\partial J}{\partial \hat{\vartheta}} = K(\hat{\vartheta}, z)\dot{\hat{\pi}}, \tag{2.14}$$

где элементы матрицы $K = (k_{ij})$ задаются соотношением:

$$k_{ij} = c_j^{\mathrm{T}} \frac{\partial c_i^{\mathrm{T}}}{\partial \hat{\vartheta}} \left(M\hat{\vartheta} - z\right). \tag{2.15}$$

Применяя соотношения для производной градиента функционала $J\big[\hat{\vartheta}(t)\big]$ (2.5) и (2.6), а также уравнение (2.14), представим формулу (2.11) в виде дифференциального уравнения:

$$C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta}) \left(M\dot{\hat{\vartheta}} - Ne\right) + K(\hat{\vartheta}, z)\dot{\hat{\pi}} = C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta}) \left(MC(\hat{\vartheta})\dot{\hat{\pi}} - Ne\right) + K(\hat{\vartheta}, z)\dot{\hat{\pi}} = 0,$$

разрешив которое относительно вектора $\dot{\hat{\pi}}$, получаем уравнение оптимального идентификатора в псевдоскоростях:

$$\dot{\hat{\pi}} = \Big[C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})MC(\hat{\vartheta}) + K(\hat{\vartheta},z)\Big]^{-1} C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})Ne. \tag{2.16}$$

Учитывая выражение (1.5) для производных по времени от оценок параметров, получаем оптимальный алгоритм идентификации параметров объекта (1.1) с параметрическими связями (1.3):

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C(\hat{\vartheta})\Big[C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})MC(\hat{\vartheta}) + K(\hat{\vartheta},z)\Big]^{-1} C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})Ne, \quad \hat{\vartheta}(0) = \vartheta_0, \tag{2.17}$$

$$\dot{M} = NN^{\mathrm{T}}, \quad M(0) = M_0, \tag{2.18}$$

$$\dot{z} = Ny, \quad z(0) = M_0\vartheta_0. \tag{2.19}$$

Здесь соотношения (2.12), определяющие вектор z, заменены эквалентным дифференциальным уравнением (2.19), а элементы матрицы $K(\hat{\vartheta},z)$ задаются формулой (2.15).

Система (2.17)–(2.19) определяет *необходимые* условия экстремальности квадратичного функционала ошибки J. *Достаточное* условие минимума квадратичного функционала ошибки J состоит в положительной определённости его второй вариации

$$\delta^2 J = \delta\hat{\pi}^{\mathrm{T}}\Big[C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})M\,C(\hat{\vartheta}) + K(\hat{\vartheta},z)\Big]\delta\hat{\pi} > 0, \quad \forall\delta\hat{\pi} \neq 0. \tag{2.20}$$

Уравнения оптимального идентификатора со связями (2.17)–(2.19) обладают большей размерностью и более сложной структурой, чем оптимальный алгоритм идентификации (1.33)–(1.34) без учёта параметрических связей. К тому же невырожденность матрицы $[C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})MC(\hat{\vartheta}) + K(\hat{\vartheta},z)]$ даже при полной наблюдаемости параметров не гарантирована, из-за чего достаточное условие оптимальности (2.20) может не выполняться. Эти обстоятельства делают целесообразным использование алгоритма (2.17)–(2.19) лишь в тех случаях, когда оптимальные и субоптимальные оценки параметров будут достаточно сильно отличатся.

2.2 Уравнения оптимального идентификатора с множителями связей

2.2.1 Вывод уравнений идентификатора

Уменьшить размерность уравнений оптимального идентификатора можно, если учесть, что не все компоненты вектора градиента

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\vartheta}} = M\hat{\vartheta} - z$$

являются независимыми в точке условного экстремума.

Продемонстрируем это, записав условие экстремума функционала J на связях $\psi(\hat{\vartheta}) = 0$ с помощью функции Лагранжа

$$J_\lambda = J + \psi^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})\lambda,$$

где λ — r–мерный вектор множителей связей (1.3). Оно имеет вид:

$$\frac{\partial J_\lambda}{\partial \hat{\vartheta}} = \frac{\partial J}{\partial \hat{\vartheta}} + \frac{\partial \psi^{\mathrm{T}}}{\partial \hat{\vartheta}}\lambda = 0.$$

Дифференцируя последнее выражение по времени, получаем:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial J_\lambda}{\partial \hat{\vartheta}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial J}{\partial \hat{\vartheta}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \psi^{\mathrm{T}}}{\partial \hat{\vartheta}} \cdot \lambda + \frac{\partial \psi^{\mathrm{T}}}{\partial \hat{\vartheta}}\dot{\lambda} = 0. \tag{2.21}$$

Выразим второе слагаемое в соотношении (2.21) через элементы векторов λ и ψ, применив соотношения для дифференцирования матриц из приложения А:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \psi^{\mathrm{T}}}{\partial \hat{\vartheta}} \cdot \lambda = \sum_i \lambda_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \psi_i}{\partial \hat{\vartheta}} = \sum_i \lambda_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \hat{\vartheta}^2}\dot{\hat{\vartheta}}.$$

Подставив последний результат вместе с соотношениями (2.5) и (2.7) для производной по времени от градиента функционала J и матрицы M в формулу (2.21), получаем:

$$M\dot{\hat{\vartheta}} - Ne + \sum_i \lambda_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \hat{\vartheta}^2}\dot{\hat{\vartheta}} + \frac{\partial \psi^{\mathrm{T}}}{\partial \hat{\vartheta}}\dot{\lambda} = 0. \tag{2.22}$$

Обозначив в формуле (2.22)

$$M_\lambda(\hat{\vartheta},\lambda,t) = M(t) + \sum_i \lambda_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \hat{\vartheta}^2}, \quad M_\lambda = M_\lambda^{\mathrm{T}}, \tag{2.23}$$

перепишем её в следующем виде:

$$M_\lambda \dot{\hat{\vartheta}} - Ne + \frac{\partial \psi^{\mathrm{T}}}{\partial \hat{\vartheta}}\dot{\lambda} = 0. \tag{2.24}$$

Разрешим полученную систему дифференциальных уравнений относительно старших производных. Умножим обе части выражения (2.24) на C^{T} слева:

$$C^{\mathrm{T}} M_\lambda \dot{\hat{\vartheta}} - C^{\mathrm{T}} Ne + \underbrace{C^{\mathrm{T}} \frac{\partial \psi^{\mathrm{T}}}{\partial \hat{\vartheta}}}_{0} \dot{\lambda} = 0,$$

и, заменив $\dot{\hat{\vartheta}} = C\dot{\hat{\pi}}$, получаем:

$$C^{\mathrm{T}} M_\lambda C \dot{\hat{\pi}} - C^{\mathrm{T}} Ne = 0.$$

Если матрица $C^{\mathrm{T}} M_\lambda C$ невырождена, то столбец параметрических псевдоскоростей может быть найден как

$$\dot{\hat{\pi}} = \left[C^{\mathrm{T}} M_\lambda C\right]^{-1} C^{\mathrm{T}} Ne. \tag{2.25}$$

Перейдя в исходные переменные $\dot{\hat{\vartheta}} = C\dot{\hat{\pi}}$, получаем:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C\left[C^{\mathrm{T}} M_\lambda C\right]^{-1} C^{\mathrm{T}} Ne. \tag{2.26}$$

Выразим производные по времени от множителей связей. Умножим обе части выражения (2.24) на B^{T} слева:

$$B^{\mathrm{T}} M_\lambda \dot{\hat{\vartheta}} - B^{\mathrm{T}} N e + \underbrace{B^{\mathrm{T}} \frac{\partial \psi^{\mathrm{T}}}{\partial \hat{\vartheta}}}_{E} \dot{\lambda} = 0,$$

откуда, в силу (2.26), получаем:

$$\dot{\lambda} = B^{\mathrm{T}} N e - B^{\mathrm{T}} M_\lambda C \left[C^{\mathrm{T}} M_\lambda C\right]^{-1} C^{\mathrm{T}} N e,$$
$$\dot{\lambda} = B^{\mathrm{T}} \cdot \left(E - M_\lambda C \left[C^{\mathrm{T}} M_\lambda C\right]^{-1} C^{\mathrm{T}}\right) N e. \tag{2.27}$$

Как было отмечено ранее, в начальный момент времени $t = 0$ условный и безусловный экстремум функционала J совпадают и находятся в точке $\hat{\vartheta}(0) = \vartheta_0$. Таким образом, начальные значения множителей связей равны нулю:

$$\lambda(0) = 0.$$

Сведём вместе уравнения оптимального по методу наименьших квадратов идентификатора параметров со связями:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C \left[C^{\mathrm{T}} M_\lambda C\right]^{-1} C^{\mathrm{T}} N e, \quad \hat{\vartheta}(0) = \vartheta_0, \tag{2.28}$$
$$\dot{\lambda} = B^{\mathrm{T}} \left(E - M_\lambda C \left[C^{\mathrm{T}} M_\lambda C\right]^{-1} C^{\mathrm{T}}\right) N e, \quad \lambda(0) = 0, \tag{2.29}$$
$$\dot{M} = N N^{\mathrm{T}}, \quad M(0) = M_0, \tag{2.30}$$
$$M_\lambda = M + \sum_i \lambda_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \hat{\vartheta}^2}.$$

Размерность системы уравнений (2.28)–(2.30) меньше, чем у (2.17)–(2.19) из-за того, что вместо s–мерного вектора z для построения алгоритма идентификации используется r–мерный вектор множителей связей λ. В случае интегрируемых псевдоскоростей уравнения (2.25) и (2.29) для векторов $\dot{\pi}$ и λ образуют систему порядка $(s - r) + r = s$. Таким образом, минимальное число дифференциальных уравнений, образующих оптимальный по методу наименьших квадратов алгоритм идентификации параметров, не зависит количества связей (даже если они вовсе отсутствуют).

Отметим, что матрица $[C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})MC(\hat{\vartheta}) + K(\hat{\vartheta},z)]$, используемая в уравнении (2.17), оказывается симметричной. Действительно, сравнивая уравнения (2.16) и (2.25), получаем:

$$C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})M(t)C(\hat{\vartheta}) + K(\hat{\vartheta},z) = C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})M_{\lambda}(\hat{\vartheta},\lambda,t)C(\hat{\vartheta}), \quad M_{\lambda} = M_{\lambda}^{\mathrm{T}}.$$

Указанное свойство явно не следует из соотношения (2.15), определяющего матрицу K.

Перепишем достаточное условие оптимальности алгоритма идентификации со связями (2.20), используя последнее соотношение:

$$\delta^2 J = \delta\hat{\pi}^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} M_{\lambda} C\, \delta\hat{\pi} > 0, \quad \forall \delta\hat{\pi} \neq 0. \tag{2.31}$$

Такое достаточное условие оптимальности оценок, вырабатываемых алгоритмом (2.28)–(2.30), может нарушаться при некоторых величинах множителей связей. Если, при этом, матрица $C^{\mathrm{T}} M_{\lambda} C$ вырождается, то применение идентификатора (2.28)–(2.30) становится невозможным.

Таким образом, полученный оптимальный алгоритм идентификации параметров в некоторых условиях проявляет высокую чувствительность к значениям множителей связей. Анализ уравнения (2.29) показывает, что аддитивная погрешность, содержащаяся в выходном векторе y параметрической модели (1.1), и, следовательно, в ошибке прогноза $e = y - N^{\mathrm{T}}\hat{\vartheta}$, напрямую влияет на изменение вектора λ. Влияние такой погрешности может привести как к потере работоспособности алгоритма (2.28)–(2.30) из-за вырождения $C^{\mathrm{T}} M_{\lambda} C$, так и к установлению ненулевых значений множителей связей при получении таких оценок параметров, что $\hat{\vartheta}$ совпадает с точкой безусловного минимума функционала J.

2.2.2 Регуляризация алгоритма

Для парирования негативного влияние аддитивных погрешностей параметрической модели (1.1) на результаты идентификации параметров проведём регуляризацию [19; 20; 23–25] уравнения (2.29), которому удовлетворяет вектор множителей связей λ:

$$\dot{\lambda} = A_\lambda \lambda + B^{\mathrm{T}} \left(E - M_\lambda C \left[C^{\mathrm{T}} M_\lambda C \right]^{-1} C^{\mathrm{T}} \right) Ne, \quad \lambda(0) = 0, \tag{2.32}$$

где A_λ — постоянная гурвицева матрица, которую следует выбирать с как можно меньшей нормой. В противном случае результаты работы оптимального алгоритма идентификации (2.28)–(2.30) и алгоритма (2.28), (2.32), (2.30) с регуляризацией вычисления множителей связей могут достаточно сильно отличаться.

Отметим, что уравнения идентификатора параметров (2.28), (2.32), (2.30) можно получить из условия

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial J_\lambda}{\partial \hat{\vartheta}} = \frac{\partial \psi^{\mathrm{T}}}{\partial \hat{\vartheta}} A_\lambda \lambda. \tag{2.33}$$

Рассмотрим предельный случай регуляризованного уравнения (2.32). Пусть $A_\lambda = -\varsigma^{-1} E$, где ς — «малое» положительное число. Система уравнений идентификатора (2.28), (2.32), (2.30) становится сингулярно возмущённой:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\vartheta}} &= C \left[C^{\mathrm{T}} M_\lambda C \right]^{-1} C^{\mathrm{T}} Ne, \quad \dot{M} = NN^{\mathrm{T}}, \\ \varsigma \dot{\lambda} &= -\lambda + \varsigma B^{\mathrm{T}} \left(E - M_\lambda C \left[C^{\mathrm{T}} M_\lambda C \right]^{-1} C^{\mathrm{T}} \right) Ne. \end{aligned} \tag{2.34}$$

В вырожденном случае ($\varsigma = 0$) эта система описывает идентификатор параметров по методу наименьших квадратов с проекцией (2.8)–(2.10), а вектор множителей связей равен $\lambda(t) = 0$.

Рассмотрим присоединённую задачу: перейдём в системе (2.34) к «быстрому» времени $t_\varsigma = \varsigma^{-1} t$ и в полученных уравнениях положим $\varsigma = 0$. Вектор $\lambda = 0$ является асимптотически устойчивым решением присоединённого уравнения

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t_\varsigma} = -\lambda,$$

с неограниченной областью притяжения. Таким образом, по теореме А. Н. Тихонова [69; 70] при $\varsigma \to 0$ вектор множителей $\lambda \to 0$, оценки вырабатываемые идентификатором (2.34), будут стремиться к таковым, вычисляемым по алгоритму с проекцией (2.8)–(2.10). Здесь предполагается существование непрерывной производной $\dot{N}$.

Отметим, что условия теоремы Тихонова гарантируют близость решения вырожденной системы и исходной (2.34) на конечном промежутке времени. Вырождение на бесконечном временном интервале требует дополнительного исследования [71].

Таким образом, алгоритм идентификации параметров по методу наименьших квадратов с проекцией (2.8)–(2.10) можно рассматривать как предельный случай регуляризованного идентификатора (2.28), (2.32), (2.30) при бесконечно большом отрицательном скалярном коэффициенте регуляризации $A_\lambda = -\infty E$.

2.2.3 Построение уравнений идентификатора в случае интегрируемых псевдоскоростей

Построение уравнений (2.28), (2.29) и (2.32) затрудняется тем, что требуется построить всю тройку матриц $\partial\psi/\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}$, C и B. Эта процедура особенно неудобна, если псевдоскорости интегрируемы и $\hat{\vartheta} = \Theta(\hat{\pi})$. Действительно, в этом случае функция связи ψ задана неявно, а построение упомянутой тройки матриц начинается с формирования

$$C = \frac{\partial\Theta}{\partial\hat{\pi}^{\mathrm{T}}}.$$

Далее зададимся матрицей B так, чтобы блочная матрица $\begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}$ была невырожденной, и найдём

$$\begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} D_\psi^{\mathrm{T}} \\ D_\pi^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

Здесь вместо матрицы $\partial\psi/\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}$ строится матрица D_ψ^{T}. В общем случае D_ψ^{T} не является матрицей Якоби и, следовательно, задаёт неинтегрируемую параметрическую связь

$$D_\psi^{\mathrm{T}}\dot{\hat{\vartheta}} = 0.$$

Таким образом, при расчёте матрицы M_λ следует заменить матрицы Гессе для неявных скалярных функций связи ψ_i как

$$\frac{\partial^2\psi_i}{\partial\hat{\vartheta}^2} = \frac{\partial d_{\psi i}}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}},$$

где $d_{\psi i}$ — i-й столбец матрицы D_ψ. В соответствии с формулой (2.23)

$$M_\lambda = M + \sum_i \lambda_i \frac{\partial d_{\psi i}}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}}.$$

Использование последнего соотношения неудобно, так как матрица D_ψ строится как явная функция от вектора $\hat{\pi}$, а не $\hat{\vartheta}$. Этот недостаток можно устранить, если в уравнениях (2.28), (2.29) и (2.32) вычислять произведение $M_\lambda C$ по формуле:

$$M_\lambda C = MC + \sum_i \lambda_i \frac{\partial d_{\psi i}}{\partial\hat{\vartheta}^{\mathrm{T}}}\frac{\partial\Theta}{\partial\hat{\pi}^{\mathrm{T}}} = MC + \sum_i \lambda_i \frac{\partial d_{\psi i}}{\partial\hat{\pi}^{\mathrm{T}}}.$$

Сведём вместе расчётные соотношения для алгоритма идентификации параметров по методу наименьших квадратов в интегрируемых псевдоскоростях. Уравнение для расчёта вектора множителей связей запишем в более общем, регуляризованном виде:

$$\dot{\hat{\pi}} = \left[C^{\mathrm{T}} M_\lambda C\right]^{-1} C^{\mathrm{T}} N e, \tag{2.36}$$

$$\dot{\lambda} = A_\lambda \lambda + B^{\mathrm{T}}\left(E - M_\lambda C\left[C^{\mathrm{T}} M_\lambda C\right]^{-1} C^{\mathrm{T}}\right) N e, \tag{2.37}$$

$$\dot{M} = NN^{\mathrm{T}}, \quad M_\lambda C = MC + \sum_i \lambda_i \frac{\partial d_{\psi i}}{\partial\hat{\pi}^{\mathrm{T}}}, \tag{2.38}$$

где A_λ — гурвицева матрица, а матрица D_ψ, состоящая из столбцов d_i, удовлетворяет соотношениям $D_\psi^{\mathrm{T}} C = 0$ и $D_\psi^{\mathrm{T}} B = E$.

2.3 Дальнейшие аналогии задач идентификации параметров и задач механики систем с сервосвязями

Рассмотрим дальнейшие аналогии задачи механики и адаптивной идентификации.

Вернёмся к задаче идентификации по методу наименьших квадратов без ограничений на оцениваемые параметры. Оценки определяются из условия минимума квадратичного функционала ошибки J, заданного соотношением (2.1), являющемся положительно определённой неоднородной квадратичной формой от элемента вектора $\hat{\vartheta}$. Уравнения оптимального идентификатора (1.33) можно записать следующим образом [19; 21]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial J}{\partial \hat{\vartheta}} = 0. \tag{2.39}$$

Левая часть этого уравнения в явном виде представлена формулой (2.5).

Рассмотрим следующую аналогию. Пусть вектору текущих оценок $\hat{\vartheta}$ соответствует вектор обобщённых скоростей $\dot{q}$ лагранжевой механической системы с кинетической энергией $T = T(\dot{q}, t)$ и нулевыми обобщёнными силами. Если в качестве аналога функционала ошибки J взять кинетическую энергию T, то уравнения идентификатора (2.39) будут соответствовать уравнениям движения упомянутой механической системы:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = 0. \tag{2.40}$$

Указанная аналогия позволяет свести задачу идентификации параметров со связями $\psi(\hat{\vartheta}) = 0$ к задаче реализации сервосвязи $\psi(\dot{q}) = 0$ системой (2.40).

Задачи динамики механических систем с сервосвязями подробно рассматриваются в работах В. В. Козлова [72–75]. Одним из способов реализации сервосвязи $\psi(\dot{q}) = 0$ является регулирование обобщённых сил. В этом случае, уравнения движения (2.40) принимают вид:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \psi^{\mathrm{T}}}{\partial \dot{q}}\Lambda, \tag{2.41}$$

где Λ — вектор множителей сервосвязей. В работах [72; 73] показано, что действительное движение, описываемое уравнениями (2.41), подчиняется принципу наименьшего принуждения Гаусса.

Применяя аналогию с механической системой (2.41), можно получить уравнения идентификатора параметров со связями $\psi(\hat{\vartheta}) = 0$ в следующем виде:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial J}{\partial \hat{\vartheta}} = \frac{\partial \psi^{\mathrm{T}}}{\partial \hat{\vartheta}}\Lambda.$$

В параграфе 1.3 показано, что последние соотношения могут быть получены из условия минимума меры принуждения (1.23). Исключив из них множители связей можно получить уравнения идентификатора по методу наименьших квадратов с проекцией (1.36)–(1.37).

Другой способ реализации сервосвязи $\psi(\dot{q}) = 0$ механической системой состоит в изменении её инерционных свойств [73]. В этом случае уравнения движения механической системы с сервосвязью приобретает вид:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_\lambda}{\partial \dot{q}} = 0, \tag{2.42}$$

где T_λ — изменённая кинетическая энергия, которая может быть определена следующим образом:

$$T_\lambda = T(\dot{q},t) + \psi^{\mathrm{T}}(\dot{q})\lambda(t),$$

где λ — вектор неопределённых множителей.

По аналогии введём изменённый квадратичный функционал ошибки J_λ:

$$J_\lambda = J + \psi^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})\lambda,$$

и построим уравнения идентификатора параметров с ограничением $\psi(\hat{\vartheta}) = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial J_\lambda}{\partial \hat{\vartheta}} = 0. \tag{2.43}$$

Модифицированный функционал J_λ является ничем иным, как функцией Лагранжа в задаче на условный экстремум J с ограничением $\psi(\hat{\vartheta}) = 0$. Как было показано ранее, из формулы (2.44) также можно вывести уравнения оптимального по методу наименьших идентификатора в форме (2.28)–(2.30).

Также в работе [73] предлагается комбинированный способ реализации сервосвязи как за счёт действия дополнительных обобщённых сил, так и за счёт изменения инерционных свойств механической системы. При такой реализации связи $\psi(\dot{q}) = 0$ движение системы описывается уравнением

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_\lambda}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \psi^{\mathrm{T}}}{\partial \dot{q}}\Lambda,$$

которому соответствует уравнение идентификатора параметров в форме

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial J_\lambda}{\partial \hat{\vartheta}} = \frac{\partial \psi^{\mathrm{T}}}{\partial \hat{\vartheta}}\Lambda. \tag{2.44}$$

При $\Lambda = A_\lambda \lambda$ последнее соотношение полностью совпадает с условием (2.33), являющимся отправной точкой для построения алгоритма идентификации параметров (2.28), (2.32), (2.30) по методу наименьших квадратов с регуляризацией вычмсления множителей связей.

2.4 Идентификация параметров по модифицированному рекуррентному методу наименьших квадратов

2.4.1 Идентификация в непрерывном времени

Введём вспомогательную величину

$$\hat{\vartheta}(t,\tau) = \hat{\vartheta}(\tau) + C\big(\hat{\vartheta}(\tau)\big) \cdot (\hat{\pi}(t) - \hat{\pi}(\tau)), \tag{2.45}$$

представляющую собой вектор текущих оценок параметров объекта (1.1), полученный при условии, что уравнение связи (1.4) было линеаризовано в момент времени τ. Отметим следующие свойства вектора $\hat{\vartheta}(t,\tau)$:

$$\frac{\partial \hat{\vartheta}(t,\tau)}{\partial t} = C\big(\hat{\vartheta}(\tau)\big)\dot{\hat{\pi}}(t), \quad \hat{\vartheta}(t,t) = \hat{\vartheta}(t). \tag{2.46}$$

Выведем уравнения идентификатора параметров объекта (1.1) со связями (1.4) из условия минимума модифицированного квадратичного функционала:

$$J_\pi\big[\hat\vartheta(t,\tau)\big] = \\ = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \Big\|y(\tau) - N^{\mathrm{T}}(\tau)\hat\vartheta(t,\tau)\Big\|_2^2\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\big(\hat\pi(t)-\pi_0\big)^{\mathrm{T}} M_{\pi 0}\,\big(\hat\pi(t)-\pi_0\big), \tag{2.47}$$

где $M_{\pi 0} = M_{\pi 0}^{\mathrm{T}} > 0$ — постоянная матрица, а π_0 — постоянный вектор. Здесь экстремум функционала $J\big[\hat\vartheta(t,\tau)\big]$ ищется по вектору $\hat\pi(t)$.

Неинтегральное слагаемое в функционале (2.47) можно задать в следующей форме:

$$\frac{1}{2}\big(\hat\vartheta(t,0)-\vartheta_0\big)^{\mathrm{T}} M_0\,\big(\hat\vartheta(t,0)-\vartheta_0\big), \quad M_0 = M_0^{\mathrm{T}} > 0.$$

При $\hat\vartheta(0) = \vartheta_0$, $\hat\pi(0) = \pi_0$ и $M_{\pi 0} = C^{\mathrm{T}}(\vartheta_0) M_0 C(\vartheta_0)$ предложенное неинтегральное слагаемое совпадёт с используемым в соотношении (2.47) :

$$\big(\hat\vartheta(t,0)-\vartheta_0\big)^{\mathrm{T}} M_0\,\big(\hat\vartheta(t,0)-\vartheta_0\big) = \big(\hat\pi(t)-\pi_0\big)^{\mathrm{T}} M_{\pi 0}\,\big(\hat\pi(t)-\pi_0\big).$$

Запишем условие минимума функционала (2.47):

$$\frac{\partial J_\pi\big[\hat\vartheta(t,\tau)\big]}{\partial\hat\pi(t)} = \\ = M_{\pi 0}\big(\hat\pi(t)-\pi_0\big) - \int\limits_0^t C^{\mathrm{T}}\big(\hat\vartheta(\tau)\big) N(\tau)\,\Big(y(\tau) - N^{\mathrm{T}}(\tau)\hat\vartheta(t,\tau)\Big)\,\mathrm{d}\tau = 0. \tag{2.48}$$

Дифференцируя соотношение (2.48) по времени t, получаем уравнение:

$$M_{\pi 0}\dot{\hat\pi}(t) + C^{\mathrm{T}}\big(\hat\vartheta(t)\big) N(t)\,\Big(y(t) - N^{\mathrm{T}}(t)\hat\vartheta(t,t)\Big) + \\ + \int\limits_0^t C^{\mathrm{T}}\big(\hat\vartheta(\tau)\big) N(\tau) N^{\mathrm{T}}(\tau)\frac{\partial\hat\vartheta(t,\tau)}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau = 0,$$

которое в соответствии с (2.46), приобретает вид:

$$\left(M_{\pi 0}+\int\limits_0^t C^{\mathrm{T}}\big(\hat{\vartheta}(\tau)\big)N(\tau)N^{\mathrm{T}}(\tau)C\big(\hat{\vartheta}(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau\right)\cdot\dot{\hat{\pi}}=C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})Ne. \tag{2.49}$$

Обозначим матрицу коэффициентов при $\dot{\hat{\pi}}$ в последнем выражении как

$$\underset{(s-r)\times(s-r)}{P_{\pi}^{-1}(t)}=M_{\pi 0}+\int\limits_0^t C^{\mathrm{T}}\big(\hat{\vartheta}(\tau)\big)N(\tau)N^{\mathrm{T}}(\tau)C\big(\hat{\vartheta}(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau, \tag{2.50}$$

тогда уравнения (2.49) примут вид оптимального по модифицированному методу наименьших квадратов идентификатора в псевдоскоростях:

$$\dot{\hat{\pi}}=P_{\pi}C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})Ne. \tag{2.51}$$

Соотношения (2.51), в соответствии с (1.5), приводят к уравнениям идентификатора в исходных переменных:

$$\dot{\hat{\vartheta}}=C(\hat{\vartheta})P_{\pi}C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})Ne.$$

Матрица P_{π} может быть найдена как решение дифференциального уравнения:

$$\dot{P}_{\pi}=-P_{\pi}C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})NN^{\mathrm{T}}C(\hat{\vartheta})P_{\pi}.$$

Последнее уравнение можно получить, используя свойства обратной матрицы и определение (2.50):

$$\dot{P}_{\pi}=-P_{\pi}\cdot\frac{\mathrm{d}P_{\pi}^{-1}}{\mathrm{d}t}\cdot P_{\pi}=-P_{\pi}\cdot C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})NN^{\mathrm{T}}C(\hat{\vartheta})\cdot P_{\pi}.$$

Таким образом, уравнения оптимального идентификатора по модифицированному методу наименьших квадратов имеют вид:

$$\dot{\hat{\vartheta}}=C(\hat{\vartheta})P_{\pi}C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})Ne,\quad \hat{\vartheta}(0)=\vartheta_0, \tag{2.52}$$

$$\dot{P}_{\pi}=-P_{\pi}C^{\mathrm{T}}(\hat{\vartheta})NN^{\mathrm{T}}C(\hat{\vartheta})P_{\pi},\quad P_{\pi}(0)=M_{\pi 0}^{-1}. \tag{2.53}$$

Уравнения (2.52)–(2.53) получены из необходимого условия экстремума. Достаточное условие минимума модифицированного функционала J_π имеет вид

$$\delta^2 J_\pi = \delta\hat{\pi}^{\mathrm{T}} P_\pi^{-1}\,\delta\hat{\pi} > 0, \quad \forall\delta\hat{\pi} \neq 0. \tag{2.54}$$

Из определяющего соотношения (2.50) для матрицы P_π^{-1} и положительной определённости $P_\pi^{-1}(0) = M_{\pi 0}$ следует, что достаточное условие минимума (2.54) выполняется в любой момент времени $t > 0$.

Отметим, что размерность уравнений оптимального идентификатора по модифицированному методу наименьших квадратов (2.52)–(2.53) меньше, чем у идентификатора (2.9)–(2.10). Это достигается из-за того, что дифференциальное уравнение (2.10) для матрицы M эквивалентно $(s^2 + s)/2$ скалярным уравнениям, а матричное уравнение (2.53) — $((s - r)^2 + s - r)/2$ скалярным уравнениям.

Указанное снижение размерности оптимального алгоритма идентификации достигнуто благодаря внесению матрицы $C(\hat{\vartheta})$ под знак интеграла в соотношении (2.50). По этой же причине ошибки оценок параметров могут существенно повлиять на матрицу усиления P_π, что может негативно сказаться на точности вырабатываемых оценок.

Замечание. В случае интегрируемых параметрических псевдоскоростей оптимальный по модифицированному методу наименьших квадратов алгоритм идентификации в форме (2.51), (2.53) является алгоритмом класса расширенного фильтра Калмана в непрерывном времени (см. [31, стр. 401]).

2.4.2 Идентификация в дискретном времени

Особенностью модифицированного метода наименьших квадратов является то, что в случае интегрируемых псевдоскоростей при

$$\hat{\vartheta} = \Theta(\hat{\pi})$$

его можно достаточно просто применить и в случае дискретного времени.

Будем обозначать значения величин в дискретные моменты времени t_k, $k = 0{,}1{,}2...$, следующим образом:

$$y_{[k]} \equiv y(t_k), \quad N_{[k]} \equiv N(t_k).$$

Вектор оценок параметров, вычисленных после обработки вектора измерений $y_{[k]}$, обозначим как $\hat{\vartheta}_{[k]}$.

Введём вспомогательную величину:

$$\hat{\vartheta}_{[k,j]} \equiv \hat{\vartheta}_{[j]} + C_{[j]}(\hat{\pi}_{[k]} - \hat{\pi}_{[j]}),$$

где для краткости используется обозначение $C_{[j]} = C(\hat{\vartheta}_{[j]})$.

Отметим, что по определению

$$\hat{\vartheta}_{[k,k]} = \hat{\vartheta}_{[k]},$$

а приращение вспомогательного вектора $\hat{\vartheta}_{[k,j]}$ при фиксированном j равно:

$$\hat{\vartheta}_{[k,j]} - \hat{\vartheta}_{[k-1,j]} = C_{[j]}(\hat{\pi}_{[k]} - \hat{\pi}_{[k-1]}). \tag{2.55}$$

Перечисленные свойства напрямую следуют из определения вектора $\hat{\vartheta}_{[k,j]}$.

Оценку $\hat{\pi}_{[k]}$ найдём из условия минимума следующего функционала:

$$J_\pi^D\left[\hat{\pi}_{[k]}\right] = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\left\|y_{[j]} - N_{[j]}^{\mathrm{T}}\hat{\vartheta}_{[k,j-1]}\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(\hat{\pi}_{[k]} - \pi_0\right)^{\mathrm{T}} M_{\pi 0}\left(\hat{\pi}_{[k]} - \pi_0\right).$$

Запишем условие минимума функционала J_π^D:

$$\frac{\partial J_\pi^D\left[\hat{\pi}_{[k]}\right]}{\partial\hat{\pi}_{[k]}} = M_{\pi 0}\left(\hat{\pi}_{[k]} - \pi_0\right) - \sum_{j=1}^{k} C_{[j-1]}^{\mathrm{T}} N_{[j]}\left(y_{[j]} - N_{[j]}^{\mathrm{T}}\hat{\vartheta}_{[k,j-1]}\right) = 0. \tag{2.56}$$

Преобразуем выражение, стоящее под знаком суммы в полученном соотношении, в соответствии со свойством (2.55):

$$C_{[j-1]}^{\mathrm{T}} N_{[j]} \left(y_{[j]} - N_{[j]}^{\mathrm{T}} \hat{\vartheta}_{[k,j-1]} \right) =$$
$$= C_{[j-1]}^{\mathrm{T}} N_{[j]} \left(y_{[j]} - N_{[j]}^{\mathrm{T}} \left[\hat{\vartheta}_{[k-1,j-1]} + C_{[j-1]} \big(\hat{\pi}_{[k]} - \hat{\pi}_{[k-1]} \big) \right] \right).$$

Таким образом, после раскрытия скобок и перегруппировки слагаемых, имеем:

$$\sum_{j=1}^{k} C_{[j-1]}^{\mathrm{T}} N_{[j]} \left(y_{[j]} - N_{[j]}^{\mathrm{T}} \hat{\vartheta}_{[k,j-1]} \right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} C_{[j-1]}^{\mathrm{T}} N_{[j]} \left(y_{[j]} - N_{[j]}^{\mathrm{T}} \hat{\vartheta}_{[k-1,j-1]} \right) - \sum_{j=1}^{k} C_{[j-1]}^{\mathrm{T}} N_{[j]} N_{[j]}^{\mathrm{T}} C_{[j-1]} \big(\hat{\pi}_{[k]} - \hat{\pi}_{[k-1]} \big).$$

Введём обозначение:

$$P_{\pi[k]}^{-1} = M_{\pi 0} + \sum_{j=1}^{k} C_{[j-1]}^{\mathrm{T}} N_{[j]} N_{[j]}^{\mathrm{T}} C_{[j-1]}, \tag{2.57}$$

и продолжим прерванную цепочку равенств:

$$\sum_{j=1}^{k} C_{[j-1]}^{\mathrm{T}} N_{[j]} \left(y_{[j]} - N_{[j]}^{\mathrm{T}} \hat{\vartheta}_{[k,j-1]} \right) = \sum_{j=1}^{k} C_{[j-1]}^{\mathrm{T}} N_{[j]} \left(y_{[j]} - N_{[j]}^{\mathrm{T}} \hat{\vartheta}_{[k-1,j-1]} \right) -$$
$$- (P_{\pi[k]}^{-1} - M_{\pi 0}) \big(\hat{\pi}_{[k]} - \hat{\pi}_{[k-1]} \big) = C_{[k-1]}^{\mathrm{T}} N_{[k]} \left(y_{[k]} - N_{[k]}^{\mathrm{T}} \hat{\vartheta}_{[k-1,k-1]} \right) -$$
$$- (P_{\pi[k]}^{-1} - M_{\pi 0}) \big(\hat{\pi}_{[k]} - \hat{\pi}_{[k-1]} \big) + \underline{\sum_{j=1}^{k-1} C_{[j-1]}^{\mathrm{T}} N_{[j]} \left(y_{[j]} - N_{[j]}^{\mathrm{T}} \hat{\vartheta}_{[k-1,j-1]} \right)}.$$

Выразим в последнем соотношении подчёркнутую сумму через оценку $\hat{\pi}_{[k-1]}$. Для этого рассмотрим условие минимума функционала J_{π}^{D} в момент времени t_{k-1}:

$$\frac{\partial J_{\pi}^{D} \left[\hat{\pi}_{[k-1]} \right]}{\partial \hat{\pi}_{[k-1]}} = M_{\pi 0} \big(\hat{\pi}_{[k-1]} - \pi_0 \big) - \sum_{j=1}^{k} C_{[j-1]}^{\mathrm{T}} N_{[j]} \left(y_{[j]} - N_{[j]}^{\mathrm{T}} \hat{\vartheta}_{[k-1,j-1]} \right) = 0.$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{k} C^{\mathrm{T}}_{[j-1]} N_{[j]} \left(y_{[j]} - N^{\mathrm{T}}_{[j]} \hat{\vartheta}_{[k,j-1]} \right) = C^{\mathrm{T}}_{[k-1]} N_{[k]} \left(y_{[k]} - N^{\mathrm{T}}_{[k]} \hat{\vartheta}_{[k-1]} \right) - \\ - (P^{-1}_{\pi[k]} - M_{\pi 0}) \big(\hat{\pi}_{[k]} - \hat{\pi}_{[k-1]}\big) + M_{\pi 0} \big(\hat{\pi}_{[k-1]} - \pi_0\big) = \\ = C^{\mathrm{T}}_{[k-1]} N_{[k]} \left(y_{[k]} - N^{\mathrm{T}}_{[k]} \hat{\vartheta}_{[k-1]} \right) - P^{-1}_{\pi[k]} \big(\hat{\pi}_{[k]} - \hat{\pi}_{[k-1]}\big) + M_{\pi 0} \big(\hat{\pi}_{[k]} - \pi_0\big) \tag{2.58}$$

Подставим полученный результат в условие экстремума (2.58) и приведём подобные слагаемые:

$$P^{-1}_{\pi[k]} \big(\hat{\pi}_{[k]} - \hat{\pi}_{[k-1]}\big) - C^{\mathrm{T}}_{[k-1]} N_{[k]} \left(y_{[k]} - N^{\mathrm{T}}_{[k]} \hat{\vartheta}_{[k-1]} \right) = 0.$$

Отсюда получаем рекуррентное уравнение для оценки $\hat{\pi}$:

$$\hat{\pi}_{[k]} = \hat{\pi}_{[k-1]} + P_{\pi[k]} C^{\mathrm{T}}_{[k-1]} N_{[k]} \left(y_{[k]} - N^{\mathrm{T}}_{[k]} \hat{\vartheta}_{[k-1]} \right).$$

Построим рекуррентное уравнение для вычисления матрицы P_{π}. Имеем по определению:

$$P^{-1}_{\pi[k]} = P^{-1}_{\pi[k-1]} + C^{\mathrm{T}}_{[k-1]} N_{[k]} N^{\mathrm{T}}_{[k]} C_{[k-1]}, \tag{2.59}$$

откуда

$$P_{\pi[k]} = \big[E - P_{\pi[k-1]} C^{\mathrm{T}}_{[k-1]} N_{[k]} \big(N^{\mathrm{T}}_{[k]} C_{[k-1]} P_{\pi[k-1]} C^{\mathrm{T}}_{[k-1]} N_{[k]} + E\big)^{-1} N^{\mathrm{T}}_{[k]} C_{[k-1]}\big] P_{\pi[k-1]}.$$

Сведём вместе уравнения рекуррентного алгоритма идентификации по модифицированному методу наименьших квадратов:

$$\begin{cases} \hat{\pi}_{[k]} = \hat{\pi}_{[k-1]} + P_{\pi[k]} N_{C[k]} e_{[k]}, \\ P_{\pi[k]} = \big[E - P_{\pi[k-1]} N_{C[k]} \big(N^{\mathrm{T}}_{C[k]} P_{\pi[k-1]} N_{C[k]} + E\big)^{-1} N^{\mathrm{T}}_{C[k]}\big] P_{\pi[k-1]} \\ e_{[k]} = y_{[k]} - N^{\mathrm{T}}_{[k]} \hat{\vartheta}_{[k-1]}, \quad N_{C[k]} = C^{\mathrm{T}}_{[k-1]} N_{[k]}, \\ \hat{\pi}_{[0]} = \pi_0, \quad P_{\pi[0]} = M^{-1}_{\pi 0}. \end{cases} \tag{2.60}$$

Полученная система уравнений замкнута, если псевдоскорость $\dot{\hat{\pi}}$ интегрируема:

$$\hat{\vartheta}_{[k]} = \Theta(\hat{\pi}_{[k]}). \tag{2.61}$$

В противном случае соотношения (2.60) дополняются конечно разностной аппроксимацией дифференциального уравнения $\dot{\hat{\vartheta}} = C(\hat{\vartheta})\dot{\hat{\pi}}$.

Достаточное условие оптимальности оценок, вырабатываемых алгоритмом (2.60) имеет вид
$$\frac{\partial^2 J_\pi^D\left[\hat{\pi}_{[k]}\right]}{\partial\hat{\pi}_{[k]}^2} = P_{\pi[k]}^{-1} > 0.$$

В силу определяющего соотношения (2.57) для матрицы $P_{\pi[k]}^{-1}$ положительной определённости $P_{\pi[0]}^{-1} = M_{\pi 0} > 0$, это условие выполняется на каждой итерации расчёта оценок.

Замечание 1. Положив в соотношениях (2.60) $\hat{\vartheta} = \hat{\pi}$ и, следовательно, $C = E$, получаем известные уравнения рекуррентного метода наименьших квадратов без учёта параметрических связей [27; 32]:

$$\begin{cases} \hat{\vartheta}_{[k]} = \hat{\vartheta}_{[k-1]} + P_{[k]}N_{[k]}e_{[k]}, \\ P_{[k]} = \left[E - P_{[k-1]}N_{[k]}\left(N_{[k]}^{\mathrm{T}}P_{[k-1]}N_{[k]} + E\right)^{-1}N_{[k]}^{\mathrm{T}}\right]P_{[k-1]}, \\ e_{[k]} = y_{[k]} - N_{[k]}^{\mathrm{T}}\hat{\vartheta}_{[k-1]}. \end{cases} \tag{2.62}$$

Замечание 2. Алгоритм идентификации (2.60)–(2.61) является алгоритмом класса расширенного фильтра Калмана в дискретном времени (см. [31, стр. 407], а также [30, стр. 391], где употребляется термин «обобщённый фильтр Калмана»).

2.5 О сходимости оптимальных алгоритмов идентификации

Исследуем сходимость полученных алгоритмов идентификации параметров при малых отклонениях от истинных значений параметров модели 1.1, составляющих вектор ϑ. Линеаризовав уравнение связи $\psi(\vartheta) = 0$ в окрестности точки $\hat{\vartheta} = \vartheta$, получаем, что

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C_*\dot{\hat{\pi}}, \quad C_* = C(\vartheta).$$

Так как в линейном приближении матрица $C = C_* = \mathrm{const}$, то уравнения оптимального идентификатора в формах (2.17)–(2.19) и (2.28)–(2.30), уравнения субоптимального алгоритма (2.9)–(2.10), а также уравнения алгоритма идентификации по модифицированному метолу наименьших квадратов (2.52)–(2.53) совпадут. Вектор $\tilde{\vartheta} = \vartheta - \hat{\vartheta}$ ошибок оценок параметров для всех перечисленных алгоритмов примет вид

$$\dot{\tilde{\pi}} = -\left[C_*^{\mathrm{T}} M C_*\right]^{-1} C_*^{\mathrm{T}} N N^{\mathrm{T}} C_* \tilde{\pi}, \quad \dot{M} = N N^{\mathrm{T}}, \quad \tilde{\vartheta} = C_* \tilde{\pi}. \tag{2.63}$$

Таким образом, точность указанных алгоритмов в линейном приближении одинакова.

Соотношение (2.63) полностью совпадает с равнением ошибки (1.38), полученным в параграфе 1.4 при исследовании сходимости алгоритма наименьших квадратов с проекцией. Таким образом, достаточное условие сходимости ошибок оценок параметров по первому приближению для перечисленных выше алгоритмов идентификации состоит в бесконечном увеличении всех собственных значений матрицы $C_*^{\mathrm{T}} M(t) C_*$ при $t \to \infty$ (см. параграф 1.4). Воспользовавшись определяющим выражением (2.7) для матрицы M, запишем указанное условие сходимости как

$$\min \operatorname{eig} \int\limits_0^t C_*^{\mathrm{T}} N(\tau) N^{\mathrm{T}}(\tau) C_* \, \mathrm{d}\tau \to \infty, \quad t \to \infty, \tag{2.64}$$

где eig обозначает спектр собственных значений матрицы.

Перейдём теперь к исследованию сходимости по первому приближению оценок, вырабатываемых модифицированным алгоритмом наименьших квадратов в дискретном времени (2.60). В соответствии со введёнными выше предположениями имеем:

$$\tilde{\vartheta}_{[k]} = C_* \tilde{\pi}_{[k]}, \quad e_{[k]} = y_{[k]} - N_{[k]}^{\mathrm{T}} \hat{\vartheta}_{[k-1]} = N_{[k]}^{\mathrm{T}} \tilde{\vartheta}_{[k-1]} = N_{[k]}^{\mathrm{T}} C_* \tilde{\pi}_{[k-1]}.$$

В соответствии с этими соотношениями и рекуррентным уравнением для $\hat{\pi}_{[k]}$ алгоритма (2.60), уравнение ошибок оценок независимых параметров $\tilde{\pi}_{[k]}$ имеет вид:

$$\tilde{\pi}_{[k]} = \tilde{\pi}_{[k-1]} - P_{\pi[k]} C_*^{\mathrm{T}} N_{[k]} N_{[k]}^{\mathrm{T}} C_* \tilde{\pi}_{[k-1]},$$

$$P_{\pi[k]}^{-1} \tilde{\pi}_{[k]} = \left(P_{\pi[k]}^{-1} - C_*^{\mathrm{T}} N_{[k]} N_{[k]}^{\mathrm{T}} C_*\right) \tilde{\pi}_{[k-1]},$$

что в соответствии с рекуррентным уравнением (2.59) для обратной матрицы усиления $P^{-1}_{\pi[k]}$, приобретает вид

$$P^{-1}_{\pi[k]}\tilde{\pi}_{[k]} = P^{-1}_{\pi[k-1]}\tilde{\pi}_{[k-1]}.$$

Таким образом, вектор ошибок оценок независимых параметров имеет вид

$$\tilde{\pi}_{[k]} = P_{\pi[k]}P^{-1}_{\pi[0]}\tilde{\pi}_{[0]}.$$

Для затухания всех компонент такого вектора $\tilde{\pi}_{[k]}$ достаточно, чтобы все собственные значения матрицы $P^{-1}_{\pi[k]}$ стремились к бесконечности при неограниченном увеличении количества итераций k. Обратившись к формуле (2.57), перепишем это условие в следующей форме:

$$\min \operatorname{eig} \sum_{j=1}^{k} C_*^{\mathrm{T}} N_{[j]} N_{[j]}^{\mathrm{T}} C_* \to \infty, \quad k \to \infty. \tag{2.65}$$

Использование полученных достаточных условий сходимости оценок (2.64) и (2.65) осложняется тем, что матрица $C_* = C(\vartheta)$ неизвестна. Таким образом, проверку условий (2.64) и (2.65) необходимо проводить, найдя C_* отдельно для каждого из допустимых наборов значений искомых параметров. Аналогично следует поступить и проверяя достаточные условия сходимости градиентного идентификатора с проекцией (1.21), полученным в подпараграфе 1.2.3.

2.6 Взаимосвязь задач нелинейного оценивания и идентификации параметров со связями

Рассмотрим задачу идентификации параметров нелинейной параметрической модели вида

$$y = N^{\mathrm{T}}\Theta(\varpi), \tag{2.66}$$

где y — l-мерный выходной вектор параметрической модели; N — сигнальная матрица; Θ — s-мерная гладкая вектор-функция от $(s-r)$-мерного вектора неизвестных постоянных параметров $\boldsymbol{\varpi}$.

Рассмотрим некоторые алгоритмы идентификации параметров модели (2.66). Построим вектор оценок параметров $\widehat{\boldsymbol{\varpi}}$ их условия минимума интегральной квадратичной ошибки (2.1), выражение которой в рассматриваемой задаче имеет вид

$$J = \frac{1}{2}\int_0^t \left\| y(\tau) - N^{\mathrm{T}}(\tau)\Theta\big(\widehat{\boldsymbol{\varpi}}(t)\big)\right\|_2^2 \mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\left\|\Theta\big(\widehat{\boldsymbol{\varpi}}(t)\big) - \Theta\big(\boldsymbol{\varpi}_0\big)\right\|_{M_0}^2,$$

где $\boldsymbol{\varpi}_0$ — постоянный вектор, играющий роль начального условия $\widehat{\boldsymbol{\varpi}}(0) = \boldsymbol{\varpi}_0$ для алгоритма идентификации; $M_0 = M_0^{\mathrm{T}} > 0$ — постоянная матрица. Здесь $\|...\|_{M_0}^2 = (...)^{\mathrm{T}} M_0 (...)$ — квадрат взвешенной евклидова нормы.

Дифференцирование по времени необходимого условия экстремума функционала $\partial J / \partial \widehat{\boldsymbol{\varpi}} = 0$ при водит к уравнениям оптимального идентификатора параметров, в точности совпадающими с (2.16), (2.18) и (2.19) при

$$\hat{\pi} = \widehat{\boldsymbol{\varpi}}, \quad \hat{\vartheta} = \Theta(\widehat{\boldsymbol{\varpi}}), \quad C = \frac{\partial\Theta}{\partial\widehat{\boldsymbol{\varpi}}^{\mathrm{T}}}.$$

Считая, что зависимость $\Theta(\boldsymbol{\varpi})$ есть результат наложения r независимых связей на на линейную параметрическую модель

$$y = N^{\mathrm{T}}\Theta$$

с независимыми элементами вектора Θ, уравнения оптимального идентификатора параметров нелинейной модели (2.66) можно записать в терминах $(s-r)$-мерного вектора $\widehat{\boldsymbol{\varpi}}$ и r-мерного вектора множителей связей (см. (2.25), (2.29) и (2.30)). Это приводит к снижению размерности оптимального алгоритма идентификации.

Также отметим, что представление нелинейной параметрической модели (2.66) как линейной с неявными связями позволяет построить нахождения вектора оценок $\widehat{\boldsymbol{\varpi}}$ класс идентификаторов с проекцией (см. параграф 1.3). Оценки параметров, вырабатываемые такими алгоритмами такого класса инвариантны с точки зрения величин элементов вектора Θ относительно взаимно однозначной замены компонент $\boldsymbol{\varpi}$. Совершение последней, таким образом, не сказывается на свойствах сходимости или расходимости оценок.

Итак, рассмотрение зависимости $\Theta(\boldsymbol{\varpi})$ в параметрической модели (2.66) как результата наложения параметрических связей позволяет получить новые классы алгоритмов нелинейного оценивания.

Выводы по главе 2

В настоящей главе приведено решение задачи построения алгоритма идентификации параметров, оптимальном по методу наименьших квадратов, при наличии параметрических связей. Приводятся несколько способов решения такой задачи, а также некоторые субоптимальные алгоритмы идентификации. Установлено, что размерность оптимального алгоритма идентификации, представленного в псевдоскоростях и в множителях связей, не зависит от их количества связей и совпадает с размерностью вектора коэффициентов линейной параметрической модели. Проведена аналогия между задачами оптимальной идентификации со связями и задачами динамики механических систем с сервосвязями. Разработан модифицированные метод наименьших квадратов, позволяющий значительно уменьшить размерность оптимального алгоритма идентификации. Проведено исследование сходимости построенных алгоритмов в линейном приближении.

Материалы главы опубликованы в работах [14; 15].

3 Идентификация параметров математической модели и установившихся колебаний кольцевого резонатора волнового твердотельного гироскопа

Волновые твердотельные гироскопы (ВТГ) являются одними из перспективных и востребованных приборов в навигационных системах среднего и низкого классов точности [76]. Принцип работы ВТГ основан на инерции упругих стоячих волн колебаний вращающихся осесимметричных оболочек [77; 78].

Говоря о развитии теории ВТГ, нельзя не упомянуть результаты, полученные В. Ф. Журавлёвым и Д. М. Климовым. Среди них первое теоретическое описание явления инертных упругих волн во вращающемся упругом кольце [79], влияние медленно меняющейся угловой скорости основания и малых возмущений на поведение стоячих волн [77; 78].

Отдельно отметим работу В. Ф. Журавлёва [80], в которой показано, что все принципиальные вопросы теории вибрационных и волновых твердотельных гироскопов могут быть исследованы в рамках класса уравнений, описывающих динамику классического маятника Фуко.

В работах [81–86] для исследования динамики чувствительных элементов гироскопов обобщённого маятника Фуко с малыми возмущающими силами и технологическими погрешностями изготовления применяется метод осреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского. Такой подход позволяет получить уравнения для переменных, описывающих медленную эволюцию колебаний резонатора под влиянием перечисленных факторов.

С целью повышения соотношения полезного сигнала и шума в первичной измерительной информации гироскопа в некоторых случаях производится увеличение амплитуды управляющих воздействий, возбуждающих колебания резонатора [85]. Это приводит к возрастанию влияния нелинейных эффектов на динамику чувствительного элемента ВТГ и, как следствие, «срыву» колебаний, нерегулярному и хаотическому движению чувствительного элемента [87–89]. Перечисленные явления существенно снижают точность прибора.

Подробное исследование влияния нелинейных упругих и электростатических сил на динамику гироскопов класса обобщённого маятника Фуко проведено в монографии И. В. Меркурьева и В. В. Подалкова [81], статьях [83; 85; 86].

Одним из способов парировать негативное влияние на точность гироскопов различного рода нелинейностей, вязкоупругой анизотропии материала резонатора, технологических погрешностей его изготовления является алгоритмическая компенсация перечисленных эффектов путём специального формирования управляющих воздействий. Синтез такого управления требует знания уравнений движения резонатора и значений коэффициентов в этих уравнениях.

В работах [82;84;90] предлагаются алгоритмы идентификации параметров волновых твердотельных гироскопов. Для построения параметрических моделей используются уравнения динамики резонаторов в переменных, описывающих медленную эволюцию колебаний. В статье [82] рассматривается модель колебаний чувствительного элемента под действием линейных сил общего вида, а в [84; 90] к ним добавляются нелинейные консервативные силы специального вида. Исходными данными для построения оценок параметров служат величины, описывающие стационарные режимы колебаний для различных значений частот задающего воздействия. Идентификация параметров проводится методом наименьших квадратов.

Из иностранных работ, посвящённых идентификации параметров математических моделей колебаний чувствительных элементов гироскопов, можно привести [91–93]. Общей их чертой является использование упрощённой физической модели прибора — точки в линейном двухосном пружинном подвесе на вращающемся основании — для решения задачи параметрической идентификации. Однако, методы её решения разнообразны.

В работе [91] алгоритм рекуррентного оценивания параметров линейной модели колебаний микрогироскопа, использующий метод инструментальных переменных (см. [27, стр. 174]). В качестве исходных данных берутся экспериментальные частотные характеристики прибора.

В статье [93] предлагается адаптивный алгоритм параметрической идентификации с настраиваемой моделью явного вида (см. [22, стр. 332]) для линейной модели микрогироскопа. Синтез алгоритма проведён методом функций Ляпунова.

Для получения оценок параметров гироскопа в работе [92] задача идентификации сводится к обобщённой задаче на собственные значения (*generalized eigenvalue problem*) и решается методами теории линейных матричных неравенств.

Рассмотренные выше публикации демонстрируют, что достаточно часто исходной информацией в задаче определения параметров гироскопов используются величины, описывающие установившиеся движения чувствительных элементов. Таким образом, задача определения этих величин по измерениям колебаний также представляет интерес с точки зрения разработки алгоритмов идентификации.

Алгоритмы адаптивной идентификации параметров мультисинусоидальных сигналов — частоты, амплитуд и фаз гармоник — изложены в работе [94]. Оценивание частот ω_j гармонических составляющих сигнала в [94] производится из соображений, что величины всех ω_j являются независимыми.

В статье [95] задача идентификации частоты синусоидального сигнала сводится к задаче построения наблюдателя вектора состояния для нелинейной системы.

Настоящая глава посвящена решению задачи идентификации параметров нелинейной математической модели динамики упругого резонатора гироскопа класса обобщённого маятника Фуко с кубическими консервативными силами общего вида. В качестве исходной информации используются результаты наблюдения установившихся вынужденных нелинейных колебаний. Решены вспомогательные задачи идентификации параметров таких колебаний, аппроксимируемых двумя гармониками ряда Фурье. Установлено, что в перечисленных задачах присутствуют параметрические связи, которые были учтены при нахождении оценок.

3.1 Описание исследуемой системы

3.1.1 Физическая модель системы

Исследуемая система представляет собой резонатор волнового твердотельного гироскопа, выполненный в форме тонкого упругого кольца *1*, связанного торсионнами *2* с основанием *3* (см. рисунок 3.1а). На кромку кольца нанесены восемь проводящих участков $O_iO'_i$, $i = \overline{1,8}$ равной длины, не связанные друг с другом гальванически (см. рисунок 3.1б). Резонатор размещён в постоянном магнитном поле $\overline{B}$, считающимся однородным. Силы, действующие со стороны этого поля на участки O_iO_i' с током, возбуждают колебания системы.

Исследуемый гироскоп находится на неподвижном основании, колебания резонатора возбуждаются по второй основной форме. В таком одномодовом приближении радиальное перемещение упругого элемента кольца Δ_R определяется соотношением:

$$\Delta_R(\varphi,t) = x_1(t)\cos 2\varphi + x_2(t)\sin 2\varphi,$$

где φ — полярная угловая координата упругого элемента, x_1 и x_2 — функция времени, описывающая первичные и вторичные колебания резонатора по второй основной форме. Нормальные формы первичных и вторичных колебаний (стоячие волны)

$$\Delta_R^{(1)}(\varphi,t) = x_1(t)\cos 2\varphi, \quad \Delta_R^{(2)}(\varphi,t) = x_2(t)\sin 2\varphi$$

повёрнуты друг относительно друга на угол 45° (см. рисунок 3.1в).

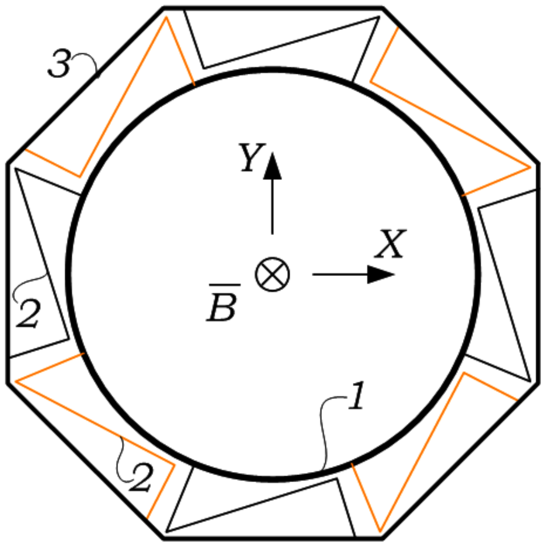
Поясним физический принцип возбуждения и наблюдения колебаний в рассматриваемой системе. На проводящий участок O_1O_1' подаётся синусоидальное напряжение U с частотой ω, близкой к резонансной частоте ω_* второй формы колебаний кольца:

$$U = U_{\max}\sin\omega t,$$

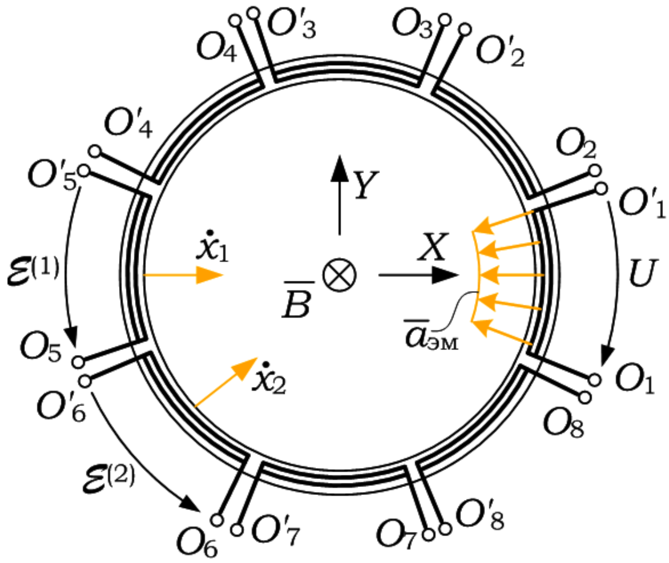
где $U_{\max}$— амплитуда напряжения.

Колебания резонатора возникают из-за действия на проводник O_1O_1' силы со стороны магнитного поля, распределённой по участку O_1O_1' с интенсивностью $\overline{a}_{\text{эм}}(\varphi)$ (см. рисунок 3.1б). В каждом проводященм участке на кромке колеблющегося кольца наводятся электродвижущие силы (ЭДС) электромагнитной индукции. Измерив такую ЭДС $\mathcal{E}^{(1)}$ на диаметрально противоположном участке O_5O_5', можно получить информацию о *скорости* $\dot{x}_1$ первичных колебаний по второй основной форме кольца, а измерив ЭДС $\mathcal{E}^{(2)}$ на соседнем участке O_6O_6' — о скорости вторичных колебаний $\dot{x}_2$.

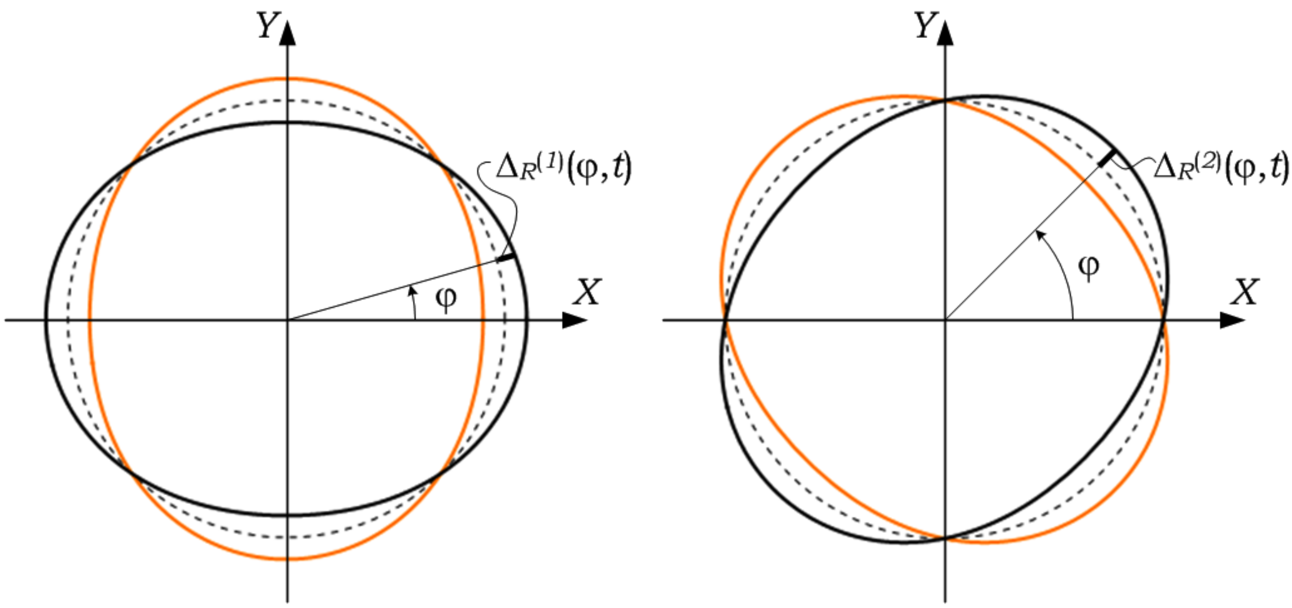
Отметим, что из-за возникновения в проводнике O_1O_1' ЭДС индукции, напряжение U и ток на этом участке будут отличаться по фазе в установившемся режиме. Следовательно, результирующая сила, действующая на O_1O_1' со сторо-



а) Схема резонатора в упругом подвесе



б) Возбуждение колебаний резонатора



в) Нормальные формы колебаний кольцевого резонатора $\Delta_R^{(1)}$ и $\Delta_R^{(2)}$

Рисунок 3.1 — Кольцевой резонатор волнового твердотельного гироскопа

ны магнитного поля, будет изменяться, приблизительно, как взвешенная сумма $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ при чисто синусоидальном характере напряжения U.

Описанная процедура использовалась для возбуждения первичных колебаний резонатора $\Delta_R^{(1)}$. Вторичные колебания $\Delta_R^{(2)}$ возникают из-за вязкоупругой анизотропии материала резонатора, гироскопического характера сил, действующих на движущиеся заряженные частицы со стороны магнитного поля, нелинейной упругости материала резонатора и прочих факторов.

3.1.2 Математическая модель нелинейных колебаний резонатора в одномодовом приближении

Рассмотрим математическую модель колебаний кольцевого резонатора волнового твердотельного гироскопа в одномодовом приближении. Эволюция переменных x_1 и x_2, описывающих колебания резонатора по второй основной форме, определяется системой уравнений класса обобщённого маятника Фуко с малыми возмущениями:

$$\underset{2\times1}{\ddot{x}} + \omega_* \cdot \underset{2\times2}{H_\zeta} \cdot \underset{2\times1}{\dot{x}} + \omega_*^2 \cdot \big(\underset{2\times2}{E} + \underset{2\times2}{H_\varkappa}\big) \cdot \underset{2\times1}{x} - \underset{2\times1}{f(x)} = \underset{2\times1}{u}\,, \tag{3.1}$$

где x — столбец обобщённых координат; u — столбец управляющих воздействий; $\omega_* = 11523{,}33$ Гц — номинальная резонансная частота; H_ζ — безразмерная матрица малых скоростных линейных сил; $H_\varkappa$ — безразмерная матрица малых возмущающих позиционных сил; f — столбец нелинейных позиционных сил:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad H_\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 + \zeta_{2c} & \zeta_{2s} + \zeta_3 \\ \zeta_{2s} - \zeta_3 & \zeta_1 - \zeta_{2c} \end{pmatrix}, \quad H_\varkappa = \begin{pmatrix} \varkappa_1 + \varkappa_{2c} & \varkappa_{2s} + \varkappa_3 \\ \varkappa_{2s} - \varkappa_3 & \varkappa_1 - \varkappa_{2c} \end{pmatrix}.$$

Кроме номинальной резонансной частоты ω_* все коэффициенты в уравнении (3.1) неизвестны и подлежат определению. Параметры модели (3.1) считаются постоянными.

Рассмотрим режим установившихся колебаний резонатора под действием синусоидального воздействия с частотой ω:

$$u = \omega_*^2 \cdot (u_q \cos \omega t + u_p \sin \omega t), \tag{3.2}$$

где $u_q = (u_{q1}\ \ u_{q2})^{\mathrm{T}}$ и $u_p = (u_{p1}\ \ u_{p2})^{\mathrm{T}}$ — неизвестные постоянные столбцы.

Для описания установившихся колебаний резонатора будем использовать приближение вектора x первой гармоникой ряда Фурье:

$$x \approx q \cos \omega t + p \sin \omega t, \tag{3.3}$$

где $q = (q_1\ \ q_2)^{\mathrm{T}}$ и $p = (p_1\ \ p_2)^{\mathrm{T}}$ — постоянные столбцы коэффициентов Фурье.

Приблизим значения нелинейных сил в режиме установившихся колебаний одной гармоникой по:

$$f(x) \approx f(q\cos\omega t + p\sin\omega t) \approx -\omega_*^2 \cdot \big(f_q(q,p)\cos\omega t + f_p(q,p)\sin\omega t\big). \tag{3.4}$$

Подставив соотношения (3.2), (3.3) и (3.4) в уравнения колебаний (3.1), после перегруппировки слагаемых получаем:

$$\begin{aligned}\big[-\omega^2 q + \omega_*\omega H_\zeta\, p + \omega_*^2(E + H_\varkappa)q + \omega_*^2 f_q(q,p)\big]\cos\omega t +&\\ +\big[-\omega^2 p - \omega_*\omega H_\zeta\, q + \omega_*^2(E + H_\varkappa)p + \omega_*^2 f_p(q,p)\big]\sin\omega t =&\\ = \omega_*^2 \cdot (u_q\cos\omega t + u_p\sin\omega t).&\end{aligned}$$

Разделив обе части полученного уравнения на ω_*^2 и приравняв коэффициенты при линейно независимых функциях $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$, получаем систему уравнений, которым удовлетворяют векторы амплитуд установившихся косинусоидальных и синусоидальных колебаний q и p:

$$\begin{cases} -(1+\delta_\omega)^2 q + (1+\delta_\omega)H_\zeta\, p + (E + H_\varkappa)q + f_q(q,p) = u_q,\\ -(1+\delta_\omega)^2 p - (1+\delta_\omega)H_\zeta\, q + (E + H_\varkappa)p + f_p(q,p) = u_p,\end{cases} \tag{3.5}$$

где δ_ω — относительная частотная расстройка:

$$\delta_\omega = \frac{\omega}{\omega_*} - 1.$$

В рассматриваемой задаче производилось экспериментальное наблюдение вынужденных колебаний с такими частотами, что $\delta_\omega < 10^{-2}$. Таким образом, уравнения (3.5) можно переписать, пренебрегая квадратом частотной расстройки δ_ω^2:

$$\begin{cases} 2\delta_\omega q = (1+\delta_\omega)H_\zeta\, p + H_\varkappa\, q + f_q(q,p) - u_q,\\ 2\delta_\omega p = -(1+\delta_\omega)H_\zeta\, q + H_\varkappa\, p + f_p(q,p) - u_p.\end{cases} \tag{3.6}$$

Систему уравнений для амплитуд установившихся колебаний резонатора (3.6) будем использовать в качестве параметрической модели в задаче идентификации параметров нелинейной системы (3.1).

3.2 Идентификация параметров модели резонатора с нелинейными консервативными силами

3.2.1 Параметрическая модель системы с кубическими силами общего вида

Достаточно часто при исследовании колебаний резонаторов волновых твердотельных гироскопов возникает модель нелинейных сил сферического типа [81; 84; 85; 90]. Их потенциальная энергия имеет следующий вид:

$$\Pi_f = \nu_f \cdot \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2,$$

где ν_f — некоторый коэффициент.

Для того, чтобы учесть в модели резонатора неидеальность нелинейных упругих свойств материала резонатора, рассмотрим более общую модель сил потенциальной энергией Π_f, являющейся однородной формой четвёртого порядка:

$$\Pi_f = \frac{\omega_*^2}{24}\left(\nu_{40}x_1^4 + 4\nu_{31}x_1^3x_2 + 6\nu_{22}x_1^2x_2^2 + 4\nu_{13}x_1x_2^3 + \nu_{04}x_2^4\right).$$

Столбец нелинейных сил, таким образом, имеет вид:

$$f(x) = -\frac{\partial \Pi_f}{\partial x} = -\frac{\omega_*^2}{6}\begin{pmatrix} \nu_{40}x_1^3 + 3\nu_{31}x_1^2x_2 + 3\nu_{22}x_1x_2^2 + \nu_{13}x_2^3 \\ \nu_{31}x_1^3 + 3\nu_{22}x_1^2x_2 + 3\nu_{13}x_1x_2^2 + \nu_{04}x_2^3 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Найдём коэффициенты Фурье для первой гармоники разложения столбца нелинейных сил $f(x)$ в режиме установившихся колебаний резонатора.

Выпишем первые гармоники ряда Фурье для одночленов, входящих в выражение (3.7):

$$x_i^3 \approx \frac{3}{4}\left[q_i g_{ii}\cos\omega t + p_i g_{ii}\sin\omega t\right], \tag{3.8}$$

$$x_1^2 x_2 \approx \frac{1}{4}\big(2q_1 g_{12} + q_2 g_{11}\big)\cos\omega t + \frac{1}{4}\big(2p_1 g_{12} + p_2 g_{11}\big)\sin\omega t, \qquad (3.9)$$

$$x_1 x_2^2 \approx \frac{1}{4}\big(2q_2 g_{12} + q_1 g_{22}\big)\cos\omega t + \frac{1}{4}\big(2p_2 g_{12} + p_1 g_{22}\big)\sin\omega t, \qquad (3.10)$$

где коэффициенты g_{ij}, $i{,}j = \overline{1{,}2}$ вычисляются по формуле

$$g_{ij} = p_i p_j + q_i q_j.$$

Отметим, что g_{11} и g_{22} — суть квадраты амплитуд первичных и вторичных колебаний соответственно.

В соответствии с формулами (3.8)–(3.10), нормированные столбцы коэффициентов Фурье f_q и f_p для первой гармоники функции $f(q\cos\omega t + p\sin\omega t)$ в формуле (3.4) имеют следующий вид:

$$f_q = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} \nu_{40} q_1 g_{11} + \nu_{31}\big(2q_1 g_{12} + q_2 g_{11}\big) + \nu_{22}\big(2q_2 g_{12} + q_1 g_{22}\big) + \nu_{13} q_2 g_{22} \\ \nu_{31} q_1 g_{11} + \nu_{22}\big(2q_1 g_{12} + q_2 g_{11}\big) + \nu_{13}\big(2q_2 g_{12} + q_1 g_{22}\big) + \nu_{04} q_2 g_{22} \end{pmatrix}, \qquad (3.11)$$

$$f_p = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} \nu_{40} p_1 g_{11} + \nu_{31}\big(2p_1 g_{12} + p_2 g_{11}\big) + \nu_{22}\big(2p_2 g_{12} + p_1 g_{22}\big) + \nu_{13} p_2 g_{22} \\ \nu_{31} p_1 g_{11} + \nu_{22}\big(2p_1 g_{12} + p_2 g_{11}\big) + \nu_{13}\big(2p_2 g_{12} + p_1 g_{22}\big) + \nu_{04} p_2 g_{22} \end{pmatrix}, \qquad (3.12)$$

Подставим выражения (3.11) и (3.12) в систему уравнений для коэффициентов Фурье установившихся первичных и вторичных колебаний (3.6) и перепишем её в векторно-матричном виде виде:

$$y = N^{\mathrm{T}} \vartheta, \qquad (3.13)$$

где выходной вектор параметрической модели определяется соотношением

$$y = \begin{pmatrix} 2\delta_\omega q \\ 2\delta_\omega p \end{pmatrix} = 2\delta_\omega \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & p_1 & p_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad (3.14)$$

а блочные формы сигнальной матрицы N и вектора параметров ϑ имеют вид

$$N^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} N_\varkappa^{\mathrm{T}} & (1+\delta_\omega) N_\zeta^{\mathrm{T}} & N_u^{\mathrm{T}} & N_\nu^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \quad \vartheta^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \vartheta_\varkappa^{\mathrm{T}} & \vartheta_\zeta^{\mathrm{T}} & \vartheta_u^{\mathrm{T}} & \vartheta_\nu^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \qquad (3.15)$$

где:

$$N_{\varkappa}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} q_1 & q_1 & q_2 & q_2 \\ q_2 & -q_2 & q_1 & -q_1 \\ p_1 & p_1 & p_2 & p_2 \\ p_2 & -p_2 & p_1 & -p_1 \end{pmatrix}, \quad \vartheta_{\varkappa} = \begin{pmatrix} \varkappa_1 \\ \varkappa_{2c} \\ \varkappa_{2s} \\ \varkappa_3 \end{pmatrix}; \tag{3.16}$$

$$N_{\zeta}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} p_1 & p_1 & p_2 & p_2 \\ p_2 & -p_2 & p_1 & -p_1 \\ -q_1 & -q_1 & -q_2 & -q_2 \\ -q_2 & q_2 & -q_1 & q_1 \end{pmatrix}, \quad \vartheta_{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_{2c} \\ \zeta_{2s} \\ \zeta_3 \end{pmatrix}; \tag{3.17}$$

$$N_{u}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vartheta_{u} = \begin{pmatrix} u_{q1} \\ u_{q2} \\ u_{p1} \\ u_{p2} \end{pmatrix}; \tag{3.18}$$

$$N_{\nu}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} q_1 g_{11} & 2q_1 g_{12} + q_2 g_{11} & 2q_2 g_{12} + q_1 g_{22} & q_2 g_{22} & 0 \\ 0 & q_1 g_{11} & 2q_1 g_{12} + q_2 g_{11} & 2q_2 g_{12} + q_1 g_{22} & q_2 g_{22} \\ p_1 g_{11} & 2p_1 g_{12} + p_2 g_{11} & 2p_2 g_{12} + p_1 g_{22} & p_2 g_{22} & 0 \\ 0 & p_1 g_{11} & 2p_1 g_{12} + p_2 g_{11} & 2p_2 g_{12} + p_1 g_{22} & p_2 g_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

$$\vartheta_{\nu}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \nu_{40} & \nu_{31} & \nu_{22} & \nu_{13} & \nu_{04} \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Соотношения (3.13)–(3.20) задают линейную параметрическую модель резонатора, которая будет использоваться для получения оценок параметров, составляющих семнадцатимерный вектор-столбец ϑ.

3.2.2 Нахождение оценок параметров

В качестве исходных данных для получения оценок параметров модели (3.1) используем набор величин $q(\omega_k)$ и $p(\omega_k)$, полученных в результате экспериментального наблюдения вынужденных колебаний резонатора, возбуждённых по второй основной форме с частотами $\omega = \omega_k$, $k = \overline{1{,}184}$. Сначала была задана частота $\omega_1 = 11636{,}0$ Гц, далее эта величина уменьшалась с шагом $h_\omega = 0{,}2$ Гц до значения $\omega_{96} = 11617{,}0$ Гц, затем — увеличивалась с тем же шагом. Эта серия экспериментов позволила наблюдать явление срыва колебаний — скачкообразного изменения их амплитуды и фазы при малом изменении частоты, свидетельствующего о существенно нелинейном характере рассматриваемой задачи.

Из-за электромагнитной природы непосредственно измеряемых величин, особенностей процесса измерения и сохранения информации, значения q_1, p_1, q_2 и p_2 принимаются безразмерными.

Оценим параметры рассматриваемой системы, используя метод наименьших квадратов. Выпишем уравнения параметрической модели (3.13)–(3.20) для всех значений частот колебаний ω_k, и составим переопеделённую систему

$$\begin{cases} y(\omega_1) = N^{\mathrm{T}}(\omega_1)\vartheta, \\ \qquad\vdots \\ y(\omega_k) = N^{\mathrm{T}}(\omega_k)\vartheta, \\ \qquad\vdots \end{cases}$$

Запишем её с помощью блочных матриц:

$$\mathcal{Y} = \mathcal{N}^{\mathrm{T}}\vartheta, \quad \mathcal{Y} = \begin{bmatrix} y(\omega_1) \\ \vdots \\ y(\omega_k) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} N^{\mathrm{T}}(\omega_1) \\ \vdots \\ N^{\mathrm{T}}(\omega_k) \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Найдём вектор оценок параметров $\hat{\vartheta}$ как нормальное псевдорешение полученной переопределённой системы, то есть из условия минимума квадратичной невязки:

$$\hat{\vartheta} = \arg\min \left\| \mathcal{Y} - \mathcal{N}^{\mathrm{T}}\hat{\vartheta} \right\|_2^2 = \left[\mathcal{N}\mathcal{N}^{\mathrm{T}}\right]^{-1}\mathcal{N}\mathcal{Y}. \tag{3.21}$$

Изложенный способ построения оценок предполагает решение системы из 936 уравнений с 17 неизвестными. Все необходимые для этого вычисления были проведены с помощью оператора *LeastSquares* системы *Mathematica*.

Оценки параметров, найденные методом наименьших квадратов по формуле (3.21) равны:

$$\hat{\zeta}_1 = 2{,}56{\cdot}10^{-4}, \quad \hat{\zeta}_{2c} = 0{,}28{\cdot}10^{-4}, \quad \hat{\zeta}_{2s} = 0{,}40{\cdot}10^{-4}, \quad \hat{\zeta}_3 = 0{,}39{\cdot}10^{-4},$$

$$\hat{\varkappa}_1 = 1{,}88{\cdot}10^{-2}, \quad \hat{\varkappa}_{2c} = -8{,}40{\cdot}10^{-4}, \quad \hat{\varkappa}_{2s} = -3{,}15{\cdot}10^{-4}, \quad \hat{\varkappa}_3 = -0{,}52{\cdot}10^{-4},$$

$$\hat{u}_{q1} = -9{,}85{\cdot}10^{-5}, \quad \hat{u}_{q2} = 1{,}06{\cdot}10^{-5}, \quad \hat{u}_{p1} = -5{,}72{\cdot}10^{-5}, \quad \hat{u}_{p2} = 1{,}10{\cdot}10^{-5},$$

$$\hat{\nu}_{40} = -0{,}055, \quad \hat{\nu}_{31} = 0{,}011, \quad \hat{\nu}_{22} = -0{,}032, \quad \hat{\nu}_{13} = 0{,}035, \quad \hat{\nu}_{04} = 0{,}328.$$

Используя перечисленные оценки параметров, восстановим зависимости коэффициентов Фурье установившихся первичных и вторичных колебаний $\hat{q}_j(\omega)$ и $\hat{p}_j(\omega)$, $j = \overline{1{,}2}$, от частоты внешнего воздействия ω, решив нелинейную алгебраическую систему (3.6), (3.11) и (3.12).

На рисунке 3.2 представлены графики экспериментальных зависимостей $q_j(\omega)$ и $p_j(\omega)$, $j = \overline{1{,}2}$, а также их аппроксимаций $\hat{q}_j(\omega)$ и $\hat{p}_j(\omega)$, построенные для найденных оценок параметров. Сравнение указанных зависимостей показывает, что выбранная математическая модель нелинейных динамики резонатора с адекватно описывает результаты экспериментального наблюдения его колебаний.

В работах [81;84;85;90] расмматриваются математические модели колебаний резонаторов волновых твердотельных гироскопов с нелинейными силами $f(x)$, потенциальная энергия которых имеет вид

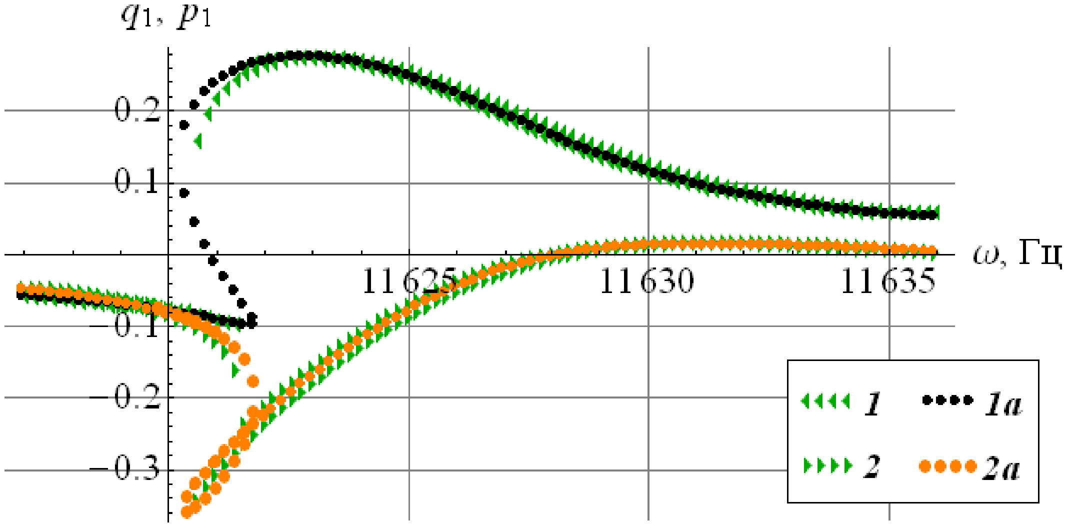
$$\Pi_f = \nu_f \cdot \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2.$$

Уравнения движения (3.1) с нелинейными силами

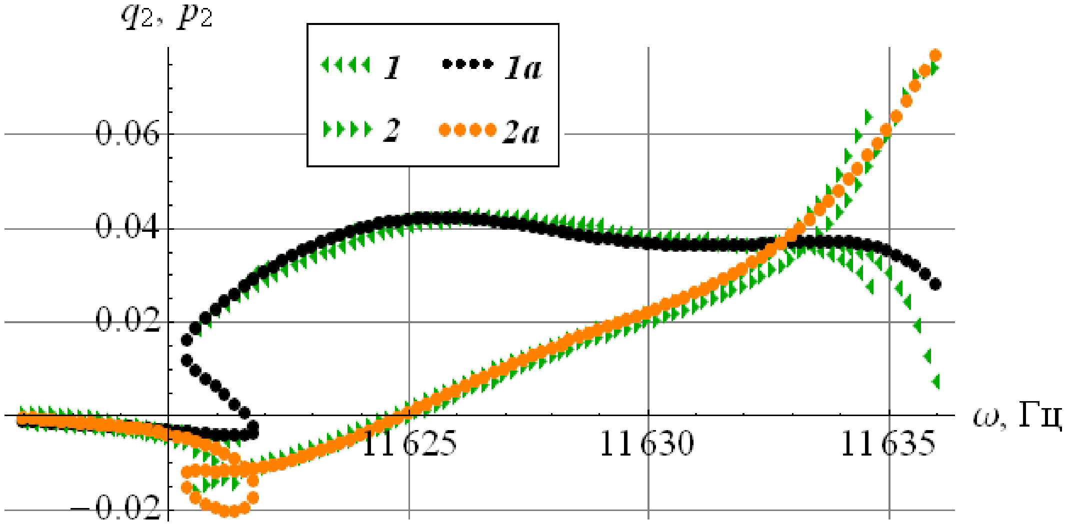
$$f(x) = -\frac{\partial \Pi_f}{\partial x} = -4\nu_f(x_1^2 + x_2^2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{\cdot} \tag{3.22}$$

хуже описывают результаты эксперимента. В этом можно убедится, решив задачу идентификации параметров модели (3.1), (3.22).

Квадратичная ошибка прогноза параметрической модели с кубической нелинейностью общего вида (3.7) при найденных ранее оценках параметров,



а) Коэффициенты Фурье q_1 и p_1 вторичных колебаний



б) Коэффициенты Фурье q_2 и p_2 вторичных колебаний

1 — экспериментальные значения q_j*;* *1a — расчётные значения* $\hat{q}_j$*;*

2 — экспериментальные значения p_j*;* *2a — расчётные значения* $\hat{p}_j$*.*

Рисунок 3.2 — Экспериментальные и расчётные зависимости параметров установившихся колебаний резонатора от частоты внешнего воздействия ω

равна

$$\left\| \mathcal{Y} - \mathcal{N}^{\mathrm{T}} \hat{\vartheta} \right\|_2^2 = 1{,}15 \cdot 10^{-4}.$$

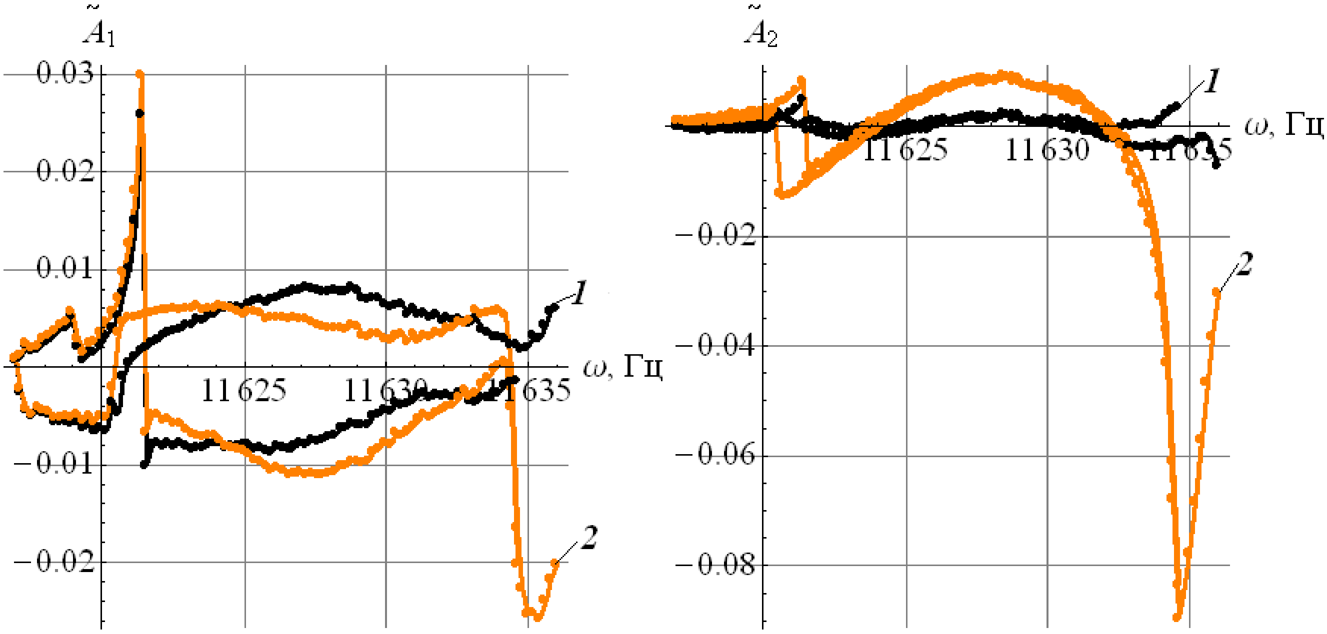
Аналогичная величина для модели нелинейных сил специального вида (3.22) больше:

$$\left\| \mathcal{Y} - \mathcal{N}^{\mathrm{T}} \hat{\vartheta} \right\|_2^2 = 1{,}62 \cdot 10^{-4}.$$

Ошибки расчётных амплитудно-частотных характеристик (АЧХ)

$$\widetilde{A}_j = \sqrt{q_j^2 + p_j^2} - \sqrt{\hat{q}_j^2 + \hat{p}_j^2}, \quad j = \overline{1,2},$$

построенные для обоих рассматриваемых видов нелинейностей, представлены на рисунке 3.3. Приведённые на нём графики демонстрируют, что в конце рассматриваемого диапазона частот ω модель с нелинейными силами (3.22) значительно хуже описывает экспериментальные данные, чем модель (3.1), (3.7). Особенно сильно снижается точность описания вторичных колебаний (см. рисунок 3.3б).



а) Ошибки $\widetilde{A}_1$ расчётных АЧХ первичных колебаний

б) Ошибки $\widetilde{A}_2$ расчётных АЧХ вторичных колебаний

Ошибки расчётных АЧХ, построенных для модели с кубическими нелинейными силами: 1 — общего вида (3.7); 2 — специального вида (3.22).

Рисунок 3.3 — Ошибки расчётных амплитудно-частотных характеристик для моделей колебаний резонатора с нелинейностями двух видов

3.3 Идентификация частоты установившихся колебаний резонатора

В параграфе 3.2 была решена задача идентификации параметров математической модели резонатора волнового твердотельного гироскопа. В качестве исходных данных для её решения использовались коэффициенты Фурье первых гармоник функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$, описывающих динамику резонатора в одномодовом приближении.

Если частота ω наблюдаемых установившихся колебаний известна, то расчёт коэффициентов Фурье не представляет сложности. В противном случае величина ω подлежит восстановлению. Решению задачи оценивания частоты отдельно от расчёта коэффициентов Фурье и посвящён этот параграф.

Отметим, что из-за нелинейных эффектов колебания резонатора будут несинусоидальными. Их анализ показывает, что наибольший вклад в них вносят первая и вторая гармоники ряда Фурье.

Также необходимо сказать, что резонатор высокодобротен и возбуждение колебаний возможно лишь при частотах, достаточно близких к резонансной частоте, приблизительно равной 11523 Гц. Это обстоятельство определяет достаточно высокие требования к точности оценок частоты колебаний.

3.3.1 Постановка задачи. Параметрическая модель

Ставится задача определения частоты смещённого периодического сигнала, аппроксимируемого с высокой точностью двумя гармониками ряда Фурье:

$$Y(t) = b_0 + b_1 \cos \omega t + d_1 \sin \omega t + b_2 \cos 2\omega t + d_2 \sin 2\omega t, \qquad (3.23)$$

где ω — искомая постоянная циклическая частота; b_k и d_k, $k = \overline{0,2}$ — неизвестные постоянные коэффициенты. Считается, что частота ω близка к некоторому номинальному значению ω_0.

Функция $Y(t)$ представляет собой аппроксимацию первичного измерительного сигнала $Y_s(t)$, полученного при экспериментальном наблюдении вынужденных нелинейных колебаний резонатора волнового твердотельного гироскопа [81]. В соответствии с физической моделью прибора, $Y_s(t)$ является измерением скорости $\dot{x}_j(t)$ первичных ($j = 1$) или вторичных колебаний ($j = 2$).

Работоспособность предлагаемых алгоритмов проверим для случая установившихся колебаний, возбуждавшихся с околорезонансной частотой $\omega = \omega_{77} = 11620{,}6$ Гц на интервале времени 0,4 мс, соответствующему нескольким периодам. Для удобства наглядного представления результатов время t было введено как безразмерное:

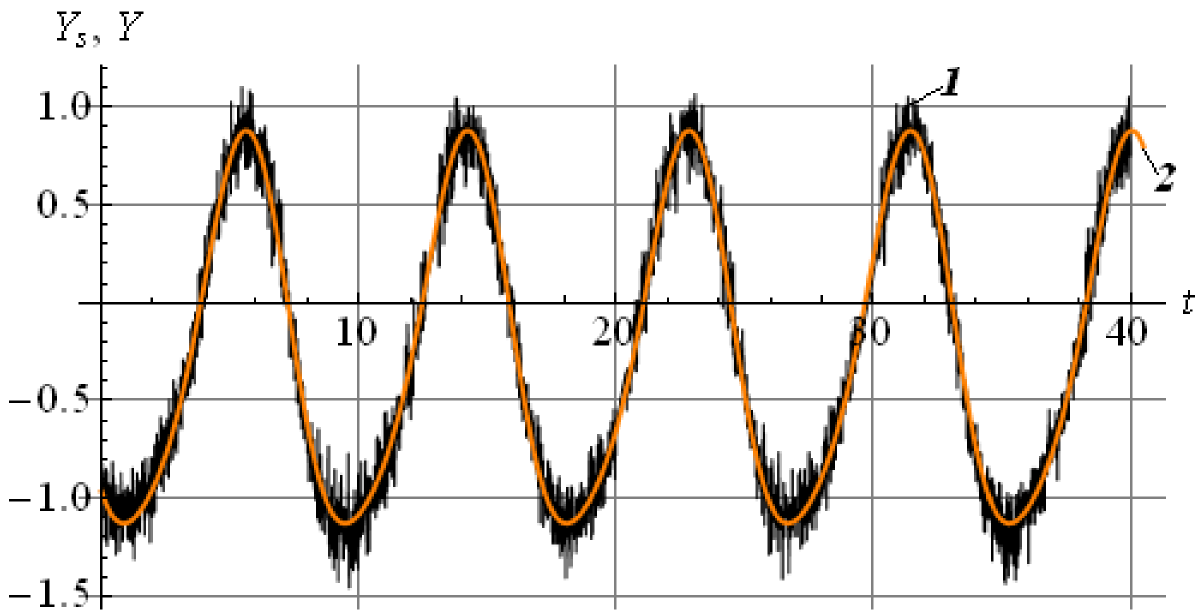
$$0 \leqslant t \leqslant 40.$$

В рассматриваемом случае безразмерная циклическая частота колебаний равна:

$$\omega = 0{,}7301438.$$

Эту величину мы и будем оценивать в дальнейшем.

Также для удобства представления результатов величины сигналов $Y(t)$ и $Y_s(t)$ были нормализованы так, чтобы их амплитуды были близки к единице. На рисунке 3.4 приведёны графики функций $Y(t)$ и $Y_s(t)$ в безразмерном времени t.



1 — измерительный сигнал $Y_s(t)$; 2 — идеализированный сигнал $Y(t)$.

Рисунок 3.4 — Исследуемый сигнал

Для решения поставленной задачи будут использоваться алгоритмы идентификации, построенные в рамках детерминированного подхода. Оценивание частоты будет проводится как для идеализированного сигнала $Y(t)$, так и для реального $Y_s(t)$.

Построим **параметрическую модель** для решения задачи идентификации частоты сигнала $Y(t)$, опираясь на то, что функция $Y(t)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению пятого порядка:

$$\overset{(5)}{Y} + 5\omega^2\dddot{Y} + 4\omega^4\dot{Y} = 0. \tag{3.24}$$

Таким образом, $Y(t)$ можно рассматривать как выход динамического объекта (3.24) в режиме свободных колебаний. Поэтому, поставленная задача определения частоты сигнала сводится к задаче идентификации параметров объекта (3.24).

Модель свободных колебаний (3.24) не может использоваться как параметрическая, так как это потребует многократного дифференцирования реального сигнала, содержащего шумовые помехи. Воспользуемся следующей методикой. Преобразуем сигнал Y с помощью «фильтра» — устойчивого динамического звена пятого порядка с постоянными коэффициентами a_{f_k}:

$$\overset{(5)}{\mu} + a_{f_4}\overset{(4)}{\mu} + a_{f_3}\dddot{\mu} + a_{f_2}\ddot{\mu} + a_{f_1}\dot{\mu} + a_{f_0}\mu = Y, \tag{3.25}$$

где μ — переменная состояния вспомогательного динамического звена.

В данной работе используется «фильтр», представляющий собой последовательно соединённые апериодическое звено и два колебательных с резонансными частотами, близкими к ω_0 и к $2\omega_0$. Его характеристический полином имеет вид:

$$a_f(s) = s^5 + \sum_{k=0}^{4} a_{f_k}s^k = (s + \zeta\omega_0)(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)(p^2 + 4\xi\omega_0 s + 4\omega_0^2), \tag{3.26}$$

где $0 < \xi < 1$ и $\zeta > 0$ — безразмерные коэффициенты.

Подставив (3.25) в (3.24) и перегруппировав слагаемые, получаем:

$$\overset{(5)}{\varepsilon} + a_{f_4}\overset{(4)}{\varepsilon} + a_{f_3}\dddot{\varepsilon} + a_{f_2}\ddot{\varepsilon} + a_{f_1}\dot{\varepsilon} + a_{f_0}\varepsilon = 0, \tag{3.27}$$

где величина ε определяется следующим образом:

$$\varepsilon = \overset{(5)}{\mu} + 5\omega^2\dddot{\mu} + 4\omega^4\dot{\mu}. \tag{3.28}$$

Исключив старшую производную из соотношений (3.28), используя уравнения «фильтра» (3.25), получаем:

$$Y = a_{f_4}\overset{(4)}{\mu} + \left(a_{f_3} - 5\omega^2\right)\dddot{\mu} + a_{f_2}\ddot{\mu} + \left(a_{f_1} - 4\omega^4\right)\dot{\mu} + a_{f_0}\mu + \varepsilon. \tag{3.29}$$

Пренебрегая в соотношении (3.29) экспоненциально затухающей величиной $\varepsilon(t)$, удовлетворяющей однородному уравнению «фильтра», получаем линейную параметрическую модель объекта (3.24):

$$y = N^{\mathrm{T}}\vartheta. \tag{3.30}$$

Здесь выходная переменная параметрической модели y, регрессор N и вектор неизвестных параметров ϑ имеют вид:

$$y = Y - a_{f_4}\overset{(4)}{\mu} - a_{f_2}\ddot{\mu} - a_{f_0}\mu, \tag{3.31}$$

$$N = \begin{pmatrix} \dddot{\mu} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix}, \qquad \vartheta = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{f_3} - 5\omega^2 \\ a_{f_1} - 4\omega^4 \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

Коэффициенты линейной регрессии (3.30) ϑ_1 и ϑ_1 не являются независимыми величинами. Исключив из выражений, определяющих элементы вектора ϑ частоту ω, можно убедиться, что параметры модели (3.30) удовлетворяют уравнению связи

$$\psi(\vartheta) = \vartheta_2 - a_{f_1} + \frac{4}{25}(\vartheta_2 - a_{f_3})^2 = 0.$$

Выражение искомой частоты через коэффициенты регрессии также можно рассматривать как форму записи уравнения связи:

$$\omega = \sqrt{\frac{|a_{f_3} - \vartheta_1|}{5}} = \sqrt[4]{\frac{|a_{f_1} - \vartheta_2|}{4}}. \tag{3.33}$$

Построим зависимость переменных параметрической модели (3.30) $y(t)$ и $N(t)$, воспользовавшись результатами численного моделирования процессов во вспомогательном «фильтре». Оно проводилось для случая нулевых начальных условий для уравнения (3.25) и следующих значений коэффициентов в выражении (3.26):

$$\omega_0 = 0{,}8, \quad \zeta = 0{,}3, \quad \xi = 0{,}34.$$

Полученные графики зависимостей переменных параметрической модели (3.30) от времени приведены на рисунке 3.5.

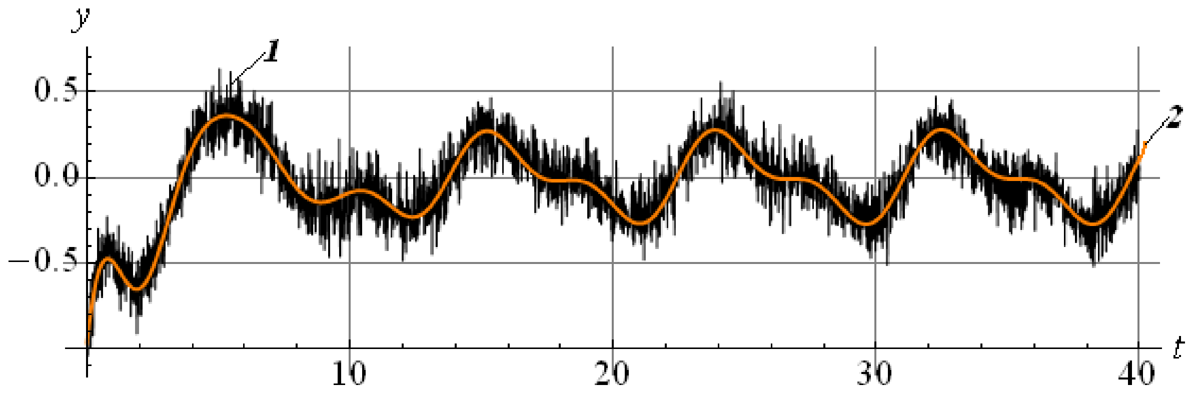
Построим теперь выходную переменную параметрической модели $y(t)$ и элементы регрессионного вектора $N(t)$, используя реальный измерительный сигнал $Y_s(t)$. Для этого заменим $Y(t)$ на $Y_s(t)$ в уравнении «фильтра» (3.25) и соотношении (3.31):

$$\overset{(5)}{\mu} + a_{f_4}\overset{(4)}{\mu} + a_{f_3}\dddot{\mu} + a_{f_2}\ddot{\mu} + a_{f_1}\dot{\mu} + a_{f_0}\mu = Y_s,$$
$$y = Y_s - a_{f_4}\overset{(4)}{\mu} - a_{f_2}\ddot{\mu} - a_{f_0}\mu.$$

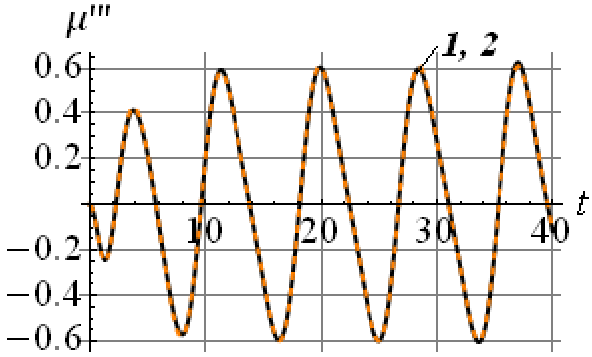
Графики зависимостей $y(t)$ и элементов регрессионного вектора $\dddot{\mu}(t)$ и $\dot{\mu}$, полученные в результате обработки измерительного сигнала $Y_s(t)$ также приведены на рисунке 3.5

Сравнение графиков, приведённых на рисунке 3.5 показывает, что значения составляющих регрессор N функций $\dddot{\mu}$ и $\dot{\mu}$, полученные как в случае обработки идеального сигнала, так и в случае обработки реального сигнала, совпадают с высокой точностью. Выходная же переменная параметрической модели при использовании измерительного сигнала Y_s становится заметно зашумлённой. Таким образом, наличие аддитивной шумовой помехи в измерениях Y_s приводит к появлению аддитивной погрешности в параметрической модели (3.30). Мультипликативной же погрешностью в соотношении (3.30) в рассматриваемом случае можно пренебречь.

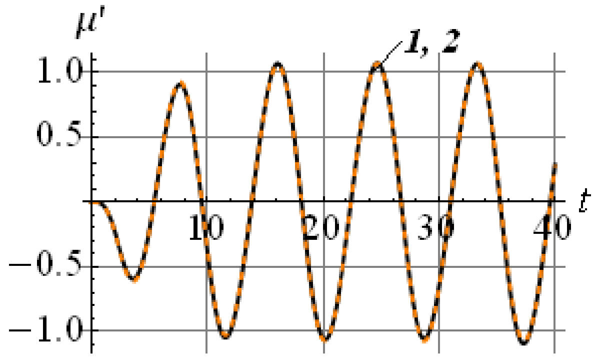
Приведённые на рисунке 3.5 зависимости $y(t)$, $\dddot{\mu}(t)$ и $\dot{\mu}(t)$ далее будут использоваться в качестве исходных данных для решения задачи оценки частоты.



а) Выходная переменная параметрической модели $y(t)$



б) Функция $\dddot{\mu}(t)$



в) Функция $\dot{\mu}(t)$

1 — зависимости, полученные в результате обработки реального сигнала $Y_s(t)$; 2 — зависимости, полученные в результате обработки аппроксимирующего сигнала $Y(t)$.

Рисунок 3.5 — Исходные данные для задачи идентификации частоты

3.3.2 Градиентные алгоритмы идентификации частоты

Оценим параметры модели (3.30), используя градиентные алгоритмы идентификации с квадратичной целевой функцией и скалярной матрицей усиления:

$$Q = \frac{e^2}{2}, \quad M_g^{-1} = \gamma E,$$

где $\gamma > 0$ — скалярный коэффициент усиления, а прогнозируемая ошибка e выхода параметрической модели (3.30) выражается через оценки её параметров $\hat{\vartheta}_1$ и $\hat{\vartheta}_2$ следующим образом:

$$e = y - N^{\mathrm{T}}\hat{\vartheta} = y - \dddot{\mu}\hat{\vartheta}_1 - \dot{\mu}\hat{\vartheta}_2. \tag{3.34}$$

Построим градиентный алгоритм идентификации **без учёта параметрической связи**. Для целевой функции Q и матрицы M_g, выбраных выше, градиентный идентификатор(1.8) принимает вид:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = -M_g^{-1}\frac{\partial Q}{\partial\hat{\vartheta}} = -\frac{\gamma}{2}\frac{\partial e^2}{\partial\hat{\vartheta}} = -\gamma\frac{\partial e}{\partial\hat{\vartheta}}e = -\gamma N e.$$

Здесь использовалась техника дифференцирования, приведённая в приложении А. Запишем полученные уравнения градиентного идентификатора поэлементно:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\vartheta}}_1 = \gamma\ddot{\mu}\cdot\left(y - \ddot{\mu}\hat{\vartheta}_1 - \dot{\mu}\hat{\vartheta}_2\right), \\ \dot{\hat{\vartheta}}_2 = \gamma\dot{\mu}\cdot\left(y - \ddot{\mu}\hat{\vartheta}_1 - \dot{\mu}\hat{\vartheta}_2\right). \end{cases} \tag{3.35}$$

В соответствии с выражением частоты (3.33) через коэффициенты параметрической модели, можно найти две её оценки:

$$\widehat{\omega}^{(1)} = \sqrt{\frac{|a_{f_3} - \hat{\vartheta}_1|}{5}}, \quad \widehat{\omega}^{(2)} = \sqrt[4]{\frac{|a_{f_1} - \hat{\vartheta}_2|}{4}}. \tag{3.36}$$

Так как идентификатор (3.35) был построен без учёта параметрической связи, то две оценки частоты $\widehat{\omega}^{(1)}$ и $\widehat{\omega}^{(2)}$ могут отличаться друг от друга.

Проведём математическое моделирование работы градиентного идентификатора (3.35). В качестве исходной информации будем использовать зависимости $y(t)$, $\ddot{\mu}(t)$ и $\dot{\mu}(t)$ полученные в результате обработки идеального сигнала $Y(t)$. Моделирование будем проводить для нескольких значений начальных оценок параметров:

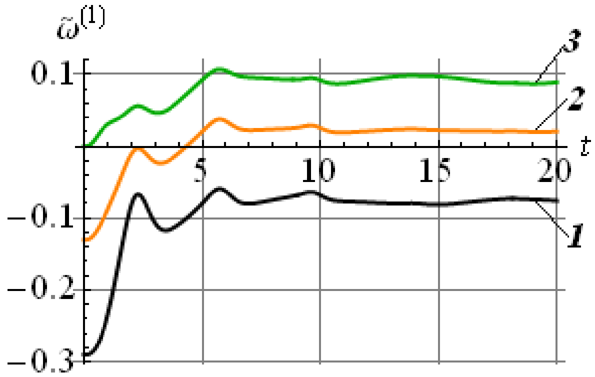
$$\hat{\vartheta}_1(0) = a_{f_3} - 5\Omega_0^2, \quad \hat{\vartheta}_2(0) = a_{f_1} - 4\Omega_0^4,$$

где Ω_0— начальная оценка частоты.

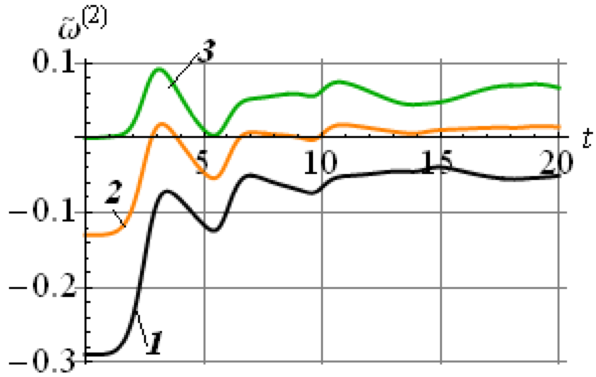
Примем значение коэффициента усиления $\gamma = 10$.

На рисунке 3.6 приведены результаты моделирования процессов идентификации. На рисунках 3.6а и 3.6б представлены графики ошибок оценок частоты $\widetilde{\omega}^{(1)}$ и $\widetilde{\omega}^{(2)}$, найденных в результате моделирования:

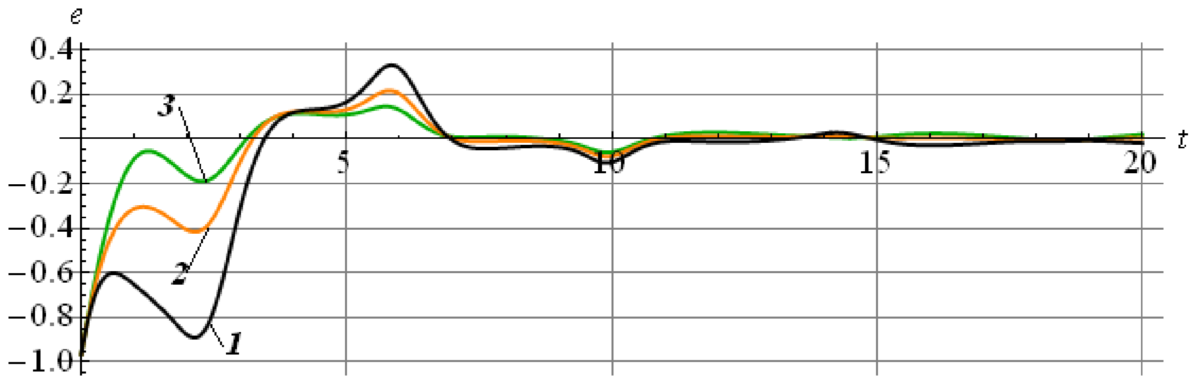
$$\widetilde{\omega}^{(1)} = \omega - \widehat{\omega}^{(1)}, \quad \widetilde{\omega}^{(2)} = \omega - \widehat{\omega}^{(2)}.$$



а) Ошибка оценки частоты $\widetilde{\omega}^{(1)}(t)$



б) Ошибка оценки частоты $\widetilde{\omega}^{(2)}(t)$



в) Ошибка прогноза $e(t)$

Начальнаая оценка частоты: 1 — $\Omega_0 = 1{,}02$; *2 —* $\Omega_0 = 0{,}86$; *3 —* $\Omega_0 = 0{,}73$.

Рисунок 3.6 — Результаты моделирования градиентного алгоритма идентификации частоты без учёта связи

Графики ошибок оценок, приведённые на рисунках 3.6а и 3.6б демонстрируют неудовлетворительную работу градиентного алгоритма идентификации (3.35) в рассматриваемой ситуации: оценки частот устанавливаются на существенно смещённых значениях. Отметим, что ошибка прогноза e в установившемся режиме сходится к нулю (см рисунок 3.6в).

Перейдём теперь к построению уравнений градиентного идентификатора **с учётом параметрической связи**. Соотношения (3.32) позволяют выразить вектор оценок параметров модели (3.30) через оценку частоты $\widehat{\omega}$ следующим образом:

$$\hat{\vartheta} = \begin{pmatrix} a_{f_3} - 5\widehat{\omega}^2 \\ a_{f_1} - 4\widehat{\omega}^4 \end{pmatrix}. \tag{3.37}$$

Таким образом для решения задачи идентификации может использоваться интегрируемая параметрическая псевдоскорость $\dot{\hat{\pi}}$. Назначим

$$\hat{\pi} = \widehat{\omega}^2.$$

Соотношение (3.37) примет вид:

$$\hat{\vartheta} = \Theta(\hat{\pi}) = \begin{pmatrix} a_{f_3} - 5\hat{\pi} \\ a_{f_1} - 4\hat{\pi}^2 \end{pmatrix}. \tag{3.38}$$

В рассматриваемом случае матрица C, используемая для выражения производной по времени от вектора оценок $\hat{\vartheta}$ через псевдоскорость, имеет вид:

$$C = \frac{\partial\Theta}{\partial\hat{\pi}^{\mathrm{T}}} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8\hat{\pi} \end{pmatrix}. \tag{3.39}$$

Выразим ошибку прогноза (3.34) через оценку вспомогательной величины $\hat{\pi}$:

$$e = y - \dddot{\mu}\hat{\vartheta}_1 - \dot{\mu}\hat{\vartheta}_2 = y - \dddot{\mu}\,(a_{f_3} - 5\hat{\pi}) - \dot{\mu}\,(a_{f_1} - 4\hat{\pi}^2).$$

Для сокращения записи последнего выражения введём вспомогательную переменную:

$$y_\pi = y - a_{f_3}\dddot{\mu} - a_{f_1}\dot{\mu}. \tag{3.40}$$

Получаем следующее выражение для ошибки прогноза e:

$$e = y_\pi + 5\dddot{\mu}\hat{\pi} + 4\dot{\mu}\hat{\pi}^2. \tag{3.41}$$

Составим уравнения градиентного идентификатора с проекцией (1.13), используя квадратичную целевую функцию $Q = e^2/2$ и скалярную матрицу усиления $M_g^{-1} = \gamma E$:

$$\dot{\hat{\pi}} = -\left[C^{\mathrm{T}} M_g C\right]^{-1} C^{\mathrm{T}} \frac{\partial Q}{\partial\hat{\vartheta}} = \frac{\gamma C^{\mathrm{T}} N e}{C^{\mathrm{T}} C}. \tag{3.42}$$

Запишем уравнения идентификатора в явном виде, подставив выражения (3.41) и (3.39) для ошибки прогноза e и матрицы C в формулу (3.42)

$$\dot{\hat{\pi}} = -\gamma \cdot \frac{5\ddot{\mu} + 8\dot{\mu}\hat{\pi}}{25 + 64\hat{\pi}^2} \left(y_\pi + 5\ddot{\mu}\hat{\pi} + 4\dot{\mu}\hat{\pi}^2 \right) \tag{3.43}$$

Оценка искомой частоты выражается по формуле

$$\widehat{\omega} = \sqrt{|\hat{\pi}|}.$$

На рисунке 3.7 приведены результаты моделирования работы градиентного идентификатора с проекцией (3.43). Было использовано то же значение коэффициента усиления $\gamma = 10$, что и для градиентного идентификатора (3.35), а начальные условия выбирались следующего вида:

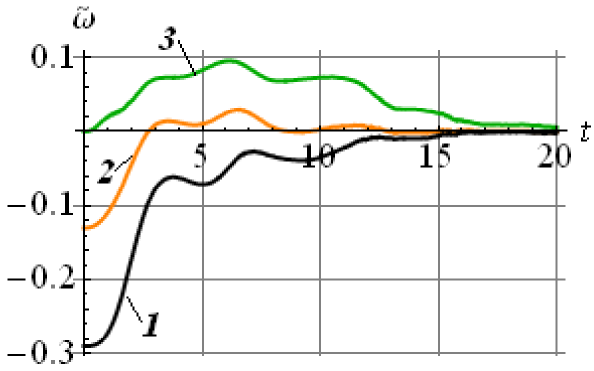
$$\hat{\pi}(0) = \Omega_0^2.$$

Графики изменения ошибки оценки частоты

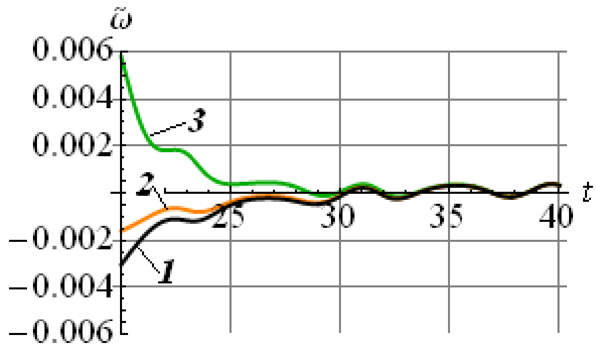
$$\widetilde{\omega} = \omega - \widehat{\omega}$$

в переходном и установившемся режимах, а также график изменения ошибки прогноза $e(t)$ приведены на рисунках 3.7а, 3.7б и 3.7в соответственно. Эти зависимости были получены при использовании идеального сигнала $Y(t)$ для построения функций $y_\pi(t)$, $\ddot{\mu}(t)$ и $\dot{\mu}(t)$. В рассматриваемом случае ошибка $\widehat{\omega}$ затухает, а частота оценивается практически точно.

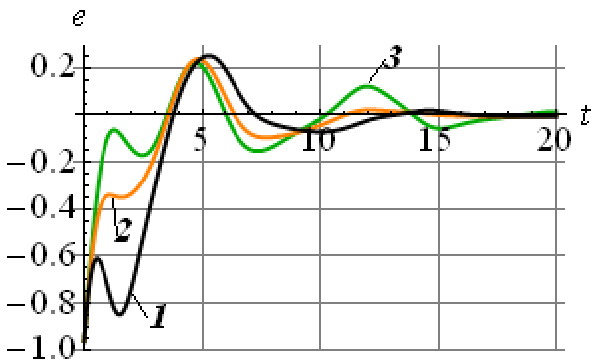
Если же для построения функций $y_\pi(t)$, $\ddot{\mu}(t)$ и $\dot{\mu}(t)$ использовать реальный измерительный сигнал $Y_s(t)$, то точность оценки частоты уменьшится. В этом можно убедится, обратившись к рисунку 3.7г, на котором представлен график изменения ошибки оценки частоты $\widetilde{\omega}(t)$ в установившемся режиме. На снижение точности влияют аддитивные погрешности в измерениях $Y(t)$, в том числе шумы и неучтённые в модели сигнала (3.23) гармоники. Из-за присутствия таких погрешностей в измерениях $Y_s(t)$ и постоянной величины коэффициента усиления γ оценка $\widehat{\omega}$ совершает ограниченные по величине колебания в установившемся режиме. Чем выше значение γ, тем больше будет амплитуда этих колебаний [21].



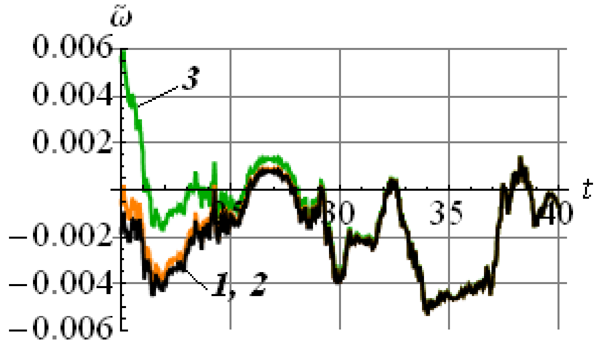
а) Ошибка оценки частоты $\widetilde{\omega}(t)$ на переходном процессе



б) Ошибка оценки частоты $\widetilde{\omega}(t)$ в установившемся режиме



в) Ошибка прогноза $e(t)$ на переходном процессе



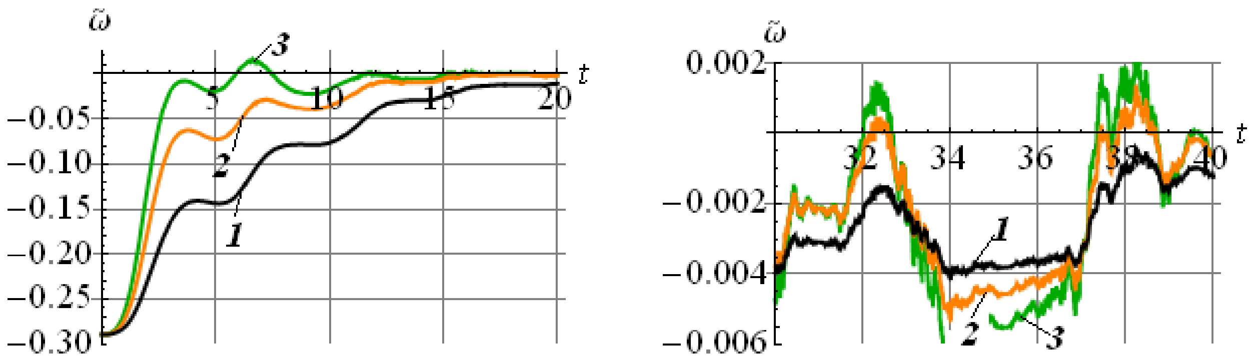
г) Влияние аддитивных погрешностей измерений на ошибку оценки частоты $\widetilde{\omega}(t)$ в установившемся режиме

Начальнаая оценка частоты: 1 — $\Omega_0 = 1{,}02$; *2* — $\Omega_0 = 0{,}86$; *3* — $\Omega_0 = 0{,}73$.

Рисунок 3.7 — Результаты моделирования идентификации частоты градиентным алгоритмом с проекцией

Это свойство проиллюстрировано рисунком 3.8б, на котором приведены графики зависимостей $\widetilde{\omega}(t)$, полученные для значений коэффициентов усиления $\gamma = 5$, $\gamma = 10$ и $\gamma = 15$ при одинаковой начальной оценке частоты $\Omega_0 = 1{,}02$. Отметим также, что в рассматриваемом случае чем больше значение коэффициента γ, тем меньше длительность переходных процессов в идентификаторе (см. рисунок 3.8а).

Однако, дальнейшее увеличение коэффициента усиления γ может привести к установлению несимметричных автоколебаний ошибки оценки частоты $\widetilde{\omega}$, обусловленных нелинейностью уравнения градиентного идентификатора с проекцией (3.43). На рисунке 3.9 это свойство иллюстрируется графиками зависимостей ошибки оценки $\widetilde{\omega}$, полученных при увеличении значения γ до 28. Здесь



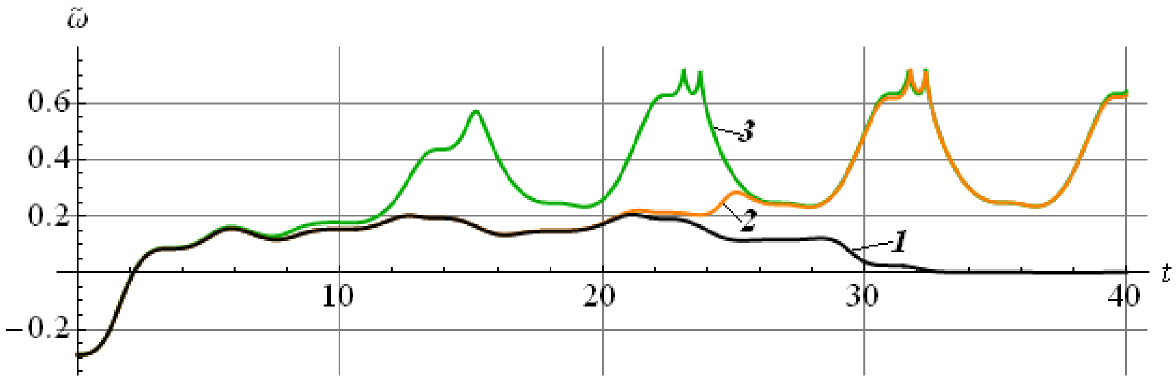
а) Ошибка оценки частоты $\widetilde{\omega}(t)$ на переходном процессе

б) Ошибка оценки частоты $\widetilde{\omega}(t)$ в установившемся режиме

Значения коэффициента усиления: 1 $-\gamma = 5$*; 2* $-\gamma = 10$*; 3* $-\gamma = 15$.

Рисунок 3.8 — Влияние величины коэффициента усиления γ на работу градиентного идентификатора с проекцией

для построения функций $y_\pi(t)$, $\ddot{\mu}(t)$ и $\dot{\mu}(t)$ использовался сигнал $Y(t)$, аппроксимирующий реальные измерения. Использовалась начальная оценка частоты $\Omega_0 = 1{,}02$.



Значения коэффициента усиления: 1 $-\gamma = 27{,}44045$*; 2* $-\gamma = 27{,}44080$*;*
3 $-\gamma = 28{,}0$.

Рисунок 3.9 — Автоколебания ошибки оценки частоты $\widetilde{\omega}(t)$, полученной градиентным идентифкатором с проекцией

Таким образом, в рассматриваемой задаче учёт параметрических связей в градиентном алгоритме идентификации позволил повысить точность оценки частоты сигнала. Увеличение коэффициента γ в уравнении (3.43) негативно сказывается на точности оценки частоты в установившемся режиме из-за усиления аддитивных погрешностей, не учтённых в параметрической модели. При $\gamma > 27$ возможна потеря работоспособности градиентного идентификатора с проекцией из-за установления автоколебаний оценки частоты $\widehat{\omega}$, обусловленных нелинейностью уравнения (3.43).

3.3.3 Алгоритмы идентификации частоты, построенные на основе метода наименьших квадратов

Решим задачу идентификации частоты ω, используя рекуррентный метод наименьших квадратов и производные от него.

Рассмотрим задачу идентификации параметров модели (3.30), **без учёта параметрической связи**. Построим оптимальный идентификатор параметров по методу наименьших квадратов (1.33)–(1.34):

$$\dot{\hat{\vartheta}} = M^{-1}Ne, \quad \dot{M} = NN^{\mathrm{T}}. \tag{3.44}$$

Здесь матрица M имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix},$$

а ошибку прогноза можно записать выразить по формуле (3.34):

$$e = y - \ddot{\mu}\hat{\vartheta}_1 - \dot{\mu}\hat{\vartheta}_2.$$

Запишем уравнения оптимального по методу наименьших квадратов идентификатора в явном виде, используя соотношение (3.32) для регрессионного вектора N:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\vartheta}}_1 = \dfrac{m_{22}\ddot{\mu} - m_{12}\dot{\mu}}{m_{11}m_{22} - m_{12}^2}\left(y - \ddot{\mu}\hat{\vartheta}_1 - \dot{\mu}\hat{\vartheta}_2\right), \\ \dot{\hat{\vartheta}}_2 = \dfrac{m_{11}\dot{\mu} - m_{12}\ddot{\mu}}{m_{11}m_{22} - m_{12}^2}\left(y - \ddot{\mu}\hat{\vartheta}_1 - \dot{\mu}\hat{\vartheta}_2\right), \\ \dot{m}_{11} = \ddot{\mu}^2, \quad \dot{m}_{12} = \ddot{\mu}\dot{\mu}, \quad \dot{m}_{22} = \dot{\mu}^2. \end{cases} \tag{3.45}$$

Решив систему (3.45), можно найти две её оценки частоты ω по формуле (3.3.3). Перепишем эти соотношения заново:

$$\widehat{\omega}^{(1)} = \sqrt{\frac{|a_{f_3} - \hat{\vartheta}_1|}{5}}, \quad \widehat{\omega}^{(2)} = \sqrt[4]{\frac{|a_{f_1} - \hat{\vartheta}_2|}{4}}.$$

Проведём математическое моделирование работы оптимального идентификатора (3.45). В качестве исходной информации будем использовать зависимости $y(t)$, $\dddot{\mu}(t)$ и $\dot{\mu}(t)$, полученные в результате обработки идеального сигнала $Y(t)$. Для того, чтобы уменьшить влияние переходных процессов во вспомогательном «фильтре» (3.25) (см. рисунок 3.5), интегрирование системы уравнений идентификатора (3.45) начнём с момента времени $t_0 > 0$. Моделирование проведём для нескольких значений начальных оценок параметров, определяемых соотношениями:

$$\hat{\vartheta}_1(t_0) = a_{f_3} - 5\Omega_0^2, \quad \hat{\vartheta}_2(t_0) = a_{f_1} - 4\Omega_0^4,$$

где Ω_0— начальная оценка частоты.

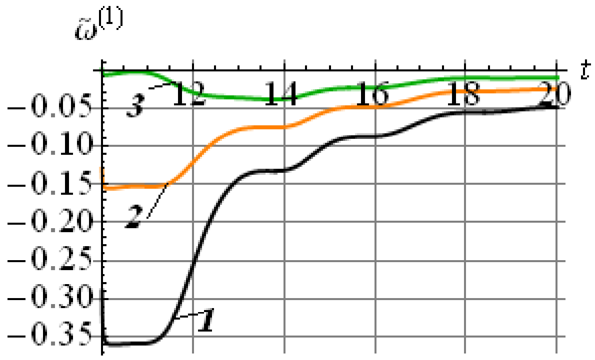
Для матрицы M используем начальное условие вида:

$$M(t_0) = m_0 E, \quad m_0 > 0.$$

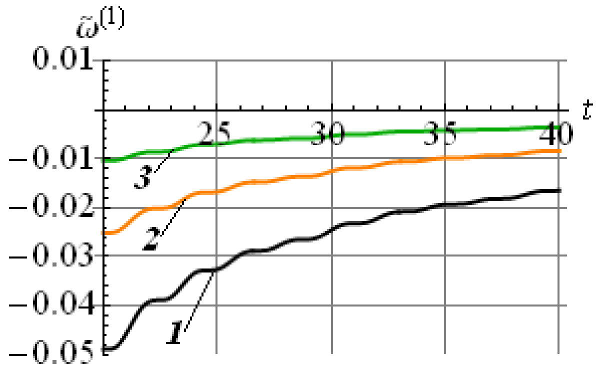
Согласно [18; 21] параметр m_0 следует выбирать настолько малым, насколько позволяют аддитивные погрешности параметрической модели (см. подпараграф 2.1.1).

На рисунке 3.10 приведены результаты моделирования процессов идентификации, проведённого для значений $t_0 = 10$ и $m_0 = 0{,}002$. На рисунках 3.10а, 3.10б и 3.10в, 3.10г представлены графики ошибок оценок частоты $\widetilde{\omega}^{(1)}$ и $\widetilde{\omega}^{(2)}$, найденных в результате такого моделирования. Отметим, что по сравнению с градиентным идентификатором (3.35) (см. рисунок 3.6), точность оценивания частоты существенно возросла. Тем не менее, оценки частоты, полученные градиентным идентификатором с проекцией (3.43) оказываются на порядок точнее, даже при наличии шумов в измерениях сигнала (см. рисунок 3.7).

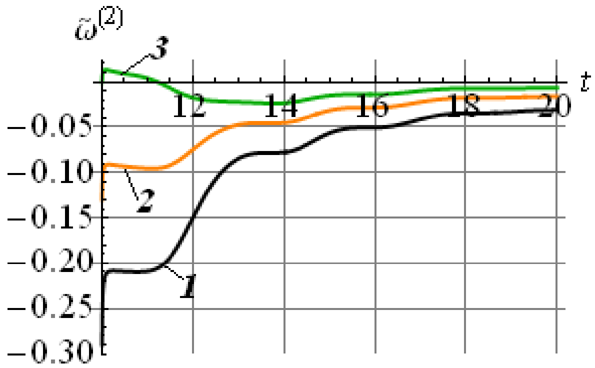
В отличие от градиентных алгоритмов идентификации, ошибка оценки, полученная по методу наименьших квадратов (3.45), затухает гораздо медленнее при достаточно больших значениях t. Это свойство объясняется тем,



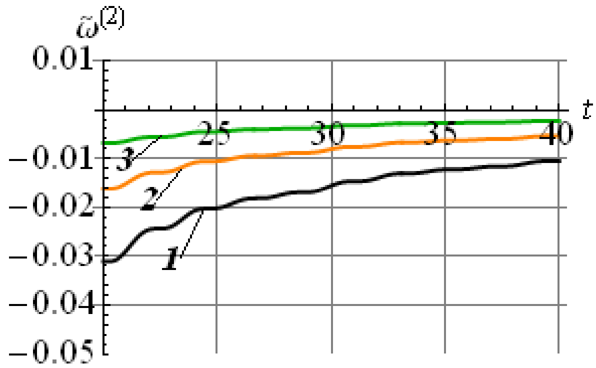
а) Ошибка оценки частоты $\widetilde{\omega}^{(1)}(t)$ на переходном процессе



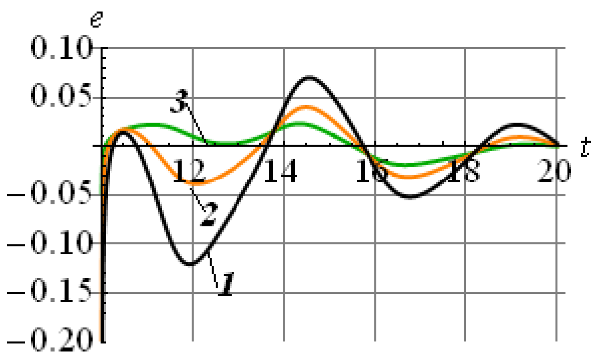
б) Ошибка оценки частоты $\widetilde{\omega}^{(1)}(t)$ в квазиустановившемся режиме



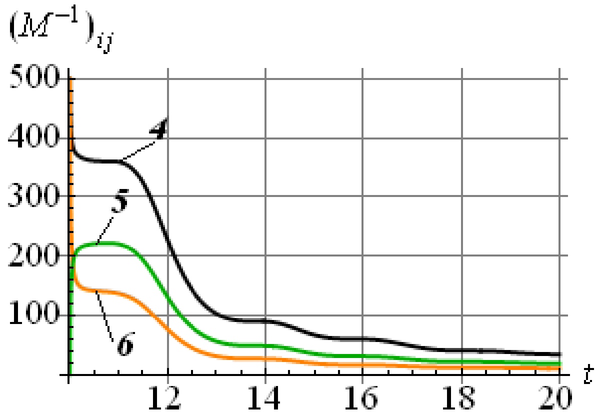
в) Ошибка оценки частоты $\widetilde{\omega}^{(2)}(t)$ на переходном процессе



г) Ошибка оценки частоты $\widetilde{\omega}^{(2)}(t)$ в квазиустановившемся режиме



д) Ошибка прогноза $e(t)$



е) Элементы матрицы M^{-1}

Начальная оценка частоты: 1 — $\Omega_0 = 1{,}02$*; 2 —* $\Omega_0 = 0{,}86$*; 3 —* $\Omega_0 = 0{,}73$.

Элементы матрицы M^{-1}*: 4 —* $(M^{-1})_{11}$*; 4 —* $(M^{-1})_{22}$*; 4 —* $(M^{-1})_{12}$.

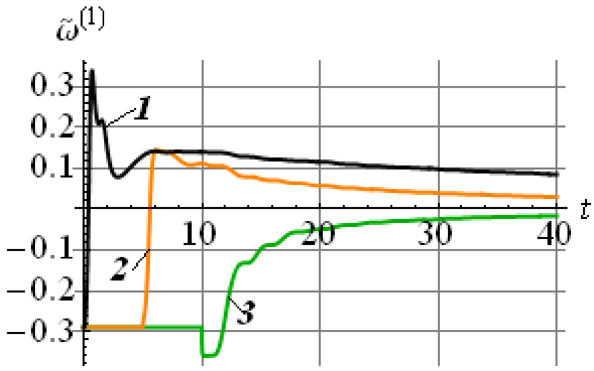
Рисунок 3.10 — Результаты моделирования оптимального по методу наименьших квадратов алгоритма идентификации частоты без учёта связи что элементы матрицы M^{-1}, заменяющую постоянную M_g^{-1} в уравнении оптимального идентификатора, с течением времени затухают (см. рисунок 3.10е), и оценка становится всё менее чувствительной к величине ошибки прогноза e. Этим же можно объяснить и малую чувствительность оптимальной по методу наименьших квадратов оценки к аддитивным погрешностям параметрической модели в установившемся режиме идентификации.

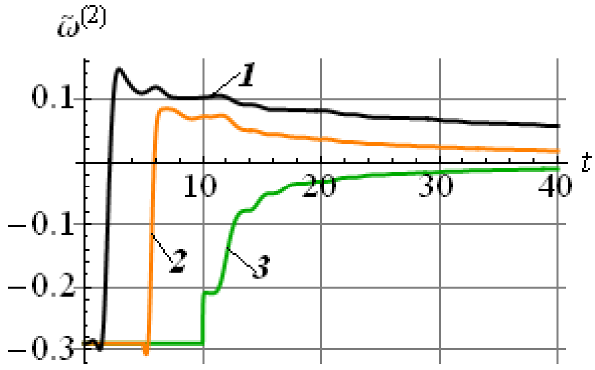
Убывание элементов M^{-1} со скоростью, превосходящей затухание переходных процессов в «фильтре» (3.25), приводит к необходимости начинать интегрирование уравнений идентификатора по прошествии времени t_0 с момента начала работы «фильтра» (т. е. $t = 0$). Величину t_0 следует выбрать сопоставимой с временем затухания свободных колебаний «фильтра», описываемых функцией $\varepsilon(t)$ (см. формулы (3.27) и (3.28)). Их длительность можно оценить по рисунку (3.5). Она составляет приблизительно 11 единиц времени. За такое время величины диагональных элементов матрицы M^{-1} уменьшаются на порядок (см. рисунок 3.10е).

Если начать работу идентификатора (3.45) и фильтра (3.25) одновременно, то на начальном этапе, когда величины элементов M^{-1} будут значительными, игнорируемая в параметрической модели величина ε будет усиливаются и значительно ухудшать поведение оценки $\widehat{\omega}$ и снижать её точность. После завершения переходного процесса в «фильтре», величины элементов уменьшатся настолько, что оценка будет меняться незначительно. Таким образом, значение $\widehat{\omega}$ в момент окончания переходного процесса по ε может иметь низкую точность и эта точность в дальнейшем изменится слабо. Сказанное иллюстрирует рисунок 3.11, на котором представлены графики изменения ошибок оценок частоты $\widetilde{\omega}^{(1)}$ и $\widetilde{\omega}^{(2)}$ полученные при различных значениях времени начала интегрирования уравнений идентификатора t_0. Начальная оценка частоты бралась равной $\Omega_0 = 1{,}02$, начальные значения элементов матрицы M определялись величиной $m_0 = 0{,}002$.

На основе метода наименьших квадратов построим алгоритмы идентификации параметров модели (3.30) **с учётом параметрических связей**. Введём интегрируемую псевдоскорость $\dot{\hat{\pi}}$ тем же образом, что и в подпараграфе 3.3.2:

$$\hat{\vartheta} = \begin{pmatrix} a_{f_3} - 5\hat{\pi} \\ a_{f_1} - 4\hat{\pi}^2 \end{pmatrix}, \quad \dot{\hat{\vartheta}} = C\dot{\hat{\pi}}, \quad C = \begin{pmatrix} -5 \\ -8\hat{\pi} \end{pmatrix}, \tag{3.46}$$





а) Ошибка оценки частоты $\widetilde{\omega}^{(1)}(t)$ б) Ошибка оценки частоты $\widetilde{\omega}^{(2)}(t)$

Время начала интегрирования: 1 — $t_0 = 0$; 2 — $t_0 = 5$; 3 — $t_0 = 10$.

Рисунок 3.11 — Влияние переходных процессов во вспомогательном «фильтре» и времени начала интегрирования на точность оценки частоты

где $\hat{\pi} = \widehat{\omega}^2$ — вспомогательная переменная.

Для выражения ошибки прогноза e через оценку $\hat{\pi}$ будем использовать соотношение (3.41):

$$e = y_\pi + 5\ddot{\mu}\hat{\pi} + 4\dot{\mu}\hat{\pi}^2, \tag{3.47}$$

где переменная y_π определяется по формуле (3.40) следующим образом:

$$y_\pi = y - a_{f_3}\ddot{\mu} - a_{f_1}\dot{\mu}.$$

Построим **оптимальный по методу наименьших квадратов** идентификатор с параметрической связью, используя выражения (2.16), (2.18) и (2.19):

$$\dot{\hat{\pi}} = \left[C^{\mathrm{T}} M C + K\right]^{-1} C^{\mathrm{T}} N e, \quad \dot{M} = N N^{\mathrm{T}},$$

где вектор z удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{z} = Ny,$$

а коэффициент K определяется выражением

$$K\dot{\hat{\pi}} = \dot{C}^{\mathrm{T}} \cdot (M\hat{\vartheta} - z),$$

следующим из формул (2.13) и (2.14).

Найдём коэффициент K. Имеем:

$$\dot{C}^{\mathrm{T}}(M\hat{\vartheta} - z) = \begin{pmatrix} 0 & -8\dot{\hat{\pi}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11}\hat{\vartheta}_1 + m_{12}\hat{\vartheta}_2 - z_1 \\ m_{12}\hat{\vartheta}_1 + m_{22}\hat{\vartheta}_2 - z_2 \end{pmatrix} = -8\dot{\hat{\pi}}\,(m_{12}\hat{\vartheta}_1 + m_{22}\hat{\vartheta}_2 - z_2).$$

Сравнив два последних результата, получаем, что

$$K = -8(m_{12}\hat{\vartheta}_1 + m_{22}\hat{\vartheta}_2 - z_2).$$

Запишем уравнения оптимального идентификатора со связью поэлементно, учитывая соотношения (3.46) и (3.47):

$$\begin{cases} \dot{\hat{\pi}} = -\dfrac{(5\dddot{\mu} + 8\dot{\mu}\hat{\pi})(y_\pi + 5\dddot{\mu}\hat{\pi} + 4\dot{\mu}\hat{\pi}^2)}{25m_{11} + 80m_{12}\hat{\pi} + 64m_{22}\hat{\pi}^2 + K(\hat{\pi}, z_2)}, \\ K = -8(m_{12}(a_{f_3} - 5\hat{\pi}) + m_{22}(a_{f_1} - 4\hat{\pi}^2) - z_2), \\ \dot{m}_{11} = \dddot{\mu}^2, \quad \dot{m}_{12} = \dddot{\mu}\dot{\mu}, \quad \dot{m}_{22} = \dot{\mu}^2, \quad \dot{z}_2 = \dot{\mu}y. \end{cases} \tag{3.48}$$

Введём следующие обозначения для оценки и ошибки оценки частоты, полученных оптимальным по методу наименьших квадратов идентификатором (3.48) со связью:

$$\widehat{\omega}_{LSMC} = \sqrt{|\hat{\pi}|}, \quad \widetilde{\omega}_{LSMC} = \omega - \widehat{\omega}_{LSMC},$$

где $\hat{\pi}$ удовлетворяет системе (3.48).

Уравнения идентификатора параметров по **методу наименьших квадратов с проекцией** (2.8), (2.10)

$$\dot{\hat{\pi}} = -\left[C^{\mathrm{T}}MC\right]^{-1} C^{\mathrm{T}}Ne, \quad \dot{M} = NN^{\mathrm{T}} \tag{3.49}$$

для рассматриваемой задачи получим, положив $K = 0$ в уравнениях оптимального идентификатора (3.48):

$$\begin{cases} \dot{\hat{\pi}} = -\dfrac{(5\dddot{\mu} + 8\dot{\mu}\hat{\pi})(y_\pi + 5\dddot{\mu}\hat{\pi} + 4\dot{\mu}\hat{\pi}^2)}{25m_{11} + 80m_{12}\hat{\pi} + 64m_{22}\hat{\pi}^2}, \\ \dot{m}_{11} = \dddot{\mu}^2, \quad \dot{m}_{12} = \dddot{\mu}\dot{\mu}, \quad \dot{m}_{22} = \dot{\mu}^2. \end{cases} \tag{3.50}$$

Введём следующие обозначения для оценки и ошибки оценки частоты, полученных идентификатором по методу наименьших квадратов с проекцией:

$$\widehat{\omega}_{LSMP} = \sqrt{|\hat{\pi}|}, \quad \widetilde{\omega}_{LSMP} = \omega - \widehat{\omega}_{LSMP},$$

где $\hat{\pi}$ удовлетворяет системе (3.50).

Построим уравнения субоптимального идентификатора частоты (2.36)–(2.38) с **регуляризацией** уравнения для множителя связи. В рассматриваемой задаче их можно записать в следующей форме:

$$\dot{\hat{\pi}} = \left[C^{\mathrm{T}} M C + \lambda C^{\mathrm{T}} \frac{\partial D_{\psi}}{\partial \hat{\pi}^{\mathrm{T}}} \right]^{-1} C^{\mathrm{T}} N e, \quad \dot{M} = N N^{\mathrm{T}},$$

где множитель связи λ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\lambda} = A_{\lambda} \lambda + B^{\mathrm{T}} \left(N e - \left[M C + \lambda \frac{\partial D_{\psi}}{\partial \hat{\pi}^{\mathrm{T}}} \right] \dot{\hat{\pi}} \right)$$

с постоянным скалярным параметром регурялизации $A_{\lambda} < 0$.

Запишем последние соотношения в явном виде. Найдём столбец B, так, чтобы блочная матрица $\begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}$ была неособой:

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 + 8\hat{\pi} \end{pmatrix}; \quad \det \begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix} = 5.$$

В соответствии с формулой (2.35), матрица D_{ψ}^{T} имеет вид:

$$D_{\psi}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -8\hat{\pi} & 5 \end{pmatrix}.$$

Выполнив промежуточные выкладки

$$B^{\mathrm{T}} N = 5\ddot{\mu} + (1 + 8\hat{\pi})\dot{\mu},$$

$$M C + \lambda \frac{\partial D_{\psi}}{\partial \hat{\pi}^{\mathrm{T}}} = \begin{pmatrix} -5m_{11} - 8m_{12}\hat{\pi} - \dfrac{8\lambda}{5} \\ -5m_{12} - 8m_{22}\hat{\pi} \end{pmatrix},$$

получаем уравнения рекуррентного метода наименьших квадратов с множителем связи:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\pi}} = -\dfrac{(5\ddot{\mu} + 8\dot{\mu}\hat{\pi})(y_\pi + 5\ddot{\mu}\hat{\pi} + 4\dot{\mu}\hat{\pi}^2)}{25m_{11} + 80m_{12}\hat{\pi} + 64m_{22}\hat{\pi}^2 + 8\lambda}, \\ \dot{\lambda} = A_\lambda\lambda + [5\ddot{\mu} + (1 + 8\hat{\pi})\dot{\mu}](y_\pi + 5\ddot{\mu}\hat{\pi} + 4\dot{\mu}\hat{\pi}^2) + \\ \qquad + [25m_{11} + 5(1 + 16\hat{\pi})m_{12} + 8(1 + 8\hat{\pi})\hat{\pi}m_{22} + 8\lambda]\,\dot{\hat{\pi}}, \\ \dot{m}_{11} = \ddot{\mu}^2, \quad \dot{m}_{12} = \ddot{\mu}\dot{\mu}, \quad \dot{m}_{22} = \dot{\mu}^2. \end{cases} \tag{3.51}$$

Отметим, что в рассматриваемой задаче у оптимального алгоритма идентификации с множителем связей (3.51) нет преимущества в размерности уравнений по сравнению с алгоритмом в форме (3.48). Это обусловлено отсутствием в последней системе переменной z_1.

Обозначим оценку и ошибку оценки частоты, полученные идентификатором по методу наименьших квадратов с множителем связи

$$\widehat{\omega}_{LSMR} = \sqrt{|\hat{\pi}|}, \quad \widetilde{\omega}_{LSMR} = \omega - \widehat{\omega}_{LSMR},$$

где $\hat{\pi}$ удовлетворяет системе (3.51).

Перейдём, наконец, к уравнениям идентификатора, оптимального по **модифицированному методу наименьших квадратов** (2.51), (2.53)

$$\dot{\hat{\pi}} = P_\pi \cdot C^{\mathrm{T}} N e, \quad \dot{P}_\pi = -P_\pi \cdot C^{\mathrm{T}} N N^{\mathrm{T}} C \cdot P_\pi. \tag{3.52}$$

Для рассматриваемой задачи они имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\pi}} = -P_\pi \cdot (5\ddot{\mu} + 8\dot{\mu}\hat{\pi})(y_\pi + 5\ddot{\mu}\hat{\pi} + 4\dot{\mu}\hat{\pi}^2), \\ \dot{P}_\pi = -P_\pi^2 \cdot (5\ddot{\mu} + 8\dot{\mu}\hat{\pi})^2. \end{cases} \tag{3.53}$$

Введём следующие обозначения для оценки и ошибки оценки частоты, полученных оптимальным идентификатором по модифицированному методу наименьших квадратов:

$$\widehat{\omega}_{LSMM} = \sqrt{|\hat{\pi}|}, \quad \widetilde{\omega}_{LSMM} = \omega - \widehat{\omega}_{LSMM},$$

где $\hat{\pi}$ удовлетворяет системе (3.53).

Проведём математическое моделирование работы идентификаторов (3.48), (3.50) и (3.53) при прочих равных условиях с алгоритмом наименьших квадратов (3.45), не учитывающим параметрическую связь. Возьмём в качестве исходной информации зависимости $y_\pi(t)$, $\ddot{\mu}(t)$ и $\dot{\mu}(t)$, полученные в результате обработки идеального сигнала $Y(t)$ и реального $Y_s(t)$. Интегрирование систем уравнений перечисленных идентификаторов начнём с момента времени $t_0 = 10$. Моделирование проведём для нескольких значений начальных оценок:

$$\hat{\pi}(t_0) = \Omega_0^2,$$

где Ω_0— начальная оценка частоты.

Для матрицы M используем начальное условие вида:

$$M(t_0) = m_0 E,$$

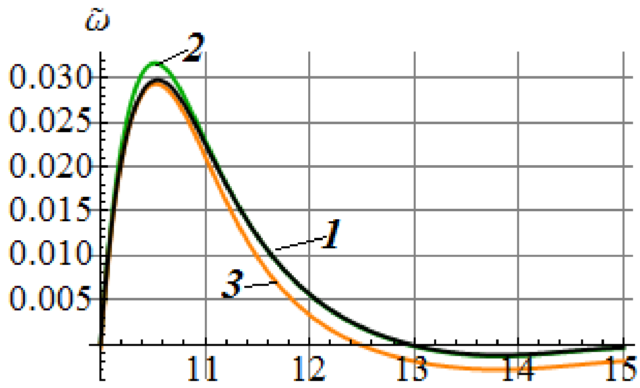
а для коэффициента усиления идентификатора параметров по модифицированному методу наименьших квадратов (3.53) P_π возьмём

$$P_\pi(t_0) = [C^{\mathrm{T}} M C]^{-1}\Big|_{t=t_0}.$$

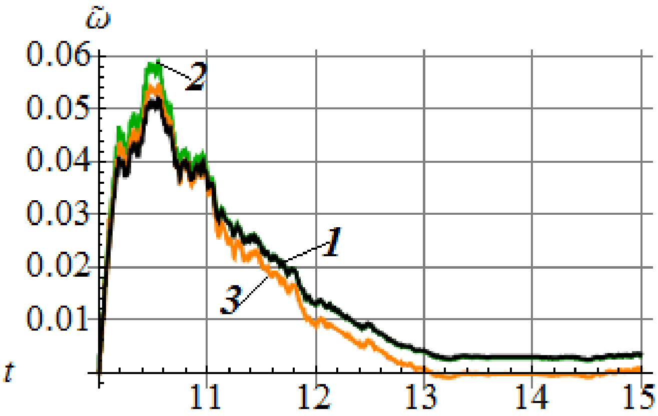
Примем значение $m_0 = 0{,}002$.

Сравнительные результаты такого моделирования приведены на рисунке 3.12. Представленные на них графики ошибок оценок частоты $\widetilde{\omega}_{LSMC}$, $\widetilde{\omega}_{LSMP}$ и $\widetilde{\omega}_{LSMM}$ демонстрируют, что учёт параметрической связи в алгоритме наименьших квадратов позволяет увеличить точность оценки частоты как минимум на порядок (см. для сравнения рисунок 3.10). Согласно полученным результатам, сходимость оценки $\widehat{\omega}_{LSMM}$, полученной модифицированным методом наименьших квадратов, хуже по сравнению с двумя остальными. Особенно это различие заметно при больших начальных ошибках оценки частоты (см. рисунки 3.12д и 3.12е). Отметим также, что в области малых ошибок оценок частоты результаты работы оптимального по методу наименьших квадратов идентификатора и алгоритма идентификации с проекцией практически одинаковы. Особенно хорошо это заметно на рисунках 3.12а и 3.12б.

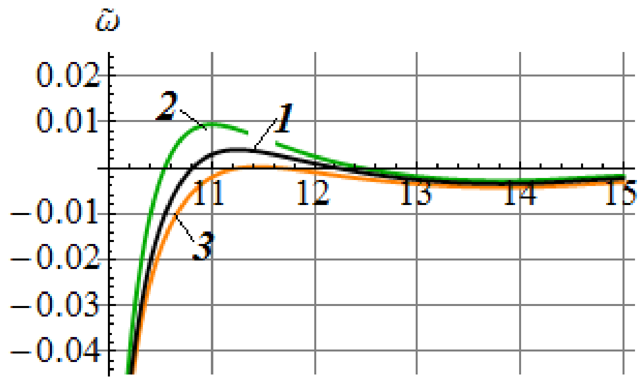
Сравнение графиков изменения ошибок оценок частоты, представленных на рисунках 3.12а, 3.12в и 3.12д с аналогичными зависимостями, отображёнными на рисунках 3.12б, 3.12г и 3.12е показывает достаточно существенное



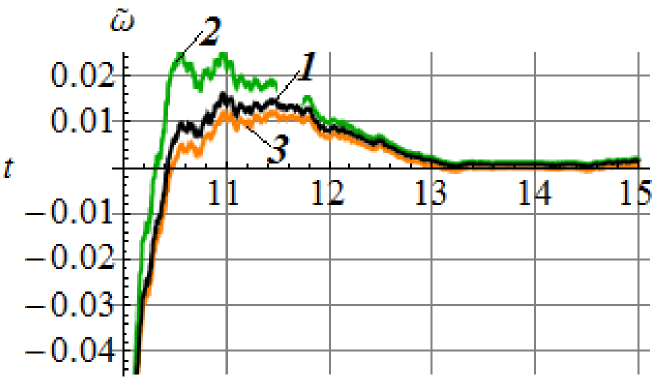
а) Ошибки оценок частоты сигнала $Y(t)$ при $\Omega_0 = 0{,}73$



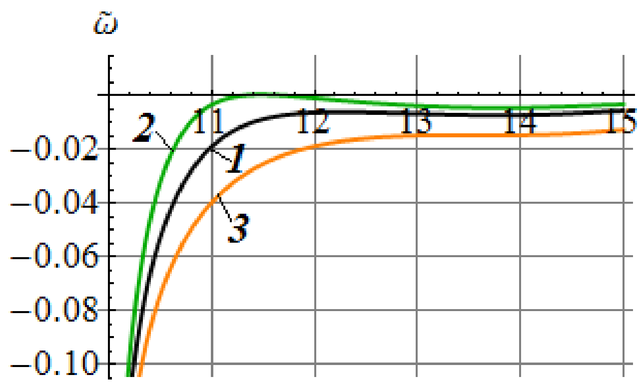
б) Ошибки оценок частоты сигнала $Y_s(t)$ при $\Omega_0 = 0{,}73$



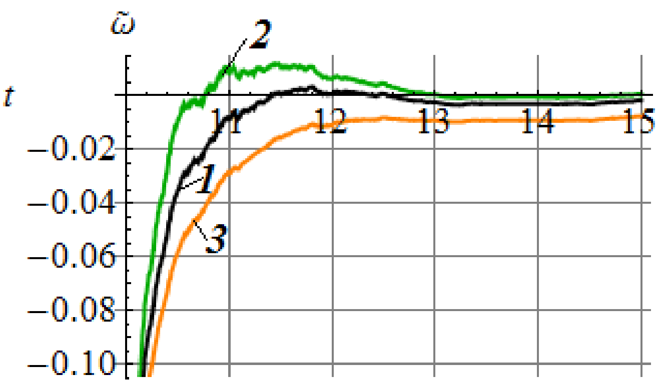
в) Ошибки оценок частоты сигнала $Y(t)$ при $\Omega_0 = 0{,}86$



г) Ошибки оценок частоты сигнала $Y_s(t)$ при $\Omega_0 = 0{,}86$



д) Ошибки оценок частоты сигнала $Y(t)$ при $\Omega_0 = 1{,}02$



е) Ошибки оценок частоты сигнала $Y_s(t)$ при $\Omega_0 = 1{,}02$

Ошибки оценок частоты: 1 — $\widetilde{\omega}_{LSMC}$; 2 — $\widetilde{\omega}_{LSMP}$; 3 — $\widetilde{\omega}_{LSMM}$.

Рисунок 3.12 — Результаты моделирования алгоритмов идентификации частоты, построенных на основе метода наименьших квадратов и учитывающих параметрическую связь. Переходные процессы влияние аддитивных погрешностей реального сигнала $Y_s(t)$ на переходные процессы в идентификаторах. Оно объясняется малыми величинами знаменателей правых частей уравнений для $\dot{\hat{\pi}}$ в алгоритмах (3.48), (3.50) и (3.53) в начале процесса идентификации.

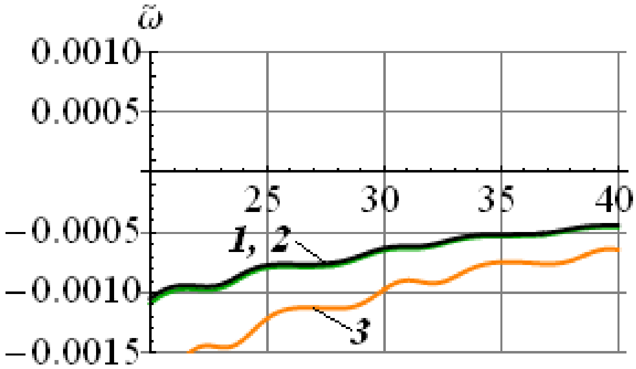
Исследуем поведение оценок, полученных алгоритмами (3.48), (3.50) и (3.53), в квазиустановившемся режиме. Графики изменения ошибок $\widetilde{\omega}_{LSMC}$, $\widetilde{\omega}_{LSMP}$ и $\widetilde{\omega}_{LSMM}$, приведены на рисунке 3.13. Они демонстрируют, что для случая практически нулевой начальной ошибки при $\Omega_0 = 0{,}73$ оценки частот сигналов Y и Y_s, вычисленные идентификаторами (3.48) и (3.50), являются наиболее точными. Для случаев значительных начальных начальных ошибок при $\Omega = 0{,}86$ и $\Omega = 1{,}02$ наибольшей точностью обладает метод наименьших квадратов с проекцией (3.50).

Графики, представленные на рисункам 3.12 и 3.13 показывают, что для выбранных условий проведения численного моделирования зашумлённость реального сигнала $Y_s(t)$ не приводит к существенному снижению точности оценок частоты, вырабатываемых алгоритмами алгоритмов (3.48), (3.50) и (3.53), по сравнению с оценками $\widehat{\omega}$, полученными для идеального сигнала $Y(t)$.

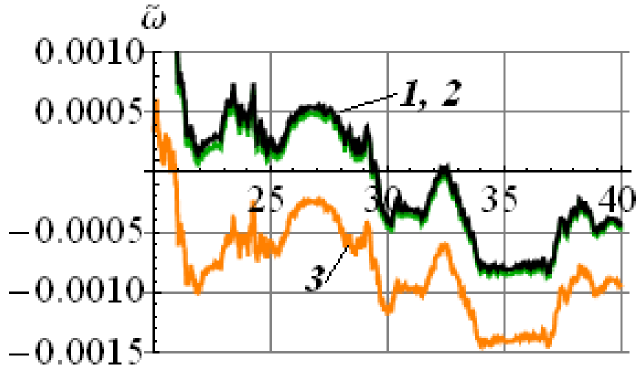
Худшая точность оценок, вырабатываемых модифицированным методом наименьших квадратов объясняется непосредственным влиянием ошибок оценок на величину коэффициента усиления P_π в уравнения (3.53).

Ухудшение точности оптимального алгоритма (3.48) по сравнению с субоптимальным (3.50) можно объяснить большей чувствительностью первого к переходным процессам во вспомогательном «фильтре» (3.25). Действительно, функция $\varepsilon(t)$, характеризующая свободные колебания в «фильтре» и игнорируемая в параметрической модели (3.30), влияет на значение её выходной переменной $y(t)$, и, следовательно на величину ошибки прогноза $e(t)$. Однако, в оптимальном алгоритме идентификации по методу наименьших квадратов (3.48) от $y(t)$ зависит ещё и величина $z_2(t)$, которая фигурирует в знаменателе выражения для псевдоскорости $\dot{\hat{\pi}}$.

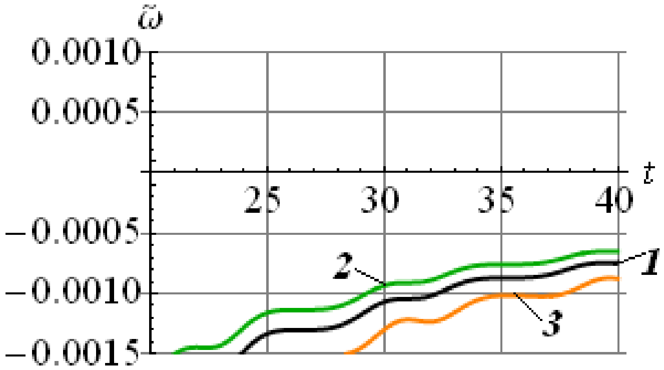
Продемонстрируем влияние регуляризации уравнения для множителя связи в алгоритме (3.51) на точность оценивания частоты измерительного сигнала $Y_s(t)$. Уравнения идентификатора (3.51) были численно проинтегрированы для начальной оценки частоты $\Omega = 1{,}02$, $\lambda(t_0) = 0$ при различных значениях



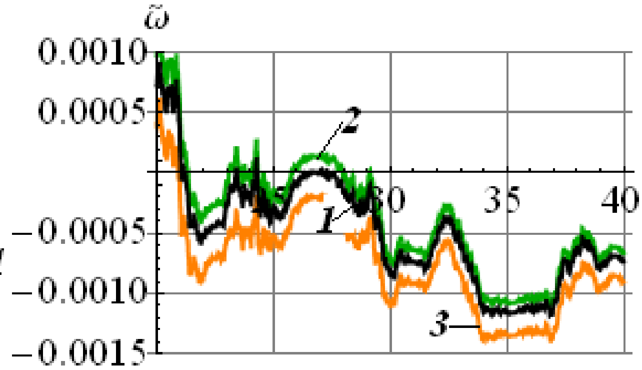
а) Ошибки оценок частоты сигнала $Y(t)$ при $\Omega_0 = 0{,}73$



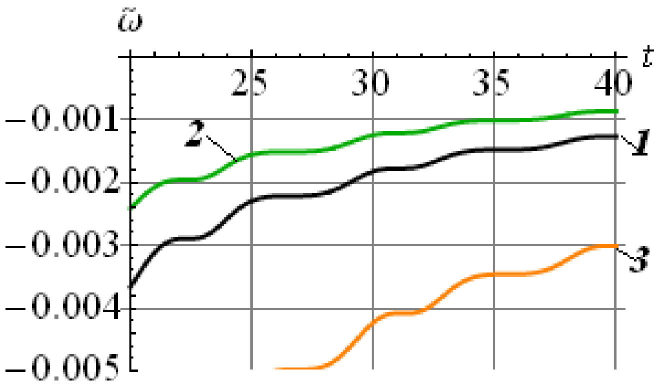
б) Ошибки оценок частоты сигнала $Y_s(t)$ при $\Omega_0 = 0{,}73$



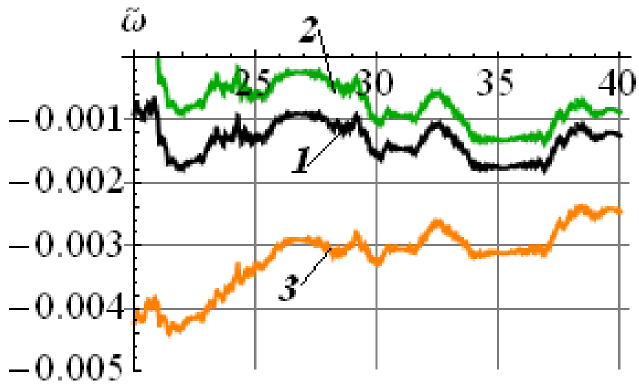
в) Ошибки оценок частоты сигнала $Y(t)$ при $\Omega_0 = 0{,}86$



г) Ошибки оценок частоты сигнала $Y_s(t)$ при $\Omega_0 = 0{,}86$



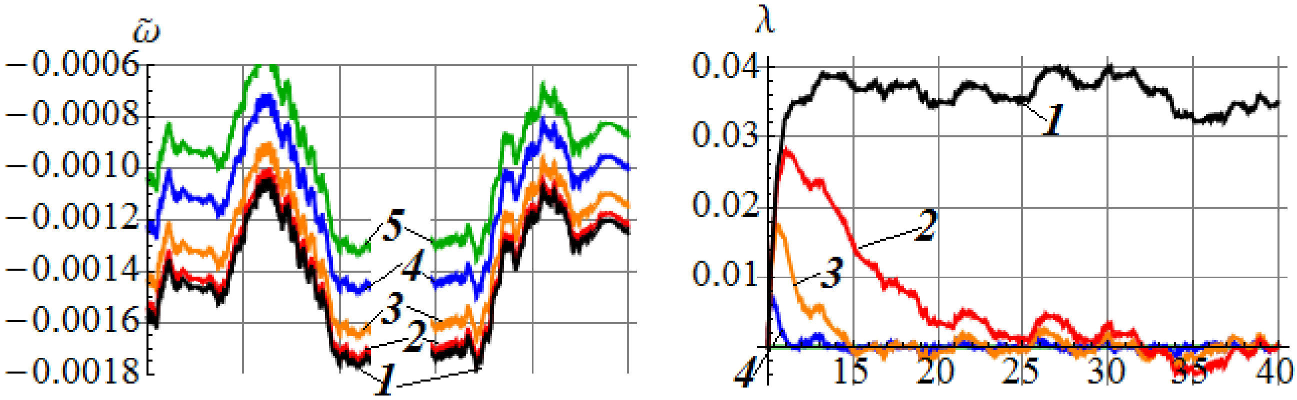
д) Ошибки оценок частоты сигнала $Y(t)$ при $\Omega_0 = 1{,}02$



е) Ошибки оценок частоты сигнала $Y_s(t)$ при $\Omega_0 = 1{,}02$

Ошибки оценок частоты: 1 — $\widetilde{\omega}_{LSMC}$; 2 — $\widetilde{\omega}_{LSMP}$; 3 — $\widetilde{\omega}_{LSMM}$.

Рисунок 3.13 — Установившийся режим работы идентификаторов частоты, построенных на основе метода наименьших квадратов коэффициента регуляризации A_λ. Результаты такого моделирования показаны на рисунке 3.14.



а) Ошибка оценки частоты $\widetilde{\omega}$ б) Множители связей λ

Величина коэффициента регуляризации:

1 — $A_\lambda = 0$ *(оптимальный алгоритм без регуляризации);*

2 — $A_\lambda = -0{,}2$*;* *3* — $A_\lambda = -1{,}0$*;* *4* — $A_\lambda = -5{,}0$*;*

5 — $A_\lambda = -\infty$ *(алгоритм с проекцией).*

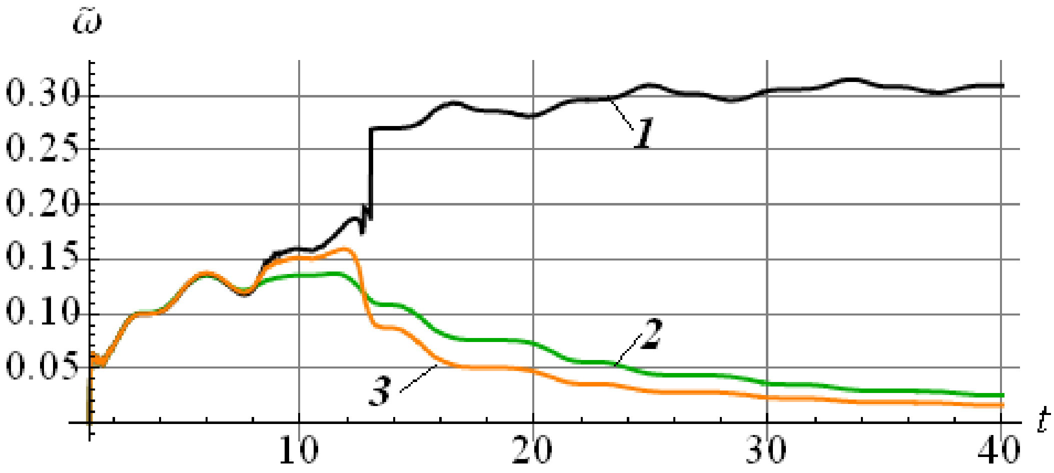
Рисунок 3.14 — Влияние регуляризации на точность алгоритма идентификации частоты по методу наименьших квадратов

Приведённые на рисунке 3.14а графики изменения ошибок оценок частоты $\widetilde{\omega}(t)$ демонстрируют, что при увеличении абсолютного значения коэффициента регуляризации A_λ точность алгоритма (3.51) увеличивается и приближаются к таковой у идентификатора параметров (3.50) с проекцией. Зависимости $\lambda(t)$, приведённые на рисунке 3.14б, показывают, что при отсутствии регуляризации изменение значения множителя связи λ носит характер колебаний в диапазоне значений 0,3 . . . 0,4. Такое поведение $\lambda(t)$ является результатом влияния аддитивных погрешностей, не учтённых в параметрической модели сигнала $Y_s(t)$. Их влияние снижается при ненулевых значениях коэффициента A_λ — колебания $\lambda(t)$ устанавливаются в окрестности нуля, а их амплитуда уменьшается при увеличении $|A_\lambda|$. В предельном случае $A_\lambda = -\infty$ множитель λ становится тождественно равен нулю, что соответствует алгоритму наименьших квадратов с проекцией.

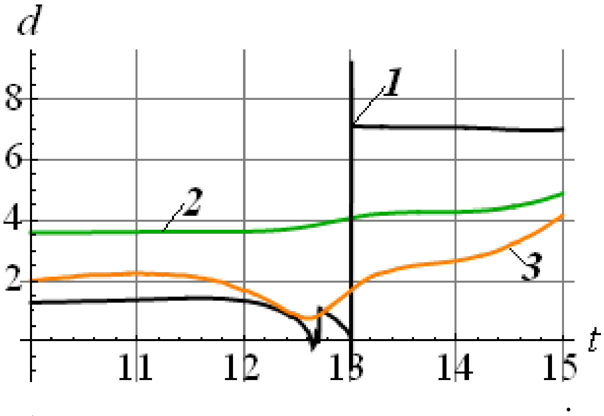
В определённых условиях влияние переходных процессов в «фильтре» (3.25) приводит к делению на ноль при вычислении оценки алгоритмом (3.48), и, следовательно к потере его работоспособности. Такое происходит, например, при моделировании работы оптимального идентификатора (3.48), если начать интегрирование его уравнений в момент времени $t_0 = 1$ с начальной оценкой частоты $\Omega_0 = 0{,}73$. Графики ошибки оценки частоты идеализированного сигнала $Y(t)$ $\widetilde{\omega}_{LSMC}(t)$ и знаменателя правой части уравнения для $\dot{\hat{\pi}}$

$$d_{LSMC} = 25m_{11} + 80m_{12}\hat{\pi} + 64m_{22}\hat{\pi}^2 + K(\hat{\pi},z_2)$$

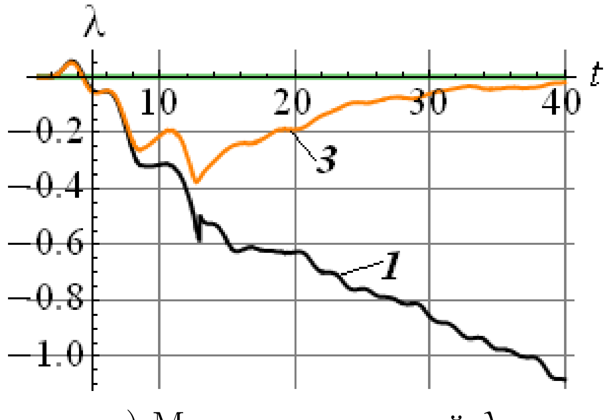
в системе (3.48) приведены на рисунке 3.15. На рисунке 3.15б видно, что величина d_{LSMC} обращается в ноль, приблизительно при $t = 12{,}85$. Это приводит к скачкообразному изменению оценки $\widehat{\omega}_{LSMC}$ в указанный момент времени, после чего её точность только ухудшается (см. рисунок 3.15а).



а) Ошибки оценок частоты $\widetilde{\omega}$, полученных для $\Omega_0 = 0{,}73$



б) Знаменатели выражений для $\dot{\hat{\pi}}$



в) Множители связей λ

Алгоритм идентификации по методу наименьших квадратов:

1 — оптимальный; 2 — с проекцией; 3 — с регуляризацией.

Рисунок 3.15 — Потеря работоспособности идентификатором частоты, оптимальным по методу наименьших квадратов

Для сравнения на рисунке 3.15 приведены зависимости ошибки оценки $\widetilde{\omega}_{LSMP}(t)$, полученной алгоритмом идентификации с проекцией (3.50) при прочих равных условиях, а также график изменения величины знаменателя выражения для $\dot{\hat{\pi}}$

$$d_{LSMP} = 25m_{11} + 80m_{12}\hat{\pi} + 64m_{22}\hat{\pi}^2$$

в системе (3.50).

В рассматриваемых условиях моделирования восстановить работу оптимального идентификатора помогает регуляризация уравнения для множителя связи λ. Результаты моделирования работы регуляризованного алгоритма (3.51) для $A_\lambda = -0{,}15$ также приведены на рисунке 3.15.

Представленная на рисунке 3.15б зависимость от времени знаменателя правой части уравнения для $\dot{\hat{\pi}}$

$$d_{LSMR} = 25m_{11} + 80m_{12}\hat{\pi} + 64m_{22}\hat{\pi}^2 + 8\lambda$$

в алгоритме (3.51) с регуляризацией показывает, обращения d_{LSMR} в ноль не происходит и этот идентификатор сохраняет свою работоспособность. Более того, точность вырабатываемой им оценки $\widehat{\omega}_{LSMR}$ в квазиустановившемся режиме превышает таковую для алгоритма с проекцией (3.50) (см. рисунок 3.15а).

Рассматриваемый пример более наглядно, чем предыдущие, демонстрирует положительный эффект от регуляризации уравнения для множителя λ в оптимальном алгоритме наименьших квадратов. Графики, представленные на рисунке 3.15в, показывают, что регуляризация предотвращает неограниченное уменьшение множителя связи λ, приводящее к потере работоспособности оптимального идентификатора (3.48) в данном случае.

Таким образом, учёт параметрической связи в алгоритме идентификации частоты по методу наименьших квадратов позволил увеличить её точность с одного до трёх знаков после запятой. В рассматриваемой задаче наилучшей точностью обладают оценки частоты, полученные методом наименьших квадратов с проекцией (3.50). Оптимальный же алгоритм идентификации (3.48) демонстрирует более сильную чувствительность к переходным процесса во вспомогательном «фильтре» (3.25) из-за чего его точность оказывается меньше. Влияние аддитивных погрешностей параметрической сигнала можно парировать, регуляризовав уравнение для множителя связи в оптимальном по методу наименьших квадратов идентификаторе. Такая регуляризация помогает улучшить его точностные характеристики в рассматриваемой задаче, а в некоторых случаях позволяет избежать потери им работоспособности из-за вырождения матрицы M_λ.

3.4 Совместная идентификация параметров колебаний резонатора

Рассмотрим ещё один алгоритм идентификации параметров первичного измерительного сигнала $Y_s(t)$, моделируемого двумя гармониками разложения в ряд Фурье (3.23):

$$Y(t) = b_0 + b_1 \cos\omega t + d_1 \sin\omega t + b_2 \cos 2\omega t + d_2 \sin 2\omega t.$$

Построим уравнения идентификатора для получения оценок не только частоты ω, но и коэффициентов Фурье b_k и d_k, $k = \overline{0{,}2}$, используемых для исследования установившихся колебаний резонатора. Перечисленные здесь параметры, напомним, предполагаются безразмерными.

Так как колебания системы возбуждались в достаточно узком диапазоне, то искомую безразмерную частоту ω можно представить как сумму некоторого известного номинального значения ω_0 и малой поправки $\Delta\omega$, подлежащей оцениванию:

$$\omega = \Delta\omega + \omega_0.$$

Линеаризуем расчётную модель измерительного сигнала по частоте:

$$Y = \left(Y + \frac{\partial Y}{\partial \omega}\Delta\omega\right)\bigg|_{\omega=\omega_0}.$$

Выполнив необходимые преобразования, получаем линейную параметрическую модель измерительного сигнала $Y_s(t)$ для идентификации его параметров:

$$Y(t) = b_0 + b_1 \cos\omega_0 t + d_1 \sin\omega_0 t + b_2 \cos 2\omega_0 t + d_2 \sin 2\omega_0 t - \tag{3.54}$$

$$-b_1 \Delta\omega\, t \sin\omega_0 t + d_1 \Delta\omega\, t \cos\omega_0 - 2b_2 \Delta\omega\, t \sin 2\omega_0 t + 2d_2 \Delta\omega\, t \cos 2\omega_0 t. \tag{3.55}$$

Запишем матрично-векторную форму полученного соотношения:

$$Y = N^{\mathrm{T}}\vartheta, \tag{3.56}$$

где вектор параметров ϑ имеет вид

$$\vartheta = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & d_1 & b_2 & d_2 & b_1\Delta\omega & d_1\Delta\omega & b_2\Delta\omega & d_2\Delta\omega \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{3.57}$$

а сигнальный вектор N задаётся соотношением

$$\begin{gathered} N = \big(1,\ \cos\omega_0 t,\ \sin\omega_0 t,\ \cos 2\omega_0 t,\ \sin 2\omega_0 t, \\ -t\sin\omega_0 t,\, t\cos\omega_0 t,\ -2t\sin 2\omega_0 t,\, 2t\cos 2\omega_0 t \big)^{\mathrm{T}}. \end{gathered} \tag{3.58}$$

Девять коэффициентов модели (3.54), образующих вектор ϑ зависят от шести независимых параметров — пяти коэффициентов Фурье и частотной поправки $\Delta\omega$. Соотношение (3.57) определяет зависимость

$$\vartheta = \Theta(b_0, b_1, d_1, b_2, d_2, \Delta\omega).$$

Введём вектор оценок независимых параметров

$$\hat{\pi} = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 & \hat{b}_1 & \hat{d}_1 & \hat{b}_2 & \hat{d}_2 & \Delta\widehat{\omega} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Вектор коэффициентов параметрической модели (3.54), таким образом, вычисляется по формуле

$$\hat{\vartheta} = \Theta(\hat{\pi}).$$

Производная по времени от вектора $\hat{\pi}$ является в рассматриваемой задаче вектором параметрических псевдоскоростей, связанным с вектором параметров $\hat{\vartheta}$ соотношением

$$\dot{\hat{\vartheta}} = C\dot{\hat{\pi}}, \quad C^{\mathrm{T}} = \frac{\partial\Theta^{\mathrm{T}}}{\partial\hat{\pi}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta\widehat{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta\widehat{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta\widehat{\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta\widehat{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{d}_1 & \hat{b}_1 & \hat{d}_2 & \hat{b}_2 \end{pmatrix}.$$

Так как построение параметрической модели (3.54) не потребовало использования решений дифференциальных уравнений, то задачу идентификации параметров сигнала удобно решать в дискретном времени.

Для выработки оценок параметров будем использовать значения сигнала $Y_{s[k]} = Y_s(t_k)$, которые измерялись в моменты времени t_k, образующие равномерную сетку с шагом 0,004:

$$t_k = t_{k-1} + 0{,}004, \quad t_1 = 0, \quad t_k \leqslant 40.$$

Идентификацию параметров модели (3.56)–(3.58) проведём по модифицированному методу наименьших квадратов (2.60):

$$\begin{cases} \hat{\pi}_{[k]} = \hat{\pi}_{[k-1]} + P_{\pi[k]} N_{C[k]} e_{[k]}, \\ P_{\pi[k]} = \left[E - P_{\pi[k-1]} N_{C[k]} \left(N^{\mathrm{T}}_{C[k]} P_{\pi[k-1]} N_{C[k]} + E\right)^{-1} N^{\mathrm{T}}_{C[k]}\right] P_{\pi[k-1]} \\ e_{[k]} = Y_{s[k]} - N^{\mathrm{T}}_{[k]} \Theta(\hat{\pi}_{[k-1]}), \quad N_{C[k]} = C^{\mathrm{T}}_{[k-1]} N_{[k]}. \end{cases} \tag{3.59}$$

В представленной системе уравнений модельный сигнал Y заменён на реальный измерительный Y_s.

Численное моделирование работы алгоритма идентификации (3.59) проводилось для начальных оценок частотной поправки $\Delta\omega$ вида

$$\Delta\widehat{\omega}_{[0]} = \Omega_0 - \omega_0,$$

где Ω_0 — начальная оценка частоты ω, а $\omega_0 = 0{,}731$ — номинальное значение частоты. Использовались следующие начальные оценки коэффициентов Фурье сигнала Y_s:

$$\hat{b}_{0[0]} = -0{,}2, \quad \hat{b}_{1[0]} = \hat{d}_{1[0]} = -0{,}5, \quad \hat{b}_{2[0]} = \hat{d}_{2[0]} = 0,$$

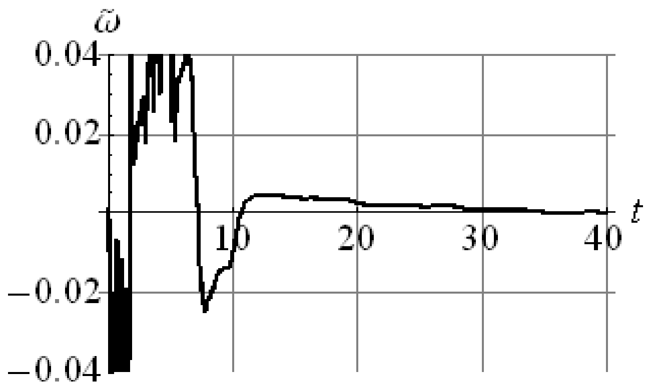
а матрица $P_{\pi[0]}$ бралась диагональной с элементами

$$P_{\pi 11[0]} = 1, \quad P_{\pi 22[0]} = P_{\pi 33[0]} = 5, \quad P_{\pi 44[0]} = P_{\pi 55[0]} = 1, \quad P_{\pi 66[0]} = 2.$$

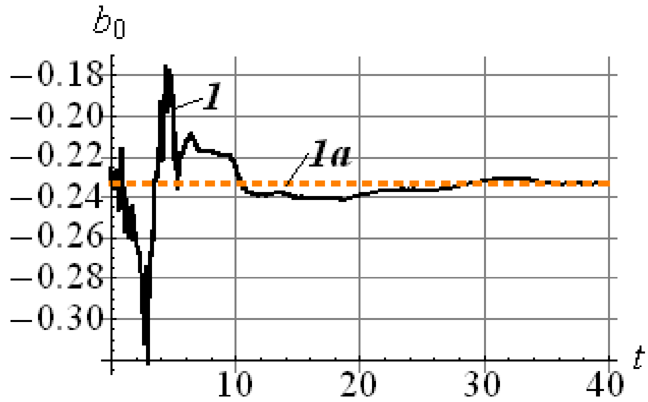
На рисунке 3.16 приводятся графики изменений оценок коэффициентов Фурье сигнала $Y_s(t)$ и ошибки оценки частоты $\widetilde{\omega}$, совпадающей с ошибкой оценки поправки

$$\Delta\widetilde{\omega} = \Delta\omega - \Delta\widehat{\omega} = \omega - \omega_0 - \Delta\widehat{\omega}.$$

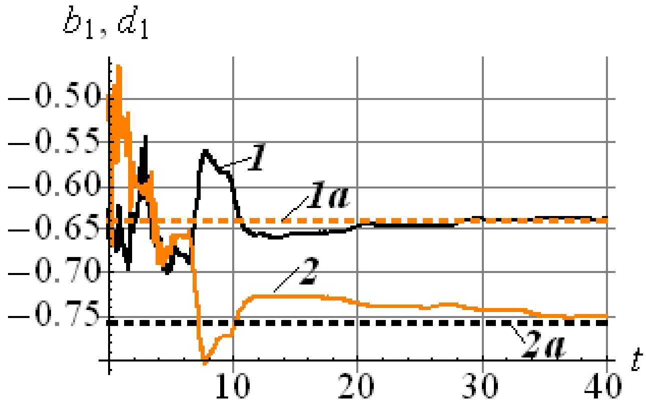
Перечисленные результаты получены при $\Omega_0 = 0{,}73$.



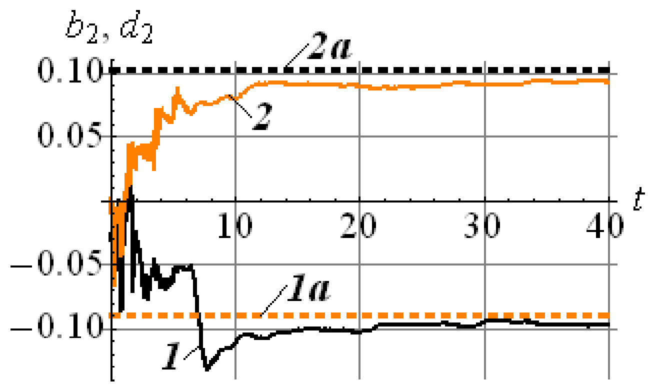
а) Ошибка оценки частоты $\widetilde{\omega}$



б) Оценка коэффициента b_0



в) Оценки коэффициентов b_1 и d_1



г) Оценки коэффициентов b_2 и d_2

1 — оценки $\hat{b}_k$; 1а — значения b_k, найденные оператором FindFit;

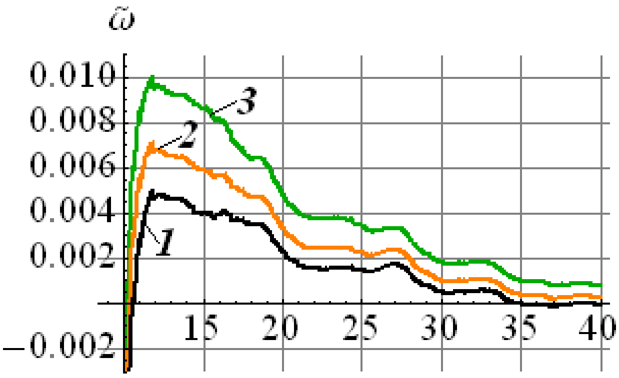
2 — оценки $\hat{d}_k$; 2а — значения d_k, найденные оператором FindFit.

Рисунок 3.16 — Результаты совместной идентификации частоты и коэффициентов Фурье сигнала $Y_s(t)$

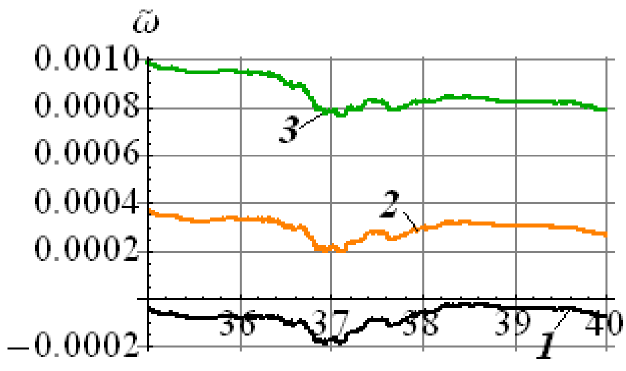
Для сравнения на на графиках 3.16б–3.16г отображаются значения коэффициентов Фурье, полученных в системе *Mathematica* оператором *FindFit* при известном значении частоты ω.

На рисунке 3.17 представлены графики изменения ошибок оценок частотной поправки, полученные при различных значениях Ω_0.

Представленные на рисунках 3.16 и 3.17 результаты работы алгоритма (3.59) говорят о высокой точности вырабатываемых им оценок.



а) Ошибки оценок частоты $\widetilde{\omega}$



б) Ошибки оценок частоты $\widetilde{\omega}$ в квазиустановившемся режиме

Начальная оценка частоты: 1 — $\Omega_0 = 0{,}73$; *2* — $\Omega_0 = 0{,}86$; *3* — $\Omega_0 = 1{,}02$.

Рисунок 3.17 — Ошибки оценки частоты сигнала $Y_s(t)$, полученные в процессе совместного оценивания при различных начальных условиях

3.5 Сравнение и обсуждение результатов идентификации параметров установившихся колебаний

Сведём вместе основные ошибки $\widetilde{\omega} = \omega - \widehat{\omega}$ оценок частоты первичного измерительного сигнала $Y_s(t)$ в таблицу 3.1. В ней приведены величины $\widetilde{\omega}$, выработанные алгоритмами (3.43), (3.50), (3.48), (3.53) и (3.59) в момент окончания процесса оценивания ($t = 40$), а также разброс значений ошибок $\widetilde{\omega}$ в процессе колебаний при $30 \leqslant t \leqslant 40$. Идентификация проводилась при начальном значении оценки частоты $\Omega_0 = 0{,}73$; использовался коэффициент усиления в градиентном алгоритме идентификации (3.43) $\gamma = 10$; работа алгоритмов, построенных на базе метода наименьших квадратов (МНК), начиналась при $t_0 = 10$ с начальным условием $M(t_0) = 0{,}002E$. Начальные условия для алгоритма (3.59) совместного оценивания частоты и коэффициентов Фурье сигнала $Y_s(t)$ были описаны выше.

В указанных условия моделирования наиболее точную оценку $\widehat{\omega}$ в конце процесса идентификации вырабатывает идентификатор (3.59), наименее точные — модифицированный МНК (3.53) и градиентный алгоритм с проекцией (3.43), причём в последнем случае колебания величины $\widehat{\omega}$ наиболее значительны.

Также в таблице 3.1 приведена ошибка оценки частоты, найденной в системе *Wolfram Mathematica* с помощью оператора *FindFit*. С помощью указанного

Таблица 3.1

Точность оценок частоты, полученных различными методами

Идентификатор частоты сигнала Y_s	Ошибка оценки частоты $\widetilde{\omega}$	
	$\widetilde{\omega}\big\|_{t=40}$	Колебания $\widetilde{\omega}$ при $30 \leqslant t \leqslant 40$
Оценивалась только частота:		
Градиентный с проекцией (3.43)	$-6{,}66 \cdot 10^{-4}$	$(-4{,}0 \ldots +1{,}0) \cdot 10^{-3}$
МНК с проекцией (3.50)	$-4{,}65 \cdot 10^{-4}$	$(-0{,}7 \ldots -0{,}0) \cdot 10^{-3}$
МНК оптимальный (3.48)	$-4{,}33 \cdot 10^{-4}$	$(-0{,}7 \ldots -0{,}0) \cdot 10^{-3}$
МНК модифицированный (3.53)	$-9{,}40 \cdot 10^{-4}$	$(-1{,}4 \ldots -0{,}7) \cdot 10^{-3}$
Оценивалась частота и коэффициенты Фурье:		
МНК модифицированный (3.59)	$-0{,}76 \cdot 10^{-4}$	$(-0{,}2 \ldots -0{,}0) \cdot 10^{-3}$
Оператор *FindFit*, *Mathematica*	$-4{,}54 \cdot 10^{-4}$	

оператора была оценена не только частота сигнала Y_s, но и коэффициенты Фурье b_k и d_k в выражении (3.23) для его аппроксимации двумя гармониками. Точность такой оценки частоты несколько уступает таковой, выработанной алгоритмом (3.59) и оптимальным по методу наименьших квадратов идентификатором (3.48).

Следует отметить, что увеличение точности оценок частоты сопряжено с увеличением размерности систем, определяющих алгоритм идентификации. С учётом размерности уравнения вспомогательного «фильтра» (3.25), градиентный идентификатор с проекцией (3.43) описывается системой дифференциальных уравнений шестого порядка, оптимальный алгоритм наименьших квадратов (3.48) — системой десятого порядка, а идентификатор (3.59) частоты и коэффициентов Фурье — системой рекуррентных уравнений 27-го порядка.

Отметим, что в описанной в главе 3.2 серии экспериментов по наблюдению вынужденных колебаний резонатора гироскопа частота входного воздействия изменялась с шагом $h_\omega = 0{,}2$ Гц, что соответствует безразмерному значению $h_\omega = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$. Эту величину вполне естественно принять за потребную точность оценки безразмерной частоты $\widehat{\omega}$. В приведённые в таблице 3.1 результаты работы идентификаторов такой высокой точности не демонстрируют.

Увеличение числа гармоник, аппроксимирующих сигнал Y_s, улучшает точность оценки $\widehat{\omega}$, но не до указанной величины. В этом можно убедиться, обратившись к таблице 3.2, в которой приведены ошибки $\widetilde{\omega}$ с которыми частоту ω определил оператор *FindFit* пакета *Mathematica*.

Таблица 3.2

Точность оценок частоты, полученных с помощью оператора *FindFit* пакета *Mathematica*

Число гармоник в аппроксимации сигнала Y_s	Ошибка оценки частоты $\widetilde{\omega}$
2	$-4{,}54 \cdot 10^{-4}$
3	$-4{,}40 \cdot 10^{-4}$
4	$-4{,}18 \cdot 10^{-4}$

Для улучшения точности оценки частоты можно увеличить время наблюдения сигнала $Y_s(t)$ до величины, сопоставимой с h_ω^{-1}, более тщательно настроить коэффициенты в рассмотренных ранее алгоритмах и уравнении вспомогательного «фильтра» (3.25), либо привлечь другие методики идентификации и оценивания.

Выводы по главе 3

В настоящей главе решена задача идентификации параметров математической модели колебаний резонатора с кубическими консервативными силами общего вида. Особое внимание уделено построению алгоритмов идентификации частоты установившихся колебаний системы. В такой задаче имеет место параметрическая связь, учёт которой в алгоритмах идентификации проводился различными способами. Решена задача идентификации параметров установившихся колебаний резонатора: частоты и коэффициентов Фурье. В этой задаче также выявлены параметрические связи.

Материалы главы опубликованы в работе [14].

4 Мобильный робот *youBot*: алгоритмы идентификации и управления

Введение дополнительных связей для решения задачи осуществления требуемых движений механическими системами распространено в робототехнике настолько, что уже излагается как в отечественных [96], так и в зарубежных [97; 98] учебных пособиях по этой дисциплине. Такой метод управления обладает рядом преимуществ.

Во-первых, введение дополнительных связей позволяет однозначно задать изменения всех обобщённых координат при программном движении механической системы с избыточными степенями свободы. Обычно синтез закона управления такими системами сводится к решению обратной задачи кинематики, которое неоднозначно.

Во-вторых, такой способ управления является в некотором смысле оптимальным. Действительно, управляющие обобщённые силы отождествляются с реакциями программных связей, величины которых экстремальны в смысле минимума квадратичной формы с коэффициентами, образующими обратную инерционную матрицу системы [66].

Таким образом, метод связей может быть применён для решения обратных задач динамики мобильных робототехнических систем с избыточными степенями свободы. Источники энергии таких роботов обладают ограниченной ёмкостью и оптимизация энергопотребления их управляющих систем является актуальной задачей.

Широко востребованным классом таких систем являются мобильные колёсные роботы, оснащённые манипуляторами. Решению обратных задач динамики для мобильного телескопического манипулятора посвящены, например, работы Ю. Г. Мартыненко и И. В. Орлова [63; 99]. Неголономная природа этой системы позволила применить для описания её динамики уравнения Маджи и Аппеля с использованием множителей дополнительных связей.

В работах Р. Г. Мухарлямова, И. А. Мухаметзянова и соавторов [51; 53; 54; 58] исследуются вопросы стабилизации дополнительных связей, с которыми согласуется требуемое движение системы. Рассматриваются примеры управления манипуляционными роботами с целью отработать заданное движение исполнительного органа. Для описания динамики этих систем использованы уравнения Лагранжа второго рода с множителями.

Следует отметить, что для реализации обсуждаемых алгоритмов управления требуется не только построить уравнения движения системы, но и знать величины коэффициентов, которые в них фигурируют. Идентификация таких параметров для составных частей мобильного манипулятора по результатам серии экспериментов подробно описана в работе [63]. Вопросы построения параметрической модели, алгоритмов оперативного оценивания и адаптивного управления для манипуляционного робота изучаются в книге Ж.–Ж. Слотина [21], упомянутой в предыдущих главах. В работе [100] для построения линейной параметрической модели роботов-манипуляторов используются базовые инерционные параметры [101]. Идентификации параметров класса систем, удовлетворяющих вариационному принципу Гамильтона–Остроградского посвящено исследование [102]. Получению оценок параметров реальных механических и мехатронных систем посвящены работы [103; 104].

Всё чаще мобильные робототехнические системы (в том числе манипуляционные), предназначенные для работы в стеснённых условиях складских, производственных и подобных помещений, реализуются на базе платформ всенаправленного движения (*omnidirectional platform*). Движители таких устройств могут представлять собой как обычные колёса, плоскости которых поворачиваются относительно платформы, так и роликонесущие. Если оси роликов, расположенных на внешней окружности диска, лежат в плоскости колеса, то его называют омни-колесом или классическим всенаправленным колесом (*omni-wheel, classical omnidirectional wheel*). Если же оси роликов скрещиваются с осью колеса под углом 45° то речь идёт о меканум-колесе (*mecanum-wheel*) или шведском колесе или, в честь изобретателя, колесе Илона.

Одним из устройств такого типа является *youBot* — мобильная платформа всенаправленного движения с меканум-колёсами, оснащённая одним или двумя манипуляторами, произведённая компанией *KUKA*. Для этого робота создано свободное и открытое программное обеспечение, что позволяет использовать *youBot* для широкого класса научно-исследовательских и учебных задач.

Множество публикаций последних лет посвящены исследованию кинематики и динамики, алгоритмам управления движением и вопросам практического применения мобильных систем с роликонесущими колёсами. Рассмотрим некоторые из них и начнём с работ зарубежных авторов [105–117].

В статьях И. Дорофтеи с соавторами [105; 106] приводится обзор областей применения мобильных устройств с меканум-колёсами; подробное сравнение их с платформами всенаправленного движения с другими типами колёс; приводятся результаты разработки конструкции и исследования кинематики одной платформы с меканум–колёсами, описываются алгоритмы автономного движения системы.

В работах [107–110] рассматриваются некоторые особенности контакта роликонесущих колёс с подстилающей поверхностью. В статье [107] рассматривается динамика платформы с омни-колёсами с учётом их проскальзывания, а в работе [108] предлагается алгоритм управления на базе нечётной логики с обнаружением проскальзывания для мобильной платформы с меканум-колёсами. Статья [109] посвящена моделированию устройств с омни-колёсами с учётом вязко-упругих свойств материала роликов. В работе [110] описывается разработка адаптивной системы управления платформы всенаправленного движения с меканум-колёсами по поверхности с неизвестным рельефом.

Публикации [111–114] посвящены специальным вопросам управления движением всенаправленных мобильных аппаратов. В статье [111] предлагается алгоритм субоптимального по быстродействию управления мобильной платформой с омни-колёсами, учитывающий её динамику и ограниченность сил контактного трения. Работа [112] посвящена синтезу закона управления мобильным роботом с омни-колёсами со стабилизацией программной траектории методом функций Ляпунова с учётом ограничений на величину угловых скоростей колёс.

В статье [114] приводится адаптивный алгоритм формирования управляющих моментов для отработки программного движения меканум-платформы и идентификации её параметров. Предложен адаптивный алгоритм управления параметрического типа, полученный с помощью метода функций Ляпунова, а также комбинированный алгоритм, сочетающий методы прямого и непрямого адаптивного управления. В работе [113] решена задача управления мобильной платформой с омни-колёсами со стабилизацией программной траектории и курсового угла с учётом динамики следящих приводов и ограничений на величину угловых скоростей колёс. Проведена идентификация параметров дискретной математической модели приводов колёс.

Работы [115; 116] Р. А. Кнеппера, Д. Расс и их соавторов посвящены решению практических задач по управлению мобильными роботами *youBot*. В статье [115] описываются алгоритмы избегания препятствий для группы таких аппаратов, основанные на поведении пешеходов. В работе [116] описывается реализация процесса сборки мебели группой взаимодействующих мобильных манипуляторов *youBot*.

Выпускная работа М. Руиза [117] посвящена разработке системы дистанционного управления роботом *youBot* с учётом сил трения в сочленениях колёс и платформы. Получена нелинейная по скорости модель такого трения, использованная для его алгоритмической компенсации.

В российских публикациях последних лет [118–127], посвящённых колёсным системам всенаправленного движения, основное внимание уделяется прежде всего теоретическим вопросам механики таких систем. Опубликован ряд работ [122; 124; 125], посвящённых мобильным устройствам с произвольным числом и расположением роликонесущих колёс.

Исследование динамики мобильной платформы с тремя омни-колёсами проведено в публикациях Ю. Г. Мартыненко и А. М. Формальского [118; 119]. В статье [118] проведено точное интегрирование уравнений управляемого движения аппарата в частном случае, рассмотрены вопросы оптимизации энергозатрат и счисления пройденного им пути. В работе [119] рассматривается мобильный робот с тремя омни-колёсами со смещённым центром масс платформы. Проведено точное интегрирование уравнений его движения в частных случаях, исследованы некоторые стационарные движения платформы при постоянных напряжениях на приводах. Алгоритмы траекторного управления для такого робота, построенные с использованием дифференциально-геометрических методов, приведены в статье [120].

В работах А. А. Зобовой и Я. В. Татаринова [121–123] рассматривается динамика и устойчивость движения всенапрвленных платформ с роликонесущими колёсами. В статье [122] исследуется устойчивость и ветвление некоторого класса стационарных движений для системы с произвольным числом роликонесущих колёс. Особенностью перечисленных работ является применение процедуры, опубликованной в [128], для вывода уравнений движения таких неголономных систем.

В работе А. А. Килина и А. Д. Бобыкина [124] решается задача траекторного управления платформой с произвольным количеством мекнаум-колёс; исследуется её управляемость в рамках нелинейной теории с применением аппарата дифференциальной геометрии [16; 18]. Статья А. В. Борисова и соавторов [125] посвящена построению уравнений движения тележки с меканум-колёсами по плоскости и по сфере и исследованию её свободных стационарных движений.

В публикациях В. Е. Павловского и соавторов [126; 127] описываются мобильные аппараты с меканум-колёсами новых типов. В статье [126] проведён кинематический анализ шестиколёсной меканум-платформы для всех возможных случаев ориентации роликов колёс. Работа [127] посвящена колёсно-шагающему аппарату, оснащённому шестью меканум-колёсами.

В рассмотренных публикациях, посвящённых задачам механики и управления мобильными платформами с роликонесущими колёсами, силы трения, действующие на валы и оси механических передач колёс, либо игнорируются, либо группируются авторами с управляющими моментами. Учёту трения в опорах роликов колёс в публикациях фактически не уделено никакого внимания. Также практически не затрагиваются задачи динамики и управления всенаправленными платформами с дополнительными программными связями.

Что же касается, задачи динамики систем с программными связями, то основным направлением исследований являются вопросы стабилизации связей. Вопросы, касающиеся исследования поведения обобщённых координат на движении с дополнительными связями в рассмотренных публикациях не поднимались.

Настоящая глава диссертации посвящена построению математической модели движения мобильной платформы *youBot* с учётом сил линейного вязкого трения в сочленениях тел; идентификации параметров такой модели; построению алгоритма управления системой с целью реализации программного движения, согласованного с дополнительными неголномными связями; исследованию стационарных движений платформы с такими связями.

4.1 Описание мобильного робота

Робот *youBot* компании *KUKA* представляет собой платформу всенаправленного движения с двумя парами роликонесущих меканум-колёс (колёс Илона), оборудованную, в зависимости от комплектации, одним или двумя манипуляторами, датчиками системы стереозрения, дальномерами (см. рисунок 4.1а).

Движителями платформы являются меканум-колёсами (см. рисунок 4.1б). На внешней окружности диска *1* такого колеса расположено шесть симметричных тел вращения — роликов *2*, оси которых составляют с его плоскостью угол 45°.

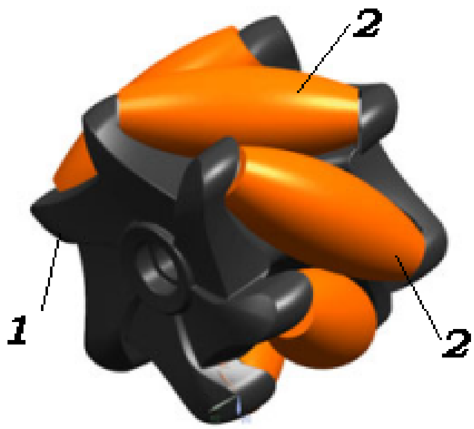
Рассматривается движение робота *youBot* по горизонтальной плоскости. Считается, что ролики непрерывно контактируют с подстилающей поверхностью без отрыва и проскальзывания, а положение точки контакта на меридиане ролика не зависит от угла поворота колеса.

Каждое колесо оснащено отдельным электроприводом постоянного тока с бесколлекторным двигателем, понижающей механической передачей и накапливающим (или инкрементным) энкодером — датчиком угловой скорости ротора двигателя относительно статора. Также робот оснащён датчиками Холла, позволяющими измерять силу тока каждого двигателя, по величине которой рассчитывается развиваемый момент электромагнитных сил.

Приводы сочленений манипулятора оснащены аналогично, за исключением энкодеров. Они являются позиционными и измеряют углы поворота ротора двигателя.

Контроллеры двигателей могут работать в режимах отработки заданного угла поворота в сочленении робота, заданной угловой скорости в сочленении и в режиме отработки указанной величины момента (силы тока), развиваемого приводом. Таким образом, в качестве управляющих величин можно рассматривать либо значения обобщённых координат или скоростей робота (*кинематический уровень*), либо значения моментов приводов (*динамический уровень*). В последнем случае для расчёта управляющих моментов необходимы уравнения движения системы. Некоторые коэффициенты в этих уравнениях неизвестны и подлежат оценке.

а) Общий вид робота в комплекте с одним манипулятором с устройством захвата



б) Роликонесущее колесо робота

Рисунок 4.1 — Мобильный робот *youBot*

Данная глава посвящена решению некоторых задач управления платформой *youBot* и оценивания параметров её математической модели. Предполагается, что в процессе функционирования робота манипулятор неактивен.

4.2 Кинематика платформы робота

Для описания кинематики мобильного робота введём неподвижную систему координат $X'Y'Z'$ с горизонтальной плоскостью $X'Y'$, а также подвижную $OXYZ$ с началом в геометрическом центре платформы O. Ось OX является продольной осью симметрии платформы, а OY — поперечной. Координатные оси Z' и OZ вертикальны и сонаправлены друг с другом.

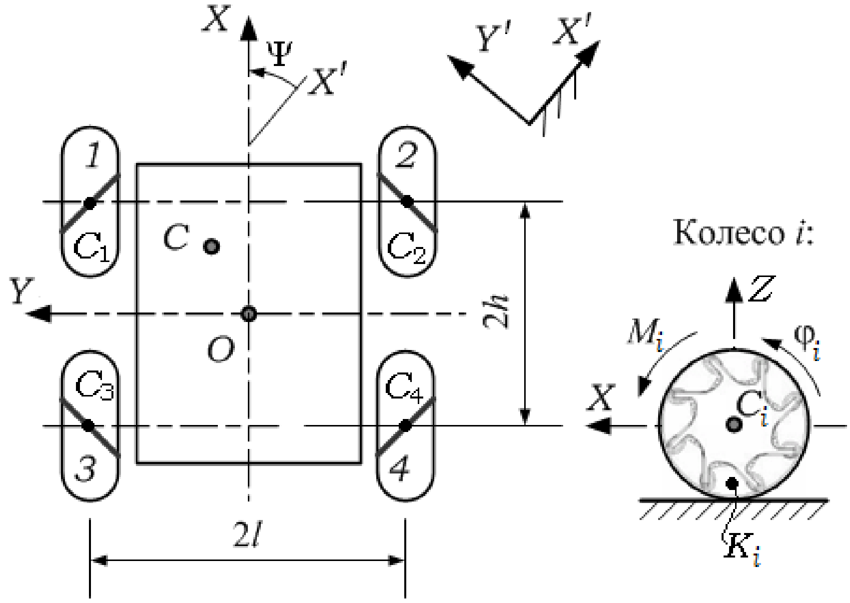


Рисунок 4.2 — Кинематическая схема мобильной платформы робота *youBot*

Положение платформы описывается с помощью декартовых координат X'_O и Y'_O её геометрического центра O в неподвижной системе координат XYZ и курсового угла Ψ между неподвижной осью X' и осью OX (см. рисунок 4.2). Угол поворота колеса i ($i = \overline{1,4}$) относительно корпуса робота обозначим φ_i (см. рисунок 4.2).

Таким образом, движение платформы задаётся семимерным вектором обобщённых координат:

$$q = (X'_O \;\; Y'_O \;\; \Psi \;\; \varphi_1 \;\; \varphi_2 \;\; \varphi_3 \;\; \varphi_4)^{\mathrm{T}}.$$

На кинематической схеме платформы, представленной на рисунке 4.2, направления осей роликов, контактирующих с подстилающей поверхностью указаны засечками на колёсах *1*, *2*, *3* и *4*; половина расстояния между осями колёсных пар обозначено как h, а половина расстояния между точками контакта противоположных колёс — как l.

Радиус R той цилиндрической поверхности, которой касаются оси всех роликов одного колеса, будем называть радиусом этого меканум-колеса. Из соображений симметрии следует, что

$$R = |C_i K_i|,$$

где C_i — геометрический центр i-го колеса, K_i — центр ролика, контактирующего с подстилающей поверхностью.

В рассматриваемой задаче условие непроскальзывания ролика i-го колеса сводится к взаимной ортогональности вектора скорости точки K_i и единичного вектора оси ролика $\overline{\ell}_i$ (см. рисунок 4.3):

$$\left(\overline{v}_{K_i}, \overline{\ell}_i\right) = 0. \tag{4.1}$$

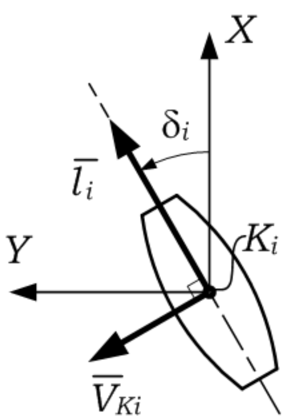


Рисунок 4.3 — Ролик i–го колеса, контактирующий с горизонтальной плоскостью без проскальзывания

Условия (4.1) при $i = \overline{1{,}4}$ определяют независимые неголономные связи, налагаемые на движение платформы. Одновременное выполнение всех четырёх условий (4.1) позволяет описать движение платформы в псевдоскоростях, составляющих вектор

$$\dot{\pi} = (V_X \;\; V_Y \;\; \Omega)^{\mathrm{T}},$$

где V_X, V_Y — проекции вектора скорости точки O на соответствующие подвижные оси, Ω — угловая скорость курса платформы:

$$V_X = \dot{X}'_O \cos\Psi + \dot{Y}'_O \sin\Psi, \quad V_Y = -\dot{X}'_O \sin\Psi + \dot{Y}'_O \cos\Psi, \quad \Omega = \dot{\Psi}. \tag{4.2}$$

Продемонстрируем это. Выразим вектор скорости точки K_i по формуле Эйлера [61]:

$$\overline{v}_{K_i} = \overline{v}_{C_i} + \left[\overline{\omega}_i,\, \overline{r}_{C_iK_i}\right] = \overline{v}_O + \left[\overline{\Omega}, \overline{r}_{OC_i}\right] + \left[\overline{\omega}_i, \overline{r}_{C_iK_i}\right], \tag{4.3}$$

где $\overline{v}_O$ — вектор скорости геометрического центра платформы O; $\overline{v}_{C_i}$ — вектор скорости центра i–го колеса; $\overline{r}_{C_iK_i}$, $\overline{r}_{O_iC_i}$ — радиус-векторы точек K_i и C_i относительно C_i и O соответственно; $\overline{\Omega}$ — вектор угловой скорости платформы; $\overline{\omega}_i$ — вектор абсолютной угловой скорости i-го колеса.

Запишем матричную форму соотношения (4.3) в проекциях на оси подвижной системы координат $OXYZ$:

$$v_{K_i}^{XYZ} = v_O^{XYZ} + \check{\Omega}^{XYZ} \cdot r_{OC_i}^{XYZ} + \check{\omega}_i^{XYZ} \cdot r_{C_iK_i}^{XYZ},$$

где столбцы проекций векторов на оси $OXYZ$ имеют вид:

$$v_O^{XYZ} = \begin{pmatrix} V_X \\ V_Y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{K_i}^{XYZ} = \begin{pmatrix} v_{K_iX} \\ v_{K_iY} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{OC_i}^{XYZ} = \begin{pmatrix} \rho_{X_i} \\ \rho_{Y_i} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega^{XYZ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}, \quad \omega_i^{XYZ} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}_i \\ \Omega \end{pmatrix}, \quad r_{C_iK_i}^{XYZ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix},$$

а кососимметричные матрицы, используемые для вычисления компонент векторных произведений определяются как

$$\check{\Omega}^{XYZ} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_Z & \Omega_Y \\ \Omega_Z & 0 & -\Omega_X \\ -\Omega_Y & \Omega_X & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \check{\omega}_i^{XYZ} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega & \dot{\varphi}_i \\ \Omega & 0 & 0 \\ -\dot{\varphi}_i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы такого вида будем использовать и далее для вычисления векторных произведений.

После проведения необходимых алгебраических действий, выражения для компонент вектора $\overline{v}_{K_i}$ принимают вид:

$$v_{K_iX} = V_X - \Omega\rho_{Y_i} - \dot{\varphi}_i R, \quad v_{K_iY} = V_Y + \Omega\rho_{X_i}. \tag{4.4}$$

Так как компоненты единичного вектора оси ролика $\overline{\ell}_i$ имеют вид

$$\ell_i^{XYZ} = (\cos\delta_i \ \ \sin\delta_i \ \ 0)^{\mathrm{T}},$$

где δ_i — угол между осью ролика и плоскостью колеса i (см. рисунок 4.3), то

$$\left(\overline{v}_{K_i}, \overline{\ell}_i\right) = v_{K_iX}\cos\delta_i + v_{K_iY}\sin\delta_i,$$

и, в силу (4.4), условие непроскальзывания (4.1) принимает вид:

$$(V_X - \Omega\rho_{Y_i} - \dot{\varphi}_i R)\cos\delta_i + (V_Y + \Omega\rho_{X_i})\sin\delta_i = 0.$$

Отсюда получаем выражение для угловой скорости i-го колеса относительно платформы:

$$\dot{\varphi}_i = \frac{1}{R}\left[V_X + V_Y \operatorname{tg}\delta_i + (\rho_{X_i}\operatorname{tg}\delta_i - \rho_{Y_i})\Omega\right]. \tag{4.5}$$

В таблице 4.1 приведены значения геометрических параметров, входящих в уравнение (4.5). Подставим эти величины в (4.5).

Таблица 4.1

Геометрические параметры для колёс платформы

Номер колеса i	δ_i	ρ_{X_i}	ρ_{Y_i}
1	$-45°$	h	l
2	$45°$	h	$-l$
3	$45°$	$-h$	l
4	$-45°$	$-h$	$-l$

Выражения для угловых скоростей колёс относительно платформы через псевдоскорости V_X, V_Y и Ω имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \frac{1}{R}\big[V_X - V_Y - (l+h)\Omega\big], \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{1}{R}\big[V_X + V_Y + (l+h)\Omega\big], \\ \dot{\varphi}_3 &= \frac{1}{R}\big[V_X + V_Y - (l+h)\Omega\big], \quad \dot{\varphi}_4 = \frac{1}{R}\big[V_X - V_Y + (l+h)\Omega\big]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Подстановка определяющих выражений (4.2) для псевдоскоростей в соотношения (4.6) преобразует последние в уравнения четырёх независимых неголономных связей, налагаемых на исследуемую механическую систему.

Перепроецировав компоненты вектора $\overline{v}_O$ на неподвижные оси XYZ, получаем:

$$\dot{X}_O' = V_X \cos\Psi - V_Y \sin\Psi, \quad \dot{Y}_O' = V_X \sin\Psi + V_Y \cos\Psi, \quad \dot{\Psi} = \Omega. \tag{4.7}$$

Уравнения (4.6) и (4.7) определяют зависимость элементов вектора обобщённых скоростей $\dot{q}$ от элементов вектора псевдоскоростей $\dot{\pi}$. Запишем их в векторно-матричной форме:

$$\dot{q} = C_q\dot{\pi}, \quad C_q = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} R\cos\Psi & -R\sin\Psi & 0 \\ R\sin\Psi & R\cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & R \\ 1 & -1 & -l-h \\ 1 & 1 & l+h \\ 1 & 1 & -l-h \\ 1 & -1 & l+h \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Для восстановления значений псевдоскоростей по измерениям скоростей вращения колёс $\dot{\varphi}_i$, $(i = \overline{1{,}4})$ в предположении идеальности контакта колёс с подстилающей поверхностью, решим переопределённую систему уравнений (4.6) относительно V_X, V_Y и Ω. Запишем её в матричной форме:

$$\dot{\varphi} = C_{\varphi}\dot{\pi},$$

где

$$\dot{\varphi} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \\ \dot{\varphi}_4 \end{pmatrix}, \quad C_{\varphi} = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -h-l \\ 1 & 1 & l+h \\ 1 & 1 & -h-l \\ 1 & -1 & l+h \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись методом наименьших квадратов, получаем:

$$\dot{\pi} = C_{\varphi}^{+}\dot{\varphi},$$

где C_{φ}^{+} — левая обратная матрица для C_{φ}:

$$C_{\varphi}^{+} \equiv \left(C_{\varphi}^{\mathrm{T}}C_{\varphi}\right)^{-1}C_{\varphi}^{\mathrm{T}} = \frac{R}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{l+h} & \frac{1}{l+h} & -\frac{1}{l+h} & \frac{1}{l+h} \end{pmatrix}.$$

Перепишем полученное соотношение поэлементно:

$$V_X = \frac{R}{4}[\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4 + \dot{\varphi}_3], \tag{4.9}$$

$$V_Y = \frac{R}{4}[\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_4 + \dot{\varphi}_3], \tag{4.10}$$

$$\Omega = \frac{1}{4\eta_{\text{к}}}[\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_3], \tag{4.11}$$

где $\eta_{\text{к}} = \frac{l+h}{R}$ — безразмерный коэффициент.

4.3 Динамика мобильной платформы

Составим уравнения движения платформы робота *youBot* в псевдоскоростях, образующих вектор

$$\dot{\pi} = (V_X \ \ V_Y \ \ \Omega)^{\mathrm{T}}.$$

Полагаем контакт меканум-колёс с подстилающей поверхностью идеальным. Массой и податливостью роликов, а также элементов механических передач приводов колёс пренебрегаем. Робот рассматриваем как систему абсолютно твёрдых тел. Считаем, что все колёса, как и характеристики их приводов, идентичны. В процессе движения манипулятор неподвижен относительно платформы робота и рассматривается с ней как одно тело. Полагаем, что силы трения в сочленениях тел линейны по сокрости.

Для получения уравнений движения системы воспользуемся формализмом Аппеля [61; 62; 68; 129]:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}} = \Pi, \tag{4.12}$$

где S — функция Аппеля или энергия ускорений, $\ddot{\pi}$ — столбец псевдоускорений, Π — столбец обобщённых сил, приведённых к псевдоскоростям:

$$\ddot{\pi} = \left(\dot{V}_X \ \ \dot{V}_Y \ \ \dot{\Omega}\right)^{\mathrm{T}}, \qquad \Pi = \left(\Pi_{V_X} \ \ \Pi_{V_Y} \ \ \Pi_{\Omega}\right)^{\mathrm{T}}.$$

4.3.1 Инерционные слагаемые в уравнениях движения

В рассматриваемой задаче функция S имеет вид:

$$S = S_{\text{пл}} + \sum_{i=1}^{4} S_i, \tag{4.13}$$

где $S_{\text{пл}}$ — функция Аппеля платформы с манипулятором, S_i — функция Аппеля колеса i. Это позволяет переписать левую часть уравнений Аппеля (4.12) в следующем виде:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}} = \frac{\partial S_{\text{пл}}}{\partial \ddot{\pi}} + \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial S_i}{\partial \ddot{\pi}}. \tag{4.14}$$

Функция Аппеля для платформы с манипулятором, совершающей плоскопараллельное движение имеет вид [61]:

$$S_{\text{пл}} = \frac{1}{2} m w_C^2 + \frac{1}{2} I_C \dot{\Omega}^2, \tag{4.15}$$

где w_C — ускорение центра масс C платформы с манипулятором, I_C — её момент инерции относительно вертикальной оси CZ, m — масса платформы и манипулятора.

Вектор ускорения $\overline{w}_C$ центра масс платформы с манипулятором найдём, дифференцируя его вектор скорости $\overline{v}_C$ в подвижной системе отсчёта $OXYZ$:

$$\overline{w}_C = \frac{\widetilde{\mathrm{d}} \overline{v}_C}{\mathrm{d}t} + \left[\overline{\Omega}, \overline{v}_C \right],$$

где $\widetilde{\mathrm{d}}/\mathrm{d}t$ обозначает локальную производную. В проекциях на подвижные оси XYZ последнее выражение имеет вид:

$$w_C^{XYZ} = \dot{v}_C^{XYZ} + \check{\Omega}^{XYZ} \cdot v_C^{XYZ}.$$

В соответствии с формулой Эйлера,

$$v_C^{XYZ} = \begin{pmatrix} V_X - a_Y \Omega & V_Y + a_X \Omega & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

где a_X и a_Y — абсцисса и ордината центра масс C в системе координат $OXYZ$. С учётом последнего выражения, столбец проекций вектора $\overline{w}_C$ имеет вид:

$$w_C^{XYZ} = \begin{pmatrix} \dot{V}_X - a_Y \dot{\Omega} \\ \dot{V}_Y + a_X \dot{\Omega} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_X - a_Y \Omega \\ V_Y + a_X \Omega \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_C^{XYZ} = \begin{pmatrix} \dot{V}_X - a_Y \dot{\Omega} - \Omega(V_Y + a_X \Omega) \\ \dot{V}_Y + a_X \dot{\Omega} + \Omega(V_X - a_Y \Omega) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Подставим полученные результаты в выражение для функции Аппеля платформы с манипулятором (4.15)

$$S_{\text{пл}} = \frac{1}{2}\Big\{ m\big[\dot V_X - a_Y\dot\Omega - \Omega(V_Y + a_X\Omega)\big]^2 + m\big[\dot V_Y + a_X\dot\Omega + \Omega(V_X - a_Y\Omega)\big]^2 + I_C\dot\Omega^2 \Big\}$$

и продифференцируем $S_{\text{пл}}$ по псевдоускорениям:

$$\frac{\partial S_{\text{пл}}}{\partial \ddot\pi} = \begin{pmatrix} m(\dot V_X - \Omega V_Y) - m a_Y\dot\Omega - m a_X\Omega^2 \\ m(\dot V_Y + \Omega V_X) + m a_X\dot\Omega - m a_Y\Omega^2 \\ I_O\dot\Omega - m a_Y(\dot V_X - \Omega V_Y) + m a_X(\dot V_Y + \Omega V_X) \end{pmatrix}, \qquad (4.17)$$

где $I_O = I_C + m(a_X^2 + a_Y^2)$ — момент инерции платформы с манипулятором относительно вертикальной оси OZ, проходящей через её геометрический центр O.

Перейдём к нахождению функции Аппеля i-го колеса S_i. Считая, что его центр масс совпадает с геометрическим центром C_i, а C_iY является осью динамической симметрии, выражение для S_i принимает вид [61; 97; 129]:

$$S_i = \frac{1}{2}\big\{ m_{\text{к}} w_{C_i}^2 + I_{\text{к}_Z}\dot\Omega^2 + I_{\text{к}_Y}\ddot\varphi_i^2 \big\}, \qquad (4.18)$$

где $m_{\text{к}}$ — масса колеса, $I_{\text{к}_Y}$ и $I_{\text{к}_Z}$ — его моменты инерции относительно осей C_iY и C_iZ соответственно. Слагаемые, не зависящие от псевдоускорений, в выражении (4.18) опущены.

Для нахождения компонент вектора ускорения центра масс колеса $\overline{w}_{C_i}$ достаточно заменить в формуле (4.16) координаты центра масс платформы с манипулятором a_X и a_Y на координаты точки C_i ρ_{X_i} и ρ_{Y_i} соответственно:

$$w_{C_i}^{XYZ} \equiv \begin{pmatrix} w_{C_iX} \\ w_{C_iY} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot V_X - \rho_{Y_i}\dot\Omega - \Omega(V_Y + \rho_{X_i}\Omega) \\ \dot V_Y + \rho_{X_i}\dot\Omega + \Omega(V_X - \rho_{Y_i}\Omega) \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.19)$$

В соответствии с (4.5), относительное угловое ускорение колеса имеет вид:

$$\ddot\varphi_i = \frac{1}{R}\big[\dot V_X + \dot V_Y \operatorname{tg}\delta_i + (\rho_{X_i}\operatorname{tg}\delta_i - \rho_{Y_i})\dot\Omega\big]. \qquad (4.20)$$

Продифференцируем функцию Аппеля S_i как сложную:

$$\frac{\partial S_i}{\partial \ddot{\pi}} = m_\text{к} w_{C_iX} \frac{\partial w_{C_iX}}{\partial \ddot{\pi}} + m_\text{к} w_{C_iY} \frac{\partial w_{C_iY}}{\partial \ddot{\pi}} + I_{\text{к}Z} \dot{\Omega} \frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial \ddot{\pi}} + I_{\text{к}Y} \ddot{\varphi}_i \frac{\partial \ddot{\varphi}_i}{\partial \ddot{\pi}}.$$

Производные от скалярных функций по псевдоускорениям $\dot{V}_X$, $\dot{V}_Y$ и Ω в силу (4.19) и (4.20) имеют вид:

$$\frac{\partial w_{C_iX}}{\partial \ddot{\pi}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\rho_{Y_i} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial w_{C_iY}}{\partial \ddot{\pi}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \rho_{X_i} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \ddot{\varphi}_i}{\partial \ddot{\pi}} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 1 \\ \operatorname{tg} \delta_i \\ \rho_{X_i} \operatorname{tg} \delta_i - \rho_{Y_i} \end{pmatrix}.$$

Последние соотношения позволяют записать производную от функции Аппеля i-го колеса в следующей форме:

$$\frac{\partial S_i}{\partial \ddot{\pi}} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} m_\text{к} R w_{C_iX} + I_{\text{к}Y} \ddot{\varphi}_i \\ m_\text{к} R w_{C_iY} + I_{\text{к}Y} \ddot{\varphi}_i \operatorname{tg} \delta_i \\ R[I_{\text{к}Z} \dot{\Omega} - m_\text{к} w_{C_iX} \rho_{Y_i} + m_\text{к} w_{C_iY} \rho_{X_i}] + I_{\text{к}Y} [\rho_{X_i} \operatorname{tg} \delta_i - \rho_{Y_i}] \ddot{\varphi}_i \end{pmatrix}.$$

Для упрощения суммирования полученных частных производных по $i = \overline{1{,}4}$, выполним промежуточные действия (см. таблицу 4.1):

$$\sum \operatorname{tg} \delta_i = 0, \quad \sum \rho_{X_i} = \sum \rho_{Y_i} = 0,$$

$$\sum \operatorname{tg}^2 \delta_i = 4, \quad \sum \rho_{X_i}^2 = 4h^2, \quad \sum \rho_{Y_i}^2 = 4l^2, \quad \sum \rho_{X_i} \rho_{Y_i} = 0,$$

$$\sum (\rho_{X_i} \operatorname{tg} \delta_i - \rho_{Y_i}) = \sum (\rho_{X_i} \operatorname{tg} \delta_i - \rho_{Y_i}) \operatorname{tg} \delta_i = 0, \quad \sum (\rho_{X_i} \operatorname{tg} \delta_i - \rho_{Y_i})^2 = 4(l+h)^2.$$

Вычислим следующие взвешенные суммы ускорений по $i = \overline{1{,}4}$:

$$\sum w_{C_iX} = \sum \left(\dot{V}_X - \rho_{Y_i} \dot{\Omega} - \Omega (V_Y + \rho_{X_i} \Omega) \right) = 4(\dot{V}_X - \Omega V_Y),$$

$$\sum w_{C_iY} = \sum \left(\dot{V}_Y + \rho_{X_i} \dot{\Omega} + \Omega (V_X - \rho_{Y_i} \Omega) \right) = 4(\dot{V}_Y + \Omega V_X),$$

$$\sum w_{C_iX} \rho_{Y_i} = \sum \left(\dot{V}_X - \rho_{Y_i} \dot{\Omega} - \Omega (V_Y + \rho_{X_i} \Omega) \right) \rho_{Y_i} = -4l^2 \dot{\Omega},$$

$$\sum w_{C_iY} \rho_{X_i} = \sum \left(\dot{V}_Y + \rho_{X_i} \dot{\Omega} + \Omega (V_X - \rho_{Y_i} \Omega) \right) \rho_{X_i} = 4h^2 \dot{\Omega},$$

$$\sum \ddot{\varphi}_i = \frac{1}{R} \sum \left(\dot{V}_X + \dot{V}_Y \operatorname{tg} \delta_i + (\rho_{X_i} \operatorname{tg} \delta_i - \rho_{Y_i}) \dot{\Omega} \right) = \frac{4\dot{V}_X}{R},$$

$$\sum \ddot{\varphi}_i \operatorname{tg} \delta_i = \frac{1}{R} \sum \left(\dot{V}_X + \dot{V}_Y \operatorname{tg} \delta_i + (\rho_{X_i} \operatorname{tg} \delta_i - \rho_{Y_i}) \dot{\Omega} \right) \operatorname{tg} \delta_i = \frac{4\dot{V}_Y}{R},$$

$$\sum (\rho_{X_i} \operatorname{tg} \delta_i - \rho_{Y_i}) \ddot{\varphi}_i = \frac{4(l+h)^2}{R} \dot{\Omega}.$$

В соответствии с полученными результатами, вклад инерции колёс в левую часть уравнений Аппеля (4.12) равен:

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial S_i}{\partial \ddot{\pi}} = \frac{4}{R^2} \begin{pmatrix} m_\text{к} R^2 (\dot{V}_X - \Omega V_Y) + I_{\text{к}_Y} \dot{V}_X \\ m_\text{к} R^2 (\dot{V}_Y + \Omega V_X) + I_{\text{к}_Y} \dot{V}_Y \\ I_{\text{к}_{OZ}} R^2 \dot{\Omega} + I_{\text{к}_Y} (l+h)^2 \dot{\Omega} \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

где $I_{\text{к}_{OZ}} = I_{\text{к}_Z} + m_\text{к}(h^2 + l^2)$ — момент инерции колеса относительно оси OZ.

4.3.2 Обобщённые силы

Перейдём к нахождению **обобщённых сил** в уравнениях Аппеля (4.12). В рассматриваемой задаче активными силовыми факторами являются управляющие моменты двигателей M_i, моменты линейного вязкого трения в подшипниках механических передач колёс

$$M_i^{\text{тр.к.}} = -\mu_\text{к} \dot{\varphi}_i,$$

где $\mu_\text{к}$ — соответствующий коэффициент вязкости; а также моменты линейного вязкого трения в опорах роликов, контактирующих с подстилающей поверхностью (см. рисунок 4.4):

$$\overline{M}_i^{\text{тр.р.}} = -\mu_\text{р} \overline{\omega}_{\text{р,к}_i},$$

где $\mu_\text{р}$ — коэффициент вязкости, $\overline{\omega}_{\text{р,к}_i}$ — вектор угловой скорости контактирующего ролика относительно колеса.

Найдём компоненты векторов $\overline{M}_i^{\text{тр.р.}}$ в подвижной системе координат $OXYZ$, связанной с платформой. Столбец проекций вектора $\overline{\omega}_{\text{р,к}_i}$ на оси по-

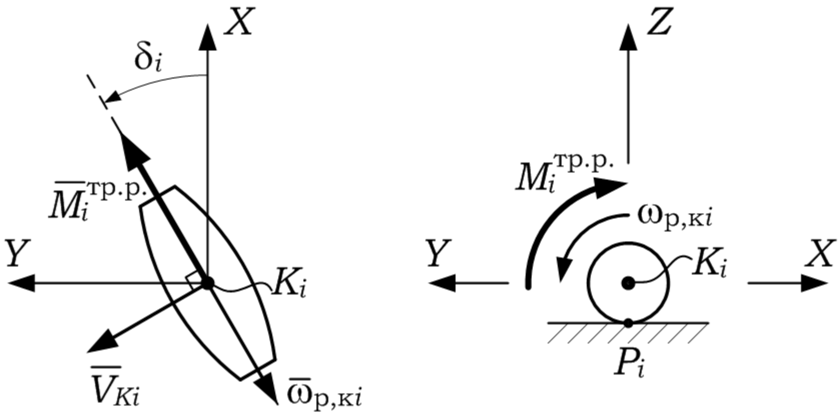


Рисунок 4.4 — Момент вязкого трения в опорах ролика i–го колеса, контактирующего с горизонтальной плоскостью без проскальзывания

движной системы координат XYZ имеет вид:

$$\omega_{\text{р,к}_i}^{XYZ} = \begin{pmatrix} -\omega_{\text{р,к}_i}\cos\delta_i \\ -\omega_{\text{р,к}_i}\sin\delta_i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выразим относительную угловую скорость ролика $\omega_{\text{р,к}_i}$, записав кинематическое условие непроскальзывания в точке P_i контакта ролика с подстилающей плоскостью. Воспользуемся формулой Эйлера

$$\overline{v}_{P_i} = \overline{v}_{K_i} + \left[\overline{\omega}_{\text{р}_i}, \overline{r}_{K_iP_i}\right], \tag{4.22}$$

где $\overline{v}_{P_i} = 0$ — вектор скорости точки контакта P_i, $\overline{r}_{K_iP_i}$ — её радиус–вектор относительно точки оси ролика K_i, $\overline{\omega}_{\text{р}_i}$ — вектор абсолютной угловой скорости контактирующего ролика:

$$\overline{\omega}_{\text{р}_i} = \overline{\omega}_{\text{р,к}_i} + \overline{\omega}_{\text{к}_i}.$$

Столбцы проекций этих векторов на подвижные оси имеют вид:

$$\omega_{\text{р}_i}^{XYZ} = \begin{pmatrix} -\omega_{\text{р,к}_i}\cos\delta_i \\ \dot{\varphi}_i - \omega_{\text{р,к}_i}\sin\delta_i \\ \Omega \end{pmatrix}, \quad r_{K_iP_i}^{XYZ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R_\text{р} \end{pmatrix},$$

где $R_\text{р}$ — радиус поперечного сечения ролика.

В соответствии с формулой Эйлера (4.22), проекция скорости точки оси ролика K_i на поперечную ось платформы:

$$v_{K_iY} = \omega_{\text{р,к}_i} R_\text{р} \cos\delta_i.$$

Обратившись к формуле (4.4), выразим эту величину через псевдоскорости V_Y и Ω, и получим соотношение для относительной угловой скорости ролика:

$$\omega_{\text{р,к}_i} = \frac{V_Y + \Omega\rho_{X_i}}{R_\text{р}\cos\delta_i}. \tag{4.23}$$

Найдём суммарную мощность $N^\text{в}_\text{тр.р.}$ моментов вязкого трения в подшипниках роликов на возможных скоростях:

$$N^\text{в}_\text{тр.р.} = \sum_{i=1}^{4}\left(\overline{M}_i^\text{тр.р.},\, \overline{\omega}^\text{в}_{\text{р,к}_i}\right) = -\sum_{i=1}^{4} \mu_\text{р}\omega_{\text{р,к}_i}\omega^\text{в}_{\text{р,к}_i}.$$

Применив формулу (4.23), получаем:

$$N^\text{в}_\text{тр.р.} = -\frac{\mu_\text{р}}{R_\text{р}^2}\sum \frac{(V_Y + \Omega\rho_{X_i})(V_Y^\text{в} + \Omega^\text{в}\rho_{X_i})}{\cos^2\delta_i} = \\ = -\frac{\mu_\text{р}}{R_\text{р}^2}\sum \frac{V_Y V_Y^\text{в} + \rho_{X_i}(\Omega V_Y^\text{в} + V_Y\Omega^\text{в}) + \rho_{X_i}^2\Omega\,\Omega^\text{в}}{\cos^2\delta_i}.$$

В соответствии со значениями геометрических параметров платформы, приведённых в таблице 4.1),

$$\cos^2\delta_i = \frac{1}{2}, \quad \sum\rho_{X_i} = 0, \quad \sum\rho_{X_i}^2 = 4h^2.$$

Это позволяет записать выражение для мощности моментов трения в подшипниках роликов в следующей форме:

$$N^\text{в}_\text{тр.р.} = -\frac{8\mu_\text{р}}{R_\text{р}^2}(V_Y V_Y^\text{в} + h^2\Omega\,\Omega^\text{в}).$$

Последнее соотношение может быть записано как

$$N^\text{в}_\text{тр.р.} = \Pi^\text{тр.р.}_{V_X}\cdot V_X^\text{в} + \Pi^\text{тр.р.}_{V_Y}\cdot V_Y^\text{в} + \Pi^\text{тр.р.}_{\Omega}\cdot\Omega^\text{в},$$

где $\Pi_{V_X}^{\text{тр.р.}}$, $\Pi_{V_Y}^{\text{тр.р.}}$ и $\Pi_{\Omega}^{\text{тр.р.}}$ — обобщённые силы трения в подшипниках роликов, приведённые к псевдоскоростям V_X, V_Y и Ω соответственно. Они имеют вид:

$$\Pi_{V_X}^{\text{тр.р.}} = 0, \quad \Pi_{V_Y}^{\text{тр.р.}} = -\frac{8\mu_\text{р}}{R_\text{р}^2} V_Y, \quad \Pi_{\Omega}^{\text{тр.р.}} = -\frac{8\mu_\text{р} h^2}{R_\text{р}^2}\Omega. \tag{4.24}$$

Составим выражение для мощности $N_{\text{тр.к.}}^{\text{в}}$ моментов линейного вязкого трения в подшипниках редукторов на возможных скоростях:

$$N_{\text{тр.к.}}^{\text{в}} = -\sum_{i=1}^{4} \mu_\text{к} \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_i^{\text{в}}$$

Выразим возможные относительные угловые скорости колёс $\dot{\varphi}_i^{\text{в}}$ в выражении мощности $N_{\text{тр.к.}}^{\text{в}}$ через возможные псевдоскорости $V_X^{\text{в}}$, $V_Y^{\text{в}}$ и $\Omega^{\text{в}}$ по формуле (4.5):

$$N_{\text{тр.к.}}^{\text{в}} = -\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{4} \mu_\text{к} \dot{\varphi}_i \big[V_X^{\text{в}} + V_Y^{\text{в}} \operatorname{tg}\delta_i + (\rho_{X_i}\operatorname{tg}\delta_i - \rho_{Y_i})\Omega^{\text{в}}\big].$$

После перегруппировки слагаемых получаем:

$$N_{\text{тр.к.}}^{\text{в}} = \Pi_{V_X}^{\text{тр.к.}} \cdot V_X^{\text{в}} + \Pi_{V_Y}^{\text{тр.к.}} \cdot V_Y^{\text{в}} + \Pi_{\Omega}^{\text{тр.к.}} \cdot \Omega^{\text{в}},$$

где $\Pi_{V_X}^{\text{тр.к.}}$, $\Pi_{V_Y}^{\text{тр.к.}}$ и $\Pi_{\Omega}^{\text{тр.к.}}$ — обобщённые силы трения в подшипниках редукторов, которые имеют вид (см. формулу (4.5) и таблицу 4.1):

$$\Pi_{V_X}^{\text{тр.к.}} = -\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{4} \mu_\text{к}\dot{\varphi}_i = -\frac{4\mu_\text{к}}{R^2} V_X, \tag{4.25}$$

$$\Pi_{V_Y}^{\text{тр.к.}} = -\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{4} \mu_\text{к}\dot{\varphi}_i \operatorname{tg}\delta_i = -\frac{4\mu_\text{к}}{R^2} V_Y, \tag{4.26}$$

$$\Pi_{\Omega}^{\text{тр.к.}} = -\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{4} \mu_\text{к}\dot{\varphi}_i (\rho_{X_i}\operatorname{tg}\delta_i - \rho_{Y_i}) = -\frac{4\mu_\text{к}(l+h)^2}{R^2}\Omega. \tag{4.27}$$

Перейдём к вычислению управляющих обобщённых сил. Их мощность $N^{\text{в}}_{\mathfrak{C}}$ на возможных скоростях равна

$$N^{\text{в}}_{\mathfrak{C}} = \sum_{i=1}^{4} M_i \dot{\varphi}^{\text{в}}_i = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{4} M_i \big[V^{\text{в}}_X + V^{\text{в}}_Y \operatorname{tg} \delta_i + (\rho_{X_i} \operatorname{tg} \delta_i - \rho_{Y_i}) \Omega^{\text{в}} \big].$$

Перегруппировав слагаемые, получаем:

$$N^{\text{в}}_{\mathfrak{C}} = F_X \cdot V^{\text{в}}_X + F_Y \cdot V^{\text{в}}_Y + M_\Omega \cdot \Omega^{\text{в}},$$

где F_X, F_Y и M_Ω — искомые управляющие обобщённые силы, приведённые к псевдоскоростям V_X, V_Y и Ω соответственно. В соответствии с формулой (4.5) и таблицей 4.1 они имеют вид:

$$F_X = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{4} M_i = \frac{1}{R} \left[M_2 + M_1 + M_4 + M_3 \right], \tag{4.28}$$

$$F_Y = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{4} M_i \operatorname{tg} \delta_i = \frac{1}{R} \left[M_2 - M_1 - M_4 + M_3 \right], \tag{4.29}$$

$$M_\Omega = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{4} M_i (\rho_{X_i} \operatorname{tg} \delta_i - \rho_{Y_i}) = \frac{l+h}{R} \cdot \left[M_2 - M_1 + M_4 - M_3 \right]. \tag{4.30}$$

Обобщённые силы в уравнениях Аппеля (4.12) имеют вид:

$$\Pi_{V_X} = F_X + \Pi^{\text{тр.к.}}_{V_X} + \Pi^{\text{тр.р.}}_{V_X} \tag{4.31}$$

$$\Pi_{V_Y} = F_Y + \Pi^{\text{тр.к.}}_{V_Y} + \Pi^{\text{тр.р.}}_{V_Y} \tag{4.32}$$

$$\Pi_{\Omega} = M_\Omega + \Pi^{\text{тр.к.}}_{\Omega} + \Pi^{\text{тр.р.}}_{\Omega}, \tag{4.33}$$

где управляющие общённые силы задаются соотношениями (4.28)–(4.30), а обобщённые силы вязкого трения определяются формулами (4.24), (4.25)–(4.27).

4.3.3 Уравнения движения

Сведём вместе правые и левые части **уравнений движения** (4.12), используя соотношения для частных производных функций Аппеля отдельных тел (4.17), (4.21) и выражения для обобщённых сил (4.31)–(4.33). Получаем:

$$m_{\text{рб}}(\dot V_X - \Omega V_Y) + \frac{4I_{\text{к}Y}}{R^2}\dot V_X - m a_Y \dot\Omega - m a_X \Omega^2 + \frac{4\mu_{\text{к}}}{R^2} V_X = F_X, \tag{4.34}$$

$$m_{\text{рб}}(\dot V_Y + \Omega V_X) + \frac{4I_{\text{к}Y}}{R^2}\dot V_Y + m a_X \dot\Omega - m a_Y \Omega^2 + \left(\frac{4\mu_{\text{к}}}{R^2} + \frac{8\mu_{\text{р}}}{R_{\text{р}}^2}\right) V_Y = F_Y, \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}(I_{\text{рб}} + 4I_{\text{к}Y}\eta_{\text{к}}^2)\dot\Omega - m a_Y(\dot V_X - \Omega V_Y) &+ m a_X(\dot V_Y + \Omega V_X) + \\ &+ \left(4\mu_{\text{к}}\eta_{\text{к}}^2 + 8\mu_{\text{р}}\eta_{\text{р}_1}^2\right)\Omega = M_\Omega,\end{aligned} \tag{4.36}$$

где $m_{\text{рб}} = m + 4m_{\text{к}}$ — общая масса робота; $I_{\text{рб}} = I_O + 4I_{\text{к}OZ}$ — его момент инерции относительно оси OZ; $\eta_{\text{к}} = \frac{l+h}{R}$, $\eta_{\text{р}_1} = \frac{h}{R_{\text{р}}}$ — безразмерные длины; F_X, F_Y и M_Ω — управляющие обобщённые силы, задаваемые соотношениями (4.28)–(4.30).

Отметим, что система уравнений (4.34)–(4.36) является замкнутой относительно псевдоскоростей V_X, V_Y и Ω, что позволяет решать её независимо от уравнений кинематики платформы (4.6)–(4.7).

По спецификации мобильного робота *youBot* можно определить значения геометрических параметров $l = 0{,}150$ м, $h = 0{,}235$ м, $R = 0{,}0475$ м и $R_{\text{р}} = 0{,}014$ м; общую массу платформы с манипулятором $m = 29{,}935$ кг, массу каждого колеса $m_{\text{к}} = 1{,}400$ кг, и, следовательно, общую массу робота $m_{\text{рб}} = 35{,}535$ кг. Значения остальных коэффициентов в уравнениях (4.34)–(4.36) остаются неизвестными. Более того, если платформа перевозит груз неизвестной массы и габаритов, значение параметра $m_{\text{рб}}$ подлежит уточнению.

Система уравнений (4.34)–(4.36) не может быть использована для синтеза законов управления мобильным роботом *youBot* до тех пор, пока значения некоторых коэффициентов являются неизвестными.

4.3.4 Описание движения платформы в новых переменных

Прежде чем перейти к решению задачи идентификации параметров мобильной платформы, вспомогательное алгебраическое преобразование её уравнений движения. Перепишем их в новых новых переменных Ω_{V_X}, Ω_{V_Y} и Ω:

$$V_X = (l+h)\Omega_{V_X}, \quad V_Y = (l+h)\Omega_{V_Y}. \tag{4.37}$$

Выражения скоростей вращения колёс относительно платформы (4.6), полученные для случая идеального контакта колеса с подстилающей поверхностью, в новых псевдоскоростях принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot\varphi_1 &= \eta_\text{к}\big[\Omega_{V_X} - \Omega_{V_Y} - \Omega\big], \quad \dot\varphi_2 = \eta_\text{к}\big[\Omega_{V_X} + \Omega_{V_Y} + \Omega\big], \\ \dot\varphi_3 &= \eta_\text{к}\big[\Omega_{V_X} + \Omega_{V_Y} - \Omega\big], \quad \dot\varphi_4 = \eta_\text{к}\big[\Omega_{V_X} - \Omega_{V_Y} + \Omega\big]. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Решив систему (4.38) методом наименьших квадратов, получаем выражения псевдоскоростей через относительные угловые скорости колёс:

$$\Omega_{V_X} = \frac{1}{4\eta_\text{к}}[\dot\varphi_2 + \dot\varphi_1 + \dot\varphi_4 + \dot\varphi_3], \tag{4.39}$$

$$\Omega_{V_Y} = \frac{1}{4\eta_\text{к}}[\dot\varphi_2 - \dot\varphi_1 - \dot\varphi_4 + \dot\varphi_3], \tag{4.40}$$

$$\Omega = \frac{1}{4\eta_\text{к}}[\dot\varphi_2 - \dot\varphi_1 + \dot\varphi_4 - \dot\varphi_3], \tag{4.41}$$

После применения указанной замены переменных в системе (4.34)–(4.36) и умножения уравнений (4.34) и (4.35) на $(l+h)$, получаем: Уравнения движения (4.42)–(4.44) в переменных $\Omega_{V_X} = (l+h)V_X$, $\Omega_{V_Y} = (l+h)V_Y$ и Ω с учётом вязкого трения в опорах роликов примут вид:

$$J_\text{рб}(\dot\Omega_{V_X} - \Omega_{V_Y}\Omega) + 4I_{\text{к}_Y}\eta_\text{к}^2\dot\Omega_{V_X} - J_Y\dot\Omega - J_X\Omega^2 + 4\mu_\text{к}\eta_\text{к}^2\Omega_{V_X} = M_{V_X}, \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned} J_\text{рб}(\dot\Omega_{V_Y} + \Omega_{V_X}\Omega) + 4I_{\text{к}_Y}\eta_\text{к}^2\dot\Omega_{V_Y} + J_X\dot\Omega - J_Y\Omega^2 + \\ + \big(4\mu_\text{к}\eta_\text{к}^2 + 8\mu_\text{р}\eta_{\text{р}_2}^2\big)\Omega_{V_Y} = M_{V_Y}, \end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned} (I_\text{рб} + 4I_{\text{к}_Y}\eta_\text{к}^2)\dot\Omega - J_Y(\dot\Omega_{V_X} - \Omega_{V_Y}\Omega) + J_X(\dot\Omega_{V_Y} + \Omega_{V_X}\Omega) + \\ + \big(4\mu_\text{к}\eta_\text{к}^2 + 8\mu_\text{р}\eta_{\text{р}_1}^2\big)\Omega = M_\Omega, \end{aligned} \tag{4.44}$$

где $J_{\text{рб}} = m_{\text{рб}}(l+h)^2$, $J_X = ma_X(l+h)$, $J_Y = ma_Y(l+h)$ — коэффициенты, имеющие размерность моментов инерции; $\eta_{\text{р}_2} = \frac{l+h}{R_{\text{р}}}$ — безразмерный коэффициент; M_{V_X}, M_{V_Y} и M_Ω — управляющие обобщённые силы, приведённые к новым псевдоскоростям Ω_{V_X}, Ω_{V_Y} и Ω:

$$M_{V_X} = \eta_{\text{к}} \left[M_2 + M_1 + M_4 + M_3\right], \tag{4.45}$$

$$M_{V_Y} = \eta_{\text{к}} \left[M_2 - M_1 - M_4 + M_3\right], \tag{4.46}$$

$$M_\Omega = \eta_{\text{к}} \left[M_2 - M_1 + M_4 - M_3\right]. \tag{4.47}$$

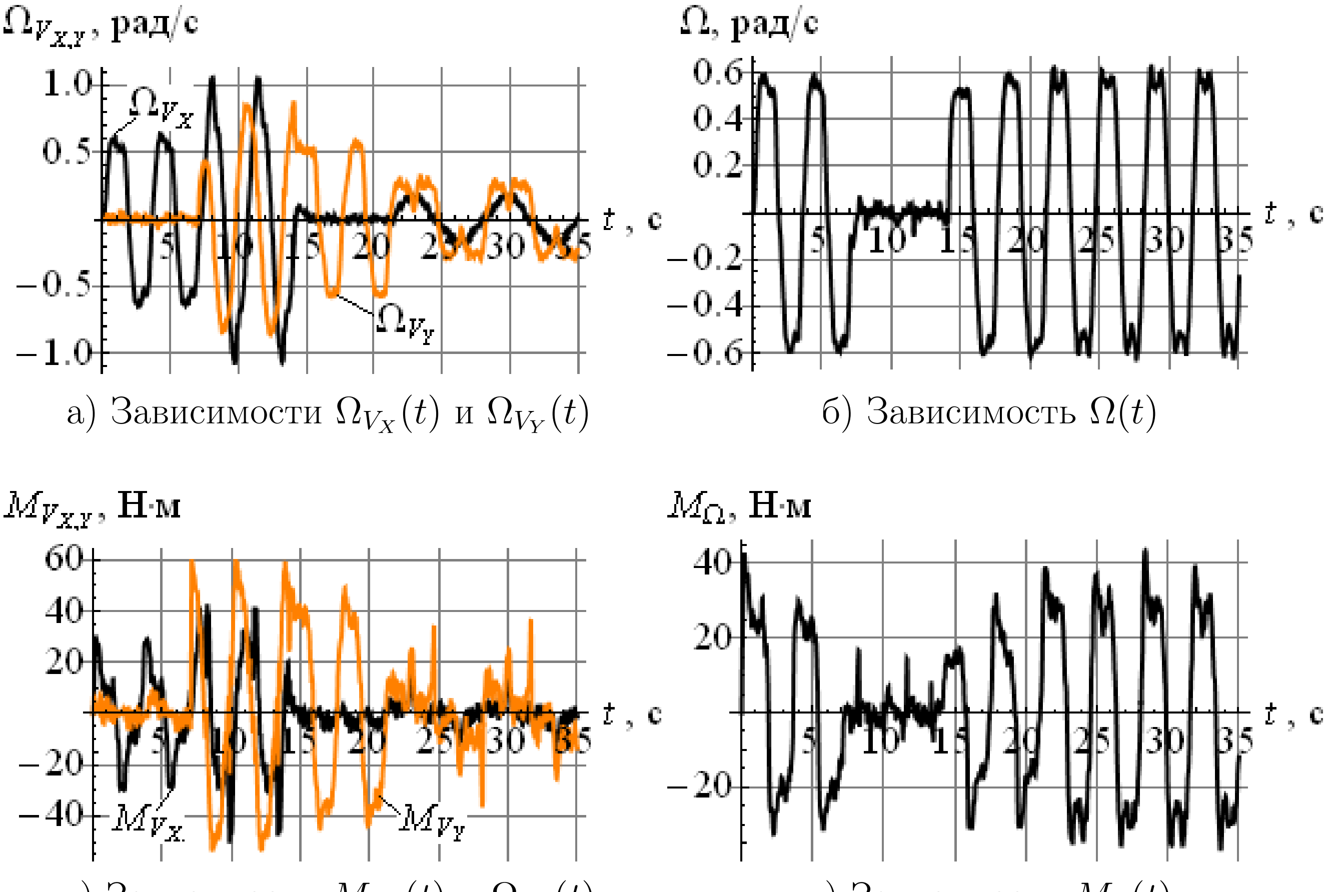
Таким образом, замена переменных (4.37) позволила привести все псевдоскорости, как и обобщённые силы, к одной размерности и записать уравнения движения в более компактном и обозримом виде. Одинаковая размерность управляющих обобщённых сил позволяет решить задачу идентификации параметров, не применяя взвешенный метод наименьших квадратов.

4.4 Идентификация параметров математической модели робота

Для решения задачи идентификации параметров математической модели движения робота *youBot* построим параметрическую модель рассматриваемой системы на основе уравнений движения (4.34)–(4.36).

Исходной информацией для идентификации параметров служат зависимости от времени скоростей вращений колёс $\dot\varphi_i(t)$ и моментов $M_i(t)$ ($i = \overline{1,4}$), полученные экспериментально в процессе движения робота. Считая, что контакт колёс с подстилающей поверхностью идеален, значения псевдоскоростей $\Omega_{V_X}(t)$, $\Omega_{V_Y}(t)$ и $\Omega(t)$ определяются формулами (4.39)–(4.41). Управляющие обобщённые силы $M_{V_X}(t)$, $M_{V_Y}(t)$ и $M_\Omega(t)$ вычисляются в соответствии с (4.45)–(4.47). Графики изменения указанных псевдоскоростей и управляющих обобщённых сил на отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant 35$ с представлены на рисунке 4.5.

Помимо псевдоскоростей, уравнения движения (4.42)–(4.44) содержат их производные по времени — псевдоускорения. Для построения параметрической модели системы, не прибегая к дифференцированию измерительной информации, воспользуемся следующей методикой.



а) Зависимости $\Omega_{V_X}(t)$ и $\Omega_{V_Y}(t)$ б) Зависимость $\Omega(t)$

в) Зависимости $M_{V_X}(t)$ и $\Omega_{V_Y}(t)$ г) Зависимость $M_\Omega(t)$

Рисунок 4.5 — Исходные данные для идентификации параметров мобильного робота *youBot*

Преобразуем функции, линейные комбинации которых образуют уравнения (4.42)–(4.44), с помощью устойчивых звеньев первого порядка («фильтров») [18; 20–22]:

$$\dot{\alpha}_1 + a_f\alpha_1 = a_f\Omega_{V_X}, \quad \dot{\alpha}_2 + a_f\alpha_2 = a_f\Omega_{V_Y}, \quad \dot{\alpha}_3 + a_f\alpha_3 = a_f\Omega, \tag{4.48}$$

$$\dot{\alpha}_{13} + a_f\alpha_{13} = a_f\Omega_{V_X}\Omega, \quad \dot{\alpha}_{23} + a_f\alpha_{23} = a_f\Omega_{V_Y}\Omega, \quad \dot{\alpha}_{33} + a_f\alpha_{33} = a_f\Omega^2, \tag{4.49}$$

$$\dot{\beta}_1 + a_f\beta_1 = a_f M_{V_X}, \quad \dot{\beta}_2 + a_f\beta_2 = a_f M_{V_Y}, \quad \dot{\beta}_3 + a_f\beta_3 = a_f M_\Omega, \tag{4.50}$$

где $a_f > 0$ — постоянный коэффициент; α_i, α_{i3}, β_i $(i = \overline{1,3})$ — переменные состояния вспомогательных динамических звеньев. Описанная здесь замена переменных, необходимая для построения параметрической модели системы без использования неизмеряемых псевдоускорений $\dot{\Omega}_{V_X}$, $\dot{\Omega}_{V_Y}$ и $\dot{\Omega}$. Продемонстрируем это.

Заменим функции Ω_{V_X}, Ω_{V_Y}, Ω, $\Omega_{V_X}\Omega$, $\Omega_{V_Y}\Omega$, Ω^2, M_{V_X}, M_{V_Y} и M_Ω в уравнениях динамики платформы (4.42)–(4.44) в силу соотношений (4.48)–(4.50).

После перегруппировки слагаемых получаем:

$$\dot{\varepsilon}_i + a_f \varepsilon_i = 0, \quad i = \overline{1{,}3}, \tag{4.51}$$

где

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1 = J_{\text{рб}}(\dot{\alpha}_1 - \alpha_{23}) + 4I_{\text{к}_Y}\eta_{\text{к}}^2\dot{\alpha}_1 - J_Y\dot{\alpha}_3 - J_X\alpha_{33} + 4\mu_{\text{к}}\eta_{\text{к}}^2\alpha_1 - \beta_1,\\
\varepsilon_2 = J_{\text{рб}}(\dot{\alpha}_2 + \alpha_{13}) + 4I_{\text{к}_Y}\eta_{\text{к}}^2\dot{\alpha}_2 + J_X\dot{\alpha}_3 - J_Y\alpha_{33} + \big(4\mu_{\text{к}}\eta_{\text{к}}^2 + 8\mu_{\text{р}}\eta_{\text{р}_2}^2\big)\alpha_2 - \beta_2,\\
\varepsilon_3 = (I_{\text{рб}} + 4I_{\text{к}_Y}\eta_{\text{к}}^2)\dot{\alpha}_3 - J_Y(\dot{\alpha}_1 - \alpha_{23}) + J_X(\dot{\alpha}_2 + \alpha_{13}) + \big(4\mu_{\text{к}}\eta_{\text{к}}^2 + 8\mu_{\text{р}}\eta_{\text{р}_1}^2\big)\alpha_3 - \beta_3.
\end{gathered}$$

Перепишем последние три соотношения, пренебрегая экспоненциально затухающими функциями $\varepsilon_i(t)$, удовлетворяющими однородному уравнению «фильтра» (4.51), а также исключив старшие производные в силу (4.48):

$$\begin{split}
\beta_1 = J_{\text{рб}}\big(a_f(\Omega_{V_X} - \alpha_1) - \alpha_{23}\big) + 4I_{\text{к}_Y}\eta_{\text{к}}^2 a_f(\Omega_{V_X} - \alpha_1) -\\
- J_Y a_f(\Omega - \alpha_3) - J_X\alpha_{33} + 4\mu_{\text{к}}\eta_{\text{к}}^2\alpha_1,
\end{split} \tag{4.52}$$

$$\begin{split}
\beta_2 = J_{\text{рб}}\big(a_f(\Omega_{V_Y} - \alpha_2) + \alpha_{13}\big) + 4I_{\text{к}_Y}\eta_{\text{к}}^2 a_f(\Omega_{V_Y} - \alpha_2) +\\
+ J_X a_f(\Omega - \alpha_3) - J_Y\alpha_{33} + \big(4\mu_{\text{к}}\eta_{\text{к}}^2 + 8\mu_{\text{р}}\eta_{\text{р}_2}^2\big)\alpha_2,
\end{split} \tag{4.53}$$

$$\begin{split}
\beta_3 = (I_{\text{рб}} + 4I_{\text{к}_Y}\eta_{\text{к}}^2) a_f(\Omega - \alpha_3) - J_Y\big(a_f(\Omega_{V_X} - \alpha_1) - \alpha_{23}\big) +\\
+ J_X\big(a_f(\Omega_{V_Y} - \alpha_2) + \alpha_{13}\big) + (4\mu_{\text{к}}\eta_{\text{к}}^2 + 8\mu_{\text{р}}\eta_{\text{р}_1}^2)\alpha_3.
\end{split} \tag{4.54}$$

Описанный выше метод «фильтрации» состоит в выделении движений, медленных по сравнению с собственной динамикой вспомогательных звеньев (4.48)–(4.50). Аналогичная идея используется при построении асимптотических решений сингулярно возмущённых систем [69; 70].

Введём безразмерные параметры ϑ_k, $k = \overline{1{,}7}$, формирующие вектор ϑ:

$$\begin{gathered}
J_{\text{рб}} = J_{\text{рб}}^*\vartheta_1, \quad I_{\text{рб}} = I_{\text{рб}}^*\vartheta_2, \quad I_{\text{к}_Y} = I_{\text{к}_Y}^*\vartheta_3,\\
J_X = J_X^*\vartheta_4, \quad J_Y = J_Y^*\vartheta_5, \quad \mu_{\text{к}} = \mu_{\text{к}}^*\vartheta_6, \quad \mu_{\text{р}} = \mu_{\text{р}}^*\vartheta_7,
\end{gathered} \tag{4.55}$$

где $J_{\text{рб}}^*$, $I_{\text{рб}}^*$, $I_{\text{к}_Y}^*$, J_X^*, J_Y^*, $\mu_{\text{к}}^*$ и $\mu_{\text{р}}^*$ — ненулевые априорные значения комбинаций размерных параметров, играющие роль нормализующих множителей. Перечисленные величины найдём, используя паспортные значения параметров робота, а также предположения об идеальности формы тел, из которых он состоит, и об однородности распределения их массы.

Уравнение (4.52) определяет параметрическую модель продольных движений платформы, (4.53) — поперечных, а (4.54) — вращательных. Запишем перечисленные соотношения в компактной форме, учитывая замену (4.55):

$$\beta_i = N_{\beta_i}^{\mathrm{T}}\vartheta, \quad i = \overline{1{,}3}, \tag{4.56}$$

где векторы-регрессоры N_{β_i} имеют вид:

$$N_{\beta_1} = \Big(J_{\text{рб}}^*\big(a_f(\Omega_{V_X} - \alpha_1) - \alpha_{23}\big),\, 0,\, 4I_{\text{к}_Y}^*\eta_{\text{к}}^2 a_f(\Omega_{V_X} - \alpha_1), \\ -J_X^*\alpha_{33},\, -J_Y^* a_f(\Omega - \alpha_3),\, 4\mu_{\text{к}}^*\eta_{\text{к}}^2\alpha_1,\, 0\Big)^{\mathrm{T}},$$

$$N_{\beta_2} = \Big(J_{\text{рб}}^*\big(a_f(\Omega_{V_Y} - \alpha_2) + \alpha_{13}\big),\, 0,\, 4I_{\text{к}_Y}^*\eta_{\text{к}}^2 a_f(\Omega_{V_Y} - \alpha_2), \\ J_X^* a_f(\Omega - \alpha_3),\, -J_Y^*\alpha_{33},\, 4\mu_{\text{к}}^*\eta_{\text{к}}^2\alpha_2,\, 8\mu_{\text{р}}^*\eta_{\text{р}_2}^2\alpha_2\Big)^{\mathrm{T}},$$

$$N_{\beta_3} = \Big(0,\, I_{\text{рб}}^* a_f(\Omega - \alpha_3),\, 4I_{\text{к}_Y}^*\eta_{\text{к}}^2 a_f(\Omega - \alpha_3),\, J_X^*\big(a_f(\Omega_{V_Y} - \alpha_2) + \alpha_{13}\big), \\ -J_Y^*\big(a_f(\Omega_{V_X} - \alpha_1) - \alpha_{23}\big),\, 4\mu_{\text{к}}^*\eta_{\text{к}}^2\alpha_3,\, 8\mu_{\text{р}}^*\eta_{\text{р}_1}^2\alpha_3\Big)^{\mathrm{T}}.$$

Используя введённые обозначения, представим уравнения линейной параметрической модели движения мобильной платформы (4.52)–(4.54) в следующей форме:

$$y = N^{\mathrm{T}}\vartheta; \quad y = (\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)^{\mathrm{T}}, \quad N = (N_{\beta_1}\ \ N_{\beta_2}\ \ N_{\beta_3}). \tag{4.57}$$

Идентификацию параметров модели (4.57) проведём по рекуррентному методу наименьших квадратов [20]:

$$\dot{\hat{\vartheta}} = PNe, \quad \dot{P} = -PNN^{\mathrm{T}}P, \tag{4.58}$$

где $e = y - N^{\mathrm{T}}\hat{\vartheta}$ — ошибка прогноза. Эта система замыкается уравнениями «фильтров» (4.48)–(4.50), в которых используется значение коэффициента $a_f = 7$ с$^{-1}$. Интегрирование уравнений (4.48)–(4.50) начнём при $t = 0$, а уравнений идентификатора (4.58) — в момент времени $t_0 = 3{,}5$ с, достаточный для затухания переходных процессов во вспомогательных звеньях (4.48)–(4.50).

Зададимся единичными начальными условиями для оценок безразмерных параметров:

$$\hat{\vartheta}_i(t_0) = 1, \quad i = \overline{1{,}7}.$$

В начальный момент времени используем диагональную матрицу $P(t_0)$ с элементами

$$P_{11} = 4 \cdot 10^{-3}, \quad P_{ii} = 0{,}4, \quad i = \overline{2{,}7}.$$

Оценки коэффициентов в уравнениях движения (4.34)–(4.36) найдём по формулам:

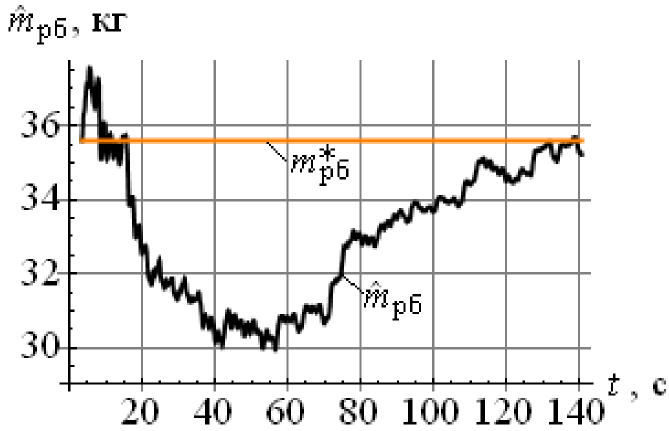
$$\widehat{m}_{\text{рб}} = \frac{J^*_{\text{рб}}\hat{\vartheta}_1}{(l+h)^2}, \quad \hat{a}_X = \frac{J^*_X\hat{\vartheta}_4}{(l+h)(\widehat{m}_{\text{рб}} - 4m_{\text{к}})}, \quad \hat{a}_Y = \frac{J^*_Y\hat{\vartheta}_4}{(l+h)(\widehat{m}_{\text{рб}} - 4m_{\text{к}})},$$
$$\hat{I}_{\text{рб}} = I^*_{\text{рб}}\hat{\vartheta}_2, \quad \hat{I}_{\text{к}} = I^*_{\text{к}}\hat{\vartheta}_3, \quad \hat{\mu}_{\text{к}} = \mu^*_{\text{к}}\hat{\vartheta}_6, \quad \hat{\mu}_{\text{рб}} = \mu^*_{\text{рб}}\hat{\vartheta}_7.$$

Графики изменения оценок этих коэффициентов, полученных в результате работы алгоритма идентификации (4.58), приведены на рисунке 4.6. Для сравнения на графике изменения оценки массы робота $\widehat{m}_{\text{рб}}$, приведённом на рисунке 4.6а, показано её паспортное значение $m^*_{\text{рб}} = 35{,}535$ кг. Непосредственное сравнение этих двух величин позволяет сделать выводы о достаточно точном результате оценивания $m_{\text{рб}}$. Оценки величин смещений центра масс платформы $\hat{a}_X$ и $\hat{a}_Y$, представленные на рисунке 4.6б, хорошо соответствуют действительности.

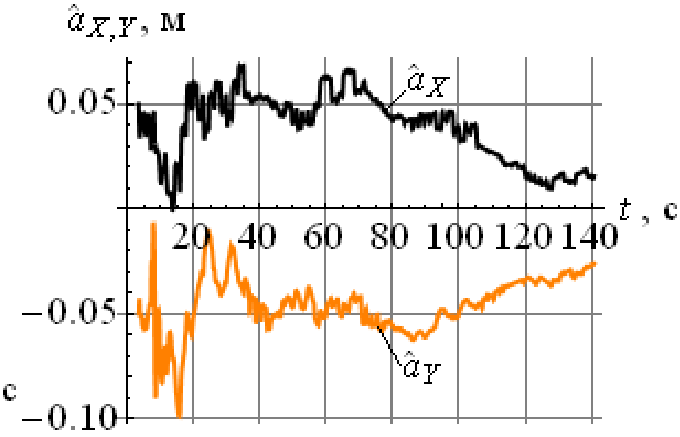
Проанализируем ошибки прогноза выбранной параметрической модели робота (4.57). Графики изменения некоторых компонент

$$e_{\beta_i}(t) = \beta_i(t) - N^{\text{T}}_{\beta_i}(t)\hat{\vartheta}(t)$$

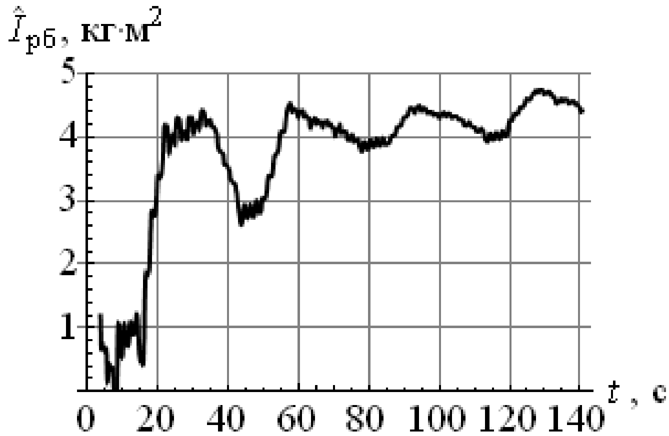
вектора ошибки прогноза e параметрической модели робота (4.57) на завершающей стадии оценивания приведены на рисунке 4.7. Характер изменения $e_{\beta_i}(t)$ свидетельствует о том, что построенный идентификатор параметров использует не всю полезную информацию в сигналах $\beta_i(t)$. Это можно объяснить пренебрежением в процессе составления математической модели робота, такими явлениями, как: нелинейность сил трения в сочленениях тел [117]; индивидуальность характеристик приводов колёс; терние качения; проскальзывание роликов при определённых обстоятельствах; изменение положения точки контакта на мери-



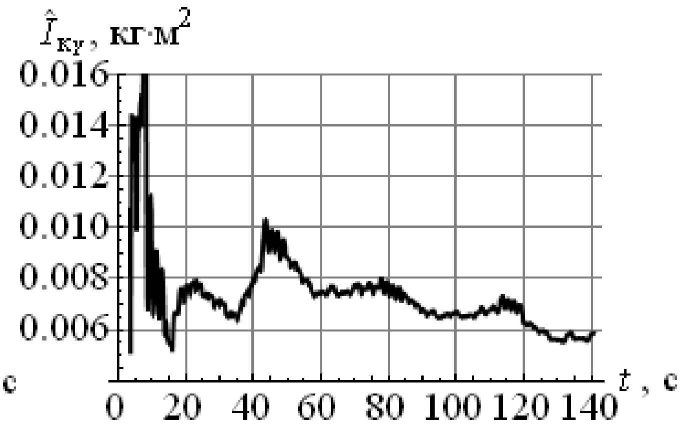
а) Оценка массы робота $\widehat{m}_{рб}$ и её паспортное значение $m^*_{рб}$



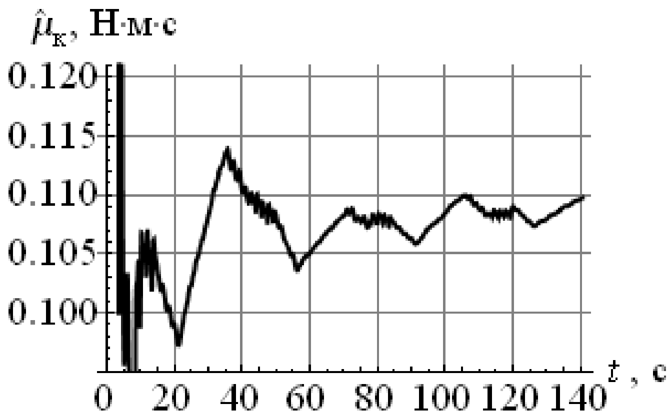
б) Оценки координат центра масс платформы $\hat{a}_X$ и $\hat{a}_Y$



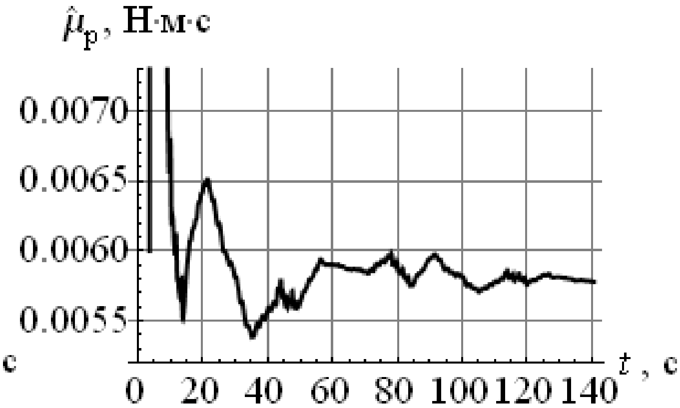
в) Оценка момента инерции робота $\hat{I}_{рб}$



г) Оценка момента инерции колеса $\hat{I}_{кY}$

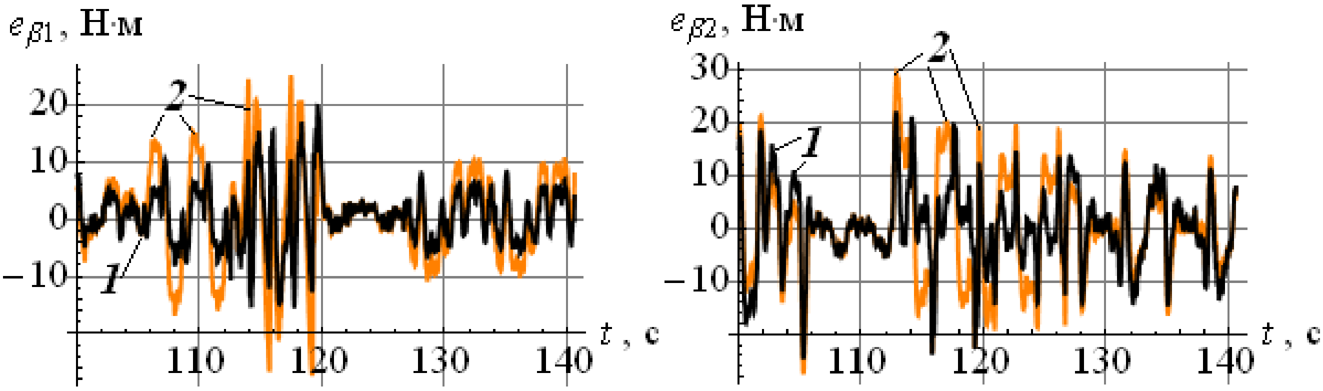


д) Оценка коэффициента вязкого трения $\hat{\mu}_к$



е) Оценка коэффициента вязкого трения $\hat{\mu}_р$

Рисунок 4.6 — Результаты моделирования алгоритма идентификации параметров мобильного робота *youBot* на продольном движении диане ролика в зависимости от угла поворота колеса; податливость составных частей механических передач и колёс; неровности подстилающей поверхности; наличие дополнительной степени свободы подвески передних колёс робота по крену, а также другими.



а) Зависимости $\Omega_{V_X}(t)$ и $\Omega_{V_Y}(t)$ б) Зависимость $\Omega(t)$

Ошибки прогноза параметрической модели (4.57):

1 — при учёте всех рассматриваемых эффектов;

2 — при игнорировании сил трения в опорах роликов.

Рисунок 4.7 — Ошибки прогноза параметрической модели робота *youBot*

Учёт перечисленных эффектов положительно скажется на точности прогноза параметрической модели, но приведёт к увеличению размерности алгоритма идентификации и усложнению математической модели системы, что может сделать последние непригодными для оперативного использования в бортовом компьютере робота. Более того, наблюдаемость некоторых параметров может ухудшиться, и, следовательно, снизится точность их оценок.

В рамках данного параграфы уточнять параметрическую модель робота и проводить идентификацию вновь введённых в неё параметров мы не будем. Продемонстрируем негативный эффект от того или иного упрощения математической модели робота следующим примером.

На рисунке 4.7 также изображены ошибки прогноза для случая, когда трение в опорах роликов игнорировалось в модели системы ($\hat{\mu}_{\text{р}} \equiv 0$). Прочие условия моделирования алгоритма идентификации параметров не менялись. В рассматриваемом случае ошибки прогноза $e_{\beta_i}(t)$ превышают таковые, полученные при учёте вязкого трения на осях роликов.

Значения оценок размерных параметров робота, вычисленные в момент окончания работы алгоритма идентификации (4.58) коэффициентов модели (4.57), сведены в таблицу 4.2. Эти величины будут использованы в дальнейшем для построения законов управления мобильной платформой *youBot*.

Таблица 4.2

Оценки параметров мобильного робота *youBot*

Параметр	Обозначение	Оценка
Общая масса робота	$m_{\text{рб}}$	35,23 кг
Момент инерции робота относительно вертикальной оси, проходящей через геометрический центр платформы O	$I_{\text{рб}}$	4,42 кг·м^2
Момент инерции колеса относительно оси вращения C_iY	$I_{\text{к}_Y}$	$5{,}87 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2
Смещение центра масс платформы в направлении её продольной оси OX	a_X	1,6 см
Смещение центра масс платформы в направлении её поперечной оси OY	a_Y	−2,6 см
Коэффициент вязкого трения в сочленении колеса и платформы	$\mu_{\text{к}}$	0,110 Н·м·с
Коэффициент вязкого трения в сочленении колеса и ролика	$\mu_{\text{р}}$	$5{,}78 \cdot 10^{-3}$ Н·м·с

4.5 Аппарат неголономных связей в задаче управления движением платформы

Оценив значения параметров математической модели робота *youBot*, приступим к синтезу алгоритмов управления движения мобильной платформы, использующих уравнения её динамики. Здесь мы вновь вернёмся к описанию в псевдоскоростях V_X, V_Y и Ω.

4.5.1 Алгоритм управления

Ставится задача реализовать программное движение платформы с заданным вектором скорости некоторой её точки B:

$$V_{BX} = V_{BX}^*, \quad V_{BY} = V_{BY}^*, \tag{4.59}$$

где V_{BX}, V_{BY}, V_{BX}^* и V_{BY}^* — соответственно, проекции вектора скорости на подвижные оси OX и OY и их законы изменения на программном движении. В общем случае величины V_{BX}^* и V_{BY}^* явно зависят не только от времени, но и от вектора обобщённых координат робота q, от вектора измерений координат ϱ тех тел, по отношению к которым платформа должна совершать манёвры, а также от других величин:

$$V_{BX}^* = V_{BX}^*(t, q, \varrho \ldots), \quad V_{BY}^* = V_{BY}^*(t, q, \varrho \ldots).$$

Запишем уравнение (4.59), выразив V_{BX} и V_{BY} через псевдоскорости V_X, V_Y и Ω:

$$V_X - b_Y \Omega = V_{BX}^*, \quad V_Y + b_X \Omega = V_{BY}^*, \tag{4.60}$$

где b_X и b_Y — абсцисса и ордината точки B на плоскости OXY. Перепишем эти соотношения в векторно-матричной форме:

$$D_\pi \, \dot{\pi} = V_B^*, \quad D_\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b_Y \\ 0 & 1 & b_X \end{pmatrix}, \quad V_B^* = \begin{pmatrix} V_{BX}^* \\ V_{BY}^* \end{pmatrix}. \tag{4.61}$$

Приведём общий алгоритм нахождения управляющих сил, реализующих требуемое движение (4.60).

Запишем уравнения движения системы (4.34)–(4.36) в компактной форме:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}} = \Pi_{\mathfrak{F}} + \Pi_{\mathfrak{C}}, \tag{4.62}$$

где $\Pi_{\mathfrak{C}}$ — столбец управляющих обобщённых сил:

$$\Pi_{\mathfrak{C}} = \begin{pmatrix} F_X \\ F_Y \\ M_\Omega \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} M_2 + M_1 + M_4 + M_3 \\ M_2 - M_1 - M_4 + M_3 \\ (l+h)\left[M_2 - M_1 + M_4 - M_3\right] \end{pmatrix};$$

$\Pi_{\mathfrak{F}}$ — столбец обобщённых сил на неуправляемом движении системы:

$$\Pi_{\mathfrak{F}} = -\begin{pmatrix} \zeta_1 V_X & \zeta_2 V_Y & \mu_1 \Omega \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

где $\zeta_1 = \frac{4\mu_\text{к}}{R^2}$, $\zeta_2 = \frac{4\mu_\text{к}}{R^2} + \frac{8\mu_\text{р}}{R_\text{р}^2}$ и $\mu_1 = 4\mu_\text{к}\eta_\text{к}^2 + 8\mu_\text{р}\eta_{\text{р}_1}^2$ — приведённые коэффициенты демпфирования.

Столбец производных функции Аппеля S в соотношении (4.62) имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}} = A_\pi\, \ddot{\pi} + f_\pi(\dot{\pi}), \tag{4.63}$$

где матрица A_π — матрица инерционных коэффициентов:

$$A_\pi = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & -ma_Y \\ 0 & m_1 & ma_X \\ -ma_Y & ma_X & I_1 \end{pmatrix},$$

$m_1 = m_\text{рб} + \frac{4I_{\text{к}Y}}{R^2}$, $I_1 = I_\text{рб} + 4I_{\text{к}Y}\eta_\text{к}^2$ — приведённая масса и приведённый момент инерции робота; f_π — столбец квадратичных форм от псевдоскоростей:

$$f_\pi = \begin{pmatrix} -m_\text{рб}\Omega V_Y - ma_X\Omega^2 \\ m_\text{рб}\Omega V_X - ma_Y\Omega^2 \\ ma_Y\Omega V_Y + ma_X\Omega V_X \end{pmatrix}.$$

Три управляющие обобщённые силы на программном движении (4.60) не могут быть найдены из уравнений движения однозначно, так как число дополнительных соотношений (4.60) меньше числа степеней свободы исследуемой системы.

Рассмотрим соотношения (4.60) как дополнительные связи, налагаемые на динамику робота. Уравнения неуправляемого движения системы с такими связями имеют вид [2; 99]:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}} = \Pi_{\mathfrak{F}} + D_{\pi}^{\mathrm{T}}\lambda, \tag{4.64}$$

где $\lambda = (\lambda_1 \ \ \lambda_2)^{\mathrm{T}}$ — вектор множителей дополнительных связей.

Решая систему (4.60)–(4.64), при необходимости замыкаемую уравнениями кинематики, найдём закон изменения λ на программном движении, и, отождествив реакции дополнительных связей (4.60) с управляющими силами, найдём вектор $\Pi_{\mathfrak{C}}$:

$$\Pi_{\mathfrak{C}} = D_{\pi}^{\mathrm{T}}\lambda. \tag{4.65}$$

Рассмотрим подробнее процедуру решения дифференциально-алгебраической системы (4.60)–(4.64). Исключим из уравнений движения множители связей.

Рассмотрим угловую скорость платформы Ω как независимую псевдоскорость системы с дополнительными связями (4.60). Выразим продольную и поперечную компоненты скорости центра платформы через Ω:

$$V_X = b_Y\Omega + V_{BX}^*, \quad V_Y = -b_X\Omega + V_{BY}^*, \tag{4.66}$$

что может быть представлено как

$$\dot{\pi} = C_{\pi}\Omega + V_{\pi}^*, \quad C_{\pi} = \begin{pmatrix} b_Y \\ -b_X \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_{\pi}^* = \begin{pmatrix} V_{BX}^* \\ V_{BY}^* \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.67}$$

Нетрудно проверить, что

$$C_{\pi}^{\mathrm{T}} D_{\pi} = 0.$$

Таким образом, умножив обе части системы (4.64) на C_{π}^{T}, получаем уравнение, не содержащие множителей связей:

$$C_{\pi}^{\mathrm{T}}\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}} = C_{\pi}^{\mathrm{T}}\Pi_{\mathfrak{F}}.$$

В полученном равенстве выразим псевдоскорости V_X и V_Y через Ω, используя матричные соотношения (4.63) и (4.67). Получаем скалярное дифференциальное уравнение

$$C_\pi^\mathrm{T} A_\pi C_\pi \dot{\Omega} + C_\pi^\mathrm{T} A_\pi \dot{V}_\pi^* + C_\pi^\mathrm{T} f_\pi = C_\pi^\mathrm{T} \Pi_{\mathfrak{F}}. \tag{4.68}$$

Выполним необходимые матричные операции для получения явного вида этого соотношения. Имеем:

$$A_\pi C_\pi = \begin{pmatrix} m_1 b_Y - m a_Y \\ -m_1 b_X + m a_X \\ I_1 - m a_Y b_Y - m a_X b_X \end{pmatrix}.$$

Запишем выражение для инерционного коэффициента I_2 в уравнении (4.68):

$$I_2 = C_\pi^\mathrm{T} A_\pi C_\pi = I_1 - 2m(a_X b_X + a_Y b_Y) + m_1(b_X^2 + b_Y^2).$$

Величина I_2 строго положительна. Это демонстрирует выражение инерционного коэффициента I_2 через массу m платформы и её момент инерции I_C, а также осевые моменты инерции каждого колеса $I_{\text{к}Y}$ и $I_{\text{к}Z}$:

$$\begin{aligned} I_2 = I_C + m\left([a_X - b_X]^2 + [a_Y - b_Y]^2\right) + \\ + 4\left(I_{\text{к}Z} + m_\text{к}[h^2 + l^2 + b_X^2 + b_Y^2] + I_{\text{к}Y}\frac{[l+h]^2 + b_X^2 + b_Y^2}{R^2}\right). \end{aligned}$$

Найдём выражения для других величин в формуле (4.68), выразив скорости V_X и V_Y через независимую псевдоскорость Ω в соответствии с (4.66):

$$C_\pi^\mathrm{T} A_\pi \dot{V}_\pi^* = (m_1 b_Y - m a_Y)\dot{V}_{BX}^* - (m_1 b_X - m a_X)\dot{V}_{BY}^*;$$

$$\begin{aligned} C_\pi^\mathrm{T} f_\pi = (m a_X - m_{\text{рб}} b_X)\Omega V_X + (m a_Y - m_{\text{рб}} b_Y)\Omega V_Y + m(a_Y b_X - a_X b_Y)\Omega^2 = \\ = -(m_{\text{рб}} b_X - m a_X)\Omega V_{BX}^* - (m_{\text{рб}} b_Y - m a_Y)\Omega V_{BY}^*; \end{aligned}$$

$$C_\pi^\mathrm{T} \Pi_{\mathfrak{F}} = -\zeta_1 b_Y V_X + \zeta_2 b_X V_Y - \mu_1 \Omega = -\zeta_1 b_Y V_{BX}^* + \zeta_2 b_X V_{BY}^* - (\mu_1 + \zeta_1 b_Y^2 + \zeta_2 b_X^2)\Omega.$$

Подставим полученные результаты в уравнение (4.68):

$$I_2\dot{\Omega} + (m_1 b_Y - m a_Y)\dot{V}_{BX}^* - (m_1 b_X - m a_X)\dot{V}_{BY}^* - (m_{\text{рб}} b_X - m a_X)\Omega V_{BX}^* -$$
$$- (m_{\text{рб}} b_Y - m a_Y)\Omega V_{BY}^* + \zeta_1 b_Y V_{BX}^* - \zeta_2 b_X V_{BY}^* + (\mu_1 + \zeta_1 b_Y^2 + \zeta_2 b_X^2)\Omega = 0.$$

Разделив обе части этого равенства на I_2, получаем уравнение, которому удовлетворяет угловая скорость платформы Ω на программном движении:

$$\dot{\Omega} + \varkappa_{12}\dot{V}_{BX}^* - \varkappa_{11}\dot{V}_{BY}^* - \varkappa_{21}\Omega V_{BX}^* - \varkappa_{22}\Omega V_{BY}^* + \xi_2 V_{BX}^* - \xi_1 V_{BY}^* + \xi_3\Omega = 0, \quad (4.69)$$

где:

$$\begin{aligned} &\varkappa_{11} = \frac{m_1 b_X - m a_X}{I_2}, \quad \varkappa_{12} = \frac{m_1 b_Y - m a_Y}{I_2}, \quad \varkappa_{21} = \frac{m_{\text{рб}} b_X - m a_X}{I_2}, \\ &\varkappa_{22} = \frac{m_{\text{рб}} b_Y - m a_Y}{I_2}, \quad \xi_1 = \frac{\zeta_2 b_X}{I_2}, \quad \xi_2 = \frac{\zeta_1 b_Y}{I_2}, \quad \xi_3 = \frac{\mu_1 + \zeta_1 b_Y^2 + \zeta_2 b_X^2}{I_2}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Замечание. Уравнение движения (4.69) также можно получить, используя процедуру Аппеля:

$$\frac{\partial S^*}{\partial \dot{\Omega}} = \Pi_{\mathfrak{F}}^*, \quad S^* = S\big|_{\dot{\pi} = C_\pi \Omega + V_\pi^*},$$

где $S^* = S^*(\dot{\Omega},\Omega,t)$ — функция Аппеля на программном движении; $\Pi_{\mathfrak{F}}^*$ — обобщённая неуправляющая сила на этом движении. Такой подход особенно удобен при выводе соотношений (4.69) с помощью компьютерных пакетов символьной математики.

Если на программном движении заданы законы изменения вектора компонент скорости точки B как функции времени $V_{BX}^*(t)$ и $V_{BY}^*(t)$, то уравнение движения (4.69) и уравнения связей (4.60) образуют замкнутую систему. Решив уравнение (4.69), получим $\Omega(t)$, используя которую, найдём $V_X(t)$ и $V_Y(t)$ по формулам (4.66).

Состав матрицы D_π уравнений связей (4.60) позволяет получить выражения для множителей связей на программном движении, подставив полученные зависимости $\Omega(t)$, $V_X(t)$ и $V_Y(t)$ в первые два уравнения системы (4.64):

$$\lambda_1(t) = m_1\dot{V}_X(t) - ma_Y\dot{\Omega}(t) - m_{\text{рб}}\Omega(t)V_Y(t) - ma_X\Omega^2(t) + \zeta_1 V_X(t), \qquad (4.71)$$

$$\lambda_2(t) = m_1\dot{V}_Y(t) + ma_X\dot{\Omega}(t) + m_{\text{рб}}\Omega(t)V_X(t) - ma_Y\Omega^2(t) + \zeta_2 V_Y(t). \qquad (4.72)$$

В соответствии с (4.65), управляющие обобщённые силы на программном движении вычисляются как

$$F_X(t) = \lambda_1(t), \quad F_Y(t) = \lambda_2(t), \quad M_\Omega(t) = -b_Y\lambda_1(t) + b_X\lambda_2(t). \qquad (4.73)$$

Если же значения V^*_{BX} и V^*_{BY} формируются в виде обратной связи по измерениям координат системы, как, например, в задаче погони, то использование уравнений (4.69) и (4.71)–(4.72) не представляется возможным, поскольку предполагает дифференцирование измерительной информации при вычислении $\dot{V}^*_{BX}$, $\dot{V}^*_{BY}$, $\dot{V}_X = \dot{V}^*_{BX} + b_Y\Omega$ и $\dot{V}_Y = \dot{V}^*_{BY} - b_X\Omega$.

Чтобы избежать такого дифференцирования при расчёте угловой скорости платформы Ω, введём замену переменных

$$\Omega' = \Omega + \varkappa_{12}V^*_{BX} - \varkappa_{11}V^*_{BY}, \qquad (4.74)$$

в соответствии с которой, уравнение движения (4.69) примет форму, не содержащую производных $\dot{V}^*_{BX}$ и $\dot{V}^*_{BY}$:

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}' + (\xi_3 - \varkappa_{21}V^*_{BX} - \varkappa_{22}V^*_{BY})(\Omega' - \varkappa_{12}V^*_{BX} + \varkappa_{11}V^*_{BY}) +& \\ + \xi_2 V^*_{BX} - \xi_1 V^*_{BY} = 0.&\end{aligned} \qquad (4.75)$$

С учётом (4.67) и (4.74) уравнение кинематики (4.8), связывающее обобщённые координаты и псевдоскорости на программном движении принимает вид:

$$\dot{q} = C_q\dot{\pi} = C_q\big(C_\pi\Omega + V^*_\pi\big) = C_q\big(C_\pi\big[\Omega' - \varkappa_{12}V^*_{BX} + \varkappa_{11}V^*_{BY}\big] + V^*_\pi\big),$$

или, после перегруппировки,

$$\dot{q} = C_q\big(C_\pi\Omega' + \big[E + C_\pi\varkappa^{\mathrm{T}}\big]V^*_\pi\big), \qquad (4.76)$$

где $\varkappa^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -\varkappa_{12} & \varkappa_{11} & 0 \end{pmatrix}$, $V_\pi^* = \begin{pmatrix} V_{BX}^* & V_{BY}^* & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Последнее соотношение замыкает уравнение (4.75). Решая систему (4.75), (4.76), получаем законы изменения обобщённых координат и псевдоскоростей на программном движении. Эти результаты можно использовать для организации управления мобильной платформой на *кинематическом* уровне.

Тем не менее, описанный способ не позволяет исключить дифференцирование измерительной информации при вычислении множителей связей по формулам (4.71)–(4.72).

4.5.2 Задача реализации требуемого закона движения точки платформы

Перейдём к конкретным примерам применения метода связей для управления движением мобильной платформой *youBot*.

Зададим в качестве программного равномерное движение точки B по окружности радиуса R_B с циклической частотой ω_B. Зададим законы изменения координат точки B на неподвижной плоскости $X'Y'$:

$$X_B'^* = R_B\cos(\omega_B t + \varphi_B), \quad Y_B'^* = R_B\sin(\omega_B t + \varphi_B),$$

где $\varphi_B = \mathrm{const}$ — начальная фаза.

На таком программном движении проекции скорости точки B на подвижные оси OXY примут вид следующих функций, явно зависящих от времени и курсового угла платформы Ψ:

$$\begin{aligned} V_{BX}^* &= \frac{\mathrm{d}X_B'^*}{\mathrm{d}t}\cos\Psi + \frac{\mathrm{d}Y_B'^*}{\mathrm{d}t}\sin\Psi = R_B\omega_B\sin(\Psi - \omega_B t - \varphi_B),\\ V_{BY}^* &= -\frac{\mathrm{d}X_B'^*}{\mathrm{d}t}\sin\Psi + \frac{\mathrm{d}Y_B'^*}{\mathrm{d}t}\cos\Psi = R_B\omega_B\cos(\Psi - \omega_B t - \varphi_B). \end{aligned} \tag{4.77}$$

Исследуем угловое движение платформы мобильного робота на программном движении (4.77), согласованным с дополнительными связями.

Подставив в уравнение (4.69) для угловой скорости платформы $\Omega = \dot{\Psi}$ на движении со связями (4.77) выражения для производных

$$\begin{aligned} \dot{V}^*_{BX} &= \quad R_B\omega_B(\Omega-\omega_B)\cos(\Psi-\omega_B t-\varphi_B),\\ \dot{V}^*_{BY} &= -R_B\omega_B(\Omega-\omega_B)\sin(\Psi-\omega_B t-\varphi_B), \end{aligned}$$

перепишем его в форме

$$\begin{gathered} \dot{\Omega}+\xi_3\Omega+R_B\omega_B\big[\varkappa_{12}(\Omega-\omega_B)-\xi_1-\varkappa_{22}\Omega\big]\cos(\Psi-\omega_B t-\varphi_B)+\\ +R_B\omega_B\big[\varkappa_{11}(\Omega-\omega_B)+\xi_2-\varkappa_{21}\Omega\big]\sin(\Psi-\omega_B t-\varphi_B)=0. \end{gathered} \tag{4.78}$$

Движение платформы, стационарное по угловой скорости $\Omega(t) \equiv \omega_B$, представляет особый интерес, ведь оно является интуитивно предсказуемым в рассматриваемой задаче и простым с точки зрения реализации. Исследуем поведение решений уравнения (4.78) в его окрестности.

Введём замену переменных

$$\Omega = \Delta\dot{\Psi}+\omega_B, \quad \Psi = \Delta\Psi+\psi_B+\omega_B t+\varphi_B,$$

где $\Delta\Psi$ и $\Delta\dot{\Psi}$ — отклонения от стационарного движения по углу курса и угловой скорости платформы соответственно, а ψ_B — некоторая константа.

Уравнение (4.78) в отклонениях имеет вид

$$\begin{gathered} \Delta\ddot{\Psi}+\xi_3(\Delta\dot{\Psi}+\omega_B)+R_B\omega_B\big[(\varkappa_{12}-\varkappa_{22})\Delta\dot{\Psi}-\xi_1-\varkappa_{22}\omega_B\big]\cos(\Delta\Psi+\psi_B)+\\ +R_B\omega_B\big[(\varkappa_{11}-\varkappa_{21})\Delta\dot{\Psi}+\xi_2-\varkappa_{21}\omega_B\big]\sin(\Delta\Psi+\psi_B)=0. \end{gathered}$$

Линеаризуем последнее соотношение в окрестности решения $\Delta\Psi(t) \equiv 0$:

$$\begin{gathered} \Delta\ddot{\Psi}+\Big\{\xi_3+R_B\omega_B\big[(\varkappa_{12}-\varkappa_{22})\cos\psi_B+(\varkappa_{11}-\varkappa_{21})\sin\psi_B\big]\Big\}\Delta\dot{\Psi}+\\ +R_B\omega_B\big[(\xi_2-\varkappa_{21}\omega_B)\cos\psi_B+(\xi_1+\varkappa_{22}\omega_B)\sin\psi_B\big]\Delta\Psi+\\ +R_B\omega_B\big[\xi_3 R_B^{-1}-(\xi_1+\varkappa_{22}\omega_B)\cos\psi_B+(\xi_2-\varkappa_{21}\omega_B)\sin\psi_B\big]=0. \end{gathered} \tag{4.79}$$

Определим вспомогательные величины:

$$R'_B = \frac{\xi_3}{\sqrt{(\xi_1+\varkappa_{22}\omega_B)^2+(\xi_2-\varkappa_{21}\omega_B)^2}},$$

$$\cos\psi'_B = \frac{\xi_1 + \varkappa_{22}\omega_B}{\sqrt{(\xi_1 + \varkappa_{22}\omega_B)^2 + (\xi_2 - \varkappa_{21}\omega_B)^2}} = (\xi_1 + \varkappa_{22}\omega_B)\frac{R'_B}{\xi_3},$$

$$\sin\psi'_B = \frac{\xi_2 - \varkappa_{21}\omega_B}{\sqrt{(\xi_1 + \varkappa_{22}\omega_B)^2 + (\xi_2 - \varkappa_{21}\omega_B)^2}} = (\xi_2 - \varkappa_{21}\omega_B)\frac{R'_B}{\xi_3},$$

$$V''_B = \frac{\xi_3}{\sqrt{(\varkappa_{11} - \varkappa_{21})^2 + (\varkappa_{12} - \varkappa_{22})^2}},$$

$$\cos\psi''_B = \frac{\varkappa_{11} - \varkappa_{21}}{\sqrt{(\varkappa_{11} - \varkappa_{21})^2 + (\varkappa_{12} - \varkappa_{22})^2}} = (\varkappa_{11} - \varkappa_{21})\frac{V''_B}{\xi_3},$$

$$\sin\psi''_B = \frac{\varkappa_{12} - \varkappa_{22}}{\sqrt{(\varkappa_{11} - \varkappa_{21})^2 + (\varkappa_{12} - \varkappa_{22})^2}} = (\varkappa_{12} - \varkappa_{22})\frac{V''_B}{\xi_3}.$$

В новых обозначениях дифференциальное уравнение для малых отклонений платформы по углу курса Ψ примет вид:

$$\begin{aligned} &\Delta\ddot{\Psi} + \xi_3\Big\{1 + \frac{R_B\omega_B}{V''_B}\sin(\psi_B + \psi''_B)\Big\}\Delta\dot{\Psi} + \\ &\quad + \frac{R_B}{R'_B}\omega_B\xi_3\sin(\psi_B + \psi'_B)\Delta\Psi + \omega_B\xi_3\Big\{1 - \frac{R_B}{R'_B}\cos(\psi_B + \psi'_B)\Big\} = 0. \end{aligned} \tag{4.80}$$

Анализ свободного члена полученного уравнения показывает, что константа ψ_B, характеризующая стационарный по угловой скорости режим движения платформы, удовлетворяет соотношению

$$\cos(\psi_B + \psi'_B) = \frac{R'_B}{R_B}. \tag{4.81}$$

Это уравнение имеет вещественные решения ψ_B только, если

$$R_B \geqslant R'_B \equiv \frac{\xi_3}{\sqrt{(\xi_1 + \varkappa_{22}\omega_B)^2 + (\xi_2 - \varkappa_{21}\omega_B)^2}}. \tag{4.82}$$

Здесь учтено, что по определению $R_B > 0$.

При $R_B > R'_B$ корни $\psi_B^{(j;k)}$ уравнения (4.81) имеют вид:

$$\psi_B^{(j;k)} = \psi_B^{(j)} + k\cdot 360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $\psi_B^{(j)}$ — такие два частных решения, что:

$$-90^\circ < \psi_B^{(1)} + \psi'_B < 0^\circ, \quad 0^\circ < \psi_B^{(2)} + \psi'_B < 90^\circ.$$

Так как $\sin(\psi_B^{(1;k)} + \psi'_B) < 0$ и $\sin(\psi_B^{(2;k)} + \psi'_B) > 0$, то при $\omega_B > 0$ коэффициент при $\Delta\Psi$ в уравнении (4.80) отрицателен, и, следовательно, стационарные режимы с $\psi_B = \psi_B^{(1;k)}$ неустойчивы, а с $\psi_B = \psi_B^{(2;k)}$ устойчивы. Аналогично, при $\omega_B < 0$ неустойчивы стационарные режимы движения платформы с $\psi_B = \psi_B^{(2;k)}$, а с $\psi_B = \psi_B^{(1;k)}$ устойчивы.

Отметим, что при $R_B = R'_B$ коэффициент при $\Delta\Psi$ в (4.80) обращается в ноль. Таким образом, исследование линеаризованного уравнения (4.80) приводит к получению лишь достаточных условий неустойчивости соответствующих стационарных режимов.

Анализ выражения для коэффициента при $\Delta\dot{\Psi}$ в линеаризованном уравнении (4.80) показывает, что при

$$R_B|\omega_B| < V''_B \equiv \frac{\xi_3}{\sqrt{(\varkappa_{11} - \varkappa_{21})^2 + (\varkappa_{12} - \varkappa_{22})^2}} \tag{4.83}$$

он будет положительным. Это условие носит только достаточный характер.

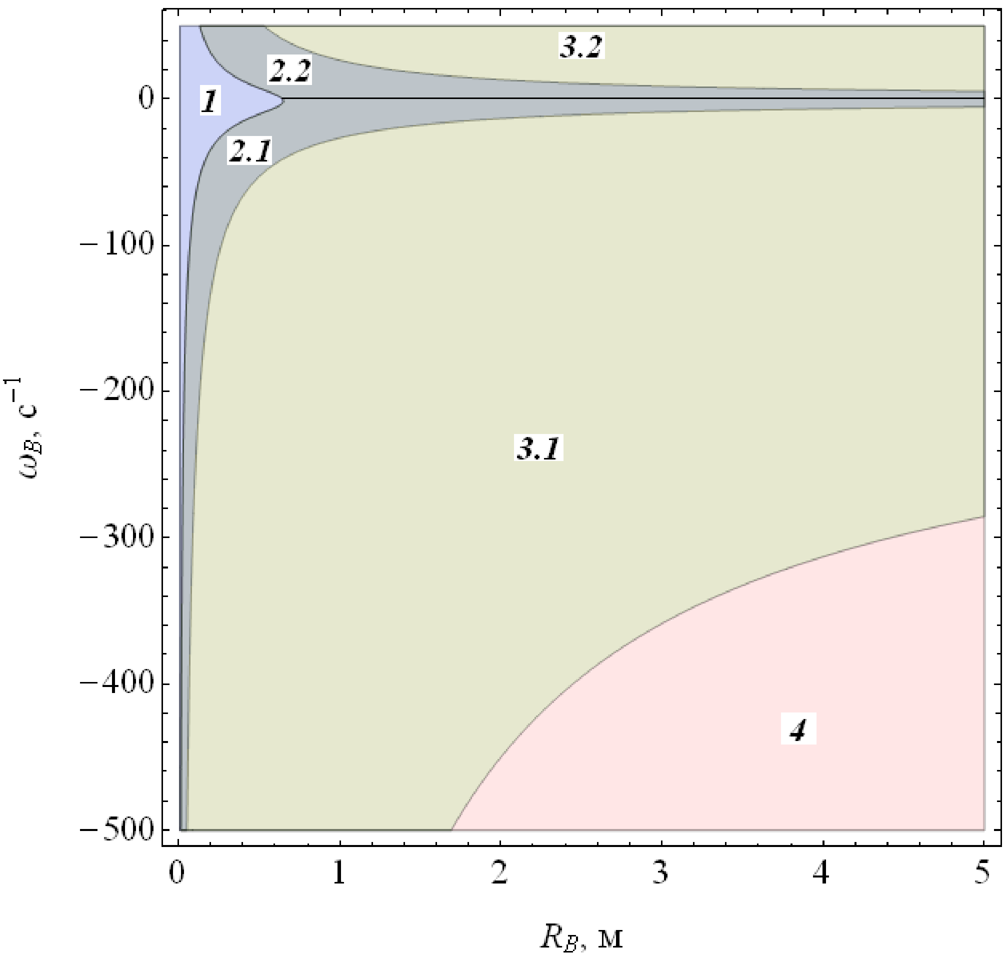
Система неравенств (4.82) и (4.83) определяет достаточные условия существования асимптотически устойчивого стационарного движения платформы с угловой скоростью $\Omega(t) \equiv \omega_B$.

Соотношения (4.82) и (4.83) задают подмножество области асимптотической устойчивости исследуемых стационарных режимов. Последняя, из-за громоздкости выкладок, была построена с помощью символьных преобразований в системе *Mathematica*. Область устойчивости исследуемых стационарных режимов на плоскости (ω_B, R_B) приведена на рисунке 4.8. Для её построения использовались числовые значения параметров математической модели робота, приведённые в таблице 4.2, а также величины

$$b_X = 40 \text{ см}, \quad b_Y = 5 \text{ см}.$$

Указанные значения будут использоваться и в дальнейшем.

Рисунок 4.8 демонстрирует, что при выбранных значениях параметров все стационарные движения исследуемого класса неустойчивы при столь больших по абсолютной величине значениях ω_B, что движение (4.77) не может реализовано роботом *youBot* на практике. Также отметим, что область устойчивости, построенная с использованием достаточного условия (4.83), существенно за-



Стационарные движения с $\Omega(t) \equiv \omega_B$: 1 — не существуют;
2.1 и 3.1 — устойчивы при $\psi_B = \psi_B^{(1;k)}$, а при $\psi_B = \psi_B^{(2;k)}$ неустойчивы;
2.1 — устойчивы при $\psi_B = \psi_B^{(1;k)}$ в соответствии с (4.83);
2.2 и 3.2 — устойчивы при $\psi_B = \psi_B^{(2;k)}$, а при $\psi_B = \psi_B^{(1;k)}$ неустойчивы;
2.2 — устойчивы при $\psi_B = \psi_B^{(2;k)}$ в соответствии с (4.83);
4 — все неустойчивы.

Рисунок 4.8 — Области существования, асимптотической устойчивости и неустойчивости стационарных по угловой скорости управляемых движений мобильной платформы *youBot*

ужена. Тем не менее, в практически значимом диапазоне циклических частот $|\omega_B| \lessapprox 2$ с$^{-1}$ применение неравенства (4.83) обосновывает асимптотическую устойчивость стационарных вращений платформы.

Отметим, что если момент инерции колеса $I_{\text{к}_Y} = 0$, то в уравнении углового движения платформы в отклонениях (4.79) коэффициент при $\Delta\dot{\Psi}$ будет положителен и равен ξ_3. Действительно, при $I_{\text{к}_Y} = 0$ величины m_1 и $m_{\text{рб}}$ совпадут и, в соответствии с формулами (4.70)

$$\varkappa_{11} - \varkappa_{21} = \varkappa_{12} - \varkappa_{22} = 0.$$

Таким образом, нулевой величине $I_{\text{к}Y}$ среди движений с $\Omega(t) \equiv \omega_B$ всегда найдутся асимптотически устойчивые. Инерционность колёс оказывает дестабилизирующее действие на исследуемые стационарные режимы по угловой скорости платформы: они все становятся неустойчивыми из-за отрицательности коэффициента при $\Delta\dot{\Psi}$ в уравнении (4.80) при некоторых сочетаниях значений параметров.

Проведём математическое моделирование управляемого движения мобильного робота *youBot*. Цель управления состоит в повторении точкой платформы B программного движения (4.77), характеризуемого параметрами $\omega_B = -0{,}4$ с$^{-1}$, $R_B = 0{,}7$ м, $\varphi_B = -90°$. Траектория точки B на неподвижной плоскости $X'Y'$ на таком движении это окружность с центром в начале координат. Даны абсцисса и ордината B в плоскости CXY, связанной с платформой: $b_X = 0{,}4$ м, $b_Y = 0{,}05$ м. В начальный момент времени $\Psi(0) = 0$, $\Omega(0) = 0$.

Поставленную задачу управления решим двумя способами: отождествив управляющие воздействия с реакциями дополнительных связей (4.77) и задав в явном виде закон изменения курсового угла $\Psi(t)$.

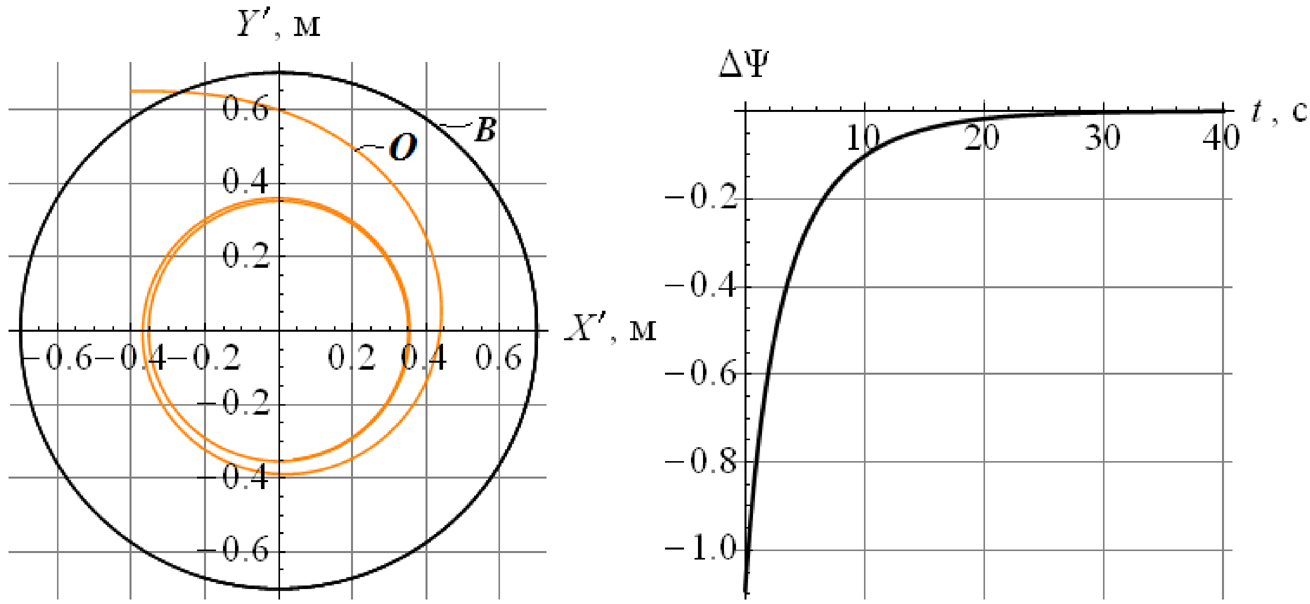
В первом случае угловая скорость платформы подчиняется уравнению (4.78), а управляющие обобщённые силы вычисляются в соответствии с формулами (4.71)–(4.73).

Для используемых при моделировании значений параметров $R'_B = 0{,}65$ м, а $V''_B = 26{,}58$ м/с. Таким образом, в рассматриваемой задаче выполняются достаточные условия (4.82) и (4.83) существования устойчивого стационарного по угловой скорости движения платформы на котором $\psi_B = -0{,}48$. Об этом свидетельствуют и результаты численного моделирования рассматриваемого управляемого движения — траектории точек платформы робота и зависимость

$$\Delta\Psi(t) = \Psi(t) - \omega_B t - \varphi_B - \psi_B,$$

приведённые на рисунке 4.9.

Проведём моделирование второго способа управления системой, который состоит в задании зависимости угла курса от времени. Потребуем, чтобы точка



а) Траектории точки B и центра платформы O

б) Отклонение $\Delta\Psi$ от стационарного вращения платформы по углу курса

Рисунок 4.9 — Реализация программного движения точки мобильной платформы B, согласованного с дополнительными связями

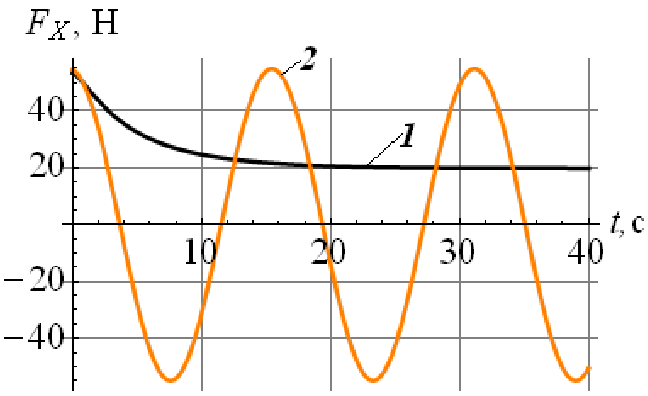
B повторила программное движение, а платформа при этом двигалась поступательно. В рассматриваемом случае известны зависимости всех трёх псевдоскоростей от времени, подставив которые в уравнения движения робота (4.34)–(4.36).

Сравним величины управляющих воздействий и затраты энергии на регулирование для двух описанных способов реализации программного движения точки платформы B. На рисунке 4.10 приведены зависимости управляющих воздействий $F_X(t)$, $F_Y(t)$ и $M_\Omega(t)$ а также их суммарной работы

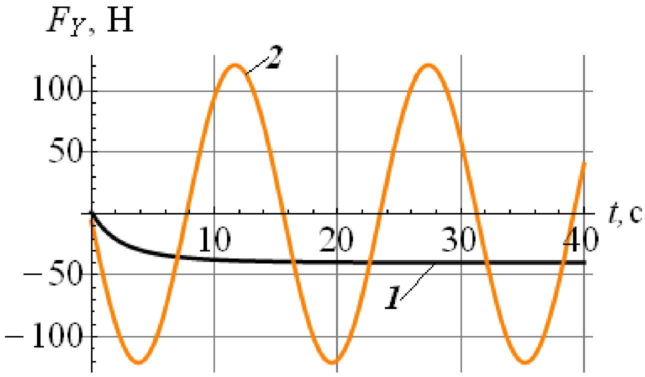
$$A_{\mathfrak{C}}(t) = \int\limits_0^t \dot{\pi}^{\mathrm{T}}(\tau)\Pi_{\mathfrak{C}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_0^t \big[V_X(\tau)F_X(\tau) + V_Y(\tau)F_Y(\tau) + \Omega(\tau)M_\Omega(\tau)\big]\mathrm{d}\tau$$

для рассматриваемой задачи.

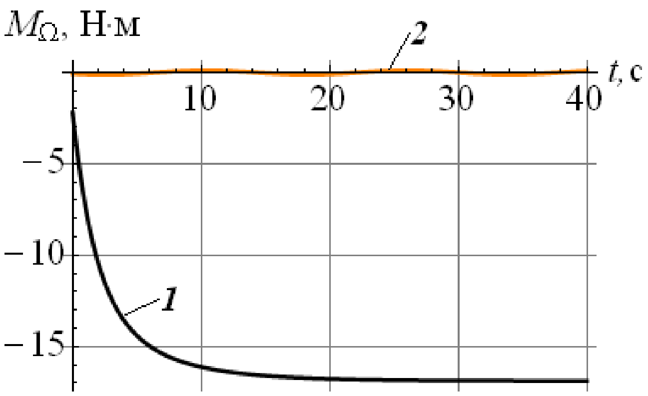
Несмотря на то, что с точки зрения величин управляющих воздействий преимущества нет ни у одного из рассмотренных способов регулирования, реализация программного движения путём согласования его с дополнительными связями позволяет получить почти двукратный выигрыш по величине работы $A_{\mathfrak{C}}$ (см. рисунок 4.10г). Экстремальное свойство работы реакций связи на отклонениях от свободного движения обсуждается в (**??**).



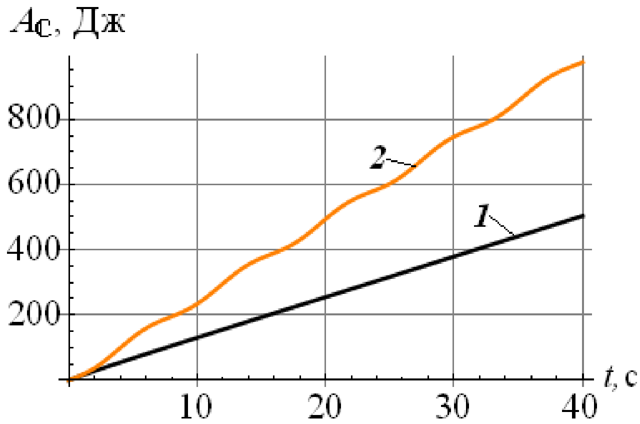
а) Зависимости $F_X(t)$



б) Зависимости $F_Y(t)$



в) Зависимости $M_\Omega(t)$



г) Работа управляющих сил $A_\mathfrak{C}(t)$

1 — реализация программного движения, согласованного с дополнительными связями; 2 — реализация программного движения путём доопределения угловой скорости платформы $\Omega(t) = 0$.

Рисунок 4.10 — Реализация программного движения точки мобильной платформы B: управляющие воздействия

Результаты численного моделирования управляемого движения платформы в случаях, когда стационарные движения с $\Omega = \omega_B$ не существуют приведены в приложении Б.

4.5.3 Задача преследования платформой подвижного объекта

Перейдём к ещё одной задаче управления движением мобильного робота, для решения которой можно применить аппарат дополнительных неголономных связей.

Прежде рассмотрим один алгоритм сближения некоторой точки B с движущейся точкой B'. Закон движения последней точно не известен, но может быть задан дифференциальным уравнением

$$\dot{\overline{r}}_{B'} = \overline{v}_{B'}(\overline{r}_{B'}, t),$$

не являющимся сингулярно возмущённым.

Требуется, чтобы точка B сблизилась с B' и с некоторой точностью повторила её движение. Исходной информацией для формирования закона движения точки B является радиус-вектор преследуемой точки B' относительно B, восстанавливаемый в результате измерений.

Следуя [11–13], организуем закон движения точки B в соответствии с системой

$$\begin{cases} \dot{\overline{r}}_B = k_0\overline{u}, \\ \dot{\overline{u}} \;\; = k_0\big(-k_2\overline{u} - k_1[\overline{r}_B - \overline{r}_{B'}]\big), \end{cases} \tag{4.84}$$

где $k_i > 0$, $i = \overline{0{,}2}$ — постоянные коэффициенты, причём k_0 достаточно велик; $\overline{u}$ — вспомогательный вектор.

Введём малый параметр

$$\varsigma = k_0^{-1}$$

и запишем систему (4.84) в форме

$$\begin{cases} \;\dot{\overline{r}}_{B'} = \overline{v}_{B'}, \\ \varsigma\dot{\overline{r}}_B = \overline{u}, \\ \varsigma\dot{\overline{u}} \;\; = -k_2\overline{u} - k_1[\overline{r}_B - \overline{r}_{B'}] \end{cases} \tag{4.85}$$

Решение вырожденной задачи (4.85) ($\varsigma = 0$) имеет вид

$$\overline{r}_B(t) = \overline{r}_{B'}(t),$$

что полностью отвечает цели управления платформой.

Исследуем устойчивость решения вырожденной задачи в «быстром времени» $t_\varsigma = \varsigma^{-1}t$. Запишем присоединённую к (4.85) систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\overline{r}_{B'}}{\mathrm{d}t_\varsigma} = \varsigma\overline{v}_{B'}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\overline{r}_{B}}{\mathrm{d}t_\varsigma} = \overline{u}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}t_\varsigma} = -k_2\overline{u} - k_1[\overline{r}_B - \overline{r}_{B'}] \end{cases} \tag{4.86}$$

При $\varsigma = 0$ решение присоединённой задачи

$$\overline{r}_B(t_\varsigma) = \overline{r}_{B'}(t_\varsigma) = \mathrm{const},$$

глобально асимптотически устойчиво при положительных k_1 и k_2. Таким образом, по теореме А. Н. Тихонова [69; 70] при $\varsigma \to 0$ решения исходной (4.84) и вырожденной задач будут стремится друг к другу, тот есть $\overline{r}_B \to \overline{r}_{B'}$.

Вернёмся к задаче управления движением мобильного робота *youBot*. Требуется организовать движение платформы таким образом, чтобы совместить её некоторую точку B с точкой подвижного объекта B'. Предполагается, что система технического зрения и дальномерные датчики мобильного робота поставляют всю необходимую информацию для расчёта координат точки B' относительно него.

Организуем движение платформы так, чтобы вектор скорости точки B $\overline{v}_B$ удовлетворял системе (4.84). Перепишем её в форме

$$\begin{cases} \overline{v}_B = k_0\overline{u}, \\ \dot{\overline{u}} \;\; = k_0\big(-k_2\overline{u} - k_1\overline{r}_{B'B}\big), \end{cases}$$

где $\overline{r}_{B'B}$ — радиус-вектор точки платформы B относительно точки преследуемого тела B'.

Записав последние соотношения в проекциях на подвижные оси $CXYZ$, связанные с платформой, получаем соотношения задающие программное движение точки B:

$$\begin{cases} V^*_{BX} = k_0u_X, \quad V^*_{BY} = k_0u_Y, \\ \dot{u}_X - \Omega u_Y = k_0\big(-k_2u_X - k_1\varrho_X\big), \\ \dot{u}_Y + \Omega u_X = k_0\big(-k_2u_Y - k_1\varrho_Y\big), \end{cases} \tag{4.87}$$

где ϱ_X и ϱ_Y — абсцисса и ордината точки B относительно B' в осях XYZ.

Задав с помощью системы (4.88) уравнения дополнительных связей (4.60), сформируем управляющие воздействия по формулам (4.71)–(4.73), используя результаты интегрирования уравнения (4.69) для расчёта угловой скорости платформы Ω.

Отметим, что приведённый выше алгоритм управления не требует дифференцирования измерительной информации. Действительно, величины $\dot V^*_{BX}$ и $\dot V^*_{BY}$, входящие в уравнения (4.69) и (4.71)–(4.72) определяются аналитически в силу (4.88):

$$\begin{cases} \dot V^*_{BX} = -k_0k_2V^*_{BX} + \Omega V^*_{BY} - k_0^2k_1\varrho_X, \\ \dot V^*_{BY} = -\Omega V^*_{BX} - k_0k_2V^*_{BY} - k_0^2k_1\varrho_Y. \end{cases} \tag{4.88}$$

Эти выражения не содержат производных от ϱ_X и ϱ_Y, значения которых восстанавливаются по информации с системы технического зрения и дальномерных датчиков.

Проведём компьютерное моделирование работы описанного алгоритма погони. Движения точки преследуемого объекта B' происходит по закону

$$X'_{B'} = R_B\cos(\omega_Bt + \varphi_B), \quad Y'_{B'} = R_B\sin(\omega_Bt + \varphi_B),$$

где $\omega_B = -0{,}4$ с$^{-1}$, $R_B = 0{,}7$ м, $\varphi_B = -90°$.

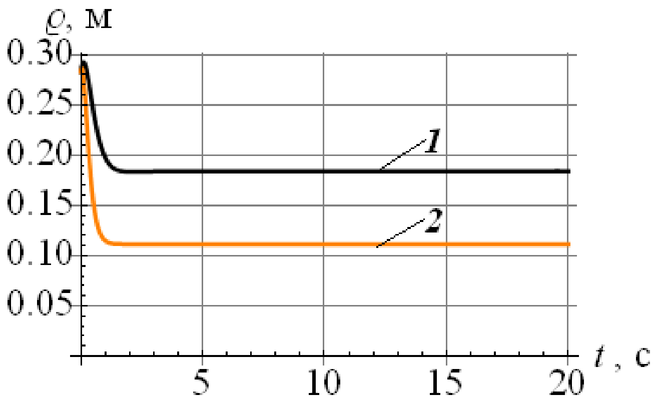
Даны абсцисса и ордината B в плоскости CXY, связанной с платформой: $b_X = 0{,}4$ м, $b_Y = 0{,}05$ м. В начальный момент времени платформа покоится, $\Psi(0) = 0$, а координаты точек B и B' отличаются:

$$\varrho_X(0) = \varrho_Y(0) = -0{,}2 \text{ м}.$$

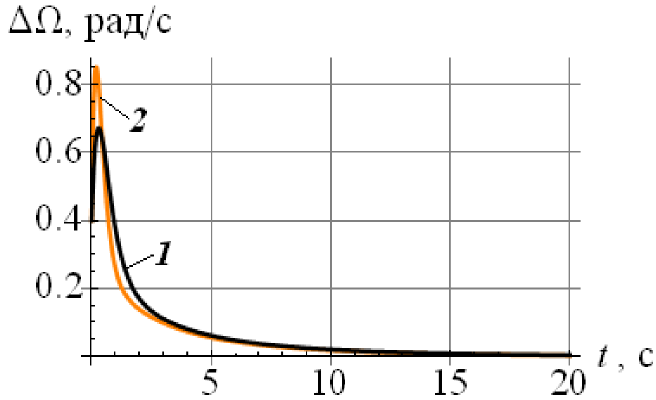
Моделирование проводилось для $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ и нескольких значений k_0. Его результаты приведены на рисунке 4.11.

Представленный на рисунке 4.11а график изменения абсолютной ошибки позиционирования точки платформы B

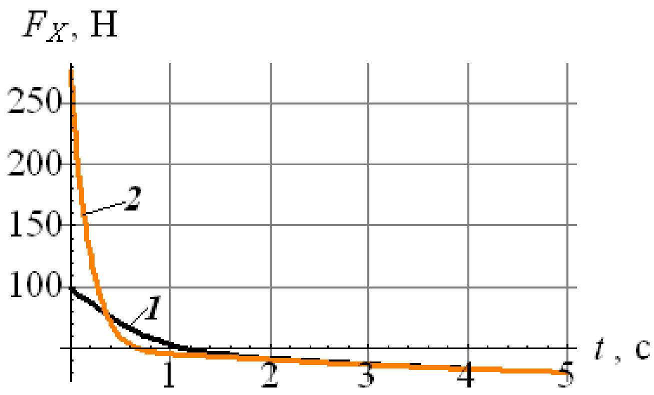
$$\varrho = |\overline{r}_{B'B}| = \varrho_X^2 + \varrho_Y^2$$



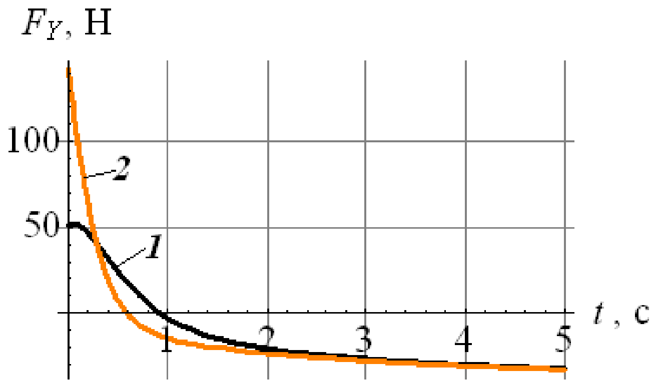
а) Абсолютная ошибка ϱ позиционирования точки B



б) Отклонение $\Delta\Omega(t)$ угловой скорости от установившегося значения



в) Зависимости $F_X(t)$



г) Зависимости $F_Y(t)$

1 — $k_0 = 3$; *2* — $k_0 = 5$.

Рисунок 4.11 — Результаты моделирования погни мобильной платформы за подвижным объектом

демонстрирует, что при увеличении k_0 точность совмещения B и B' возрастает. Вместе с тем, увеличиваются и ускорения на начальном этапе погони, а вместе с ними и управляющие воздействия (см. рисунки 4.11в и 4.11г).

Отметим также, что при выбранном законе движения преследуемой точки B' в процессе погони угловая скорость платформы устанавливается на значении, равном циклической частоте ω_B. Это подтверждает график изменения величины

$$\Delta\Omega = \Omega - \omega_B,$$

показанный на рисунке 4.11б.

Результаты численного моделирования алгоритма погони (4.88) при наличии шумовых погрешностей определения координат преследуемого объекта приведены в работе [13].

4.6 Идентификация параметров робота с учётом податливости элементов механических передач и колёс

Завершая данную главу, вернёмся к задаче идентификации параметров мобильного робота *youBot*.

Графики изменения ошибок прогноза $e_{\beta_i}(t)$ мобильной платформы, представленные на рисунке 4.7, демонстрируют, что выбранная расчётная модель робота игнорирует некоторые эффекты, достаточно сильно сказывающиеся на величинах управляющих сил. Рассмотрим в качестве такого эффекта влияние податливости деталей механических передач и колёс.

Уточним физический смысл углов φ_i. Будем считать, что φ_i это угол поворота воображаемого кольца — окружности, проходящей через центры роликов соответствующего колеса. Такое уточнение оставляет уравнения связей, выражающих условия непроскальзывания (4.6) в неизменном виде. Обозначим φ_i^s угол поворота вала двигателя относительно платформы, приведённый к выходному валу редуктора i-го колеса. В силу податливости элементов механических передач и колёс $\varphi_i \neq \varphi_i^s$. Величины относительных угловых скоростей $\dot{\varphi}_i^s$ измеряются датчиками напрямую.

Последнее обстоятельство приводит к невозможности вычисления псевдоскоростей V_X, V_Y и Ω по формулам (4.9)–(4.11). Сохраняя структуру этих соотношений, введём следующие вспомогательные величины:

$$
\begin{aligned}
V_X^s &= \frac{R}{4}[\dot{\varphi}_2^s + \dot{\varphi}_1^s + \dot{\varphi}_4 + \dot{\varphi}_3^s],\\
V_Y^s &= \frac{R}{4}[\dot{\varphi}_2^s - \dot{\varphi}_1^s - \dot{\varphi}_4^s + \dot{\varphi}_3^s],\\
\Omega^s &= \frac{1}{4\eta_\text{к}}[\dot{\varphi}_2^s - \dot{\varphi}_1^s + \dot{\varphi}_4^s - \dot{\varphi}_3^s].
\end{aligned}
$$

Оценим влияние учёта податливости указанных выше элементов конструкции робота на адекватность математической модели системы и результаты идентификации её параметров. В качестве примера рассмотрим случай поступательного продольного движения платформы:

$$V_Y \equiv 0, \quad \Omega \equiv 0.$$

4.6.1 Алгоритм идентификации при поступательном движении платформы без учёта податливости элементов

Построим алгоритм идентификации параметров системы, полагая что все элементы конструкции робота абсолютно жёсткие. В таком случае

$$\varphi_i^s = \varphi_i, \quad V_X^s = V_X.$$

В соответствии с (4.34) и обозначениями, принятыми в параграфе 4.5 уравнение продольного поступательного движения робота принимают вид:

$$m_1 \dot{V}_X + \zeta_1 V_X = F_X, \tag{4.89}$$

где, напомним, $m_1 = m_{\text{рб}} + \frac{4I_{\text{к}Y}}{R^2}$ — приведённая масса системы, $\zeta = \frac{4\mu_{\text{к}}}{R^2}$ — приведённый коэффициент вязкости.

Введём вспомогательные переменные α_I и β_I, удовлетворяющие уравнениям «фильтров»

$$\dot{\alpha}_I = a_f \cdot (V_X - \alpha_I), \quad \dot{\beta}_I = a_f \cdot (F_X - \beta_I), \tag{4.90}$$

где где $a_f > 0$ — постоянный коэффициент.

Выразим V_X и F_X в силу (4.90) и подставим в уравнение движения (4.89). После перегруппировки слагаемых, пренебрежения экспоненциально затухающими функциями, удовлетворяющими однородным уравнениям «фильтров», представления производных $\dot{\alpha}_I$ и $\dot{\beta}_I$ в силу (4.90) (см. параграф 4.4), получаем параметрическую модель продольного поступательного движения платформы:

$$m_1 a_f(V_X - \alpha_I) + \zeta_1 \alpha_I = \beta_I,$$

Используя априорные значения параметров m_1^* и $\mu_к^*$, введём безразмерные величины

$$\varpi_1 = \frac{m_1}{m_1^*}, \quad \varpi_2 = \frac{\zeta_1 R^2}{4\mu_к^*}$$

и перепишем представленное выше уравнение параметрической модели в векторно-матричном виде:

$$\beta_I = N_{C_I}^{\mathrm{T}} \varpi_I, \tag{4.91}$$

где:

$$N_{C_I} = \begin{pmatrix} m_1^* a_f(V_X - \alpha_I) \\ \frac{4\mu_к^*}{R^2}\alpha_I \end{pmatrix}, \quad \varpi_I = \begin{pmatrix} \varpi_1 \\ \varpi_2 \end{pmatrix}.$$

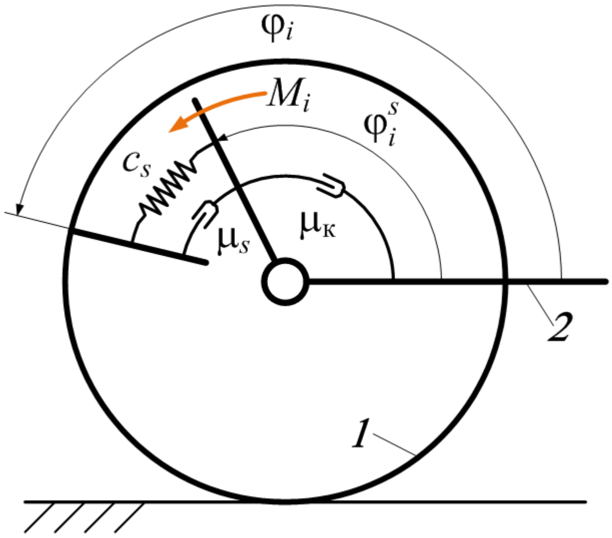
Идентификацию безразмерных параметров модели (4.91) проведём, используя рекуррентный метод наименьших квадратов (1.33). Алгоритм расчёта оценок имеет вид:

$$\dot{\widehat{\varpi}}_I = M_I^{-1} N_{C_I} e_I, \quad \dot{M}_I = N_{C_I} N_{C_I}^{\mathrm{T}}, \tag{4.92}$$

где $e_I = \beta_I - N_{C_I}^{\mathrm{T}} \widehat{\varpi}_I$ — ошибка прогноза параметрической модели (4.91).

4.6.2 Алгоритм идентификации при поступательном движении платформы с учётом податливости элементов

Перейдём к построению алгоритма идентификации параметров модели платформы с податливыми элементами механических передач и колёс. Эти элементы моделируются линейно упругими угловыми пружинами с коэффициентом жёсткости c_s, а также демпферами с коэффициентом вязкого трения μ_s (см. рисунок 4.12).



1 — колесо; 2 — платформа.

Рисунок 4.12 — Эквивалентная схема податливых элементов i-го колеса и его механической передачи

Для рассматриваемой системы мощность активных сил на возможных скоростях $\dot{\varphi}_i^{\text{в}}$ и $\dot{\varphi}_i^{s\,\text{в}}$ имеет вид

$$N_{\text{акт}}^{\text{в}} = \sum_{i=1}^{4} \Big\{ (M_i - \mu_{\text{к}}\dot{\varphi}_i^s)\dot{\varphi}_i^{s\,\text{в}} - \big[\mu_s(\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_i^s) + c_s(\varphi_i - \varphi_i^s)\big](\dot{\varphi}_i^{\text{в}} - \dot{\varphi}_i^{s\,\text{в}}) \Big\}.$$

В рассматриваемом случае продольного поступательного движения это выражение принимает форму

$$N_{\text{акт}}^{\text{в}} = (F_X - \zeta_1 V_X^s)V_X^{s\,\text{в}} - \big[\zeta_s(V_X - V_X^s) + k_s R(\Phi - \Phi^s)\big](V_X^{\text{в}} - V_X^{s\,\text{в}}),$$

где $\Phi = \varphi_1 + \ldots + \varphi_4$, $\Phi^s = \varphi_1^s + \ldots + \varphi_4^s$; $\zeta_s = \frac{4}{R^2}\mu_s$ и $k_s = \frac{4}{R^2}c_s$ — приведённые коэффициенты вязкости и упругости для податливых элементов.

С помощью последнего соотношения определим обобщённые силы и, пренебрегая инерцией податливых элементов, построим уравнения поступательного продольного движения платформы:

$$m_1\dot{V}_X + \zeta_s(V_X - V_X^s) + k_s R(\Phi - \Phi^s) = 0, \tag{4.93}$$

$$\zeta_1 V_X^s - \zeta_s(V_X - V_X^s) - k_s R(\Phi - \Phi^s) = F_X, \tag{4.94}$$

$$\dot{\Phi} = \frac{V_X}{R}, \quad \dot{\Phi}^s = \frac{V_X^s}{R}.$$

Система (4.93)–(4.94) содержит неизмеряемые переменные V_X и Φ, которые необходимо исключить из уравнений движения для получения параметрической модели.

Перепишем уравнения (4.93)–(4.94) в операторном виде, учитывая, что $V_X = R\dot{\Phi}$ и $V_X^s = R\dot{\Phi}^s$:

$$(m_1\mathcal{D}^2 + \zeta_s\mathcal{D} + k_s)R\Phi - (\zeta_s\mathcal{D} + k_s)R\Phi^s = 0, \tag{4.95}$$

$$([\zeta_1 + \zeta_s]\mathcal{D} + k_s)R\Phi^s - (\zeta_s\mathcal{D} + k_s)R\Phi = F_X, \tag{4.96}$$

где $\mathcal{D} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ — дифференциальный оператор.

Выразим Φ из (4.95):

$$\Phi = \frac{\zeta_s\mathcal{D} + k_s}{m_1\mathcal{D}^2 + \zeta_s\mathcal{D} + k_s}\Phi^s.$$

Подставим полученный результат в (4.96):

$$\left([\zeta_1 + \zeta_s]\mathcal{D} + k_s - \frac{(\zeta_s\mathcal{D} + k_s)^2}{m_1\mathcal{D}^2 + \zeta_s\mathcal{D} + k_s}\right)R\Phi^s = F_X.$$

Откуда после умножения на знаменатель дроби, получаем:

$$\left\{m_1(\zeta_1 + \zeta_s)\mathcal{D}^2 + (m_1k_s + \zeta_1\zeta_s)\mathcal{D} + \zeta_1k_s\right\}R\mathcal{D}\Phi^s = (m_1\mathcal{D}^2 + \zeta_s\mathcal{D} + k_s)F_X.$$

Разделив обе части полученного уравнения на k_s и применив соотношение $\dot{\Phi}^s = R^{-1}V_X^s$, имеем:

$$\frac{m_1(\zeta_1 + \zeta_s)}{k_s}\ddot{V}_X^s + \left(m_1 + \frac{\zeta_1\zeta_s}{k_s}\right)\dot{V}_X^s + \zeta_1V_X^s = \frac{m_1}{k_s}\ddot{F}_X + \frac{\zeta_s}{k_s}\dot{F}_X + F_X. \tag{4.97}$$

Введём вспомогательные функции α_{II} и β_{II}, удовлетворяющие уравнениям «фильтров»

$$\ddot{\beta}_{II} + 2a_f\dot{\beta}_{II} + a_f^2(\beta_{II} - F_X) = 0, \quad \ddot{\alpha}_{II} + 2a_f\dot{\alpha}_{II} + a_f^2(\alpha_{II} - V_X^s) = 0, \tag{4.98}$$

где $a_f > 0$ — постоянный коэффициент.

Выразим V_X и F_X в силу (4.98) и подставим в уравнение движения (4.97). После перегруппировки слагаемых, пренебрежения экспоненциально затухающими функциями, удовлетворяющими однородным уравнениям «фильтров» (см. параграф 4.4), получаем параметрическую модель продольного поступательного движения платформы с податливыми элементами:

$$\beta_{II} = \frac{m_1(\zeta_1+\zeta_s)}{k_s}\ddot{\alpha}_{II} + \left(m_1 + \frac{\zeta_1\zeta_s}{k_s}\right)\dot{\alpha}_{II} + \zeta_1\alpha_{II} - \frac{m_1}{k_s}\ddot{\beta}_{II} - \frac{\zeta_s}{k_s}\dot{\beta}_{II}.$$

Перепишем представленное выше уравнение параметрической модели в векторно-матричном виде:

$$\beta_{II} = N_{II}^{\mathrm{T}}\vartheta_{II}, \tag{4.99}$$

где:

$$N_{II}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \dddot{\alpha}_{II} & \dot{\alpha}_{II} & \ddot{\alpha}_{II} & -\ddot{\beta}_{II} & -\dot{\beta}_{II} \end{pmatrix}, \quad \vartheta_{II} = \begin{pmatrix} \frac{m_1(\zeta_1+\zeta_s)}{k_s} & m_1+\frac{\zeta_1\zeta_s}{k_s} & \zeta_1 & \frac{m_1}{k_s} & \frac{\zeta_s}{k_s} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Здесь для краткости аналитические выражения старших производных внутренних переменных «фильтров» (4.98) $\dddot{\alpha}_{II}$ и $\dddot{\beta}_{II}$ не представлены.

В рассматриваемой задаче присутствует параметрическая связь. Пять коэффициентов линейной параметрической модели (4.99) зависят от четырёх независимых параметров m_1, ζ_1, ζ_s и k_s.

Используя априорные значения параметров m_1^*, $\mu_{\text{к}}^*$, μ_s^* и c_s^* введём безразмерные величины

$$\varpi_1 = \frac{m_1}{m_1^*}, \quad \varpi_2 = \frac{\zeta_1 R^2}{4\mu_{\text{к}}^*}, \quad \varpi_3 = \frac{\zeta_s R^2}{4\mu_s^*}, \quad \varpi_4 = \frac{k_s R^2}{4c_s^*}.$$

Вектор коэффициентов параметрической модели (4.99) можно представить в виде функции

$$\vartheta_{II} = \Theta_{II}(\varpi_{II}),$$

где $\varpi_{II} = \begin{pmatrix} \varpi_1 & \varpi_2 & \varpi_3 & \varpi_4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ — вектор независимых безразмерных параметров.

Производная вектора оценок $\widehat{\varpi}_{II}$ по времени является вектором параметрических псевдоскоростей в рассматриваемой задаче, причём

$$\dot{\hat{\vartheta}}_{II} = C_{II}\dot{\widehat{\varpi}}_{II}, \quad C_{II} = \frac{\partial\Theta_{II}(\widehat{\varpi}_{II})}{\partial\widehat{\varpi}_{II}^{\mathrm{T}}}.$$

Идентификацию параметров модели (4.99) проведём, используя модифицированный рекуррентный метод наименьших квадратов (2.52)–(2.53). Алгоритм расчёта оценок имеет вид:

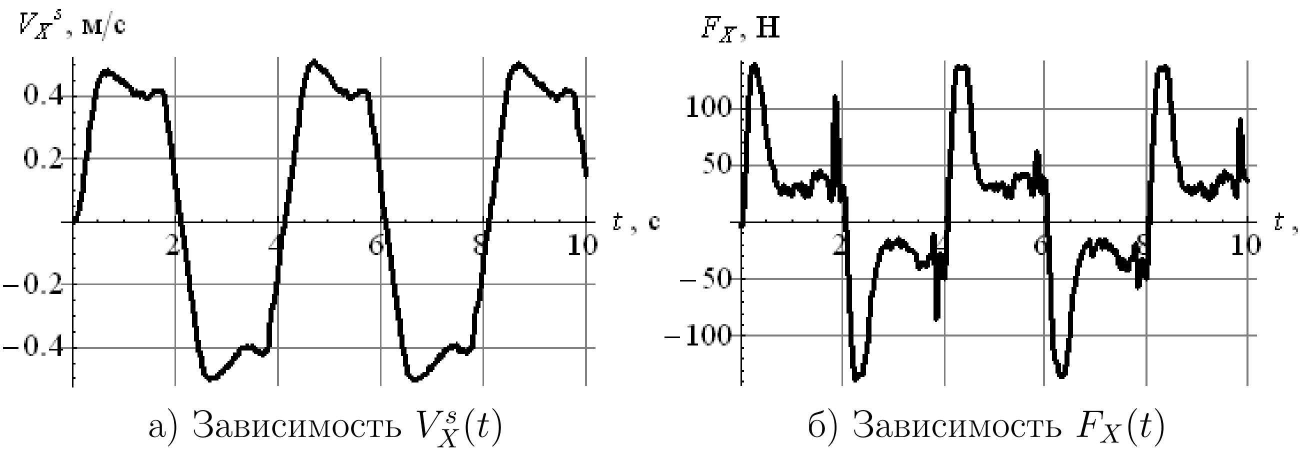
$$\dot{\hat{\omega}}_{II} = P_{II} N_{C_{II}} e_{II}, \quad \dot{P}_{II} = -P_{II} N_{C_{II}} N_{C_{II}}^{\mathrm{T}} P_{II}, \tag{4.100}$$

где $e_{II} = \beta_{II} - N_{II}^{\mathrm{T}} \Theta_{II}(\hat{\pi}_{II})$ — ошибка прогноза параметрической модели (4.99); $N_{C_{II}} = C_{II}^{\mathrm{T}} N_{II}$.

4.6.3 Результаты идентификации параметров

Проведём численное моделирование алгоритмов идентификации параметров мобильной платформы (4.92) и (4.100).

Исходной информацией для идентификации параметров служат зависимости от времени величины $V_X^s(t)$ и управляющей обобщённой силы $F_X(t)$, полученные экспериментально в процессе поступательного продольного движения робота. Графики изменения указанных функций сил на отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant 10$ с представлены на рисунке 4.13.



а) Зависимость $V_X^s(t)$ б) Зависимость $F_X(t)$

Рисунок 4.13 — Исходные данные для идентификации параметров мобильного робота *youBot*

Зависимости $V_X^s(t)$ и $F_X(t)$ близки к периодическим. Для того, чтобы вспомогательные «фильтры» (4.90) и (4.98) не подавляли колебания с частотным спектром функций $V_X^s(t)$ и $F_X(t)$, примем $a_f = 7$ с$^{-1}$. Зададим априорные значения оцениваемых параметров:

$$m_1^* = 30 \text{ кг}, \quad \mu_\text{к}^* = 0{,}05 \text{ Н·м·с}, \quad \mu_s^* = 0{,}02 \text{ Н·м·с}, \quad c_s^* = 0{,}65 \text{ Н·м}.$$

В параграфе 3.3.3 было продемонстрирована чувствительность алгоритмов идентификации, полученных на основе метода наименьших квадратов, к переходным процессов в «фильтрах» вида (4.90) и (4.98), которые использовались для построения параметрической модели. Поэтому в процессе моделирования интегрирование уравнений вспомогательных (4.90) и (4.98) начиналось при $t = 0$, а работа алгоритмов идентификации — в момент времени $t_0 = 5$ с. Величина t_0 подбиралась достаточной для затухания решений однородных уравнений «фильтров».

Начальные значения оценок безразмерных параметров возьмём равными для обоих рассматриваемых алгоритмов идентификации:

$$\widehat{\boldsymbol{\varpi}}_i(t_0) = 1, \quad i = \overline{1{,}4}.$$

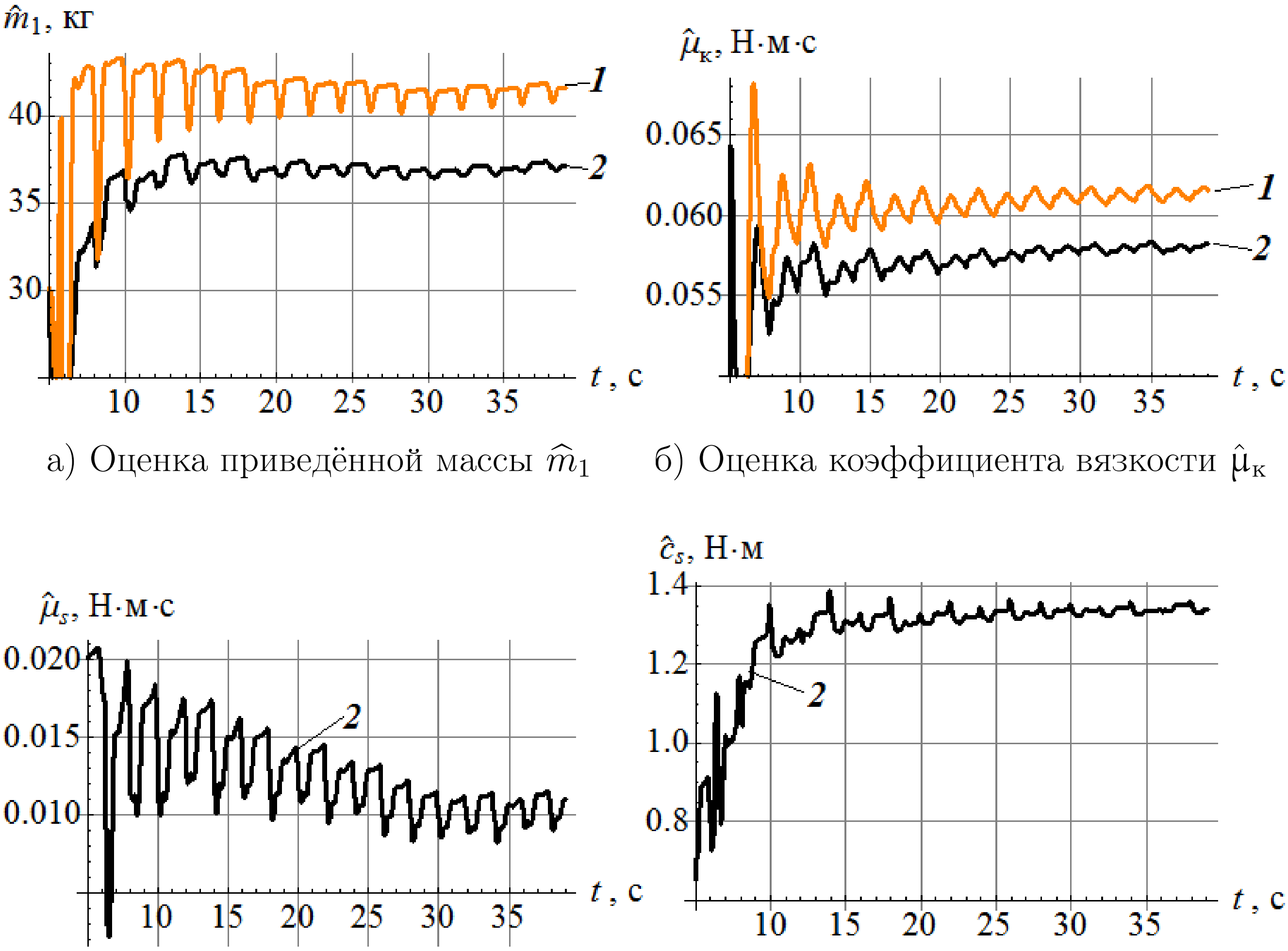
Зададим

$$M_I^{-1}(t_0) = 0{,}4E, \quad P_{II}(t_0) = 0{,}05E.$$

На рисунке 4.14 представлены результаты компьютерного моделирования работы идентификаторов параметров (4.92) и (4.100). Это графики изменения оценок параметров математических моделей платформы при продольном движении: приведённой массы $\widehat{m}_1$, коэффициентов вязкого трения $\hat{\mu}_\text{к}$ и $\hat{\mu}_s$, эквивалентного коэффициента жёсткости податливых частей $\hat{c}_s$, найденные по формулам

$$\widehat{m}_1 = m_1^* \widehat{\boldsymbol{\varpi}}_1, \quad \hat{\mu}_\text{к} = \mu_\text{к}^* \widehat{\boldsymbol{\varpi}}_2, \quad \hat{\mu}_s = \mu_s^* \widehat{\boldsymbol{\varpi}}_3, \quad \hat{c}_s = c_s^* \widehat{\boldsymbol{\varpi}}_4.$$

На рисунке 4.15 представлены графики изменения ошибок прогнозов параметрических моделей (4.91) и (4.99). Приведённые результаты демонстрируют, что ошибка прогноза модели (4.99) в целом меньше, чем ошибка прогноза (4.91). Таким образом, учёт податливости некоторых элементов конструкции делает математическую модель робота лучше отвечающей экспериментальным данным.



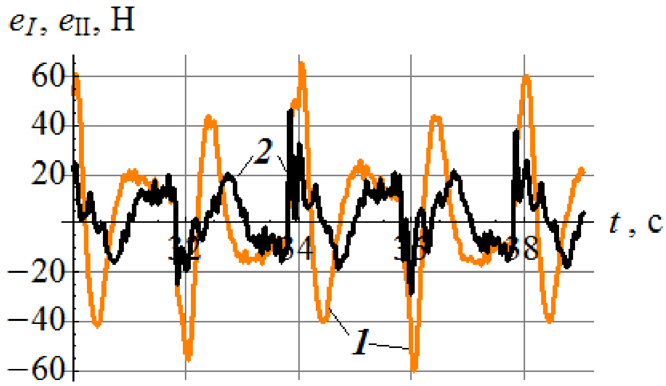
а) Оценка приведённой массы $\widehat{m}_1$ б) Оценка коэффициента вязкости $\hat{\mu}_к$

в) Оценка коэффициента вязкости $\hat{\mu}_s$ г) Оценка коэффициента жёсткости $\hat{c}_s$

1 — оценки параметров модели (4.91); 2 — оценки параметров модели (4.99), учитывающей податливость элементов платформы.

Рисунок 4.14 — Результаты идентификации параметров робота *youBot* при продольном поступательном движении

В заключение отметим, что рассмотренная задача является частным случаем широкого класса задач идентификации параметров робототехнических систем с податливыми элементами в шарнирах и сочленениях тел, в которых отсутствует полный вектор измерений. Их особенностью является наличие параметрических связей, и, следовательно, для их решения применимы алгоритмы, разработанные в главах 1 и 2.



1 — ошибка прогноза e_I модели (4.91); 2 — ошибка прогноза e_{II} модели (4.99), учитывающей податливость элементов платформы.

Рисунок 4.15 — Влияние учёта податливости элементов конструкции робота на ошибку прогноза параметрической модели

Выводы по главе 4

В настоящей главе построена математическая модель робота *youBot*, оснащённого четырьмя роликонесущими меканум-колёсами. Решена задача идентификации параметров этой модели. Построен алгоритм управления платформой робота, согласно которому управляющие силы отождествляются с реакциями связей, с которыми согласуется программное движение аппарата. Работоспособность алгоритма продемонстрирована на примере реализации равномерного движения произвольной точки платформы по окружности. Исследованы стационарные вращения платформы во время выполнения такого движения. Приведён пример применения построенного алгоритма управления в задаче погони робота за подвижным объектом. Построена математическая модель продольного движения платформы, учитывающая податливость некоторых конструктивных элементов робота. Решена задача идентификации её параметров. Установлено, что в этой задаче имеют место параметрические связи, которые были использованы при разработке алгоритма идентификации.

Материалы главы опубликованы в работах [2; 4–6; 9–13].

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Для мехатронных систем с линейными параметрическими моделями построено семейство алгоритмов идентификации параметров с ограничениями на оценки в виде равенств, полученное с помощью математического аппарата неголономной механики (использования принципа наименьшего принуждения и представления уравнений связей в терминах псевдоскоростей), позволившего снизить размерность задачи.
2. Разработаны оптимальные с точки зрения метода наименьших квадратов алгоритмы идентификации с ограничениями-равенствами на оценки параметров, представленные в терминах псевдоскоростей и множителей связей.
3. Построены оптимальные с точки зрения модифицированной интегральной квадратичной ошибки алгоритмы идентификации с ограничениями-равенствами на оценки параметров, представленные в псевдоскоростях.
4. Показано, что введение неинтегрируемых связей позволяет получить новые классы решений задач, в постановке которых связи не фигурируют. Это задачи стабилизации аффинных управляемых систем и оценивания для некоторых нелинейно параметризованных систем.
5. Найден обширный класс многозвенных мехатронных систем с податливыми шарнирами с неполным вектором измерений, у которых коэффициенты линейных параметрических моделей удовлетворяют дополнительным соотношениям — параметрическим связям. Для идентификации параметров таких систем применимы перечисленные выше алгоритмы.
6. Разработаны алгоритмы идентификации параметров нелинейной математической модели резонатора волнового твердотельного гироскопа и оценивания характеристик его установившихся колебаний.
7. Создана математическая модель роботизированной платформы всенаправленного движения *KUKA youBot*, учитывающая силы вязкого трения в подшипниках механических передач и опорах роликов колёс. Раз-

работан алгоритм идентификации параметров такой модели, использующий одометрическую информацию и измерения управляющих моментов двигателей.

8. Разработан алгоритм управления роботом *KUKA youBot* с целью отработки программного движения, которое реализуется путём воздействия на систему управляющих обобщённых сил, отождествлённых с реакциями неголономных связей. Получены условия существования и асимптотической устойчивости стационарных вращений платформы робота в процессе реализации равномерного движения произвольной точки платформы по окружности.

Список литературы

1. ***Адамов, Б. И.*** **Нелинейная стабилизация движения одноколёсного робота / Б. И. Адамов** // *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки.* — 2011. — № 1. — С. 51–54.

2. ***Адамов, Б. И.*** **Управление мобильным манипулятором, работающим в цилиндрической системе координат / Б. И. Адамов, И. В. Орлов** // *Вестник МЭИ.* — 2012. — № 1. — С. 28–35.

3. ***Адамов, Б. И.*** **Методы аналитической механики в задаче адаптивной идентификации со связями / Б. И. Адамов, А. И. Кобрин** // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика.* — 2016. — № 5. — С. 63–67.

4. *Адамов, Б. И.* Моделирование движения робота с меканум-колёсами в системе Mathematica 7.0 / Б. И. Адамов // *Инновационные информационные технологии.* — 2013. — Т. 2, № 2. — С. 105–109.

5. An approach to the kinematics and dynamics of a four-wheeled mecanum vehicles / B. Adamov, M. Abdelrahman, F. Becker et al. // *Scientific Journal of IfToMM „Problems of Mechanics", special issue.* — 2013. — no. 2(55). — Pp. 27–37.

6. *Адамов, Б. И.* Решение обратной задачи динамики мобильного манипулятора методом неопределённых множителей / Б. И. Адамов, И. В. Орлов // Международная молодёжная научно-практической конференция «Мобильные роботы и мехатронные системы» / НИИ Механики МГУ. — М.: Изд-во Московского университета, 2011. — С. 14–18.

7. *Адамов, Б. И.* Стабилизация движения сигвея с параметрической неопределённостью и повышение комфортабельности езды пассажира / Б. И. Адамов // XV конференция молодых учёных «Навигация и управление движением» / ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Международная общественная организация «Академия навигации

и управления движением». — СПб.: Концерн «Центральный научно-исследовательский институт «Электроприбор», 2013. — С. 339–343.

8. *Адамов, Б. И.* Стабилизация движения сигвея с параметрической неопределённостью / Б. И. Адамов // Международная конференция «Восьмые окуневские чтения» / Балт. гос. техн. ун-т. — СПб.: 2013. — С. 44–46.

9. *Адамов, Б. И.* О некоторых задачах управления мобильным манипулятором / Б. И. Адамов, А. И. Кобрин, И. В. Орлов // XX междунар. науч.-техн. конф. студентов и аспирантов «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика». — Т. 4. — М.: Издательский дом МЭИ, 2014. — С. 228.

10. A Description of the Dynamics of a Four-Wheel Mecanum Mobile System as a Basis for a Platform Consept for Special Purpose Vehicles for Disabled Persons [Электронный ресурс] / B. Adamov, M. Abdelrahman, F. Becker at al. // 58-th Ilmenau Scientific Colloquium — Shaping the Future by Engineering. — Ilmenau: 2014. — Режим доступа: http://www.db-thueringen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-30822/ilm1-2014iwk-041.pdf, свободный. — (Дата обращения: 30.05.2016).

11. *Адамов, Б. И.* Реализация алгоритма преследования для мобильного робота в среде LabView / Б. И. Адамов, А. В. Князев // XIII международная научно-практическая конференция: «Инженерные и научные приложения на базе технологий NI NIDays–2014». — М.: ДМК Пресс, 2014. — С. 179–181.

12. *Адамов, Б. И.* Применение алгоритма фильтрации в задаче погони / Б. И. Адамов, А. В. Князев, А. И. Кобрин // XXI междунар. науч.-техн. конф. студентов и аспирантов «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика». — Т. 4. — М.: Издательский дом МЭИ, 2015. — С. 150–151.

13. *Адамов, Б. И.* Асимптотический алгоритм погони для мобильного робота / Б. И. Адамов, А. В. Князев // XVII конференция молодых учёных «Навигация и управление движением» / ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Международная общественная организация «Академия навигации и управления движением». — СПб.: Концерн «Центральный научно-исследовательский институт «Электроприбор», 2015. — С. 516–524.

14. *Адамов, Б. И.* Идентификация параметров динамического объекта при наличии параметрических связей / Б. И. Адамов // XVII конференция молодых учёных «Навигация и управление движением» / ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Международная общественная организация «Академия навигации и управления движением». — СПб.: Концерн «Центральный научно-исследовательский институт «Электроприбор», 2015. — С. 497–508.

15. *Адамов, Б. И.* Идентификация параметров механической системы при наличии параметрических связей / Б. И. Адамов // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. — Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2015. — С. 82–83.

16. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-ти тт / Под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. — 2-е, перераб. и доп. изд. — М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 2004. — Т. 5: Методы современной теории автоматического управления. — 784 с.

17. *Тюкин, И. Ю.* Адаптация в нелинейных динамических системах / Предисл. Г. Г. Малинецкого / И. Ю. Тюкин, В. А. Терехов. — М.: Издательство ЛКИ, 2007. — 384 с. — (Синергетика: от прошлого к будущему).

18. *Ким, Д. П.* Теория автоматического управления / Д. П. Ким. — 2-е изд. испр. и доп. изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. — 440 с.

19. *Sastry, S.* Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness / S. Sastry, M. Bodson. — Mineola, New York: Courier Corporation, 2011. — 381 pp.

20. *Ioannou, P. A.* Robust Adaptive Control / P. A. Ioannou, J. Sun. — Mineola, New York: Courier Corporation, 2012. — 821 pp.

21. *Slotine, J. J. E.* Applied Nonlinear Control / J. J. E. Slotine, W. Li. — Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1991. — 461 pp.

22. *Андриевский, Б. Р.* Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков. — СПб.: Наука, 1999. — 468 с.

23. *Андриевский, Б. Р.* Метод пассификации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков // *Автомат. и телемех.* — 2006. — № 11. — С. 3–37.

24. *Андриевский, Б. Р.* Синхронизация нелинейных непассифицируемых систем на основе адаптивных наблюдателей / Б. Р. Андриевский, В. О. Никифоров, А. Л. Фрадков // *Автомат. и телемех.* — 2007. — № 7. — С. 74–89.

25. *Андриевский, Б. Р.* Адаптивное управление летательным аппаратом с идентификацией на скользящих режимах / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков // *Управление большими системами.* — 2009. — № 26. — С. 113–144.

26. Реализация процедуры идентификации динамических систем на основе нейросетевых модельных структур // Нестационарные системы автоматического управления: анализ, синтез и оптимизация / Под ред. Е. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. — М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2007. — С. 420–454.

27. *Льюнг, Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя: Пер. с англ. / Л. Льюнг; Под ред. Я. З. Цыпкина. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. — 432 с.

28. *Голован, А. А.* Математические основы навигационных систем: Часть I: Математические модели инерциальной навигации / А. А. Голован, Н. А. Парусников. — 3-е, испр. и дополн. изд. — М.: Макс Пресс, 2011. — 136 с.

29. *Голован, А. А.* Математические основы навигационных систем: Часть II: Применение методов оптимального оценивания к задачам навигации / А. А. Голован, Н. А. Парусников. — М.: Изд-во МГУ, 2008. — 128 с.

30. *Степанов, О. А.* Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Ч. 1. Введение в теорию оценива-

ния / О. А. Степанов. — СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2010. — 509 с.

31. *Simon, D.* Optimal State Estimation / D. Simon. — John Wiley & Sons, 2006. — 552 pp.

32. *Сейдж, Э.* Теория оценивания и её применение в связи и управлении / Э. Сейдж, Дж. Мелс. — М.: Связь, 1976. — 496 с.

33. *Simon, D.* Kalman Filtering with State Constraints: A Survey of Linear and Nonlinear Algorithms / D. Simon // *IET Control Theory & Applications.* — 2010. — Vol. 4, no. 8. — Pp. 1303–1318.

34. *Calzolari, G.* Constrained Indirect Estimation / G. Calzolari, G. Fiorentini // *The Review of Economic Studies.* — 2004. — Vol. 71, no. 4. — Pp. 945–973.

35. *Zhu, B.* New Viewpoints about Pseudo Measurements Method in Equality-Constrained State Estimation [Электронный ресурс] / B. Zhu, Y. Luo, Y. Zhu // *Mathematical Problems in Engineering.* — 2015. — Vol. 2015. — Режим доступа: http://www.hindawi.com/journals/mpe/2015/946952/, свободный. — (Дата обращения: 30.06.2016).

36. *Julier, S. J.* On Kalman Filtering With Nonlinear Equality Constraints / S. J. Julier, J. J. LaViola // *IEEE Transactions on Signal Processing.* — 2007. — Vol. 55, no. 6. — Pp. 2774–2784.

37. Hard-constrained versus soft-constrained parameter estimation / A. Benavoli, L. Chisci, A. Farina, L. Ortenzi // *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems.* — 2006. — Vol. 42, no. 4. — Pp. 1224–1239.

38. *Yang, C.* Kalman Filtering with Nonlinear State Constraints [Электронный ресурс] / C. Yang, E. Blasch // Proc. of the 9th International Conference on Information Fusion. — Florence: 2006. — Режим доступа: http://fusion.isif.org/proceedings/fusion06CD/Papers/8.pdf?, свободный. — (Дата обращения: 30.06.2016).

39. *Gupta, N.* Kalman Filtering with Equality and Inequality State Constraints [Электронный ресурс]: Oxford Numerical Analysis Group Technical Report

07/18 / N. Gupta, R. Hauser; Oxford University Computing Laboratory. — 2007. — 26 pp. — Режим доступа: https://www.cs.ox.ac.uk/files/728/NA-07-18.pdf, свободный. — (Дата обращения: 30.06.2016).

40. Constrained State Estimation for Individual Localization in Wireless Body Sensor Networks / X. Feng, H. Snoussi, Y. Liang, L. Jiao // *Sensors.* — 2014. — no. 14. — Pp. 21195–21212.

41. *Kolås, S.* Constrained nonlinear state estimation based on the UKF approach / S. Kolås, B. A. Foss, T. S. Schei // *Computers and Chemical Engineering.* — 2009. — no. 33. — Pp. 1386–1401.

42. Norm-Constrained Kalman Filtering / R. Zanetti, V. Majji, R. H. Bishop, D. Mortari // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* — 2009. — Vol. 32, no. 5. — Pp. 1458–1465.

43. *Forbes, J. R.* Continuous-Time Norm-Constrained Kalman Filtering / J. R. Forbes, A. H. J. de Ruiter, D. E. Zlotnik // *Automatica.* — 2014. — Vol. 50. — Pp. 2546—2554.

44. *Н. П., Еругин.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую / Еругин Н. П. // *ПММ.* — 1952. — Т. 21, № 6. — С. 659–670.

45. *Галиуллин, А. С.* Обратные задачи динамики / А. С. Галиуллин. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. — 144 с.

46. *Мухарлямов, Р. Г.* Моделирование динамики простейших экономических объектов как систем с программными связями / Р. Г. Мухарлямов // *Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика.* — 2007. — № 3-4. — С. 25–34.

47. *Ахметов, А. А.* Динамическое моделирование управления экономическими объектами / А. А. Ахметов, Р. Г. Мухарлямов // *Вестник Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева.* — 2008. — № 3. — С. 102–106.

48. *Мухарлямов, Р. Г.* Управление динамикой систем, содержащих элементы различной физической природы / Р. Г. Мухарлямов, О. В. Матухина, А. А. Ахметов // *Филология и культура.* — 2011. — № 24. — С. 25–37.

49. *Абрамов, Н. В.* Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация систем с программными связями / Н. В. Абрамов, Р. Г. Мухарлямов // *Вестник Самарского государственного университета.* — 2011. — № 2 (83). — С. 130–140.

50. *Абрамов, Н. В.* Управление динамикой с учётом стабилизации связей / Н. В. Абрамов, Р. Г. Мухарлямов // *Вестник Самарского государственного университета.* — 2013. — № 9-1 (110). — С. 67–75.

51. *Мухарлямов, Р. Г.* Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация систем с программными связями / Р. Г. Мухарлямов // *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления.* — 2015. — № 1. — С. 15–28.

52. *Мухарлямов, Р. Г.* Управление динамикой, устойчивость и стабилизация связей / Р. Г. Мухарлямов // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ–2014. — 2014. — С. 578–583.

53. *Мухарлямов, Р. Г.* Уравнения программных движений манипуляционных систем / Р. Г. Мухарлямов, Г. Йоро, Н. В. Абрамов // *Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика.* — 2009. — № 2. — С. 79–89.

54. *Мухарлямов, Р. Г.* Уравнения динамикой манипулятора с программными связями / Р. Г. Мухарлямов, Н. В. Абрамов // *Проблемы механики и управления: нелинейные динамические системы.* — 2011. — № 43. — С. 90–102.

55. *Мухаметзянов, И. А.* Оптимальная стабилизация в целом программного движения обобщённых систем / И. А. Мухаметзянов // Сборник научно–методических статей. Теоретическая механика / Под ред. акад. РАН. А. Н. Колесникова. — М.: Изд. Моск. ун-та, 2000. — Вып. 23. — С. 98–106.

56. *Мухаметзянов, И. А.* О построении систем с инвариантными программными связями / И. А. Мухаметзянов // *Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика.* — 2006. — № 1. — С. 13–19.

57. *Мухаметзянов, И. А.* О построении систем с квазиинвариантными программными связями / И. А. Мухаметзянов // *Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика.* — 2007. — № 3-4. — С. 35–44.

58. *Мухаметзянов, И. А.* Принцип обратной связи по квазиускорению при безударной стабилизации за конечное время заданных многообразий механических и обобщённых систем / И. А. Мухаметзянов // *Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика.* — 2014. — № 3. — С. 107–114.

59. *Мухаметзянов, И. А.* О квазиинвариантности программных многообразий при возмущениях из заданного класса функций / И. А. Мухаметзянов // *Проблемы механики и управления: нелинейные динамические системы.* — 2011. — № 43. — С. 79–89.

60. *Матухина, О. В.* Управление динамикой производственного предприятия для приведения в состояние эталонной модели / О. В. Матухина, И. А. Мухаметзянов, О. И. Чекмарева // *Вестник Казанского технологического университета.* — 2015. — Т. 18, № 11. — С. 210–212.

61. *Маркеев, А. П.* Теоретическая механика. Учебник для высших учебных заведений / А. П. Маркеев. — М., Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. — 592 с.

62. *Мартыненко, Ю. Г.* Управление движением мобильных колёсных роботов / Ю. Г. Мартыненко // *Фундаментальная и прикладная математика.* — 2005. — Т. 11, № 8. — С. 29–80.

63. *Орлов, И. В.* Управление движением автономного мобильного телескопического манипулятора: Дис... канд. техн. наук: 01.02.01 / Моск. энерг. ин-т (МЭИ ТУ). — М., 2004. — 130 с.

64. *Сейдж, Э. П.* Идентификация систем управления / Э. П Сейдж, Дж. Л. Мелса. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. — 248 с.

65. *Anderson, B. D. O.* Exponential Stability of Linear Systems Arising From Adaptive Identification / B. D. O. Anderson // *IEEE Transactions on Automatic Control.* — 1977. — Vol. 22, no. 2. — Pp. 83–88.

66. *Маркеев, А. П.* О принципе Гаусса / А. П. Маркеев // Сборник научно–методических статей. Теоретическая механика / Под ред. акад. РАН. А. Н. Колесникова. — М.: Изд. Моск. ун-та, 2000. — Вып. 23. — С. 29–44.

67. Теоретическая механика. Учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С. В. Болотин, А. В. Карапетян, Е. И. Кугушев, Д. В. Трещев. — М.: Издательский центр «Академия», 2010. — 432 с.

68. *Неймарк, Ю. И.* Динамика неголономных систем / Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев. — М.: «Наука», гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. — 520 с.

69. *Тихонова, А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных / А. Н. Тихонова // *Математический сборник.* — 1952. — Т. 31(73), № 3. — С. 575–586.

70. *Новожилов, И. В.* Фракционный анализ / И. В. Новожилов. — М.: Изд-во МГУ, 1995. — 224 с.

71. *Новожилов, И. В.* Методы разделения движений: Конспект лекций / И. В. Новожилов. — М.: МЭИ, 1981. — 48 с.

72. *Козлов, В. В.* Принцип Гаусса и реализация связей / В. В. Козлов // *Нелинейная динамика.* — 2008. — Т. 4, № 3. — С. 281–286.

73. *Козлов, В. В.* Принципы динамики и сервосвязи / В. В. Козлов // *Нелинейная динамика.* — 2015. — Т. 11, № 1. — С. 169–178.

74. *Козлов, В. В.* Динамика систем с сервосвязями. I / В. В. Козлов // *Нелинейная динамика.* — 2015. — Т. 11, № 2. — С. 353–376.

75. *Козлов, В. В.* Динамика систем с сервосвязями. II / В. В. Козлов // *Нелинейная динамика.* — 2015. — Т. 11, № 3. — С. 579–611.

76. *Лукьянов, Д. П.* Прикладная теория гироскопов / Д. П. Лукьянов, В. Я. Распопов, Ю. В. Филатов. — М.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2015. — 316 с.

77. *Журавлев, В. Ф.* Волновой твердотельный гироскоп / В. Ф. Журавлев, Д. М. Климов. — М.: Наука, 1985. — 125 с.

78. *Журавлев, В. Ф.* Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа / В. Ф. Журавлев // *Изв. РАН. МТТ.* — 1993. — № 3. — С. 5–10.

79. *Журавлев, В. Ф.* О динамических эффектах в упругом вращающемся кольце / В. Ф. Журавлев, Д. М. Климов // *Изв. АН СССР. МТТ.* — 1983. — № 5. — С. 17–24.

80. *Журавлев, В. Ф.* Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов / В. Ф. Журавлев // *Изв. РАН. МТТ.* — 1997. — № 6. — С. 27–35.

81. *Меркурьев, И. В.* Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов / И. В. Меркурьев, В. В. Подалков. — М.: ФИЗМАТЛИТ.

82. *Гавриленко, А. Б.* Экспериментальные методы определения параметров вязкоупругой анизотропии резонатора волнового твердотельного гироскопа / А. Б. Гавриленко, И. В. Меркурьев, В. В. Подалков // *Вестник МЭИ.* — 2010. — № 5. — С. 13–19.

83. *Меркурьев, И. В.* Динамика микромеханического вибрационного гироскопа с резонатором в виде упругих пластин / И. В. Меркурьев, В. В. Подалков, Е. С. Сбытова // *Вестник МЭИ.* — 2013. — № 1. — С. 5–11.

84. *Маслов, А. А.* Идентификация параметров волнового твердотельного гироскопа с учётом нелинейности колебаний резонатора / А. А. Маслов, Д. А. Маслов, И. В. Меркурьев // *Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика.* — 2014. — № 5. — С. 18–23.

85. *Маслов, А. А.* Нелинейные эффекты в динамике цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа с электростатической системой

управления / А. А. Маслов, Д. А. Маслов, И. В. Меркурьев // *Гироскопия и навигация.* — 2015. — № 1(88). — С. 71–80.

86. *Маслов, А. А.* Исследование нелинейных эффектов в электростатической системе возбуждения колебаний резонатора микромеханического гироскопа / А. А. Маслов, Д. А. Маслов, И. В. Меркурьев // *Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика.* — 2015. — № 2. — С. 23–28.

87. *Sudipto, K. De.* Complex nonlinear oscillations in electrostatically actuated micro-structures / K. De. Sudipto, N. R. Aluru // *J. Microelectromech. Syst.* — 2006. — Vol. 15, no. 2. — Pp. 355–369.

88. Generalized parametric resonance in electrostatically actuated microelectromechanical oscillators / J. Rhoads, S. Shaw, K. Tunner et al. // *J. sound and Vib.* — 2006. — Vol. 296. — Pp. 797–829.

89. A reducing of chaotic behavior to a periodic orbit of a combdriver drive system (MEMS) using particle swarm optimization / F. R. Chavarett, I. M. Balthaza, I. R. Guilherm, O. S. Nasciment // Proceedings of the 9th Brazilian Conference on Dynamics Control and their Applications. Serra Negra. — 2010. — Pp. 355–369.

90. Пат. 2544308 Российская Федерация, МПК G 01 C 19/56. Способ определения параметров волнового твердотельного гироскопа / Маслов А. А., Меркурьев И. В., Маслов Д. А.; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский университет «МЭИ» — № 2013128898/28; заявл. 25.06.2013; опубл. 20.03.2015 Бюл. № 8. — 3 с.

91. *Phani, A. S.* Identification of Anisoelasticity and Nonproportional Damping in MEMS Gyroscopes / A. S. Phani, A. A. Seshia // NSTI-Nanotech 2004. — Vol. 2. — 2004. — Pp. 343–346.

92. *Phani, D. J.* Real-Time Tuning of MEMS Gyro Dynamics / D. J. Phani, R. T. M'Closkey // 2005 American Control Conference. — 2005. — Pp. 3598–3603.

93. *Fei, J.* System Identification of MEMS Vibratory Gyroscope Sensor [Электронный ресурс] / J. Fei, Y. Yang // *Mathematical Problems in Engi-*

neering. — 2011. — Vol. 2011. — Режим доступа: http://www.hindawi.com/journals/mpe/2011/829432/, свободный. — (Дата обращения: 30.06.2016).

94. *Бобцов, А. А.* Адаптивное управление возмущенными системами. Учебное пособие. / А. А. Бобцов, В. О. Никифоров, А. А. Пыркин. — СПб.: Университет ИТМО, 2015. — 126 с.

95. *Sharma, B. B.* Design of Asymptotically Convergent Frequency Estimator Using Contraction Theory / B. B. Sharma, I. N. Kar // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2008. — Vol. 47. — Pp. 1932–1937.

96. *Зенкевич, С. Л.* Основы управления манипуляционными роботами / С. Л. Зенкевич, А. С. Ющенко. — 2-е изд. — М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. — 480 с.

97. *Zimmermann, K.* Mechanics of Terrestrial Locomotion. With a Focus on Non-pedal Motion Systems / K. Zimmermann, I. Zeidis, C. Behn. — London: Springer, 2010. — 292 pp.

98. *Spong, M. W.* Robot Modeling and Control / M. W. Spong, S. Hutchinson, M. Vidyasagar. — New York: John Wiley & Sons, 2006. — 496 pp.

99. *Мартыненко, Ю. Г.* Программное управление движением телескопического манипулятора на подвижной платформе / Ю. Г. Мартыненко, И. В. Орлов // *Вестник МЭИ*. — 2003. — № 5. — С. 60–70.

100. *Зенкевич, С. Л.* Идентификация параметров уравнений движения манипуляционных роботов / С. Л. Зенкевич, С. Л. Крутиков // Международная научно-техническая конференция «Экстремальная робототехника». — Санкт-Петербург: 2011. — С. 125–129.

101. *Крутиков, С. Л.* Базовые инерционные параметры манипуляционных роботов / С. Л. Крутиков // *Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия: Приборостроение*. — 2011. — № 1. — С. 28–45.

102. *Дерябкин, И. В.* Вариационный метод синтеза алгоритмов параметрической идентификации динамических систем с использованием регуляриза-

ции: Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.03.01 / ДГТУ. — Таганрог, 2013. — 17 с.

103. *Garcia-Alarcon, O.* On parameter identification of the Furuta pendulum / O. Garcia-Alarcon, S. Puga-Guzman, J. Moreno-Valenzuela // *Procedia Engineering.* — 2012. — Vol. 35. — Pp. 77–84.

104. Mathematical Modelling and Parameter Identification of Quadrotor (a survey) / A. Chovancová, T. Fico, L. Chovanec, P. Hubinský // *Procedia Engineering.* — 2014. — Vol. 96. — Pp. 172–181.

105. *Adăscăliţei, F.* Practical applications for mobile robots based on Mecanum wheels — a systematic survey / F. Adăscăliţei, I. Doroftei // *The Romanian Review Precision Mechanics, Optics & Mechatronics.* — 2011. — no. 40. — Pp. 21–29.

106. *Doroftei, I.* Omnidirectional Mobile Robot — Design and implementation / I. Doroftei, V. Grosu, V. Spinu // Bioinspiration and Robotics Walking and Climbing Robots / Ed. by Maki K. Habib. — I-Tech Education and Publishing, 2007. — Pp. 511–528.

107. Nonlinear Slip Dynamiacs for an Omniwheel Mobile Robot Platform / D. Stonier, S.-H. Cho, S.-L. Choi et al. // IEEE International Conference on Robotics and Automation. — 2007. — Pp. 2367–2372.

108. *Tlale, N. S.* Modeling and Adaptive Control of an Omni-Mecanum-Wheeled Robot / N. S. Tlale // *Robotica.* — 2005. — Vol. 23, no. 4. — Pp. 455–456.

109. *Kálmán, V.* Omnidirectional Wheel Simulation — a Practical Approach / V. Kálmán // *Acta Technica Jaurinensis.* — 2013. — Vol. 6, no. 2. — Pp. 73–90.

110. Adaptive Controllability of Omnidirectional Vehicle over Unpredictable Terrain / K. C. Cheok, M. Radovnikivich, G. R Hudas et al. // Intelligent Sensing, Situation Management, Impact Assessment, and Cyber Sensing. 73520S. — 2009. — Pp. 1–12.

111. *Purwin, O.* Trajectory generation and control for four wheeled omnidirectional vehicles / O. Purwin, R. D'Andrea // *Robotics and Autonomous Systems.* — 2006. — no. 54. — Pp. 13–22.

112. *Indivery, G.* Motion Control of Swedish Wheeled Mobile Robot in the Presence of Actuator Saturation / G. Indivery, J. Paulus, P.-G. Plöger // RoboCup 2006: Robot Soccer World Cup X. — Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2007. — Vol. 4434 of *Lecture Notes in Computer Science.* — Pp. 29–44.

113. *Li, X.* Motion Control of an Omnidirectional Mobile Robot / X. Li, A. Zell // Informatics in Control, Automation and Robotics. Selected Papers from the International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics 2007. Part II. — Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2009. — Vol. 24 of *Lecture Notes in Electrical Engineering.* — Pp. 181–193.

114. *Lin, L.-C.* Modeling and Adaptive Control of an Omni-Mecanum-Wheeled Robot / L.-C. Lin, H.-Y. Shih // *Intelligent Control and Automation.* — 2013. — no. 4. — Pp. 166–179.

115. *Knepper, R. A.* Pedestrian-Inspired Sampling-Based Multi-Robot Collision Avoidance / R. A. Knepper, D. Russ // 2012 IEEE RO-MAN: The 21st IEEE International Symposium on Robot and Human Interactive Communication. — 2012. — Pp. 94–100.

116. IkeaBot: An Autonomous Multi-Robot Coordinated Furniture Assembly System / R. A. Knepper, T. Layton, J. Romanishin, D. Russ // 2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). — 2013. — Pp. 855–862.

117. *Ruiz, M. C.* Haptic teleoperation of the youBot with friction compensation for the base [Электронный ресурс] / M. C. Ruiz; Departamento de Ingeniería de Sistema y Automática, Universidad Carlos III de Madrid. — 2012. — 104 pp. — Режим доступа: https://www.cs.ox.ac.uk/files/728/NA-07-18.pdf, свободный. — (Дата обращения: 30.06.2016).

118. *Мартыненко, Ю. Г.* О движении мобильного робота с роликонесущими колёсами / Ю. Г. Мартыненко, А. М. Формальский // *Изв. РАН. Теория и системы управления.* — 2007. — № 6. — С. 142–149.

119. *Мартыненко, Ю. Г.* Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колёсами и смещенным центром масс / Ю. Г. Мар-

тыненко // *Прикладная математика и механика.* — 2010. — № 4. — С. 610–619.

120. *Капитонюк, Ю. А.* Разработка системы траекторного управления мобильным роботом с роликонесущими колесами / Ю. А. Капитонюк, А. А. Капитонов, С. А. Чепинский // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики.* — 2014. — № 2(90). — С. 65–71.

121. *Зобова, А. А.* Свободные и управляемые движения некоторой модели экипажа с роликонесущими колесами / А. А. Зобова, Я. В. Татаринов // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика.* — 2008. — № 6. — С. 62–65.

122. *Зобова, А. А.* Динамика экипажа с роликонесущими колесами / А. А. Зобова, Я. В. Татаринов // *Прикладная математика и механика.* — 2009. — Т. 73, № 1. — С. 13–22.

123. *Зобова, А. А.* Применение лаконичных форм уравнений движения в динамике неголономных мобильных роботов / А. А. Зобова // *Нелинейная динамика.* — 2011. — Т. 7, № 4. — С. 771–783.

124. *Килин, А. А.* Управление тележкой с омниколесами на плоскости / А. А. Килин, А. Д. Бобыкин // *Нелинейная динамика.* — 2014. — Т. 10, № 4. — С. 473–481.

125. *Борисов, А. В.* Тележка с омниколесами на плоскости и сфере / А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев // *Нелинейная динамика.* — 2011. — Т. 7, № 4. — С. 785–801.

126. *Баранова, Е. Ю.* Кинематика шестиколесного меканум-робота / Е. Ю. Баранова, В. Е. Павловский // *Известия Волгоградского государственного технического университета.* — 2015. — № 13(177). — С. 147–152.

127. *Алисейчик, А. П.* Колёсно-шагающий робот с пневматическими приводами / А. П. Алисейчик, И. А. Орлов, В. Е. Павловский // *Робототехника и техническая кибернетика.* — 2013. — № 1(1). — С. 14–18.

128. *Татаринов, Я. В.* Уравнения классической механики в новой форме / Я. В. Татаринов // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика.* — 2003. — № 3. — С. 67–76.

129. *Голубев, Ю. Ф.* Функция Аппеля в динамике систем твердых тел / Ю. Ф. Голубев // *Препринты ИПМ им. Келдыша.* — 2014. — № 58. — С. 1–16.

Список рисунков

Список таблиц

Приложение А

Используемые операции векторного дифференцирования

Введём следующие операции дифференцирования для векторов:

1. Производная вектора–столбца по строке (матрица Якоби) и вектора–строки по столбцу:

$$\underset{n\times m}{\frac{\partial a}{\partial b^{\mathrm{T}}}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial b_1} & \cdots & \dfrac{\partial a_1}{\partial b_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial a_n}{\partial b_1} & \cdots & \dfrac{\partial a_n}{\partial b_m} \end{pmatrix}, \qquad \underset{m\times n}{\frac{\partial a^{\mathrm{T}}}{\partial b}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial b_1} & \cdots & \dfrac{\partial a_n}{\partial b_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial b_m} & \cdots & \dfrac{\partial a_n}{\partial b_m}. \end{pmatrix}$$

где $\underset{n\times 1}{a}$ и $\underset{m\times 1}{b}$ — векторы-столбцы. Обратим внимание, что

$$\frac{\partial a^{\mathrm{T}}}{\partial b} = \left[\frac{\partial a}{\partial b^{\mathrm{T}}}\right]^{\mathrm{T}}.$$

2. Производная сложной функции по времени:

$$\frac{\mathrm{d}a(b)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial a}{\partial b^{\mathrm{T}}}\cdot\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}a^{\mathrm{T}}(b)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}b^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\partial a^{\mathrm{T}}}{\partial b}.$$

3. Производная сложной функции векторного аргумента:

$$\frac{\partial a(b(c))}{\partial c^{\mathrm{T}}} = \frac{\partial a}{\partial b^{\mathrm{T}}}\cdot\frac{\partial b}{\partial c^{\mathrm{T}}}.$$

4. Дифференцирование произведения строки на матрицу B:

$$\frac{\partial a^{\mathrm{T}} B}{\partial a} = B.$$

5. Дифференцирование скалярного произведения:

$$\underset{k\times 1}{\frac{\partial a^{\mathrm{T}}(c)b(c)}{\partial c}} = \underset{k\times n}{\frac{\partial a^{\mathrm{T}}}{\partial c}}\cdot\underset{n\times 1}{b} + \underset{k\times n}{\frac{\partial b^{\mathrm{T}}}{\partial c}}\cdot\underset{n\times 1}{a} = \frac{\partial a^{\mathrm{T}}}{\partial c}b + \left[a^{\mathrm{T}}\frac{\partial b}{\partial c^{\mathrm{T}}}\right]^{\mathrm{T}},$$

где $\underset{n\times 1}{a}$, $\underset{n\times 1}{b}$ и $\underset{k\times 1}{c}$ — векторы-столбцы.

6. Дифференцирование квадратичной формы:

$$\frac{\partial a^{\mathrm{T}}Ba}{\partial a} = \frac{\partial a^{\mathrm{T}}}{\partial a}Ba + \frac{\partial\,(Ba)^{\mathrm{T}}}{\partial a}a = Ba + \frac{\partial a^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}}{\partial a}a = \left(B + B^{\mathrm{T}}\right)a.$$

7. Матрица Гессе скалярной функции векторного аргумента $f = f(a)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = \frac{\partial}{\partial a^{\mathrm{T}}}\left[\frac{\partial f}{\partial a}\right] = \frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{\partial f}{\partial a^{\mathrm{T}}}\right] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 a_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 a_n} \end{pmatrix}.$$

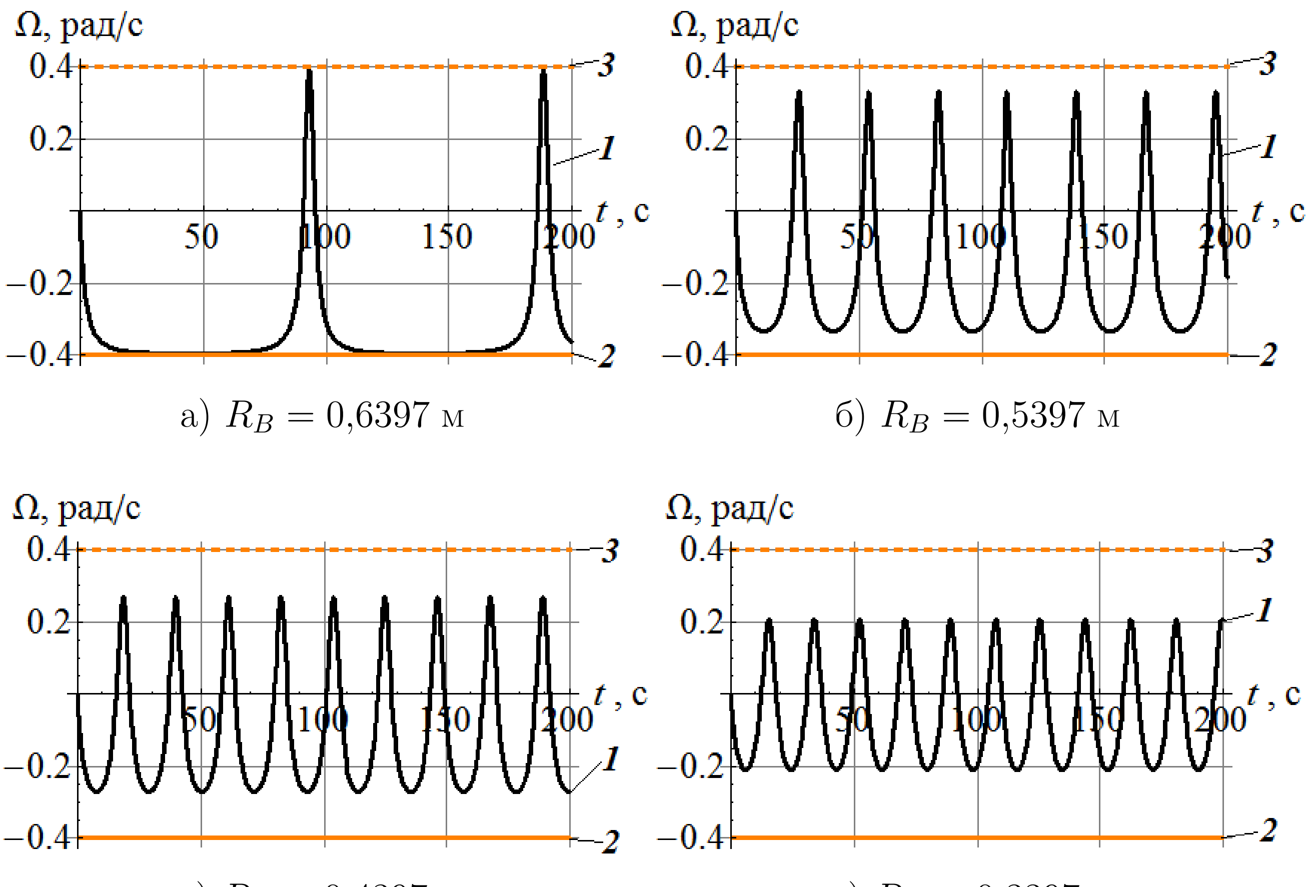
В частности, если $f = a^{\mathrm{T}}Ba$, то

$$\frac{\partial^2 a^{\mathrm{T}}Ba}{\partial a^2} = \frac{\partial}{\partial a^{\mathrm{T}}}\left[\frac{\partial a^{\mathrm{T}}Ba}{\partial a}\right] = \frac{\partial}{\partial a^{\mathrm{T}}}\left[\left(B + B^{\mathrm{T}}\right)a\right] = B + B^{\mathrm{T}}.$$

Приложение Б

Результаты моделирования управляемого движения робота *youBot*

На рисунках Б.1 и Б.2 приведены результаты моделирования динамики мобильной платформы *youBot* в процессе реализации программного равномерного движения (4.77) её точки B по окружности радиуса R_B с циклической частотой $\omega_B = -0{,}4$ с$^{-1}$. Рассмотрены различные значения $R_B < R'_B$. Прочие условия моделирования взяты из подпараграфа 4.5.2.



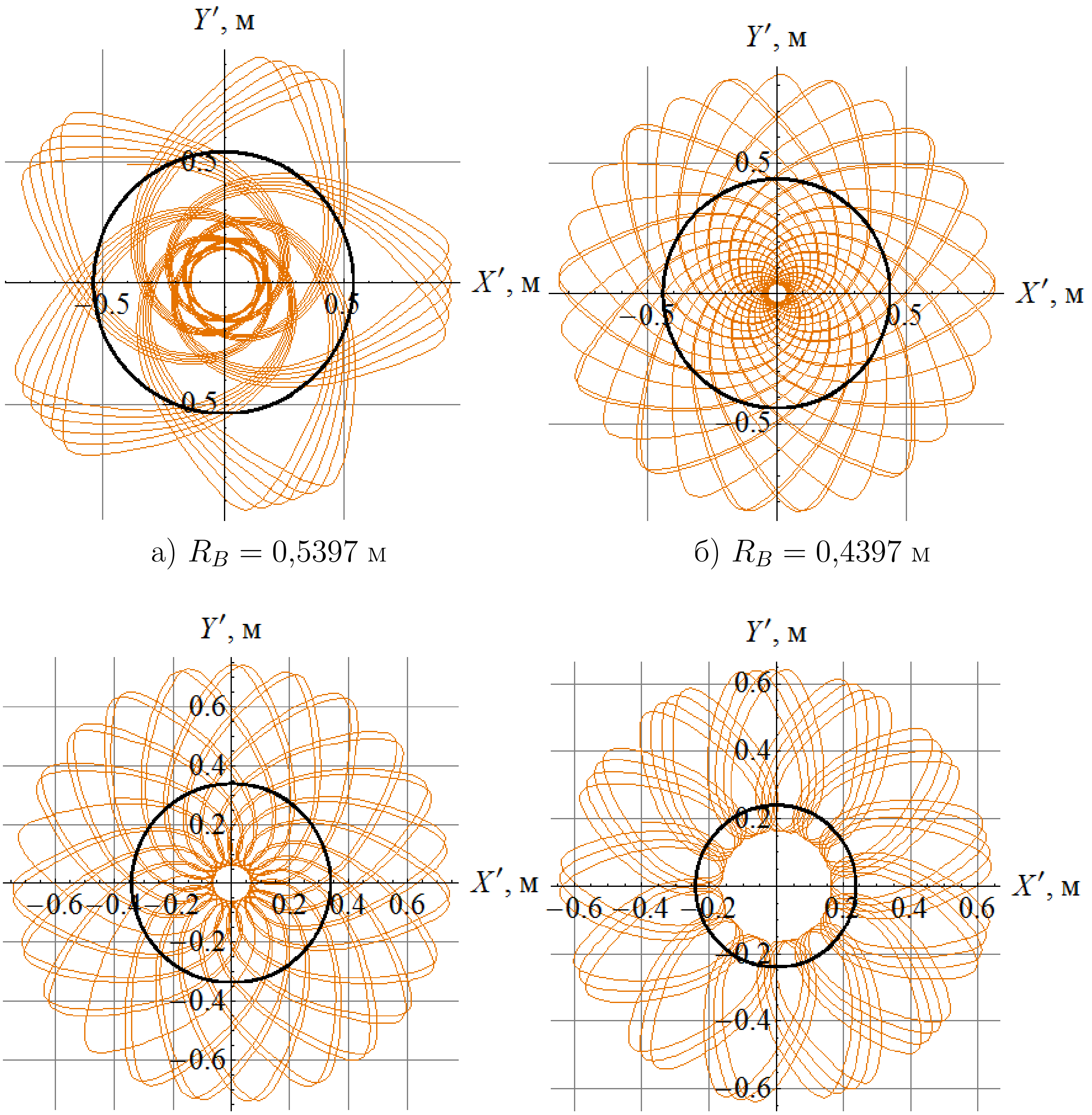
а) $R_B = 0{,}6397$ м б) $R_B = 0{,}5397$ м

в) $R_B = 0{,}4397$ м г) $R_B = 0{,}3397$ м

1 — $\Omega(t)$; *2* — ω_B; *3* — $(-\omega_B)$.

Рисунок Б.1 — Угловая скорость платформы в процессе реализации программного равномерного движения точки B по окружности при различных значениях её радиуса R_B

Так как моделирование осуществлялось для значений радиуса R_B меньших R'_B, при которых нарушается необходимое и достаточное условие (4.82) существования стационарных по угловой скорости Ω вращений платформы.



а) $R_B = 0{,}5397$ м б) $R_B = 0{,}4397$ м

в) $R_B = 0{,}3397$ м г) $R_B = 0{,}2397$ м

Рисунок Б.2 — Траектории центра платформы O в процессе реализации программного равномерного движения точки B по окружности при различных значениях её радиуса R_B, $0 \leqslant t \leqslant 817$ с

При уменьшении радиуса R_B, частота изменения величины Ω возрастает, а амплитуда уменьшается. отметим, что для рассматриваемых условий проведения численного моделирования $|\Omega| < |\omega_B|$ (см. рисунок Б.1).