

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА  
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Никонов Василий Иванович

**Движение небесных тел при наличии  
особенностей в распределении масс**

Специальность 01.02.01 — теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва, 2016

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

**Научные руководители:** Александр Анатольевич Буров,  
доктор физико-математических наук.

Александр Владиленович Карапетян,  
доктор физико-математических наук,  
профессор.

**Официальные оппоненты:** Александр Владимирович Родников,  
доктор физико-математических наук,  
доцент кафедры "Вычислительная  
математика и математическая физика"  
Московского государственного  
технического университета  
имени Н.Э. Баумана.

Александр Афанасьевич Зленко,  
кандидат физико-математических наук,  
профессор кафедры  
"Высшая математика" Московского  
автомобильно-дорожного государственного  
технического университета.

**Ведущая организация:** Московский физико-технический институт.

Защита диссертации состоится 16 декабря 2016 г. в 17 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.22, созданного на базе Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, по адресу: 119234, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций Фундаментальной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: Ломоносовский проспект, д. 27, и на сайте <http://mech.math.msu.su/~snark/files/diss/0137diss.pdf>

Автореферат разослан 2016 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

Прошкин Владимир Александрович

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Современный этап изучения космического пространства отличается реализацией миссий к малым небесным телам (астероидам, кометам). К таким миссиям, в частности, относятся осуществлённые пролёт космического аппарата в окрестности астероида (Galileo, NASA/ESA, 1991), облёт и посадка космического аппарата на поверхность кометы (NEAR-Shoemaker, NASA, 2000; Rosetta, ESA, 2014), полёт космического аппарата, его посадка и последующее возвращение на Землю модуля с образцом грунта (Hayabusa, JAXA, 2007).

При проектировании полётов вблизи малых небесных тел приходится принимать во внимание:

- слабость порождаемого ими поля притяжения,
- неоднородность такого поля,
- скудость информации о распределении масс.

Поэтому важна задача создания модели гравитационного потенциала, с одной стороны, достаточно точно отражающая его основные свойства, с другой стороны, достаточно простая для эффективной реализации в реальном времени на бортовых вычислителях.

Таковыми являются модели, опирающиеся на представление небесного тела с нерегулярным распределением масс в виде совокупности нескольких однородных шаров. В случае, когда таких шаров два, ряд динамических свойств, в частности, существование и устойчивость относительных равновесий, называемых точками либрации, достаточно подробно исследован В.В. Белецким, А.В. Родниковым.

Методика приближения небесных тел тремя шарами впервые была предложена, вероятно, в работах Д. Ширса (D. Scheeres). Такая модель, пригодная для описания, в частности, распределения масс астероидов Итокава (25143) и Эрос (433), исследована в гораздо меньшей мере, чем модель гравитирующего гантелеобразного тела, составленного из двух масс. Некоторые её свойства, такие как существование и устойчивость точек либрации, области возможного движения на конкретных примерах исследовались в работах Э. Эрреры-Сукаррат (E. Herrera-Sucarrat), М. Робертса (M. Roberts), Ф. Палмера (Ph. Palmer), А. Туркони (A. Turconi), Х. Баойина (H. Baoyin) и других.

Необходимостью дальнейшего исследования такой “трёхъядерной модели” обусловлена актуальность настоящей работы.

**Цель работы.** Диссертация посвящена изучению зависимостей от параметров:

- множеств установившихся движений,
- свойств устойчивости этих движений,
- областей возможного движения

в ряде задач о движении небесного тела с нерегулярным распределением масс и материальной точки под действием сил взаимного притяжения.

В задаче о движении под действием взаимного притяжения треугольного тела с массами, сосредоточенными в вершинах (модель “трёх вписанных шаров” для приближения поля притяжения небесных тел), и материальной точки изучаются существование, устойчивость и ветвление стационарных вращений в зависимости от значений параметров задачи. Строятся бифуркационные диаграммы Пуанкаре и Смейла. С использованием барицентрических координат осуществлён сравнительный анализ множеств стационарных

движений и областей возможного движения в случае, когда тело – правильный треугольник с равными массами, расположенными в вершинах, и в случае, когда тело – правильный треугольник с равными массами, равномерно распределёнными по его сторонам.

В случае, когда притяжение тела с неравномерным распределением масс, моделируется комбинациями гантелеобразных тел и т.н. комплексифицированных гантелей, исследован вопрос о существовании и устойчивости точек либрации в предположении о том, что тело равномерно вращается вокруг оси, проходящей через центр масс. Изучен вопрос о зависимости точек либрации и их свойств от угловой скорости вращения. Построены бифуркационные диаграммы.

Выполнено исследование относительных равновесий плоского твердого тела общего вида с дискретным распределением  $n$  точечных масс и материальной точки под действием взаимного притяжения. Показано, что в общем случае система допускает от двух до  $n + 1$  относительных равновесий.

**Методы исследования.** Исследование выполнено с использованием известных аналитических методов теоретической и небесной механики, теории устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений, а также с помощью численных методов.

**Достоверность результатов.** Основные результаты диссертации получены аналитически с помощью методов теоретической механики и теории бифуркаций и устойчивости. Графики и изображения, иллюстрирующие полученные аналитические результаты, построены численно.

**Научная новизна.** Основные результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми.

Выполнено исследование установившихся движений взаимно гравитирующих треугольного твердого тела и материальной точки в точной постановке, без ограничений на массы, входящих в систему тел.

В зависимости от параметров задачи изучены множество установившихся движений, их свойства устойчивости и ветвления, области возможного движения.

Представлены бифуркационные диаграммы решений в зависимости от параметра отношения масс.

**Теоретическая и практическая ценность.** Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение при изучении динамики вблизи астероидов, комет и малых лун планет, а также при проектировании миссий к различным небесным объектам.

Результаты диссертации могут быть использованы в исследованиях, проводимых в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Институте теоретической астрономии РАН, Институте проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Федеральном исследовательском центре “Информатика и управление” РАН, Московском физико-техническом институте, Московском авиационном институте и других научно-исследовательских центрах.

**Личный вклад.** Научными руководителями были предложены постановки задач и методы их исследований.

Представленные в диссертации результаты получены лично соискателем.

**Апробация работы.** Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих конференциях и научных семинарах:

- Научный семинар “Аналитическая механика и теория устойчивости” имени В.В. Румянцева под руководством чл.-корр. РАН, проф. В.В. Белецкого; проф. А.В. Карапетяна, Россия, Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2013, 2014, 2015, 2016 г.
- Научный семинар “Динамика относительного движения” под руководством чл.-корр. РАН, проф. В.В. Белецкого, проф. Ю.Ф. Голубева, проф. В.Е. Павловского, доц. К.Е. Якимовой, доц. Е.В. Мелкумовой, Россия, Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2016 г.
- Ломоносовские чтения. Секция механики, Россия, Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 15-19 апреля 2013; 14-23 апреля 2014 г.
- XII всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014, Россия, Москва, ИПУ РАН, 16-19 июня 2014 г.
- International Astronomical Union Symposium: Complex Planetary Systems, Belgium, Namur, 07-11 July 2014.
- XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Россия, Казань, 20-24 августа 2015 г.
- 66th International Astronautical Congress, Israel, Jerusalem International Convention Center, 12-16 October 2015.
- XL Академические чтения по космонавтике, Россия, Москва, МГТУ им. Н.Э.Баумана, 26-29 января 2016 г.
- XIII Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления», Россия, Москва, ИПУ РАН, 1-3 июня 2016 г.

**Публикации.** Основные результаты диссертации изложены в пяти печатных работах [1,2,4-6], размещенных в рецензируемых журналах, реко-

мендованных ВАК Минобрнауки РФ. Также список работ включает в себя некоторые опубликованные тезисы конференций.

Список работ приведен в конце автореферата.

**Объем и структура работы.** Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, приложения и списка литературы. Полный объем диссертации — **84** страницы текста. Список литературы содержит **110** наименований. В диссертации приведено **29** рисунков.

## Содержание работы

**Во введении** обоснована актуальность диссертационной работы и дан обзор основных работ, посвященных изучению моделей гравитационных полей малых небесных тел с нерегулярным распределением масс. Кратко изложено основное содержание работы.

**Первая глава** посвящена задаче о движении двух взаимно гравитирующих твёрдых тел, одно из которых моделируется шаром с центрально симметричным распределением масс, а распределение масс второго устроено таким образом, что тело можно представить в виде жёсткой конструкции, состоящей из трёх массивных однородных шаров.

Задача рассматривается в плоской постановке, когда центры масс шаров, равно как и материальная точка, располагаются в неподвижной плоскости.

Описаны геометрические характеристики треугольного тела, выписаны условия существования и достаточные условия устойчивости равновесий при условии, что геометрия и распределение масс тела обладают плоскостью симметрии. Выполнен параметрический анализ соотношений, определяющих равновесия системы, которые расположены как на оси симметрии, так и вне её.



Для общего случая выписаны условия существования и достаточные условия устойчивости перманентных вращений системы как целого. Результаты проиллюстрированы на модельном примере “египетского” треугольника с равными массами в вершинах (рис. 1), а также на примере треугольных представлений гравитационного потенциала, предложенных ранее для астероидов Итокава и Эрос (рис. 2).

Доказано утверждение, согласно которому при совпадении центра масс тела с центром окружности, описанной около треугольника, образованного центрами шаров, система может совершать перманентное вращение с произвольной угловой скоростью при условии, что материальная точка располагается в центре масс тела.

В случае, когда распределение масс в треугольном теле выдерживает группу симметрий правильного треугольника, осуществлено исследование зависимости стационарных конфигураций от параметров задачи. Для найденных равновесных конфигураций построены бифуркационные диаграммы Пуанкаре. Для такого распределения масс исследуются необходимые и достаточные условия устойчивости найденных стационарных конфигураций.

С помощью специального выбора координат в конфигурационном пространстве, опирающегося на полиномиальные инварианты группы симметрии правильного треугольника, при дополнительных предположениях доказано отсутствие стационарных конфигураций, на которых точка располагается вне осей симметрии треугольника (рис. 3).

**Вторая глава** посвящена сравнительному анализу множеств установившихся движений для системы материальной точки и треугольного тела в двух случаях: когда масса треугольника сосредоточена в его вершинах, и когда масса треугольника равномерно распределена вдоль его сторон.

Для исследования задачи применены барицентрические координаты. В этих координатах для обеих задач исследованы множества стационарных

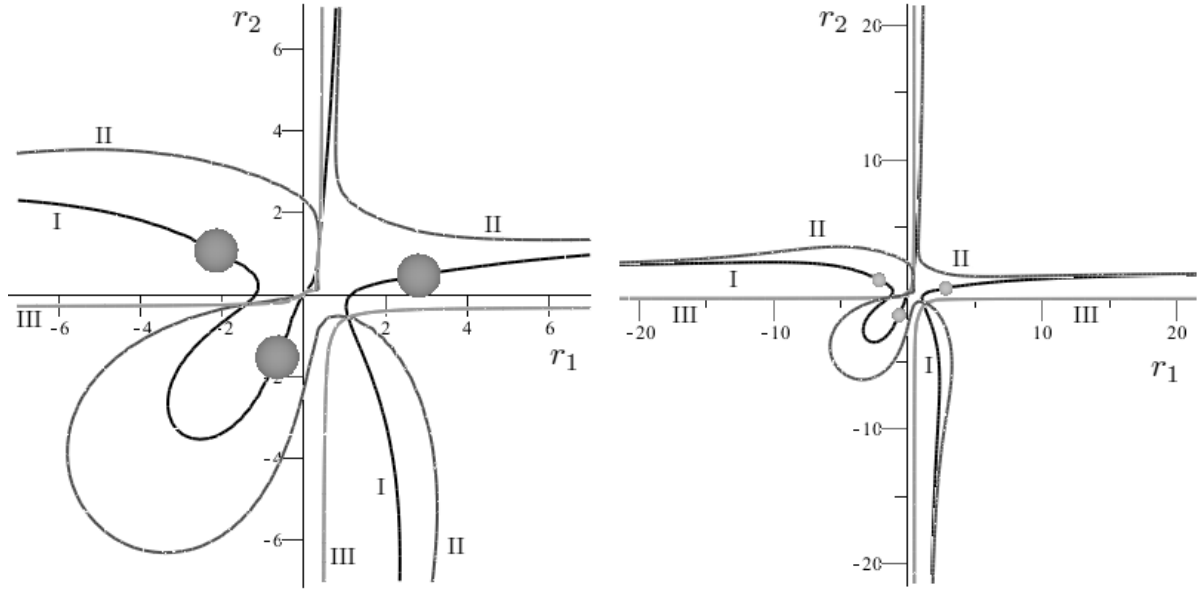


Рис. 1: Кривая  $\Gamma$  (I) и её второе (II) и первое (III) приближения для треугольника со сторонами 3, 4, 5 и равными массами в вершинах: кривая  $\Gamma$  заполнена “кандидатами” в стационарные конфигурации.

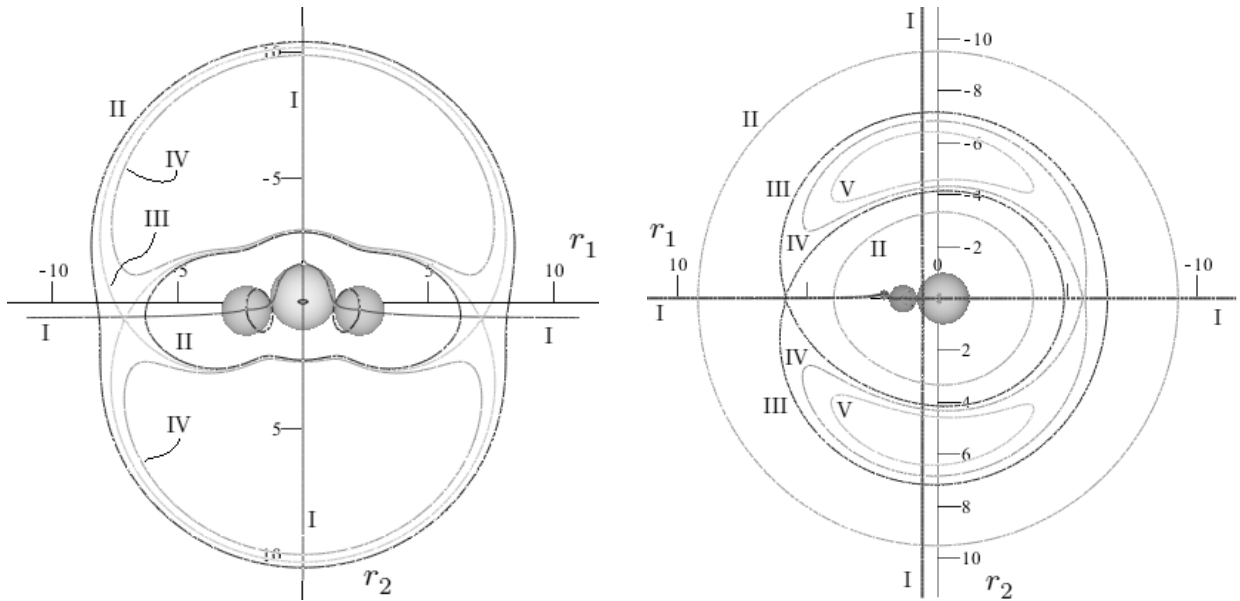


Рис. 2: Кривая  $\Gamma$  (I) и кривые  $\Gamma_\beta$  (индексы II, III, IV, V отвечают разным значениям параметра  $\beta$ ) для астероидов 433 Эрос (слева) и 25143 Итокава (справа). Возможность реализации той или иной конфигурации задаётся взаимным расположением  $\Gamma$  по отношению к семейству кривых  $\Gamma_\beta$ , зависящего от постоянной интеграла площадей  $\beta$ .

движений в зависимости от значений интегралов площадей и энергии. Для случая сопоставимых масс тела и материальной точки построены бифуркационные диаграммы Пуанкаре и Смейла. Показано, что эти диаграммы отличаются друг от друга для рассматриваемых задач: в случае, когда массы сосредоточены в вершинах треугольника, множества установившихся движений, вообще говоря, богаче. В тех же предположениях численно построены области возможного движения.

**В третьей главе** обсуждается вопрос о применимости идей, связанных с представлением гравитационного потенциала малых небесных тел с неравномерным распределением масс с помощью потенциалов, “комплексифицированных по Кислику - Аксёнову - Гребеникову - Дёмину - Винти”.

Рассматриваются “обобщённые” треугольные тела, вершины которых оснащены вещественными или “комплексифицированными” гантелеобразными включениями, призванными, соответственно, приблизить потенциалы вытянутых и сплюснутых частей тела. Для тел, образованных правильными треугольниками и равномерно вращающихся вокруг своих центров масс, исследованы условия существования, устойчивости и ветвления точек либрации в зависимости от угловой скорости. Выявлены области в пространстве параметров, для которых точки либрации оказались устойчивыми в вековом смысле. Результаты представлены в виде бифуркационных диаграмм и изображений областей возможного движения.

**В приложении** рассмотрены относительные равновесия плоского твердого тела общего вида с дискретным распределением некоторого числа  $n$  точечных масс и материальной точки под действием сил взаимного притяжения. С помощью теоремы о категориях Люстерника–Шнирельмана показано, что в общем случае такая система допускает от двух до  $n + 1$  положений относительного равновесия.

**В заключении** сформулированы основные результаты работы.

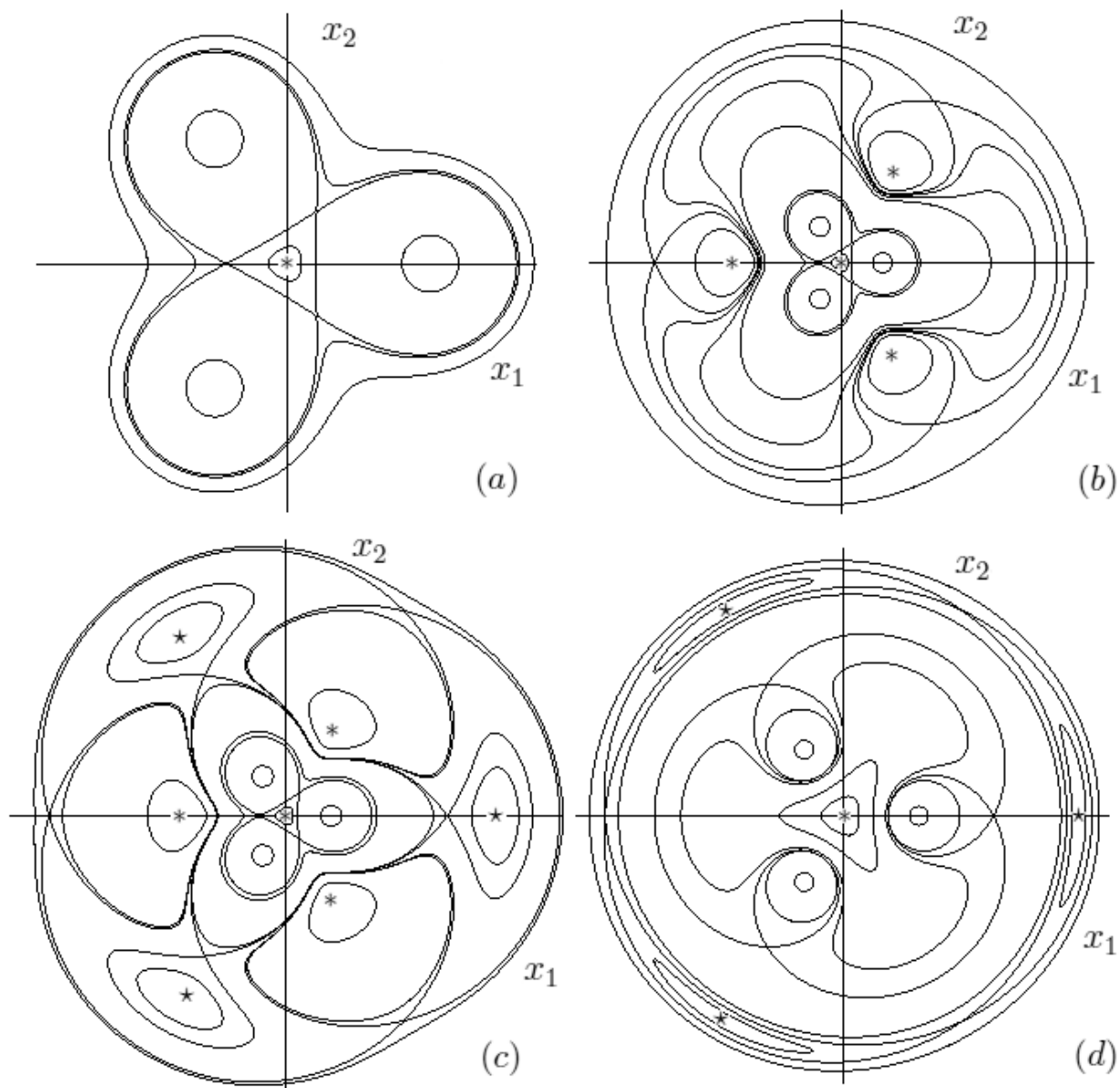


Рис. 3: Линии уровня приведенного потенциала для правильного треугольника с равными массами в вершинах при массе свободной, равной одной трети массы треугольного тела, и характерных значениях параметра  $\beta$ . \* — точки максимума,  $\star$  — точки минимума.

## Основные результаты

В задаче о движении в общей плоскости треугольника с массами, сосредоточенными в его вершинах, и материальной точки, в системе отсчёта, связанной с треугольником, указана кривая  $\Gamma$  и семейство кривых  $\Gamma_\beta$ , пересечениям которых отвечают стационарные конфигурации. Доказано, что на кривой  $\Gamma$  располагаются центр масс треугольника и центр описанной окружности, а вершины треугольника являются её выколотыми точками. Показано, что при больших (по сравнению с размерами треугольника) расстояниях между треугольником и точкой кривая  $\Gamma$  хорошо приближается гиперболой, и существуют не менее четырёх стационарных конфигураций. Результаты проиллюстрированы на модельном примере “египетского” треугольника с равными массами в вершинах, а также на примерах ранее предложенных треугольных моделей астероидов Эрос и Итокава.

Для взаимно гравитирующих материальной точки и равнобедренного треугольника с симметричным распределением масс исследована структура множества “обычных” равновесий и их устойчивость в зависимости от значений параметров задачи. Для правильного треугольника с равными массами в вершинах доказано наличие равновесий, лежащих на осях симметрии и не совпадающих с центром масс треугольника.

В предположении о том, что треугольное тело с равными массами в вершинах выдерживает группу симметрий правильного треугольника, определены условия существования и ветвления “прямых” стационарных конфигураций, для которых точка располагается на оси симметрии треугольника, в зависимости от значений интеграла площадей и отношения масс гравитирующих тел. Исследованы необходимые и достаточные условия

устойчивости таких стационарных конфигураций. С помощью функций от полиномиальных инвариантов группы симметрий правильного треугольника доказано при определённых предположениях отсутствие стационарных конфигураций, для которых точка расположена вне осей симметрии треугольника.

Исследованы существование, ветвление и устойчивость относительных равновесий в задаче о движении взаимно гравитирующих “проволочного” треугольника с массой, равномерно распределённой вдоль сторон, и материальной точки. В случае равных масс построены бифуркационные диаграммы Пуанкаре и Смейла. Результаты сопоставлены с аналогичными результатами для “точечного” треугольника.

Для равномерно вращающегося вокруг центра масс гравитирующего твёрдого тела, поле притяжения которого определено вещественными и комплексифицированными “по Кислику - Аксёнову - Гребеникову - Дёмину - Vinti” гантелями, найдены зависимости положений точек либрации и их устойчивости от угловой скорости вращения. Построены бифуркационные диаграммы Пуанкаре.

Доказано, что у системы, состоящей из взаимно гравитирующих материальной точки и плоского тела, состоящего из  $n$  точечных масс, располагающихся в общей плоскости, число точек либрации может принимать значения от 2 до  $n + 1$ .

## Публикации автора по теме диссертации

1. *Никонов В. И.* Относительные равновесия в задаче о движении треугольника и точки под действием сил взаимного притяжения // Вестн. Моск. ун-та. Серия 1: Мат. Мех. 2014. Т. 69. № 2. С. 45 – 51.
2. *Никонов В. И.* Существование и устойчивость стационарных конфигураций в задаче о движении проволочного треугольника и точки под действием сил взаимного притяжения // Прикладная математика и механика. 2015. Т.79. Вып. 3. С. 334 – 343.
3. *Nikonov V.* On relative equilibria of mutually gravitating massive point and triangular rigid body // Proceedings of the International Astronomical Union. 2015. Vol. 9. s310. P. 170 – 171.
4. *Кугушев Е. И., Никонов В. И.* Оценка числа относительных равновесий гравитирующих точечного плоского твердого тела и материальной точки // Вестн. Моск. ун-та. Серия 1: Мат. Мех. 2015. Т. 70. № 6. С. 37 – 41.
5. *Баландин Д. В., Никонов В. И.* О точках либрации вращающегося “комплексифицированного” треугольника // Вестн. Моск. ун-та. Серия 1: Матем. Мех. 2016. Т. 71. № 3. С. 25 – 31.
6. *Буров А. А., Никонов В. И.* Об устойчивости и ветвлении стационарных вращений в плоской задаче о движении взаимно гравитирующих треугольника и материальной точки // Нелинейная динамика. 2016. Т.12. № 2. С. 179 – 196.
7. *Burov A. A., Nikonov V. I.* Dynamics of a triple asteroid and a massive point, subjected mutual attraction // 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy’s Conference), 1–3 June 2016. IEEE. 2016. P. 1 – 4.