



МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА,
ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет
Кафедра теоретической механики и мехатроники

На правах рукописи
УДК 531.391

Никонов Василий Иванович

Движение небесных тел при наличии особенностей в распределении масс

Специальность 01.02.01 - теоретическая механика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители
доктор физико-математических наук
профессор А. А. Буров,
доктор физико-математических наук
профессор А. В. Карапетян

Москва — 2016

Оглавление

Введение	3
1 Задача о плоском движении треугольника и точки в точной постановке	10
1.1 Основные предположения и обозначения, распределение масс и моменты инерции	10
1.1.1 Потенциальная энергия ньютоновских сил	12
1.2 Приведённый потенциал. Функция Рауса. Уравнения стационарных конфигураций и их общие свойства. . . .	13
1.3 Коллинеарный случай.	15
1.4 Ортогональный случай. Свойства плоских стационарных конфигураций.	16
1.4.1 Кривая Γ и её поведение на бесконечности. Общий случай .	18
1.4.2 Кривая Γ_β и её поведение на бесконечности. Общий случай .	20
1.5 Условия существования “коллинеарных” стационарных конфигураций.	21
1.6 Положения равновесия и их устойчивость. Случай осевой симметрии.	23
1.7 Достаточные условия устойчивости	27
1.7.1 Достаточные условия устойчивости решений, удовлетворяющих условию П.	29
1.7.2 Линии уровня потенциальной энергии и достаточные условия устойчивости равновесий.	31
1.8 Существование и устойчивость перманентных вращений системы как целого.	33
1.8.1 Достаточные условия устойчивости	36
1.8.2 Необходимые условия устойчивости	38
1.8.3 О существовании “косых” стационарных конфигураций . . .	39
2 Барицентрические координаты. “Проволочный” треугольник	44
2.1 Основные обозначения и постановка задачи.	44
2.2 Основные величины в барицентрических координатах.	45
2.2.1 Момент инерции в БК для точечного треугольника	46
2.2.2 Момент инерции в БК для “проволочного” треугольника . .	47
2.3 Критические точки приведенного потенциала	48
2.3.1 Критические точки приведенного потенциала в случае точечного треугольника	48
2.3.2 Критические точки приведенного потенциала в случае проволочного треугольника	49

2.4	Стационарные конфигурации для точечного треугольника	50
2.4.1	Случай равностороннего треугольника с симметричным рас- пределением масс	51
2.5	Стационарные конфигурации для проволочного треугольника . . .	52
2.5.1	Случай равностороннего треугольника с однородными сторо- нами	53
2.6	Достаточные условия устойчивости	55
2.6.1	Достаточные условия устойчивости в случае равностороннего точечного треугольника	56
2.6.2	Достаточные условия устойчивости в случае равностороннего проволочного треугольника	58
3	Существование и устойчивость точек либраций равномерно вра- щающегося треугольника, оснащённого вещественными или ком- плексифицированными гантелями	59
3.1	Комплексифицированная гантель	59
3.2	Комплексифицированная модель гравитационного потенциала . . .	62
3.3	Точки либраций равномерно вращающегося РТОДГВ	63
3.4	Устойчивость относительных равновесий	66
	Заключение	68
	Приложение. Оценка числа относительных равновесий гравитирую- щих точечного плоского твердого тела и материальной точки	70
	П1. Оценка числа точек либраций	71
	П2. Оценка числа равновесий	74
	П3. Оценка числа относительных равновесий	74
	Литература	76

Введение

Задача о движении систем частиц и твёрдых тел под действием сил взаимного гравитационного притяжения является основной задачей небесной механики. В общем случае уравнения движения этой задачи неинтегрируемы. Поэтому для практических нужд оказываются важными не только результаты численных исследований, в частности, расчёт траекторий, но и аналитические результаты, позволяющие выявить те или иные классы установившихся и периодических движений и исследовать их свойства в зависимости от параметров

Задача N -тел рассматривается преимущественно для определения орбит тел, остающихся друг от друга на расстояниях, значительно превышающих их размеры. В то же время, при рассмотрении взаимодействия тел на относительно малых расстояниях друг от друга, особенно — при изучении их относительной динамики, необходимо учитывать особенности в распределении масс взаимодействующих небесных объектов. Это стало окончательно ясно при переходе от исследования динамики осесимметричных небесных тел, таких как, например, планеты, к рассмотрению динамики тел со сложным, нерегулярным распределением масс. Такое распределение масс часто встречается у астероидов и комет.

При этом в распоряжении исследователя остаются прежде всего шесть интегралов, позволяющих понизить порядок системы: три компоненты вектора количества движения, позволяющие исключить движение центра масс, и три компоненты вектора момента количества движения. Помимо этих интегралов в распоряжении исследователя имеется интеграл энергии. Известные дополнительные интегралы появляются лишь в случае, когда то или иное изучаемое небесное тело обладает осью динамической симметрии. Неинтегрируемость уравнений движений обуславливает основную трудность данной задачи.

Исследование точных решений в задаче двух тел, по крайней мере одно из которых отлично от массивной точки, имеет давнюю историю. В случае, когда одно из тел (планета) является однородным шаром, масса которого много больше массы второго тела (спутника), речь идет о движении тела с тем или иным распределением масс в центральном поле сил (см., например, [16], а также [50]).

В случае, когда одно тело — точка, масса которого пренебрежимо мала по сравнению с массой второго, ставится, в частности, задача о точках либрации — положениях равновесия первого тела в системе отсчёта, жестко связанной со вторым телом. В этом случае второе тело предполагается равномерно вращающимся вокруг одной из своих осей инерции (см., например, [30–33, 45–49]).

В третьем, наиболее сложном случае, предполагается, что взаимодействующие тела, например, двойная планета или двойной астероид (binary asteroid), имеют соизмеримые массы (см., например, [24, 43, 44, 75, 82, 84, 91–94, 102]).

Изучение движения тел конечного размера под действием взаимного притяже-

ния восходит к основополагающим работам [43, 44] (см. также [24]). Точные решения, известные как “спица”, “стрела” и “поплавок”, в пространственной задаче о движении взаимно гравитирующих однородных шара и стержня были изучены в [28]. Бифуркации и устойчивость стационарных движений в плоской постановке данной задачи рассмотрены в [36].

Существование и устойчивость точек либрации вращающегося трехосного эллипсоида исследовались в [30, 109, 110] (см. также [45–49]). Задача о пространственном движении пассивно-гравитирующего тела (звезды или центра масс шарового скопления) внутри вращающейся эллиптической галактики рассмотрена в [25], где определены точки либрации и исследована их устойчивость в смысле Ляпунова.

Изучение движения гравитирующих тел в случае, когда их распределение масс является эллипсоидальным, вносило некоторые аналитические неудобства связанные с необходимостью работы с полными эллиптическими интегралами. Вероятно, дальнейшее размышление над упрощениями в предположениях о распределении масс тел, сохраняющими тем не менее существенные динамические свойства, привело к рассмотрению гравитирующих гантелеобразных тел [58] (см. также, например, [85, 90]). Так для системы, состоящей из гантели и массивной точки, существование и устойчивость установившихся движений изучались в работе [10].

Существование и устойчивость установившихся движений пары двух взаимно гравитирующих гантелей были изучены в [37] в симметричном случае и в [54] в несимметричном случае.

Вопросы существования, ветвления и устойчивости установившихся движений взаимно гравитирующих двумерного крестообразного тела и материальной точки исследовались в [19] (см. также [16]). В предположении о наличии пространственной нерегулярности в распределении масс, установившиеся движения трёхмерного крестообразного тела и массивной точки под действием взаимного притяжения изучались в [1].

В аналогичной постановке задача о материальной точке и гантели изучается в задаче двух тел, совершающих движение по сферической поверхности [68] (см. также [39]) и её обобщениях [20].

В недавней работе [106] обсуждалась применимость модели вращающейся гантели к малым небесным телам вытянутой формы. Исследуется существование точек либраций в модельной задаче с последующим сравнением найденных решений с решениями полученными в более сложных моделях, опирающихся на метод однородных многогранников. В [107, 108] обсуждаются существование и устойчивость точек либрации как в экваториальной плоскости моделируемого тела, так и вне неё. Изучаемая модель представляет собой вращающиеся материальную точку и сплюснутый сфероид, соединенных невесомым стержнем постоянной длины.

Современный этап развития изучения космоса охарактеризован проектированием и реализацией миссий к малым небесным телам.

В частности, были осуществлены пролет космического аппарата в окрестности астероида (Gagileo, NASA/ESA, 1991), облёт и посадка космического аппарата на поверхность кометы (NEAR-Shoemaker, NASA, 2000; Rosetta, ESA, 2014), полёт космического аппарата, его посадка и последующее возвращение на Землю модуля с образцом грунта (Hayabusa, JAXA, 2007).

Если в реализованных миссиях управление движением космического аппарата осуществлялось за счёт наземных средств обработки и передачи информации, то в проектируемых миссиях упор делается на бортовые вычислители.

Для выполнения соответствующих расчётов в космический аппарат должна быть заложена модель гравитационного потенциала целевого небесного объекта. Эта модель, с одной стороны, должна достаточно точно описывать характеристики гравитационного поля, и, с другой стороны, быть достаточно простой для обеспечения работы бортового вычислителя в реальном времени.

В литературе имеется большое количество различных методов приближения гравитационного потенциала несферических тел предложенных как отечественными, так и зарубежными авторами: модель гравитирующей гантели [10–12, 50, 58, 59, 67, 76, 85, 87, 90], модель однородного эллипсоида [7, 8, 23, 30, 45–49, 109, 110], разложение выражения гравитационного потенциала в ряд по сферическим гармоникам [4, 29, 66], модель однородных многогранников, опирающаяся на симплициальное разбиение гравитирующего тела [95, 98, 104, 105].

Первые три упомянутые модели обладают тем преимуществом, что, будучи достаточно общими, они могут применяться в отношении большинства астероидов и комет. Однако, имеются и некоторые недостатки. Так, достаточно простая модель гравитирующих гантелей может недостаточно точно описывать подлинную динамику в окрестности реального вытянутого тела близкого к динамически симметричному. В противоположность этому, модель однородных эллипсоидов достаточно сложна и требует многократного вычисления эллиптических интегралов. Наконец, ряды, получаемые при разложении выражения гравитационного потенциала по сферическим гармоникам, могут расходиться вблизи поверхности изучаемых тел.

С другой стороны, в качестве преимущества модели однородных многогранников отметим высокую точность представления формы изучаемого тела, позволяющую учитывать его асимметрию. В то же время, эта опирается на предположение об однородности тела, так как распределение масс внутри него, вообще говоря неизвестно. Кроме того, она требует большого объема памяти и вычислительных ресурсов из-за большого числа элементов симплициального разбиения.

Использование комплексификаций потенциалов в небесной механике восходит, вероятно, к работам М. Д. Кислика [38], Е. П. Аксёнова, Е. А. Гребеникова, В. Г. Дёмина [2, 27], J. P. Vinti [103], а также В. М. Алексеева [3].

Начало применения таких потенциалов для описания притяжения малых небесных объектов было положено в [13, 60], где были введены “комплексифицированные гантели” для описания притяжения со стороны сплюснутых небесных тел. Это позволило обнаружить и описать динамические отличия по сравнению с применявшейся ранее моделью “вещественной гантели” [9–11, 50, 58], пригодной, как отмечалось выше, для описания притяжения вытянутых тел.

Если для двойных небесных тел, таких, как например астероиды (90)Antiope, (216)Kleopatra, (243)Ida, (762)Pulcova, (4179)Toutatis, (4769)Castalia, притяжение с определённой степенью точности удаётся представить как притяжение гантелеобразного тела [11, 12, 59, 67], то для тел с более сложным распределением масс вопрос о представлении притяжения в виде, приемлемом как для численного, так и для аналитического описания движения остаётся в общем случае открытым (см., например, [95]).

В [78] (см. также [79, 99]) для проектирования методов управления космическим аппаратом в окрестности равномерно вращающегося астероида было предложено использовать модель “трёх вписанных шаров”. Если центры всех трёх шаров располагаются на одной прямой, то модель является подходящей для представления

вытянутого тела. В случае, когда два несовпадающих шара одинаковые, имеется очевидное сходство с моделью однородного эллипсоида, поскольку существуют оси симметрии, задающие две из трёх главных осей тела. Если центры трёх сфер не располагаются на одной прямой, то можно моделировать более сложные формы тел, учитывающие асимметрию в распределении масс. Согласно [78, 79, 99], модель обеспечивает пригодное для практических нужд представление гравитационного поля небесного объекта “нерегулярной” формы, таким образом, возникает задача о движении двух гравитирующих тел, одно из которых — треугольник.

Динамика такого рода систем оказывается достаточно сложной. Она является основным объектом исследования в настоящей работе. Так уже в случае, когда распределение масс поддерживает группу симметрий правильного треугольника [21, 56, 57, 86], удастся обнаружить достаточно богатые, ветвящиеся классы установившихся движений, обладающих различными свойствами устойчивости. Описанная выше необходимость применения треугольных моделей к описанию динамики небесных тел с нерегулярным распределением масс определяет актуальность данной темы исследований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация состоит из введения, трёх глав, приложения, заключения и списка литературы.

Первая глава посвящена задаче о движении двух взаимно-гравитирующих твёрдых тел. Одно из тел моделируется шаром с центрально-симметричным распределением масс. Распределение масс второго тела представимо совокупностью трёх однородных шаров с произвольными массами, расстояния между которыми постоянны.

В п. 1.1 формулируется постановка задачи, обсуждаются геометрические характеристики треугольного тела и даются выражения, их описывающие. Вводятся обобщенные координаты, в которых записываются уравнения Лагранжа, описывающие движения системы.

В п. 1.2 исключается циклическая координата и проводится понижение порядка системы по Раусу. После этой процедуры число степеней свободы оказывается равным двум.

Стационарные решения полученных уравнений вычисляются в п. 1.3. В случае произвольного треугольника с произвольным распределением масс формулируется и доказывается утверждение о существовании стационарной конфигурации, на которой сферическое тело, одна из вершин треугольника и его центр масс располагаются на одной прямой. Обсуждается вопрос о существовании и устойчивости обычных равновесий при условии, что геометрия и распределение масс треугольного тела обладают осью симметрии. Приводятся аналитические формулы, описывающие расположение точки как на оси симметрии, так и вне неё. Все равновесия неустойчивы в вековом смысле. Степень неустойчивости равновесий, располагающихся вне оси симметрии всегда равна единице. Степень неустойчивости “прямых” решений может быть равна как одному, так и двум, в зависимости от распределения масс в треугольном теле.

Существование и устойчивость перманентных вращений системы как целого обсуждаются в 1.4. Предполагается, что треугольное тело вместе с распределением масс поддерживает группу симметрий равностороннего треугольника с равными массами в вершинах. Выводы о существовании решений на осях симметрии в зави-

симости от постоянной циклического интеграла иллюстрируются с помощью диаграмм Пуанкаре. Обсуждаются необходимые и достаточные условия устойчивости найденных стационарных конфигураций. С помощью выбора координат, опирающегося на полиномиальные инварианты группы поворотов правильного треугольника, показывается отсутствие решений вне осей симметрий.

Вторая глава посвящена применению барицентрических координат для описания относительных равновесий в задаче, сформулированной в первой главе. Обсуждаются особенности избыточных координат, к которым, в свою очередь, относятся и барицентрические координаты. Наряду с моделью “точечного” треугольника (масса сосредоточена в вершинах), рассматривается “проволочный” треугольник, составленный из однородных стержней.

В пункте 2.1 даются основные величины задачи, записанные в барицентрических координатах. Отдельно для каждого из случаев “точечного” и “проволочного” треугольников оговариваются детали применения таких координат.

2.2 посвящен изучению существования стационарных конфигураций. Выписываются системы уравнений общего вида, решения которых соответствуют стационарным конфигурациям рассматриваемых систем.

В п. 2.3 обсуждается случай “точечного” треугольника, в то время как в п. 2.4 рассматривается “проволочный”. Достаточные условия устойчивости найденных в 2.3 и 2.4 решений рассчитываются в 2.5.

В третьей главе исследуется вопрос о применимости идей, связанных с комплексификацией представлений гравитационного потенциала в задачах о притяжении малых небесных тел.

В п. 3.1 описываются свойства притяжения комплексифицированных гантелеобразных тел.

В п. 3.2 предлагается обобщение модели точечного треугольника, опирающееся на оснащение вершин треугольника вещественными или комплексифицированными гантелями

Для равностороннего треугольника, в вершинах которого размещены вещественные или комплексные гантели, перпендикулярные его плоскости, в 3.3 и 3.4 изучаются существование и устойчивость точек либраций в экваториальной плоскости моделируемого тела. Результаты представляются в виде бифуркационных диаграмм.

В приложении А рассматриваются относительные равновесия плоского твердого тела общего вида с дискретным распределением некоторого числа n точечных масс и материальной точки под действием сил взаимного притяжения. Показывается, что в общем случае такая система допускает от двух до $n+1$ относительного равновесия.

В заключении сформулированы основные полученные результаты.

По теме диссертации опубликовано 6 работ [5, 21, 52, 56, 57, 86]

Основные результаты были доложены на семинаре по теоретической механике и устойчивости движения им.В.В. Румянцева (руководители: чл. корр. РАН В.В. Белецкий, проф. А.В. Карапетян) (неоднократно 2013 г.–2016 г.), на конференции Ломоносовские Чтения (Москва, 2013 г., 2014 г.), XII Всероссийском совещании по проблемам управления (Москва, 16-19 июня 2014 г.), на симпозиуме международного Астрономического союза (IAU-Symposium: Complex Planetary Systems) (Намюр, Бельгия, 07-11 июля 2014 г.), XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 20 – 24 авгу-

ста 2015 г.), на 66 Международном Астрономическом конгрессе (66th International Astronautical Congress) (Иерусалим, Израиль, 12-16 октября 2015 г.), XL Академических чтениях по космонавтике (Москва 26-29 января 2016 г.) и XIII Международной конференция “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления” (Москва, 1-3 июня 2016 г.)

Автор глубоко признателен профессору Александру Анатольевичу Бурову за научное руководство, постоянное внимание, ценные рекомендации, советы и помощь в работе; за беседы на научные и околonaучные темы; за наставничество и опеку.

Глава 1

Задача о плоском движении треугольника и точки в точной постановке

1.1 Основные предположения и обозначения, распределение масс и моменты инерции

Рассмотрим движение малого небесного тела $\mathcal{A}$ с нерегулярным распределением масс, а также массивной точки P под действием сил взаимного ньютоновского притяжения. Так как все силы, действующие на систему — внутренние, то без нарушения общности можно считать её центр масс — точку O — неподвижной в абсолютном пространстве. Пусть $OX_\alpha X_\beta X_\gamma$ — абсолютная система отсчета (АСО).

Предположим, что как и в [78, 79] распределение масс тела приближено тройкой однородных непересекающихся шаров равной плотности с центрами A , B и C , массами m_A , m_B и m_C , радиусами R_A , R_B , R_C (рис. 1.1).

Пусть $Zx_1x_2x_3$ — связанная с телом подвижная система отсчёта (ПСО), начало которой, располагается в центре масс тела $\mathcal{A}$ — точке Z , определяемой соотношениями

$$m_A \mathbf{ZA} + m_B \mathbf{ZB} + m_C \mathbf{ZC} = 0. \quad (1.1)$$

Если оси этой ПСО направлены по главным центральным осям инерции, то одна из координатных плоскостей ПСО будет совпадать с плоскостью симметрии. Пусть это будет плоскость Zx_1x_2 . Ясно, что точки A , B и C расположены в этой плоскости. Тогда по отношению ко введённой ПСО векторы $\mathbf{ZA}$, $\mathbf{ZB}$ и $\mathbf{ZC}$ задаются как

$$\mathbf{ZA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{a}; \quad \mathbf{ZB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{b}; \quad \mathbf{ZC} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{c}; \quad (1.2)$$

Так как точки A , B и C располагаются в плоскости Zx_1x_2 , то оси Zx_1 и Zx_2 — главные центральные оси инерции лишь при выполнении условия

$$m_A a_1 a_2 + m_B b_1 b_2 + m_C c_1 c_2 = 0. \quad (1.3)$$

Тензор инерции $\mathbf{I}$ тела $\mathcal{A}$ в таких осях имеет вид

$$\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3), \quad (1.4)$$

где, согласно теореме Гюйгенса-Штейнера (см., например, [14]),

$$\begin{aligned} I_1 &= mI_1^* = m \left(\mu_A a_2^2 + \mu_B b_2^2 + \mu_C c_2^2 + \frac{2}{5} \sum_{(A,B,C)} \mu_A R_A^2 \right), \\ I_2 &= mI_2^* = m \left(\mu_A a_1^2 + \mu_B b_1^2 + \mu_C c_1^2 + \frac{2}{5} \sum_{(A,B,C)} \mu_A R_A^2 \right), \\ I_3 &= mI_3^* = m \left(\mu_A a^2 + \mu_B b^2 + \mu_C c^2 + \frac{2}{5} \sum_{(A,B,C)} \mu_A R_A^2 \right), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$a = |\mathbf{a}|, \quad b = |\mathbf{b}|, \quad c = |\mathbf{c}|, \quad m = m_A + m_B + m_C,$$

Обозначения вида (a, b, c) , (A, B, C) , (α, β, γ) предусматривают в дальнейшем циклическую перестановку символов.

Согласно формуле Лагранжа (см., например, [6]), момент инерции I_3 можно записать как

$$I_3 = \sum_{(A,B,C)} \mu_A \mu_B \ell_C^2 + \frac{2}{5} \sum_{(A,B,C)} \mu_A R_A^2,$$

где $|\mathbf{AB}| = \ell_C$, $|\mathbf{BC}| = \ell_A$, $|\mathbf{CA}| = \ell_B$ — длины сторон треугольника.

Обозначим

$$\widehat{\mathbf{x}_1 \mathbf{Z} \mathbf{A}} = \alpha, \quad \widehat{\mathbf{x}_1 \mathbf{Z} \mathbf{B}} = \beta, \quad \widehat{\mathbf{x}_1 \mathbf{Z} \mathbf{C}} = \gamma,$$

причем, каждый из углов α , β и γ не превышает по величине 2π и отсчитывается от оси Zx_1 против часовой стрелки.

Тогда

$$a_1 = a \cos \alpha, \quad a_2 = a \sin \alpha, \quad (a, b, c), \quad (\alpha, \beta, \gamma), \quad (1.6)$$

и в силу теоремы косинусов (рис. 1):

$$\ell_A^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\gamma - \beta), \quad (A, B, C), \quad (a, b, c)$$

Момент инерции I_A тела $\mathcal{A}$ относительно оси, перпендикулярной плоскости $\triangle ABC$ и проходящей через точку A , можно выписать двумя способами. С одной стороны, согласно теореме Гюйгенса-Штейнера (см., например, [14])

$$I_A = I_3 + ma^2.$$

С другой стороны, непосредственно из определения следует, что

$$I_A = \left(m_B \ell_C^2 + \frac{2}{5} m_B R_B^2 \right) + \left(m_C \ell_B^2 + \frac{2}{5} m_C R_C^2 \right) + \frac{2}{5} m_A R_A^2.$$

Приравнявая эти выражения

$$I_3 + ma^2 = \left(m_B \ell_C^2 + \frac{2}{5} m_B R_B^2 \right) + \left(m_C \ell_B^2 + \frac{2}{5} m_C R_C^2 \right) + \frac{2}{5} m_A R_A^2,$$

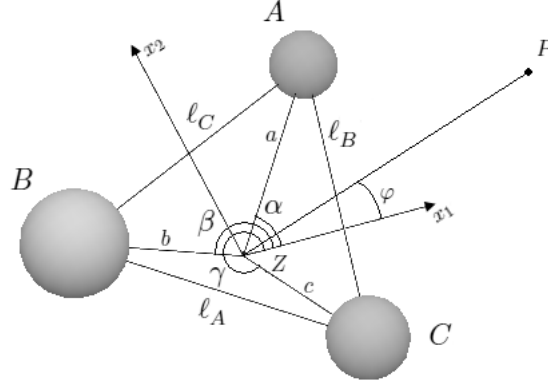


Рис. 1.1: Система взаимно гравитирующих треугольного твердого тела и точки.

и используя соотношение (1.5), после преобразований находим, что

$$a^2 = \mu_b \mu_c (-\ell_A^2 + \ell_B^2 + \ell_C^2) + \mu_b^2 \ell_C^2 + \mu_c^2 \ell_B^2, \quad (a, b, c) \quad \mu_a = \frac{m_A}{m}, \quad (A, B, C) \quad (1.7)$$

Равенство (1.7) оказывается полезным при рассмотрении конкретных задач.

1.1.1 Потенциальная энергия ньютоновских сил

Хорошо известно [40], что потенциальная энергия каждого из шаров представима в виде

$$U_A(r) = \begin{cases} -mMG \frac{\mu_A}{\rho_A}, & \rho_A \geq R_A \\ mMG \frac{\mu_A}{2R_A^3} (\rho_A^2 - 3R_A^2), & \rho_A \leq R_A \end{cases} \quad (A, B, C) \quad (1.8)$$

где M – масса гравитирующей точки P , а G – гравитационная постоянная. Здесь и далее

$$\rho_A = (\mathbf{PA}, \mathbf{PA})^{1/2} = (\mathbf{r} - \mathbf{a}, \mathbf{r} - \mathbf{a})^{1/2} = (\mathbf{r}^2 - 2(\mathbf{r}, \mathbf{a}) + \mathbf{a}^2)^{1/2}, \quad (A, B, C), \quad (a, b, c)$$

и $\mathbf{r} = \mathbf{ZP} = (r_1, r_2, r_3)^T$.

Функция $U_A(r)$ непрерывно-дифференцируема. Кроме того, $U_A(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Потенциальная энергия ньютоновского притяжения системы в целом записывается как $U_N = U_A + U_B + U_C$. Ясно, что вне шаров имеет место соотношение

$$U' = -mMG \left[\frac{\mu_A}{\rho_A} + \frac{\mu_B}{\rho_B} + \frac{\mu_C}{\rho_C} \right] = mU, \quad (1.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Исследование точек либрации в духе [25], опирающееся на потенциал вида (1.8) представляет отдельный интерес и в настоящей работе не осуществляется.

1.2 Приведённый потенциал. Функция Рауса.

Уравнения стационарных конфигураций и их общие свойства.

Так как все силы, действующие в системе, внутренние, то сохраняется вектор полного кинетического момента. Будем считать, что он направлен вдоль единичного вектора $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)^T$, неизменного в абсолютном пространстве, и по величине составляет p . Выполнение понижения порядка по Раусу непосредственно в избыточных координатах (см., например [22, 71]), позволяет выписать приведенный потенциал.

$$U_a(\mathbf{e}, \mathbf{r}) = U_c + U_N = \frac{p^2}{2J(\mathbf{e}, \mathbf{r})} + mU, \quad (1.10)$$

где U_c — потенциальная энергия центробежных сил и

$$J(\mathbf{e}, \mathbf{r}) = m(\mathbf{I}_* \mathbf{e}, \mathbf{e}) + \mu(\mathbf{e} \times \mathbf{r}, \mathbf{e} \times \mathbf{r}) = mJ_*(\mathbf{e}, \mathbf{r}), \quad (1.11)$$

$$\mathbf{I}_* = (I_1^*, I_2^*, I_3^*), \quad \mu = m\mu_*, \quad \mu_* = \frac{M}{m+M} = \frac{1}{m/M+1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При $m/M \rightarrow 0$ имеем $\mu_* \rightarrow 1$, и в пределе речь идёт о задаче о движении треугольника в центральном поле сил.

При $m/M \rightarrow \infty$ имеем $\mu_* \rightarrow 0$, и в пределе речь идёт о точках либрации в поле притяжения равномерно вращающегося треугольника.

Для исследования стационарных конфигураций выписывается функция Рауса [88, 89] (см. также [34]). Полагая $p = m\beta$ и подставляя это выражение вместе с (1.11) в (1.10), получаем

$$U_a(\mathbf{e}, \mathbf{r}) = mU_{a*}(\mathbf{e}, \mathbf{r}), \quad U_{a*}(\mathbf{e}, \mathbf{r}) = \frac{\beta^2}{2J_*(\mathbf{e}, \mathbf{r})} + U.$$

Теперь, отбрасывая $*$ представим функцию Рауса в виде

$$W_\lambda = U_a(\mathbf{e}, \mathbf{r}) + \frac{\lambda}{2} [(\mathbf{e}, \mathbf{e}) - 1].$$

В дальнейшем предполагается, что размерные единицы выбраны таким образом, что $GM = 1$

Стационарные конфигурации отвечают её критическим точкам, определяемыми из уравнений

$$\frac{\partial W_\lambda}{\partial \mathbf{e}} = -\frac{\omega^2}{2} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}} + \lambda \mathbf{e} = 0, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial W_\lambda}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\omega^2}{2} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad (1.13)$$

где $\omega = \beta/J$. Эти уравнения надо рассматривать совместно с геометрическим интегралом

$$(\mathbf{e}, \mathbf{e}) - 1 = 0. \quad (1.14)$$

Заметим, что в силу тождества Лагранжа (см., например, [53])

$$(\mathbf{e} \times \mathbf{r}, \mathbf{e} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{e}, \mathbf{e})(\mathbf{r}, \mathbf{r}) - (\mathbf{e}, \mathbf{r})^2 \quad (1.15)$$

и, следовательно

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} (\mathbf{e} \times \mathbf{r}, \mathbf{e} \times \mathbf{r}) = 2 [\mathbf{e}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{e}, \mathbf{r})] = 2\mathbf{r} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r}), \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{e} \times \mathbf{r}, \mathbf{e} \times \mathbf{r}) = 2 [\mathbf{r}(\mathbf{e}, \mathbf{e}) - \mathbf{e}(\mathbf{e}, \mathbf{r})] = 2\mathbf{e} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{e}) \quad (1.17)$$

Домножая (1.12) векторно слева на $\mathbf{e}$, после упрощений с помощью (1.16) имеем

$$\omega^2 \mathbf{I} \mathbf{e} \times \mathbf{e} - \mu \omega^2 (\mathbf{e}, \mathbf{r}) \mathbf{r} \times \mathbf{e} = 0. \quad (1.18)$$

Домножая (1.13) векторно слева на $\mathbf{r}$, после упрощений с помощью (1.16) имеем

$$\omega^2 \mu (\mathbf{e}, \mathbf{r}) \mathbf{r} \times \mathbf{e} + \mathbf{r} \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (1.19)$$

В силу (1.18), если $\mathbf{e}$ — собственный вектор тензора $\mathbf{I}$, то либо $(\mathbf{e}, \mathbf{r}) = 0$, и векторы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{r}$ взаимно ортогональны (условие Π), либо $\mathbf{r} \times \mathbf{e} = 0$, и векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{e}$ коллинеарны (условие K). Тогда, в силу (1.19) при выполнении любого из этих условий, стационарная конфигурация существует если выполнено условие

$$\mathbf{r} \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (1.20)$$

Домножим теперь (1.12) на $\mathbf{e}$ скалярно. Имеем

$$-\frac{\beta^2}{2J^2} \left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}}, \mathbf{e} \right) + \lambda (\mathbf{e}, \mathbf{e}) = 0,$$

и из однородности по $\mathbf{e}$ величины J и условия (1.14)

$$\lambda = \frac{\beta^2}{2J^2} \left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}}, \mathbf{e} \right) = \frac{\beta^2}{J^2} ((\mathbf{I} \mathbf{e}, \mathbf{e}) + \mu (\mathbf{e} \times \mathbf{r}, \mathbf{e} \times \mathbf{r})) = \frac{\beta^2}{J} \quad (1.21)$$

Теперь домножим (1.13) скалярно на $\mathbf{r}$. Имеем

$$-\frac{\beta^2}{2J^2} \left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{r}}, \mathbf{r} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \mathbf{r} \right) = 0. \quad (1.22)$$

Так как

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{r}}, \mathbf{r} \right) = \mu (\mathbf{e} \times \mathbf{r}, \mathbf{e} \times \mathbf{r}),$$

то в случае выполнения условия K условие (1.22) принимает вид

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \mathbf{r} \right) = 0. \quad (1.23)$$

В противном случае в силу (1.22)

$$\beta^2 = 2J^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \mathbf{r} \right) \left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{r}}, \mathbf{r} \right)^{-1} = \frac{J^2}{\mu (\mathbf{e} \times \mathbf{r}, \mathbf{e} \times \mathbf{r})} \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \mathbf{r} \right). \quad (1.24)$$

Соотношение (1.24) по известной стационарной конфигурации, определяемой векторами $\mathbf{e}$ и $\mathbf{r}$, позволяет найти значения постоянной интеграла площадей, при которых данная конфигурация реализуется. Кроме того, оно позволяет строить бифуркационные диаграммы Пуанкаре, а в сочетании с (1.10) — и бифуркационные диаграммы Смейла.

1.3 Коллинеарный случай.

Пусть выполнено условие K . Тогда уравнения (1.19) принимают вид (1.20). Запишем эти уравнения в явном виде для области вне всех трёх шаров. Так как в силу (1.9) в этой области

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = - \left(\frac{\mu_A(\mathbf{r} - \mathbf{a})}{\rho_A^3} + \frac{\mu_B(\mathbf{r} - \mathbf{b})}{\rho_B^3} + \frac{\mu_C(\mathbf{r} - \mathbf{c})}{\rho_C^3} \right) \quad (1.25)$$

то изучаемые уравнения принимают вид

$$\mathbf{r} \times \left(\frac{\mu_A(\mathbf{r} - \mathbf{a})}{\rho_A^3} + \frac{\mu_B(\mathbf{r} - \mathbf{b})}{\rho_B^3} + \frac{\mu_C(\mathbf{r} - \mathbf{c})}{\rho_C^3} \right) = 0, \quad (1.26)$$

которые после группировки слагаемых записываются как

$$\mathbf{r} \times \left(\frac{\mu_A}{\rho_A^3} + \frac{\mu_B}{\rho_B^3} + \frac{\mu_C}{\rho_C^3} \right) \mathbf{r} - \mathbf{r} \times \left(\frac{\mu_A \mathbf{a}}{\rho_A^3} + \frac{\mu_B \mathbf{b}}{\rho_B^3} + \frac{\mu_C \mathbf{c}}{\rho_C^3} \right) = 0.$$

В этом соотношении первое слагаемое равно нулю. Поэтому в предположении

$$\rho_A = \rho_B = \rho_C = \rho, \quad (1.27)$$

смысл которого состоит в том, что точка P принадлежит перпендикуляру к плоскости $\triangle ABC$, проходящему через центр описанной около этого треугольника окружности, предыдущее равенство после избавления от знаменателя принимает вид

$$\mathbf{r} \times (\mu_A \mathbf{a} + \mu_B \mathbf{b} + \mu_C \mathbf{c}) = 0.$$

и оказывается выполненным, когда центр масс треугольника совпадает с центром описанной окружности (ср. [56]).

Таким образом, в случае, когда центр масс тела Z совпадает с центром окружности, описанной около треугольника $\triangle ABC$, условия (1.20) оказываются выполненными для точек перпендикуляра, восстановленного из точки Z к плоскости $\triangle ABC$.

Обратимся теперь к исследованию условия (1.23). Вне всех трёх шаров в силу (1.25)

$$\left(\frac{\mu_A(\mathbf{r} - \mathbf{a})}{\rho_A^3} + \frac{\mu_B(\mathbf{r} - \mathbf{b})}{\rho_B^3} + \frac{\mu_C(\mathbf{r} - \mathbf{c})}{\rho_C^3}, \mathbf{r} \right) = 0, \quad (1.28)$$

или, что тоже самое,

$$\left(\frac{\mu_A \mathbf{r}}{\rho_A^3} + \frac{\mu_B \mathbf{r}}{\rho_B^3} + \frac{\mu_C \mathbf{r}}{\rho_C^3}, \mathbf{r} \right) - \left(\frac{\mu_A \mathbf{a}}{\rho_A^3} + \frac{\mu_B \mathbf{b}}{\rho_B^3} + \frac{\mu_C \mathbf{c}}{\rho_C^3}, \mathbf{r} \right) = 0.$$

Если центр масс тела совпадает с центром окружности, описанной около треугольника $\triangle ABC$, то в силу условия (1.27) второе слагаемое обращается в нуль, а первое слагаемое после избавления от знаменателя принимает вид

$$(\mu_A + \mu_B + \mu_C) (\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 0,$$

что имеет место лишь при $\mathbf{r} = 0$. Иными словами, условию (1.23) удовлетворяют не все точки перпендикуляра, восстановленного из Z в случае совпадения его с центром описанной окружности, а лишь сама точка Z .

1.4 Ортогональный случай. Свойства плоских стационарных конфигураций.

Рассмотрим стационарные конфигурации, на которых выполнено условие перпендикулярности П. Для рассмотренной выше модели трёх шаров условие взаимной перпендикулярности векторов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{r}$ выполнено, если вектор $\mathbf{e}$ во всё время движения перпендикулярен плоскости симметрии тела, проходящей через центры всех трёх шаров, а вектор $\mathbf{r}$, определяющий положение точки P , располагается в этой плоскости. Так как

$$\frac{\partial U_N}{\partial r_i} = \frac{\partial U}{\partial \rho_A} \frac{\partial \rho_A}{\partial r_i} + \frac{\partial U}{\partial \rho_B} \frac{\partial \rho_B}{\partial r_i} + \frac{\partial U}{\partial \rho_C} \frac{\partial \rho_C}{\partial r_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.29)$$

и вне шаров

$$\frac{\partial U}{\partial \rho_A} = \frac{\mu_A}{\rho_A^2}, \quad \frac{\partial \rho_A}{\partial r_i} = \frac{r_i - a_i}{\rho_A}, \quad (A, B, C), \quad (a, b, c), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.30)$$

то в силу (1.2) на таких решениях $r_3 = 0$. Тогда, в силу (1.29), (1.30) на этих решениях оказывается выполнено условие

$$\frac{\partial U}{\partial r_3} = 0,$$

и первые два из условий (1.20) также оказываются выполненными.

Нетривиальным оказывается лишь третье условие, имеющее вид

$$r_1 \frac{\partial U}{\partial r_2} - r_2 \frac{\partial U}{\partial r_1} = 0, \quad (1.31)$$

в явном виде представимое следующим образом

$$\frac{\mu_A}{\rho_A^3} (\mathbf{e}, \mathbf{r} \times \mathbf{a}) + \frac{\mu_B}{\rho_B^3} (\mathbf{e}, \mathbf{r} \times \mathbf{b}) + \frac{\mu_C}{\rho_C^3} (\mathbf{e}, \mathbf{r} \times \mathbf{c}) = 0 \quad (1.32)$$

Так как $a_3 = b_3 = c_3 = r_3 = 0$, $e_1 = e_2 = 0$, то условие (1.32) имеет вид

$$\frac{\mu_A(r_2 a_1 - r_1 a_2)}{\rho_A^3} + \frac{\mu_B(r_2 b_1 - r_1 b_2)}{\rho_B^3} + \frac{\mu_C(r_2 c_1 - r_1 c_2)}{\rho_C^3} = 0. \quad (1.33)$$

Также, в силу (1.24) имеем

$$\beta^2 = \frac{J^2}{\mu(\mathbf{e} \times \mathbf{r}, \mathbf{e} \times \mathbf{r})} \left(\frac{\mu_A(\mathbf{r}, \mathbf{r} - \mathbf{a})}{\rho_A^3} + \frac{\mu_B(\mathbf{r}, \mathbf{r} - \mathbf{b})}{\rho_B^3} + \frac{\mu_C(\mathbf{r}, \mathbf{r} - \mathbf{c})}{\rho_C^3} \right). \quad (1.34)$$

Соотношение (1.32) задаёт на плоскости (r_1, r_2) кривую Γ , заполненную “кандидатами” в стационарные конфигурации. Возможность реализации той или иной конфигурации задаётся её взаимным расположением по отношению к семейству кривых Γ_β , определяемых равенством (1.34) и зависящих от параметра β .

ЗАМЕЧАНИЕ. При изучении соотношения (1.32) следует принимать во внимание связь между массами шаров и координатами их центров. Так соотношения

$$m_A a_1 + m_B b_1 + m_C c_1 = 0, \quad (1.35)$$

$$m_A a_2 + m_B b_2 + m_C c_2 = 0, \quad (1.36)$$

представляют собой покоординатную запись первых двух компонент векторного равенства (1.1), а соотношение

$$m_A + m_B + m_C = m \quad (1.37)$$

задаёт полную массу астероида. Рассматривая (1.35) – (1.37) как уравнения относительно m_A , m_B и m_C , находим, что

$$\mu_a = \frac{m_A}{m} = \frac{1}{m} \frac{D_A}{D} = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1(b_2 - c_2) + b_1(c_2 - a_2) + c_1(a_2 - b_2)}, \quad (A, B, C), \quad (a, b, c), \quad (1.38)$$

так как

$$D_A = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = m(b_1 c_2 - b_2 c_1), \quad (A, B, C), \quad (a, b, c),$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a_1(b_2 - c_2) + b_1(c_2 - a_2) + c_1(a_2 - b_2).$$

Подставляя теперь выражения для масс (1.38) в уравнение (1.33) кривой Γ , после преобразований имеем

$$\frac{(b_1 c_2 - b_2 c_1)(r_2 a_1 - r_1 a_2)}{\rho_A^3} + \frac{(c_1 a_2 - c_2 a_1)(r_2 b_1 - r_1 b_2)}{\rho_B^3} + \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)(r_2 c_1 - r_1 c_2)}{\rho_C^3} = 0. \quad (1.39)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ. Центр масс треугольника и центр его описанной окружности принадлежат кривой Γ . Точки A , B и C – выколотые точки кривой Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для центра масс треугольника $\mathbf{r} = 0$. Подстановка этого условия в (1.33) тотчас даёт доказательство первой части утверждения.

Далее, расстояния от центра описанной окружности до вершин треугольника равны между собой: $\rho_A = \rho_B = \rho_C$. Тогда все знаменатели в (1.33) равны. Складывая три дроби и принимая во внимание соотношения (1.35) и (1.36), тотчас убеждаемся, что числитель тождественно равен нулю. Это означает, что центр описанной окружности всегда принадлежит кривой Γ (ср. [56]).

Наконец, домножим правую часть и левую части равенства (1.39) на произведение $\rho_A^3 \rho_B^3 \rho_C^3$. Отличное от нуля вне точек A , B и C . Имеем

$$(b_1 c_2 - b_2 c_1)(r_2 a_1 - r_1 a_2) \rho_B^3 \rho_C^3 +$$

$$(c_1 a_2 - c_2 a_1)(r_2 b_1 - r_1 b_2) \rho_C^3 \rho_A^3 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)(r_2 c_1 - r_1 c_2) \rho_A^3 \rho_B^3 = 0.$$

Нетрудно видеть, что подстановка в это выражение координат любой из точек A , B и C обращает его в верное равенство, откуда и следует утверждение о выколоте точек A , B и C из кривой Γ .

1.4.1 Кривая Γ и её поведение на бесконечности. Общий случай

Изучим поведение кривой Γ на бесконечности. Задающее эту кривую уравнение (1.33) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\Gamma : \quad \gamma &= \sum_{(A,B,C)(a,b,c)} \mu_A(r_2 a_1 - r_1 a_2) (1 + \varepsilon_A)^{-3/2} = \\ &= \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots = 0.\end{aligned}\tag{1.40}$$

где функции γ_i – коэффициенты разложения функции γ по степеням параметров

$$\varepsilon_A = \frac{a^2 - 2(r_1 a_1 + r_2 a_2)}{r_1^2 + r_2^2} \quad (A, B, C) \quad (a, b, c),$$

Имеем

$$\gamma_0 = y(\mu_A a_1 + \mu_B b_1 + \mu_C c_1) - x(\mu_A a_2 + \mu_B b_2 + \mu_C c_2) \equiv 0$$

в силу определения центра масс. Далее,

$$\gamma_1 = \frac{3}{2}(r_1^2 + r_2^2)^{-1} \cdot (2C_{12}r_1r_2 + C_1r_1 - C_2r_2),\tag{1.41}$$

где

$$\begin{aligned}C_{12} &= \mu_A(a_1^2 - a_2^2) + \mu_B(b_1^2 - b_2^2) + \mu_C(c_1^2 - c_2^2), \\ C_1 &= \mu_A a_2 a^2 + \mu_B b_2 b^2 + \mu_C c_2 c^2, \\ C_2 &= \mu_A a_1 a^2 + \mu_B b_1 b^2 + \mu_C c_1 c^2.\end{aligned}$$

Кривая Γ_1 , задаваемая соотношением $\gamma_1 = 0$ – гипербола с центром в точке

$$r_{10} = \frac{C_2}{2C_{12}}, \quad r_{20} = -\frac{C_1}{2C_{12}},$$

оси которой параллельны координатным осям. Эта гипербола определяет асимптотику кривой Γ при $r \rightarrow \infty$. В частности, в данном приближении становится ясно, что четыре ветви кривой Γ простираются на бесконечность.

Следующее слагаемое в разложении (1.40) имеет вид

$$\gamma_2 = \frac{15}{2}(r_1^2 + r_2^2)^{-2} \times$$

$$\left((S_{03}r_2 - S_{12}r_1)r_2^2 + (S_{21}r_2 - S_{30}r_1)r_1^2 + S_2(r_1^2 - r_2^2) + S_{11}r_1r_2 + \frac{1}{4}(S_{01}r_2 - S_{10}r_1) \right),$$

где

$$\begin{aligned}S_{03} &= \mu_A a_1 a_2^2 + \mu_B b_1 b_2^2 + \mu_C c_1 c_2^2, \quad S_{30} = \mu_A a_2 a_1^2 + \mu_B b_2 b_1^2 + \mu_C c_2 c_1^2, \\ S_{21} &= \mu_A a_1^3 + \mu_B b_1^3 + \mu_C c_1^3 - 2S_{03}, \quad S_{12} = \mu_A a_2^3 + \mu_B b_2^3 + \mu_C c_2^3 - 2S_{30}, \\ S_2 &= \mu_A a_1 a_2 a^2 + \mu_B b_1 b_2 b^2 + \mu_C c_1 c_2 c^2, \\ S_{11} &= \mu_A a^2(a_2^2 - a_1^2) + \mu_B b^2(b_2^2 - b_1^2) + \mu_C c^2(c_2^2 - c_1^2), \\ S_{10} &= \mu_A a_2 a^4 + \mu_B b_2 b^4 + \mu_C c_2 c^4, \quad S_{01} = \mu_A a_1 a^4 + \mu_B b_1 b^4 + \mu_C c_1 c^4\end{aligned}$$

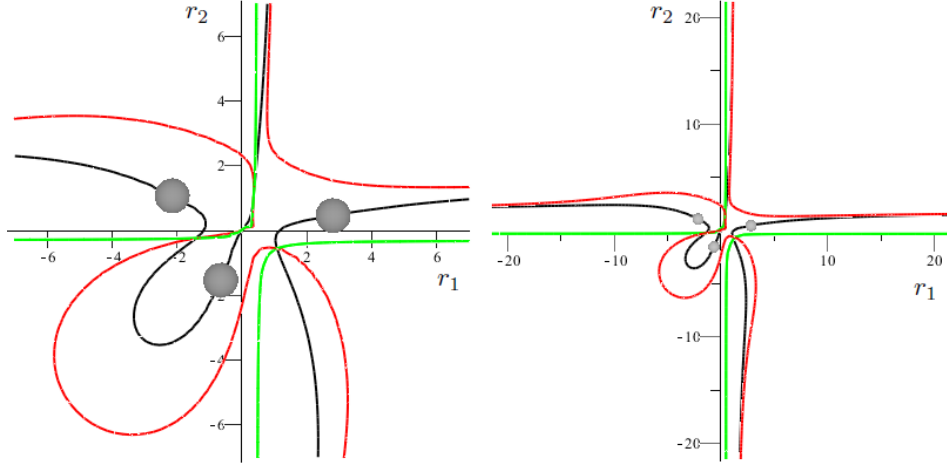


Рис. 1.2: Кривая Γ и первых два ее приближения для треугольника с длинами 3, 4, 5 и равными массами в вершинах.

Знание этого члена разложения позволяет составить представление о поведении кривой Γ и в конечной части плоскости за счёт изучения приближения Γ_2 этой кривой, задаваемого равенством $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$.

МОДЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР. Рассмотрим треугольник со сторонами 3, 4, 5 и равными массами в вершинах. Так, на рисунке 1.2 представлены кривая Γ и первых два ее приближения. При этом, кривая Γ выделена черным цветом, первое её приближение — гипербола Γ_1 , задаваемая соотношением (1.41) — зелёным и второе приближение Γ_2 — красным.

ПРИМЕР: АСТЕРОИД 52143 ИТОКАВА. Астероид Итокава относится к околоземным астероидам из группы аполлонов [83].

В работе [78] гравитационное поле астероида Итокава предлагается заметить “похожим” гравитационным полем модельного тела, представляющего собой три однородных шара A , B и C равной плотности. Шары A и C располагаются по разные стороны от третьего шара B и касаются его, причём угол $\angle CBA = 2.9362$ радиан. Кроме того $R_A/R_C = 0.1974$, $R_B/R_C = 0.5454$. Тогда, полагая

$$\mu_A = 0.006574800043 \quad a_1 = 2.044279646, \quad a_2 = -0.1371861115;$$

$$\mu_B = 0.1386712739, \quad b_1 = 1.316121198, \quad b_2 = 0.0095691719;$$

$$\mu_C = 0.8547539261, \quad c_1 = -0.2292460177, \quad c_2 = -0.00049721678;$$

кривая Γ для описанной модели представлена на рисунке 1.3 справа (ср. [78]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Вопрос о том, как “разместить” в астероиде некоторое количество шаров, которые “наилучшим образом” заполняли бы его объём, не имеет однозначного ответа, пожалуй, потому, что не оговаривается критерий, согласно которому определяется “качество” наилучшего размещения.

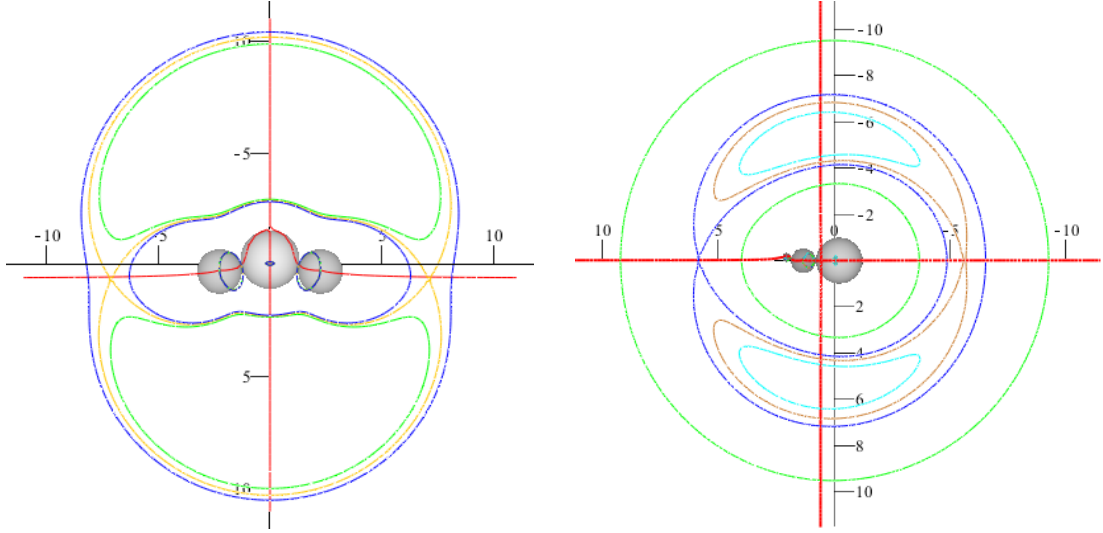


Рис. 1.3: Кривая Γ (выделена красным) и семейства кривых Γ_β для астероидов 433 Эрос (слева) и 25143 Итокава (справа) по моделям [78]

1.4.2 Кривая Γ_β и её поведение на бесконечности. Общий случай

Совершенно аналогично изучим поведение кривых Γ_β , определяемых соотношением (1.34). Разлагая в ряд по параметрам ε_k функции, входящие в правую часть этого соотношения, после преобразований имеем:

$$\beta^2 = \frac{\mu}{(r_1^2 + r_2^2)^{1/2}} (\gamma_{\beta 0} + \gamma_{\beta 1} + \dots), \quad (1.42)$$

$$\gamma_{\beta 0} = r_1^2 + r_2^2,$$

$$\gamma_{\beta 1} = -\frac{3}{2} \frac{1}{r_1^2 + r_2^2} ((C_{\beta 20} + C_{\beta 2}) r_1^2 + (C_{\beta 02} + C_{\beta 2}) r_2^2 - C_{\beta 10} r_1 - C_{\beta 01} r_2),$$

где

$$C_{\beta 20} = 2(\mu_A a_1^2 + \mu_B b_1^2 + \mu_C c_1^2), \quad C_{\beta 02} = 2(\mu_A a_2^2 + \mu_B b_2^2 + \mu_C c_2^2),$$

$$C_{\beta 2} = \mu_A a^2 + \mu_B b^2 + \mu_C c^2, \quad C_{\beta 10} = C_2, \quad C_{\beta 01} = C_1.$$

Кривая $\Gamma_{\beta 0}$, задаваемая соотношением

$$\beta^2 = \frac{\mu}{(r_1^2 + r_2^2)^{1/2}} \gamma_{\beta 0} = \mu \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$$

представляет собой окружность с центром в начале ПСО радиуса β^2/μ . При достаточно больших значениях β гипербола Γ_1 и окружность $\Gamma_{\beta 0}$ пересекаются в четырёх точках. Таким образом, кривая Γ и кривая Γ_β пересекаются не менее чем в четырёх точках, что отмечалось в публикации [100].

Кривая $\Gamma_{\beta 1}$, задаваемая соотношением

$$\beta^2 = \frac{\mu}{(r_1^2 + r_2^2)^{1/2}} (\gamma_{\beta 0} + \gamma_{\beta 1}) =$$

$$= \frac{\mu}{(r_1^2 + r_2^2)^{3/2}} \left((r_1^2 + r_2^2)^2 - \frac{3}{2} ((C_{\beta 20} + C_{\beta 2}) r_1^2 + (C_{\beta 02} + C_{\beta 2}) r_2^2 - C_{\beta 10} r_1 - C_{p 01} r_2) \right)$$

позволяет уточнить поведение кривых Γ_β в случае, когда астероид и точка достаточно далеко удалены друг от друга.

1.5 Условия существования “коллинеарных” стационарных конфигураций.

Прежде чем изучать более детально структуру кривых Γ и Γ_β в случае, когда распределение масс треугольника обладает симметрией, обратимся к исследованию т.н. “коллинеарных конфигураций”, на которых одна из вершин, например, вершина A , находится на одной прямой с точками Z и P . Тогда векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны:

$$\mathbf{r} = k\mathbf{a},$$

причём при $k > 0$ точки P и A находятся по одну сторону от точки Z и

$$\varphi = \alpha. \quad (1.43)$$

При $k < 0$ точки P и A находятся по разные стороны от точки Z и

$$\varphi = \alpha + \pi, \quad (1.44)$$

где $r_1 = r \cos \varphi$, $r_2 = r \sin \varphi$, и

$$\rho_A^2(r, \varphi, \alpha) = r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi - \alpha). \quad (A, B, C) \quad (a, b, c) \quad (\alpha, \beta, \gamma)$$

Подставим выписанное векторное условие коллинеарности в (1.32). Имеем

$$\frac{\mu_B}{\rho_B^3} (\mathbf{e}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \frac{\mu_C}{\rho_C^3} (\mathbf{e}, \mathbf{a} \times \mathbf{c}) = 0,$$

и в силу соотношения (1.33)

$$\frac{\mu_B}{\rho_B^3} (a_2 b_1 - a_1 b_2) + \frac{\mu_C}{\rho_C^3} (a_2 c_1 - a_1 c_2) = 0. \quad (1.45)$$

В силу (1.6) и (1.43) соотношение (1.45) принимает вид

$$\frac{\mu_B b \sin(\alpha - \beta)}{\rho_B^3(r, \varphi, \beta)} + \frac{\mu_C c \sin(\alpha - \gamma)}{\rho_C^3(r, \varphi, \gamma)} = 0. \quad (1.46)$$

Заметим, что имеет место равенство

$$\mu_B b \sin(\alpha - \beta) + \mu_C c \sin(\alpha - \gamma) = 0. \quad (1.47)$$

На самом деле, в силу соотношений (1.35), (1.36)

$$\mu_A a \cos \alpha + \mu_B b \cos \beta + \mu_C c \cos \gamma = 0, \quad (1.48)$$

$$\mu_A a \sin \alpha + \mu_B b \sin \beta + \mu_C c \sin \gamma = 0. \quad (1.49)$$

Соотношение (1.47) получается исключением m_A из равенств (1.48), (1.49).

Так как выполнено условие (1.47), то уравнение (1.46) сводится к уравнению

$$\rho_B^3(r, \varphi, \beta) = \rho_C^3(r, \varphi, \gamma) \Leftrightarrow \rho_B = \rho_C. \quad (1.50)$$

Возводя в квадрат левую и правую части последнего соотношения и приводя подобные, для условий (1.43) и (1.44) соответственно имеем

$$\pm 2r (b \cos(\beta - \alpha) - c \cos(\gamma - \alpha)) = b^2 - c^2. \quad (1.51)$$

Уравнение (1.51) линейно по r .

Рассмотрим два случая. Если условие

$$b \cos(\beta - \alpha) = c \cos(\gamma - \alpha), \quad (1.52)$$

не выполнено, то для каждого знака величины k уравнение (1.45) обладает единственным решением

$$r = \pm \frac{b^2 - c^2}{2(b \cos(\beta - \alpha) - c \cos(\gamma - \alpha))}. \quad (1.53)$$

При этом, такое решение обладает физическим смыслом лишь когда правая часть равенства (1.53) положителен.

Если же условие (1.52) выполнено, то

$$b = c = s_*, \quad (1.54)$$

и $\triangle ABC$ – равнобедренный. Далее, в этом случае в силу (1.52)

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos(\gamma - \alpha),$$

откуда

$$\widehat{AZB} = \beta - \alpha = 2\pi - (\gamma - \alpha) = \widehat{AZC} = \sigma_*. \quad (1.55)$$

Наконец, в силу (1.47)

$$\mu_B = \mu_C = \mu_*, \quad (1.56)$$

и прямая ZA — ось симметрии как для самого треугольника, так и для его распределения масс.

ЗАМЕЧАНИЕ. При выполнении указанных условий симметрии соотношение (1.51) выполнено тождественно по r , и для определения зависимости r от постоянной интеграла площадей остаётся воспользоваться соотношением (1.34), которое принимает вид

$$\beta^2 = \frac{J^2}{\mu k a} \left(\frac{\mu_A a (k - 1)}{\rho_1^3} + \frac{\mu_* (ka - s_* \cos \sigma_*)}{\rho_*^3} \right). \quad (1.57)$$

$$\rho_1 = a|k - 1|, \quad \rho_* = \sqrt{k^2 a^2 + s_*^2 - 2k a s_* \cos \sigma_*}.$$

В дальнейшем ограничимся преимущественно рассмотрением указанного осесимметричного случая.

ПРИМЕР: АСТЕРОИД 433 ЭРОС. Представитель т.н. околоземных астероидов из группы Амура [81] (см. также [74]).

В работе [78] предлагается следующая модель Эроса: астероид представляется тремя однородными касающимися шарами равной плотности. Моделирующий треугольник является осесимметричным: два одинаковых шара — в принятых обозначениях пусть A и C — располагаются по разные стороны от третьего шара B так, что угол $\angle CBA = 2.678$ радиан. Кроме того $R_A/R_B = 1.32$. Тогда, в наших обозначениях

$$\mu_A = \mu_C = 0.23255985, \quad a_1 = c_1 = 0.2850723361, \quad a_2 = -c_2 = 2.257952301;$$

$$\mu_B = 0.5348803, \quad b_1 = -0.2478923964, \quad b_2 = 0.$$

и кривая Γ принимает вид, изображённый на 1.3 слева (ср. [78]).

1.6 Положения равновесия и их устойчивость. Случай осевой симметрии.

Ограничимся здесь изучением равновесий для гравитирующего равнобедренного треугольника с симметричным распределением масс.

Пусть ось симметрии проходит через точку A , опущенная из этой точки высота равна h , половина расположенного против A основания составляет d . В этом разделе будет использоваться система отсчёта $A\zeta x$, ось $A\zeta$ которой направлена вдоль оси симметрии в сторону противоположащего основания. Если ν — отношение массы, расположенной в вершине A к любой из равных масс, расположенных в вершинах B и C , то изучение равновесий сводится к отысканию критических точек функции

$$u = \nu u_*(\rho) - \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + (\zeta-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + (\zeta-h)^2}}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + \zeta^2}, \quad (1.58)$$

где

$$u_*(\rho) = \begin{cases} -\frac{1}{\rho}, & \rho \geq R_A \\ \frac{1}{2R_A^3} (\rho^2 - 3R_A^2), & \rho \leq R_A \end{cases}$$

и определению их типа.

Уравнения равновесий имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial u_*}{\partial \rho} \frac{x}{\rho} + \frac{x-d}{((x-d)^2 + (\zeta-h)^2)^{3/2}} + \frac{x+d}{((x+d)^2 + (\zeta-h)^2)^{3/2}} = 0, \quad (1.59)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \nu \frac{\partial u_*}{\partial \rho} \frac{\zeta}{\rho} + \frac{\zeta-h}{((x-d)^2 + (\zeta-h)^2)^{3/2}} + \frac{\zeta+h}{((x+d)^2 + (\zeta-h)^2)^{3/2}} = 0. \quad (1.60)$$

Приравнявая ν , выраженное из уравнений (1.59), (1.60), получаем соотношение

$$\frac{xh - \zeta d}{((x-d)^2 + (\zeta-h)^2)^{3/2}} + \frac{xh + \zeta d}{((x+d)^2 + (\zeta-h)^2)^{3/2}} = 0 \quad (1.61)$$

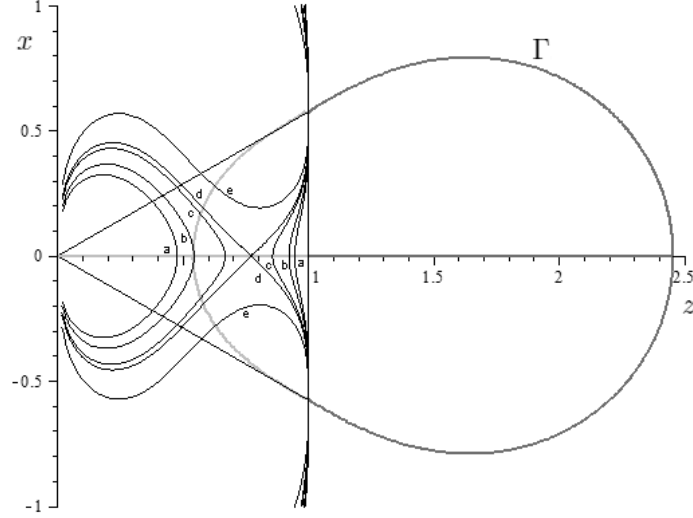


Рис. 1.4: Кривая Γ в случае равностороннего треугольника.

определяющую в связанной с треугольником системе отсчёта независящее от отношения масс множество точек E , на котором могут располагаться равновесия системы.

Каждое из уравнений (1.59), (1.60) задаёт параметризованное с помощью ν семейство кривых. Для каждого значения параметра ν равновесиям отвечают точки пересечения этих кривых и множества E . В дальнейшем ограничимся рассмотрением семейства кривых $E_\zeta(\nu)$, задаваемого соотношением (1.60).

Множество E состоит из оси симметрии треугольника, в чём можно убедиться, полагая $x = 0$ в соотношении (1.61), а также из овала E_o , уравнение которого может быть приведено к виду

$$F_0(\zeta, x; d) = 0, \quad (1.62)$$

$$F_0(\zeta, x; d) = (u + v)(u^3 + v^3) - 4d^2\zeta(u^2 + v^2 + uv),$$

$$v = ((\zeta - 1)^2 + (x - d)^2)^{1/2}, \quad u = ((\zeta - 1)^2 + (x + d)^2)^{1/2}$$

Здесь и далее h принято за единицу длины. В качестве примера для правильного треугольника множество E изображено на рис. 1.5.

Прежде всего рассмотрим равновесия, располагающиеся на оси симметрии. Из соотношения (1.60) имеем

$$\nu = \begin{cases} -\frac{2\zeta|\zeta|(\zeta - 1)}{(d^2 + (\zeta - 1)^2)^{3/2}}, & \zeta \geq R_A \\ -\frac{2R_A^3(\zeta - 1)}{\zeta(d^2 + (\zeta - 1)^2)^{3/2}}, & \zeta \leq R_A \end{cases} \quad (1.63)$$

Будут обсуждаться равновесия, расположенные вне шаров A , B и C .

Функция (1.63) при $\zeta \geq R_A$ достигает своих максимального и минимального значений при

$$\zeta_{max} = 1 + \frac{3a^2}{4} - \frac{a\sqrt{8 + 9a^2}}{4} : \quad \zeta_{max} \in \left[\frac{2}{3}, 1 \right],$$

$$\zeta_{min} = 1 + \frac{3a^2}{4} + \frac{a\sqrt{8+9a^2}}{4} : \quad \zeta_{min} \in [1, \infty),$$

причем,

$$\nu_{max} = \nu(\zeta_{max}) = \frac{\sqrt{6}}{18} \frac{\sqrt{8+9a^2} - 3a}{a^2} \sqrt{4+3a^2 - a\sqrt{8+9a^2}} \quad (> 0),$$

$$\nu_{min} = \nu(\zeta_{min}) = -\frac{\sqrt{6}}{18} \frac{\sqrt{8+9a^2} + 3a}{a^2} \sqrt{4+3a^2 + a\sqrt{8+9a^2}} \quad (< -2).$$

При $\nu > \nu_{max}$ осевых, “прямых” равновесий у системы нет.

При $\nu = \nu_{max}$ одно такое равновесие появляется в точке $\zeta = \zeta_{max}$, расположенной внутри треугольника.

При $0 < \nu < \nu_{max}$ имеются ровно два прямых равновесия, причём оба расположены внутри треугольника.

При $\nu = 0$ эти равновесия покидают внутреннюю часть треугольника, причём при $-2 < \nu < 0$ одно из них располагается за вершиной треугольника, а другое – за его основанием.

При $\nu = -2$ равновесие, располагавшееся за вершиной, уходит на бесконечность, чтобы вернуться к бесконечно удалённой точке, расположенной за основанием.

При $\nu_{min} < \nu < -2$ имеются два равновесия, расположенные за основанием треугольника.

При $\nu = \nu_{min}$ эти равновесия сливаются в точке $\zeta = \zeta_{min}$ и исчезают при $\nu < \nu_{min}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Значения $\nu < 0$ можно было бы не рассматривать, как не отвечающие физической постановке задачи. Однако эти значения обретают смысл, если вместо масс рассматривать заряды разного, вообще говоря, знака.

Обратимся теперь к изучению овала E_o . Этот овал пересекает ось симметрии треугольника в паре точек, удовлетворяющих в силу соотношения (1.62) уравнению

$$((\zeta - 1)^2 + a^2) - 3a^2\zeta = 0, \quad (1.64)$$

Эти точки имеют вид

$$\zeta_{\pm} = 1 + \frac{3a^2}{2} \pm \frac{a\sqrt{8+9a^2}}{2} \quad \left(\zeta_- \in \left[\frac{1}{3}, 1 \right], \quad \zeta_+ \in [1, \infty) \right) \quad (1.65)$$

причём

$$\nu_+ = \nu(\zeta_-) = \frac{\sqrt{6}}{18} \frac{\sqrt{8+9a^2} - 3a}{a^2} \sqrt{2+3a^2 - a\sqrt{8+9a^2}} \quad (0 < \nu_+ < \nu_{max}),$$

$$\nu_- = \nu(\zeta_+) = -\frac{\sqrt{6}}{18} \frac{\sqrt{8+9a^2} + 3a}{a^2} \sqrt{2+3a^2 + a\sqrt{8+9a^2}} \quad (\nu_{min} < \nu_- < -2).$$

Наблюдается следующая картина зависимости косых равновесий от параметра ν :

- при $\nu > \nu_+$ имеются ровно два косых равновесия, причём оба из них расположены внутри треугольника;

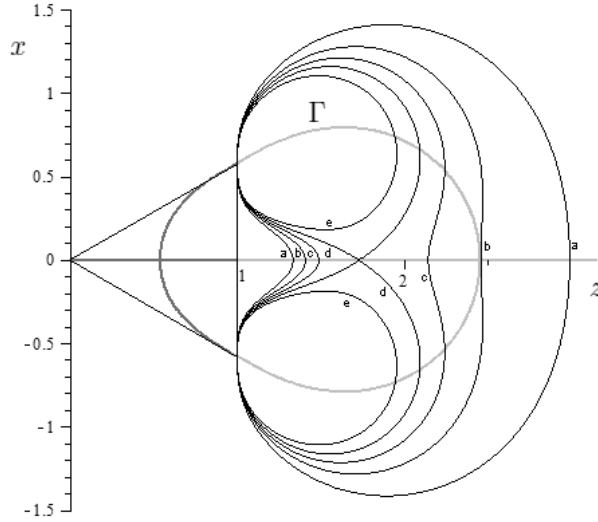


Рис. 1.5: Кривая Γ в случае равностороннего треугольника. В вершинах сосредоточены заряды разных знаков.

- при $\nu = \nu_+$ косые равновесия сливаются с одним из прямых в точке $\zeta = \zeta_-$;
- при $\nu_- < \nu < \nu_+$ косых равновесий у системы нет;
- при $\nu = \nu_-$ происходит рождение пары косых равновесий в точке $\zeta = \zeta_+$;
- при $\nu < \nu_-$ вновь имеются ровно два косых равновесия, причём оба они расположены за основанием треугольника.

Справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. При $\nu \mapsto +\infty$ и $\nu \mapsto -\infty$ косые равновесия вдоль овала E_o стремятся к вершинам P_2 и P_3 , причём в точках P_2 и P_3 овал E_o касается боковых сторон P_1P_2 и P_1P_3 изучаемого треугольника.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение касательной к E_o в точке P_2 после преобразований записывается в виде

$$x = a\zeta.$$

Аналогичные рассуждения справедливы и для точки P_3 .

На рис. 1.4 помимо кривой E для правильного треугольника изображены некоторые кривые из семейства $E_\zeta(\nu)$, отвечающие, соответственно, значениям $\nu = 0.5$ (кривая a), $\nu = \nu_+ \approx 0.673877$ (кривая b), $\nu = 1$ (кривая c , ср. [55]), $\nu = \nu_{max} \approx 1.136252$ (кривая d) и $\nu = 1.5$ (кривая e).

ЗАМЕЧАНИЕ. О распределении равновесий в случае, когда вместо масс рассматриваются заряды разного знака, можно составить представление по рис. 1.5. На нём, вновь для случая правильного треугольника изображены кривая E , а также некоторые кривые из семейства $E_\zeta(\nu)$, отвечающие соответственно значениям $\nu = -4$ (кривая a), $\nu = \nu_- \approx -4.569379$ (кривая b), $\nu = -5$ (кривая c), $\nu = \nu_{min} \approx -5.419926$ (кривая d) и $\nu = -6$ (кривая e).

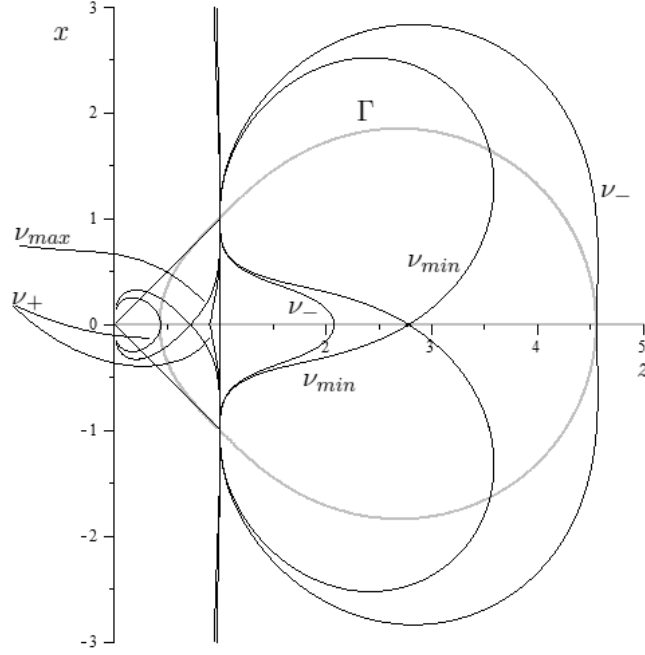


Рис. 1.6: Кривая Γ в случае прямоугольного треугольника.

ЗАМЕЧАНИЕ. Картины кривых Γ и $\Gamma_\zeta(\nu)$, а также распределение равновесий, не сильно чувствительны к характеризующему треугольник углу при вершине, о чём можно судить по рис. 1.6 и 1.7, на которых такие картины изображены для прямоугольного и тупоугольного (с углом при вершине, равным $2\pi/3$) равнобедренных треугольников.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если смотреть на ν , как на бифуркационный параметр, то при $\nu = \nu_+$ и при $\nu = \nu_-$ имеют место бифуркации типа “вилка”: при $\nu = \nu_+$ имеет место рождение двух симметричных косых равновесий из сохраняющегося прямого равновесия, в то время как при $\nu = \nu_-$ происходит схлопывание пары симметричных косых решений на прямом решении. При $\nu = \nu_{max}$ и $\nu = \nu_{min}$ имеет место, соответственно, исчезновение и рождение пары прямых равновесий. Связь этих бифуркаций с изменением свойств устойчивости обсуждается ниже.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мотивом к изучению параметрической зависимости равновесий стало случайное обнаружение в правильном треугольнике с равными массами в вершинах равновесий, расположенных на осях симметрии, но не совпадающих с центром треугольника.

1.7 Достаточные условия устойчивости

Согласно [61], условия знакоопределенности ограничения второй вариации $\delta^2 W_\lambda$ функции W_λ на многообразии $e_1 \delta e_1 + e_2 \delta e_2 + e_3 \delta e_3 = 0$ можно найти исследуя

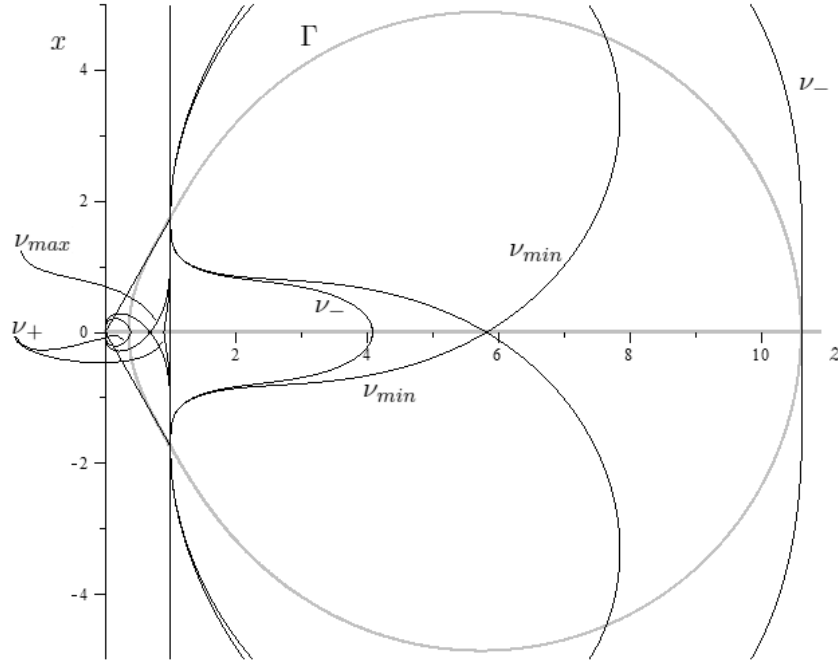


Рис. 1.7: Кривая Γ в случае тупоугольного треугольника (с углом при вершине, равным $2\pi/3$).

матрицу

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{e}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{e} & \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{e} \partial \mathbf{e}} & \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{e} \partial \mathbf{r}} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{e}} & \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{r}} \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

Учитывая соотношение (1.15), имеют место следующие выражения

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{e} \partial \mathbf{e}} (\mathbf{e} \times \mathbf{r}, \mathbf{e} \times \mathbf{r}) = 2 (r^2 E - \mathbf{r} \mathbf{r}^T), \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{r}} (\mathbf{e} \times \mathbf{r}, \mathbf{e} \times \mathbf{r}) = 2 (E - \mathbf{e} \mathbf{e}^T)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{e}} (\mathbf{e} \times \mathbf{r}, \mathbf{e} \times \mathbf{r}) = 2 (2\mathbf{e} \mathbf{r}^T - \mathbf{r} \mathbf{e}^T - (\mathbf{r}, \mathbf{e}) E),$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{e} \partial \mathbf{r}} (\mathbf{e} \times \mathbf{r}, \mathbf{e} \times \mathbf{r}) = 2 (2\mathbf{r} \mathbf{e}^T - \mathbf{e} \mathbf{r}^T - (\mathbf{r}, \mathbf{e}) E),$$

в силу которых, компоненты матрицы (1.66) принимают вид

$$\frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial \mathbf{e} \partial \mathbf{e}} = \frac{p^2}{J^2} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}} \left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}} \right)^T - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{e} \partial \mathbf{e}} \right) + \lambda E,$$

$$\frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{r}} = \frac{p^2}{J^2} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{r}} \right)^T - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{r}} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{r}},$$

$$\frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{e}} = \frac{p^2}{J^3} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}} \right)^T = \left(\frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial \mathbf{e} \partial \mathbf{r}} \right)^T.$$

1.7.1 Достаточные условия устойчивости решений, удовлетворяющих условию П.

Рассмотрим стационарные конфигурации, на которых выполнено условие перпендикулярности П. Это условие выполнено, если вектор $\mathbf{e}$ во всё время движения перпендикулярен плоскости треугольника, а вектор $\mathbf{r}$ располагается в этой плоскости.

На таких решениях $\mathbf{e}_0 = (0, 0, 1)^T$, $\mathbf{r}_0 = (r_1, r_2, 0)^T$. При этом, выполнено соотношение (1.21) и

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{e}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}^T & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial \mathbf{e}^2} - \sigma \mathbf{E} & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial \mathbf{e} \partial \mathbf{r}} \\ \mathbf{0}^T & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{e}} & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial \mathbf{r}^2} - \sigma \mathbf{E} \end{pmatrix}$$

причём

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\sigma) &= \det \mathbf{X}_0 = \\ &= -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial e_1^2} - \sigma & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial e_1 \partial e_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial e_2 \partial e_1} & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial e_2^2} - \sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial r_1^2} - \sigma & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial r_1 \partial r_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial r_2 \partial r_1} & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial r_2^2} - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial r_3^2} - \sigma \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial e_1^2} - \sigma & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial e_1 \partial e_2} \\ \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial e_2 \partial e_1} & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial e_2^2} - \sigma \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial r_1^2} - \sigma & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial r_1 \partial r_2} \\ \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial r_2 \partial r_1} & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial r_2^2} - \sigma \end{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial r_3^2} - \sigma \right) = \\ &= \mathcal{P}_1(\sigma) \cdot \mathcal{P}_2(\sigma) \cdot \mathcal{P}_3(\sigma). \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}} &= 2 (I_1 e_1, I_2 e_2, I_3 e_3 + \mu(r_1^2 + r_2^2)) = 2 (0, 0, I_3 + \mu(r_1^2 + r_2^2)) \\ \frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}} \left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}} \right)^T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4(I_3 + \mu(r_1^2 + r_2^2))^2 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{e} \partial \mathbf{e}} &= 2\mathbf{I} + 2\mu (r^2 \mathbf{E} - \mathbf{r} \mathbf{r}^T) = 2 \begin{pmatrix} I_1 + \mu r_2^2 & -\mu r_1 r_2 & 0 \\ -\mu r_1 r_2 & I_2 + \mu r_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 + \mu(r_1^2 + r_2^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial \mathbf{e}^2} &= \frac{\beta^2}{J^2} \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}} \left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}} \right)^T - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{e} \partial \mathbf{e}} \right) + \frac{\beta^2}{J} E = \\
&\frac{\beta^2}{J^2} \begin{pmatrix} I_2 + \mu r_1^2 & \mu r_1 r_2 & 0 \\ \mu r_1 r_2 & I_1 + \mu r_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4(I_3 + \mu(r_1^2 + r_2^2)) \end{pmatrix} \\
\frac{\partial J}{\partial \mathbf{r}} &= 2\mu \mathbf{e} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{e}) = 2\mu (r_1, r_2, 0) \\
\frac{\partial J}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{r}} \right)^T &= 4\mu^2 \begin{pmatrix} r_1^2 & r_1 r_2 & 0 \\ r_1 r_2 & r_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{r}} &= 2\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{r}} &= \frac{\beta^2}{J^2} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{r}} \right)^T - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{r}} \right) + \frac{\partial^2 U_N}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{r}} = \\
&= \frac{\beta^2}{J^3} \begin{pmatrix} 4\mu^2 r_1^2 - \mu(I_3 + \mu(r_1^2 + r_2^2)) & 4\mu^2 r_1 r_2 & 0 \\ 4\mu^2 r_1 r_2 & 4\mu^2 r_2^2 - \mu(I_3 + \mu(r_1^2 + r_2^2)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\
&\quad + \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U_N}{\partial r_1^2} & \frac{\partial^2 U_N}{\partial r_1 \partial r_2} & 0 \\ \frac{\partial^2 U_N}{\partial r_2 \partial r_1} & \frac{\partial^2 U_N}{\partial r_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 U_N}{\partial r_3^2} \end{pmatrix}. \\
\frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial \mathbf{e} \partial \mathbf{r}} &= \frac{\beta^2}{J^3} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}} \left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{r}} \right)^T = \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{e}} = \\
&= \frac{\beta^2}{J^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4\mu r_1(I_3 + \mu(r_1^2 + r_2^2)) & 4\mu r_2(I_3 + \mu(r_1^2 + r_2^2)) & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Условие

$$\mathcal{P}(\sigma) = 0$$

выполнено, когда выполнено хотя бы одно из условий

$$\mathcal{P}_k(\sigma) = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Первое условие приводится к виду

$$\sigma^2 - \sigma \left(\frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial e_1^2} + \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial e_2^2} \right) + \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial e_1^2} \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial e_2^2} - \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial e_1 \partial e_2} \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial e_2 \partial e_1} = 0.$$

Оба корня этого уравнения положительны, так как

$$\frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial e_1^2} + \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial e_2^2} = I_3 + \mu(r_1^2 + r_2^2) > 0$$

и

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial e_1^2} & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial e_1 \partial e_2} \\ \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial e_2 \partial e_1} & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial e_2^2} \end{pmatrix} = I_1 I_2 + \mu (I_1 r_1^2 + I_2 r_2^2) > 0.$$

Второе условие приводится к виду

$$\sigma^2 - \sigma w_1 + w_2 = 0.$$

где

$$w_1 = \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial r_1^2} + \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial r_2^2}, \quad w_2 = \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial r_1^2} \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial r_2^2} - \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial r_1 \partial r_2} \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial r_2 \partial r_1}.$$

Оба корня этого уравнения положительны при выполнении условий $w_2 > 0$ и $w_1 > 0$. Корни этого уравнения разных знаков при выполнении условий $w_2 < 0$. Оба корня этого уравнения отрицательны при выполнении условий $w_2 > 0$ и $w_1 < 0$.

Наконец, третье условие имеет вид

$$\sigma = \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial r_3^2}.$$

Поскольку имеет место равенство

$$\frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial r_3^2} = \frac{\mu_A}{\rho_A^3} + \frac{\mu_B}{\rho_B^3} + \frac{\mu_C}{\rho_C^3}$$

то корень, отвечающий третьему условию положителен.

Таким образом, степень неустойчивости данного решения может быть равна нулю, единице или двойке в зависимости от выполнения условия $\mathcal{P}_2(\sigma) = 0$.

1.7.2 Линии уровня потенциальной энергии и достаточные условия устойчивости равновесий.

Прежде всего для равностороннего треугольника изобразим на плоскости (ζ, x) линии уровня потенциальной энергии для перечисленных выше значений параметра ν (рис. 1.8). Как видно из рисунка, равновесия системы являются либо точками максимума, либо седловыми точками, т.е. для них достаточные условия устойчивости не выполнены.

Для исследования устойчивости исследуем свойства матрицы Гессе функции u . Её компоненты имеют вид:

$$u_{\zeta\zeta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = \nu \frac{x^2 - 2\zeta^2}{(\zeta^2 + x^2)^{5/2}} + \frac{(x-a)^2 - 2(\zeta-1)^2}{((x-a)^2 + (\zeta-1)^2)^{5/2}} + \frac{(x+a)^2 - 2(\zeta-1)^2}{((x+a)^2 + (\zeta-1)^2)^{5/2}}, \quad (1.67)$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \nu \frac{\zeta^2 - 2x^2}{(\zeta^2 + x^2)^{5/2}} + \frac{(\zeta-1)^2 - 2(x-a)^2}{((x-a)^2 + (\zeta-1)^2)^{5/2}} + \frac{(\zeta-1)^2 - 2(x+a)^2}{((x+a)^2 + (\zeta-1)^2)^{5/2}}, \quad (1.68)$$

$$u_{\zeta x} = u_{x\zeta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \zeta} =$$

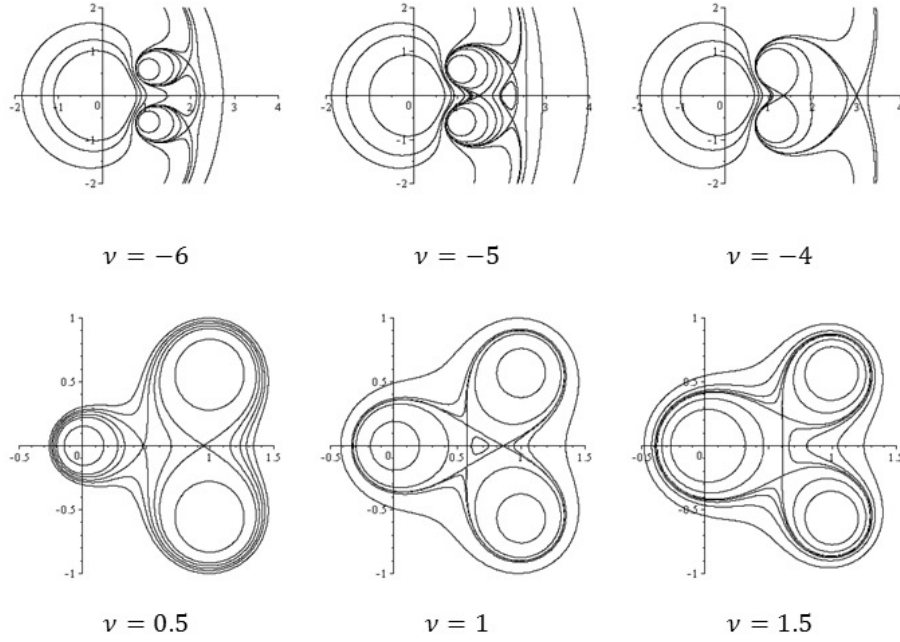


Рис. 1.8: Линии уровней потенциальной энергии в случае равностороннего треугольника, h — единица масштаба.

$$= -3 \left[\nu \frac{\zeta x}{(\zeta^2 + x^2)^{5/2}} + \frac{(\zeta - 1)(x - a)}{((x - a)^2 + (\zeta - 1)^2)^{5/2}} + \frac{(\zeta - 1)(x + a)}{((x + a)^2 + (\zeta - 1)^2)^{5/2}} \right] \quad (1.69)$$

Степени неустойчивости решений определяются знаками двух соотношений:

$$c_1 = u_{\zeta\zeta} + u_{xx}, \quad c_2 = u_{\zeta\zeta}u_{xx} - u_{\zeta x}^2 \quad (1.70)$$

Если $c_2 < 0$, то степень неустойчивости $\chi = 1$, и равновесие неустойчиво. Если $c_2 > 0$, то равновесие устойчиво ($\chi = 0$) при $c_1 > 0$, и $\chi = 2$ при $c_1 < 0$.

Так, на осевых решениях $x = 0$, имеют место следующие выражения

$$c_1 = -\frac{\nu}{|\zeta|^3} - \frac{2}{(a^2 + (\zeta - 1)^2)^{3/2}}, \quad (1.71)$$

$$c_2 = -2 \left[\frac{\nu}{|\zeta|^3} + \frac{2(\zeta - 1)^2 - a^2}{(a^2 + (\zeta - 1)^2)^{5/2}} \right] \left[\frac{\nu}{|\zeta|^3} + 2 \frac{(\zeta - 1)^2 - 2a^2}{(a^2 + (\zeta - 1)^2)^{5/2}} \right] \quad (1.72)$$

Кривые, определяемые соотношениями (1.71), (1.72), при каждом фиксированном значении параметра a делят плоскость ζ, ν на области, в которых имеет место определённое значение степени неустойчивости.

При различных значениях параметра ν число различных равновесий разных типов может быть различно:

- при $\nu \in (-\infty; \nu_{min})$ существуют два косых равновесия типа седло ($\chi = 1$);
- при $\nu \in (\nu_{min}; \nu_-)$ существуют два седловых косых равновесия ($\chi = 1$) и два прямых, одно из которых, ближе к началу координат — седлового типа ($\chi = 1$), а другое — типа максимума ($\chi = 2$);

- при $\nu \in (\nu_-; 0)$ существуют два прямых седловых равновесия ($\chi = 1$);
- при $\nu = 0$ эти прямые решения сливаются в одно, для которого $\chi = 1$;
- при $\nu \in (0; \nu_+)$ снова два прямых решения, обладающие $\chi = 1$ каждое.
- при $\nu \in (\nu_+; \nu_{max})$ имеются два косых седловых равновесия ($\chi = 1$), а среди двух прямых имеется одно седловое равновесие с $\chi = 1$ и одно, расположенное ближе к началу координат – типа максимума ($\chi = 2$).
- при $\nu \in (\nu_{max}; +\infty)$ косые равновесия – седловые ($\chi = 1$).

1.8 Существование и устойчивость перманентных вращений системы как целого.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением равностороннего треугольника

$$\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell, \quad \left(\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{2\pi}{3}, \quad r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\ell \right),$$

кроме того, будем полагать, что в его вершинах сосредоточены одинаковые массы:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1/3.$$

В этом случае функция $W = U_a$ (1.10), как функцию от (r, φ) , периодична по φ с периодом $2\pi/3$, и уравнения критических точек можно изучать, например, при $0 \leq \varphi \leq 2\pi/3$, которые, в свою очередь, записываются в следующем виде

$$-\mu r \frac{\beta^2}{J^2} + rn(r, \varphi) - \cos \varphi c(r, \varphi) + \sin \varphi s(r, \varphi) = 0, \quad (1.73)$$

$$r [\cos \varphi s(r, \varphi) + \sin \varphi c(r, \varphi)] = 0, \quad (1.74)$$

где

$$n(r, \varphi) = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{\rho_1^3(r, \varphi)} + \frac{1}{\rho_2^3(r, \varphi)} + \frac{1}{\rho_3^3(r, \varphi)} \right],$$

$$c(r, \varphi) = \frac{r_0}{3} \left[\frac{1}{\rho_1^3(r, \varphi)} - \frac{1}{2\rho_2^3(r, \varphi)} - \frac{1}{2\rho_3^3(r, \varphi)} \right], \quad s(r, \varphi) = \frac{\sqrt{3}r_0}{6} \left[\frac{1}{\rho_2^3(r, \varphi)} - \frac{1}{\rho_3^3(r, \varphi)} \right].$$

Поскольку $\sin \varphi = 0$ и $s(r, \varphi) = 0$ (тождественно по r) при $\varphi = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, то, как и ранее, будем различать два случая значений угла φ : $\varphi = \varphi_I$ и $\varphi = \varphi_{II}$.

При этом, уравнение (1.74) удовлетворяется при всех значениях $r \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Формально говоря, уравнение (1.74) удовлетворяется и при $r = 0$. Но в этом случае координаты (r, ψ, φ) вырождаются и не могут быть использованы. Такого вырождения можно избежать работая, например, в барицентрических координатах. Такая возможность исследуется в следующих главах. Другие подходы к изучению систем с особенностями обсуждаются в [77, 80].

Решениям I . и II . отвечают движения, на которых точка P находится на одной из осей симметрии $\Delta P_1 P_2 P_3$: в случае I . она располагается напротив вершины, а в случае II . — напротив середины стороны треугольника.

Для решений I . и II . уравнение (1.73) принимает вид (ср. (1.57))

$$\beta^2 = f_i(r) \quad i = I, II \quad (1.75)$$

$$f_i(r) = \frac{(\mu r^2 + r_0^2)^2}{\mu} \chi_i(r), \quad \chi_i(r) = \frac{1}{3r} \left(\frac{r - \varepsilon_i r_0}{|r - \varepsilon_i r_0|^3} + \frac{2r + \varepsilon_i r_0}{(r^2 + \varepsilon_i r r_0 + r_0^2)^{3/2}} \right),$$

где ε_i определено выше.

Нулям функций $f_i(r)$ при $r > 0$ отвечают нули функций $\chi_i(r)$. При этом функция $\chi_I(r)$ нулей не имеет, в то время как функция $\chi_{II}(r)$ обращается в нуль при $r \approx 0.2847183548 r_0$ (см., например, [55]). Этому нулю отвечает равновесие системы. Графики функций (1.75) на плоскости (r, β^2) обладают одной и той же наклонной асимптотой $\beta^2 = \mu r$.

Для определения критических точек функций (1.75) и их типов вычислим первые и вторые производные этих функций. Имеем

$$\frac{df_i(r)}{dr} = \frac{1}{\mu} \frac{d(\mu r^2 + r_0^2)^2}{dr} \chi_i(r) + \frac{(\mu r^2 + r_0^2)^2}{\mu} \frac{d\chi_i(r)}{dr} = \frac{\mu r^2 + r_0^2}{\mu} H_i(r), \quad (1.76)$$

$$H_i(r) = 4\mu r \chi_i(r) + (\mu r^2 + r_0^2) \frac{d\chi_i(r)}{dr} = \left[\frac{r(\mu r^2 - 3r_0^2) - \varepsilon_i r_0(3\mu r^2 - r_0^2)}{3r^2|r - \varepsilon_i r_0|^3} + \right. \\ \left. + \frac{r[\mu r^2(4r^2 + 19r_0^2) - r_0^2(12r^2 + 5r_0^2)] + 2\varepsilon_i r_0[\mu r^2(5r^2 + 3r_0^2) - r_0^2(7r^2 + r_0^2)]}{6r^2(r^2 + \varepsilon_i r r_0 + r_0^2)^{5/2}} \right]$$

$$\frac{d^2 f_i(r)}{dr^2} = 2r H_i(r) + \left(\frac{\mu r^2 + r_0^2}{\mu} \right) \frac{dH_i(r)}{dr} \quad (1.77)$$

$$\frac{dH_i(r)}{dr} = -\frac{2(r - \varepsilon_i r_0)(\mu r^4 - r_0^2(6r^2 + r_0^2) - 4rr_0(\mu r^2 - r_0^2)\varepsilon_i)}{3r^3|r - \varepsilon_i r_0|^5} - \\ - \frac{\mu r^2(8r^4 + 69r_0^2 r^2 - 4r_0^4) - r_0^2(2r_0^2 + 3r^2)(7r_0^2 + 16r^2)}{6r^2(r^2 + \varepsilon_i r r_0 + r_0^2)^{7/2}} - \\ - \frac{\omega_i r_0(7\mu r^4(11r_0^2 + 8r^2) - r_0^2(8r_0^4 + 63r_0^2 r^2 + 176r^4))}{12r^3(r^2 + \varepsilon_i r r_0 + r_0^2)^{7/2}} \quad (1.78)$$

При вычислении производных были использованы равенства

$$-3r^2 \frac{d\chi_i(r)}{dr} = \frac{3r - \varepsilon_i r_0}{|r - \varepsilon_i r_0|^3} + \frac{r(12r^2 + 5r_0^2) + 2\varepsilon_i r_0(7r^2 + r_0^2)}{2(r^2 + \varepsilon_i r r_0 + r_0^2)^{5/2}}, \\ 3r^3 \frac{d^2 \chi_i(r)}{dr^2} = \frac{2(r - \varepsilon_i r_0)(6r^2 - 4\varepsilon_i r r_0 + r_0^2)}{|r - \varepsilon_i r_0|^5} - \\ - \frac{2r(48r^4 + 53r^2 r_0^2 + 14r_0^4) + \varepsilon_i r_0(176r^4 + 63r^2 r_0^2 + 8r_0^4)}{4(r^2 + \varepsilon_i r r_0 + r_0^2)^{7/2}}.$$

Точки ветвления стационарных конфигураций по переменной r определяются из равенства нулю вычисленной в (1.76) первой производной функции $f_i(r)$. Так как первый сомножитель в этом выражении положителен, то эта производная может обращаться в нуль лишь в тех точках, где

$$H_i(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1.79)$$

$$\begin{aligned} & \mu \left[\frac{r - 3\varepsilon_i r_0}{|r - \varepsilon_i r_0|^3} + \frac{r(4r^2 + 19r_0^2) + 2\varepsilon_i r_0(5r^2 + 3r_0^2)}{2(r^2 + \varepsilon_i r r_0 + r_0^2)^{5/2}} \right] - \\ & - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \left[\frac{3r - \varepsilon_i r_0}{|r - \varepsilon_i r_0|^3} + \frac{r(12r^2 + 5r_0^2) + 2\varepsilon_i r_0(7r^2 + r_0^2)}{2(r^2 + \varepsilon_i r r_0 + r_0^2)^{5/2}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.80)$$

Для определения типа критических точек, найденных из соотношения (1.80), воспользуемся выражением (1.77) для второй производной $f_i(r)$. На найденных решениях первое слагаемое в (1.77) обращается в нуль, и знак определяется знаком производной (1.78).

Из соотношения (1.80) следует, что в критических точках функций $f_i(r)$ зависимость между μ от r определяется соотношением

$$\begin{aligned} \mu_i(r) &= - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \frac{d\chi_i(r)}{dr} \left(\frac{d\chi_i(r)}{dr} + 4 \frac{\chi_i(r)}{r} \right)^{-1} = \\ &= \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \left[\frac{3r - \varepsilon_i r_0}{|r - \varepsilon_i r_0|^3} + \frac{r(12r^2 + 5r_0^2) + 2\varepsilon_i r_0(7r^2 + r_0^2)}{2(r^2 + \varepsilon_i r r_0 + r_0^2)^{5/2}} \right] \times \\ &\times \left[\frac{r - 3\varepsilon_i r_0}{|r - \varepsilon_i r_0|^3} + \frac{r(4r^2 + 19r_0^2) + 2\varepsilon_i r_0(5r^2 + 3r_0^2)}{2(r^2 + \varepsilon_i r r_0 + r_0^2)^{5/2}} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (1.81)$$

причём

$$\frac{d\mu_i(r)}{dr} = \frac{2r_0^2}{r^3} \left(\frac{d\chi_i(r)}{dr} + 4 \frac{\chi_i(r)}{r} \right)^{-2} \left(\left[3 \frac{d\chi_i(r)}{dr} + 2 \frac{\chi_i(r)}{r} \right] \frac{d\chi_i(r)}{dr} - 2\chi_i(r) \frac{d^2\chi_i(r)}{dr^2} \right). \quad (1.82)$$

Случай *I*. Из соотношения (1.82) следует, что функция (1.81) не имеет критических точек при $r > 0$ (см. график на рис. 1.9) Это означает, что для всех значений параметра μ зависимость (1.75) устроена единообразно, и при её исследовании достаточно ограничиться, например, случаем $\mu = 1/4$, рассмотренным ранее в [56]. В этом случае функция $\beta^2 = f_I(r)$ имеет единственную особую точку $r = r_I^*$ – точку минимума (см.рис. 1.10a и 1.10b, выполненные, соответственно, для $\mu = 1/4$ и $\mu = 3/4$).

Случай *II*. В то же время, из соотношения (1.82) следует, что функция $\mu = \mu_{II}(r)$ достигает максимума при $r = r_* \approx 1.670537178r_0$, причём $\mu_* = \mu(r_*) \approx 0.4978570817$. Это означает, что при $\mu > \mu_*$ функция (1.75) не имеет критических точек при $r > 0$ (см. график на рис. 1.11), в то время как при $\mu < \mu_*$, например, в рассмотренном ранее в [56] случае $\mu = 1/4$, функция (1.75) имеет две критические

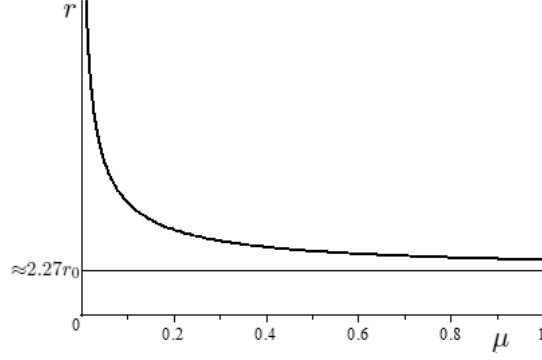


Рис. 1.9: График зависимости критических значений $\mu(r)$ для случая I .

точки – точку максимума r_{II}^{**} и точку минимума r_{II}^* , $r_{II}^{**} < r_{II}^*$ (также см. рис. 1.10а и 1.10б, выполненные для $\mu = 1/4$ и $\mu = 3/4$ соответственно). При $\mu \mapsto \mu_*$ точка максимума r_{II}^{**} и точка минимума r_{II}^* сливаются в точку перегиба. Заметим, что при найденном выше значении $r = r_{II} \approx 0.284718r_0$ эта функция обращается в нуль: $f_{II}(r_{II}) = 0$. Этому нулю отвечает положение равновесия системы в целом.

1.8.1 Достаточные условия устойчивости

Для определения достаточных условий устойчивости решений, исследуем входящие в матрицу второй вариации приведённого потенциала $W(\varphi, r)$ производные, имеющие следующий вид:

$$W_{rr} = \frac{\mu\beta^2(3\mu r^2 - r_0^2)}{J^3} + N(r, \varphi) + rN_r(r, \varphi) - \cos \varphi C_r(r, \varphi) + \sin \varphi S_r(r, \varphi),$$

$$W_{\varphi\varphi} = r [\cos \varphi [C(r, \varphi) + S_\varphi(r, \varphi)] + \sin \varphi [C_\varphi(r, \varphi) - S(r, \varphi)]],$$

$$W_{r\varphi} = W_{\varphi r} = r [\sin \varphi [C(r, \varphi) + rC_r(r, \varphi)] + \cos \varphi [S(r, \varphi) + rS_r(r, \varphi)]].$$

На решениях I . и II . эти производные записываются как

$$W_{rr} = \frac{\chi_k(r)}{J} (3\mu r^2 - r_0^2) + n(r, \varphi_k) + rn_r(r, \varphi_k) - \cos \varphi_k c_r(r, \varphi_k),$$

$$W_{\varphi\varphi} = r \cos \varphi_k [c(r, \varphi_k) + s_\varphi(r, \varphi_k)], \quad W_{r\varphi} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} n_r(r, \varphi_k) &= \frac{\varepsilon_k r_0 - r}{\rho_1^5(r, \varphi_k)} - \frac{\varepsilon_k r_0 + 2r}{2} \left(\frac{1}{\rho_2^5(r, \varphi_k)} + \frac{1}{\rho_3^5(r, \varphi_k)} \right) \\ c_r(r, \varphi_k) &= \frac{r_0(\varepsilon_k r_0 - r)}{\rho_1^5(r, \varphi_k)} + \frac{r_0(\varepsilon_k r_0 + 2r)}{4} \left(\frac{1}{\rho_2^5(r, \varphi_k)} + \frac{1}{\rho_3^5(r, \varphi_k)} \right) \\ s_\varphi(r, \varphi_k) &= -\frac{3}{4} \varepsilon_k r_0^2 r \left(\frac{1}{\rho_2^5(r, \varphi_k)} + \frac{1}{\rho_3^5(r, \varphi_k)} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, исследование достаточных условий устойчивости сводится к изучению знаков функций W_{rr} и $W_{\varphi\varphi}$.

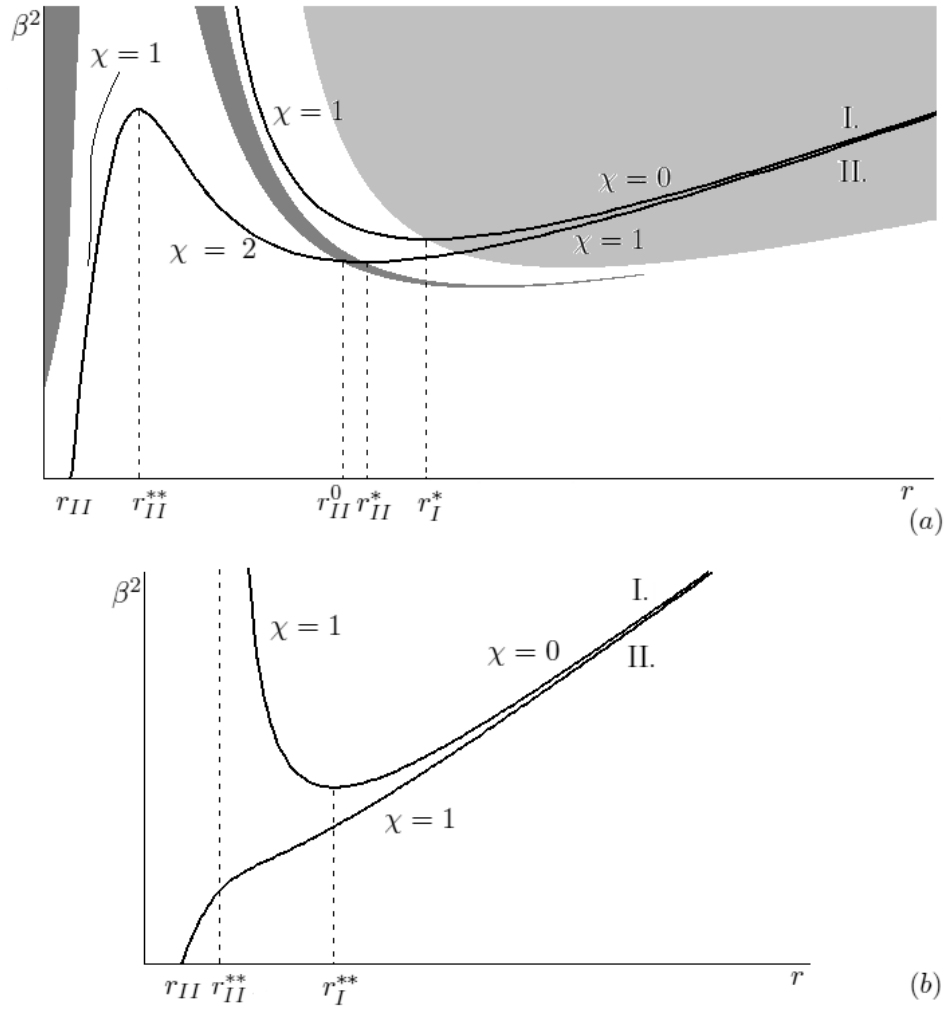


Рис. 1.10: Диаграмма Пуанкаре при $\mu = 1/4$ а), при $\mu = 3/4$ б); светло- и темно-серым обозначены области значений параметра $\beta = \beta(r)$, где выполняются необходимые условия устойчивости решений I. и II. соответственно.

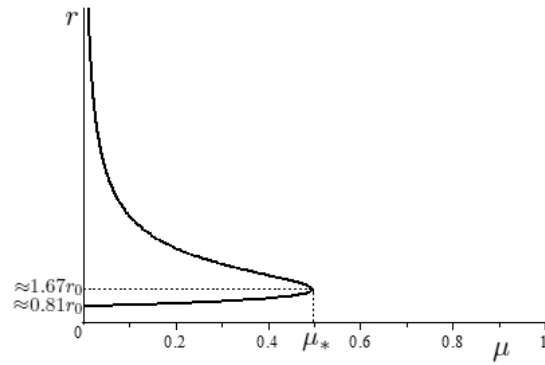


Рис. 1.11: График зависимости критических значений $\mu(r)$ для случая II.

На решении I. при $0 < \mu < 1$ имеем $W_{\varphi\varphi} > 0$ при всех значениях $r > 0$. Кроме того, при $r_0 < r < r_I^*$ функция $W_{rr} < 0$ и движение неустойчиво ($\chi = 1$), в то время как при $r > r_I^*$ функция $W_{rr} > 0$ и движения устойчивы по Ляпунову ($\chi = 0$).

На решении II. при $0 < \mu < 1/2$ имеем $W_{\varphi\varphi} < 0$ при всех значениях $r > 0$. Это означает, что степень неустойчивости χ не может быть меньше единицы. При $r_{II} < r < r_{II}^{**}$ и при $r > r_{II}^*$ имеем $W_{rr} > 0$, и движение неустойчиво ($\chi = 1$). Вместе с тем, при $r_{II}^{**} < r < r_{II}^*$ имеем $W_{rr} < 0$, и требуется исследование необходимых условий устойчивости ($\chi = 2$).

При $\mu > 1/2$ на решении II. имеем $W_{rr} > 0$ при $r > r_{II}$, и движения неустойчивы ($\chi = 1$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Устойчивость движений, для которых $r = r_I^*$, $r = r_{II}^*$, $r = r_{II}^{**}$ и $r = r_0$ в работе не обсуждается.

ПРИМЕР. На рис. 1.10а ветви бифуркационной диаграммы, отвечающие решениям I. и II., изображены для случая $\mu = 1/4$, рассматривавшегося ранее ([56]). На ветви I. точка $r = r_I^* \approx 4.037131r_0$ отделяет область $r > r_I^*$, для которой движения устойчивы по Ляпунову ($\chi = 0$), от области $r < r_I^*$, для которой движения неустойчивы ($\chi = 1$). На ветви II. при $r_{II} < r < r_{II}^{**} = r_0$ и при $r > r_{II}^* \approx 3.357757r_0$ движения неустойчивы ($\chi = 1$), в то время как для движений с $r_{II}^{**} < r < r_{II}^*$ требуется исследование необходимых условий устойчивости ($\chi = 2$).

На рис. 1.10b изображены ветви бифуркационной диаграммы, отвечающие решениям I. и II. для случая $\mu = 3/4$. Здесь $r_I^{**} \approx 2.918734r_0$, $\beta_I = \beta(r_I^{**}) = 1.431$. Установившиеся движения I. существуют при всех значениях β , в то время как движения II. существуют лишь при $\beta^2 \geq \beta_I^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как известно из многочисленных исследований (см., например, [15, 35, 62–64, 72, 97]), та или иная дискретная симметрия в распределении масс обеспечивает существование семейств установившихся движений, примечательных как с теоретической, так и с прикладной точки зрения. Не составляют исключения и установившиеся движения, исследуемые и в данной задаче.

1.8.2 Необходимые условия устойчивости

Для исследования необходимых условий устойчивости установившихся движений из семейства II. с $\chi = 2$ выпишем линеаризованные в их окрестности уравнения движения. Они имеют вид

$$A\ddot{\delta r} - G\dot{\delta\varphi} - B\delta r = 0, \quad C\ddot{\delta\varphi} + G\dot{\delta r} - D\delta\varphi = 0,$$

$$A = R_{\dot{r}\dot{r}} = \mu, \quad C = R_{\dot{\varphi}\dot{\varphi}} = \frac{\mu r^2 r_0^2}{J}, \quad G = R_{r\dot{\varphi}} = -\frac{2\mu r r_0^2 \beta}{J^2},$$

$$B = R_{rr} = \frac{\mu\beta^2(r_0^2 - 3\mu r^2)}{J^3} - U_{rr}(r, \pi), \quad D = R_{\varphi\varphi} = -U_{\varphi\varphi}(r, \pi).$$

Здесь

$$U_{rr}(r, \pi) = n(r, \pi) + r n_r(r, \pi) + c_r(r, \pi), \quad U_{\varphi\varphi}(r, \pi) = -r(c(r, \pi) + s_\varphi(r, \pi)).$$

Все корни характеристического уравнения

$$P(\lambda) = \lambda^4 + b\lambda^2 + c = 0, \tag{1.83}$$

$$b = G^2 A^{-1} C^{-1} - B A^{-1} - D C^{-1}, \quad c = B D C^{-1} A^{-1}$$

чисто мнимые при одновременном выполнении условий

$$b^2 - 4c \geq 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad (1.84)$$

определяющих необходимые условия устойчивости.

Для каждого значения параметра μ условиями (1.84) выделяется область на плоскости (r, β^2) . Так для обсуждавшегося выше случая $\mu = 1/4$ для движений I . эта область закрашена светло-серым (рис. 4а). Естественно, эта область содержит часть бифуркационной кривой, отвечающей стационарным движениям, устойчивым в вековом смысле ($\chi = 0$).

В этом же случае для движений II . аналогичная область закрашена тёмно-серым (см. также рис. 1.10а). Эта область, конечно, не содержит неустойчивых стационарных движений с $\chi = 1$. Но она разбивает множество стационарных движений II . на два подмножества, на одном из которых необходимые условия устойчивости не выполнены, а на другом – выполнены. Область выполнения необходимых условий устойчивости – промежуток $r \in (r_{II}^0, r_{II}^*)$, где $r_{II}^0 \approx 3.132426r_0 \in (r_{II}^{**}, r_{II}^*)$.

Неравенства (1.84) выделяют область Ω в пространстве (μ, r, β) . В том же пространстве уравнение (1.75) при $i = II$ задает поверхность $\mathcal{F}$, заполненную стационарными движениями.

На рис. 1.12 изображена проекция пересечения области Ω и поверхности $\mathcal{F}$ на полуполосу $\{0 < \mu < 1\} \times \{0 \leq r < \infty\}$.

В этой полосе имеется точка $(r_{**}, \mu_{**}) \approx (2.44019r_0, 0.395317)$, в которой пересекаются кривые, определяемые равенствами $b^2 - 4c = 0$, $b = 0$ и $c = 0$ рассматриваемыми после подстановки в них величины β , выраженной из соотношения (1.75) при $i = II$. При $\mu > \mu_{**}$ устойчивых в первом приближении установившихся движений из семейства II . нет. При уменьшении значения параметра μ диапазон значений r , при которых выполнены необходимые условия устойчивости, становится шире, одновременно сдвигаясь в область больших значений величины r (рис. 1.12b). Таким образом, при $\mu > \mu_{**}$ множество установившихся движений не столь богато, как в противоположном случае.

1.8.3 О существовании “косых” стационарных конфигураций

Рассмотрим вопрос о существовании решений, отличных от I . и II ., т.е. “косых” стационарных конфигураций. Для этого воспользуемся введённой выше ПСО $Sx_1x_2x_3$. Прежде всего, определим безразмерные переменные

$$x_1 = r_0 x'_1, \quad x_2 = r_0 x'_2, \quad x_3 = r_0 x'_3.$$

Отбрасывая штрихи, представим приведённый потенциал в виде

$$W = \frac{1}{2r_0^2} \frac{\beta^2}{\mu(x_1^2 + x_2^2) + 1} - \frac{1}{3r_0} (\rho_1^{-1}(x_1, x_2) + \rho_2^{-1}(x_1, x_2) + \rho_3^{-1}(x_1, x_2)), \quad (1.85)$$

$$\rho_1(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}, \quad \rho_2(x_1, x_2) = \sqrt{\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2},$$

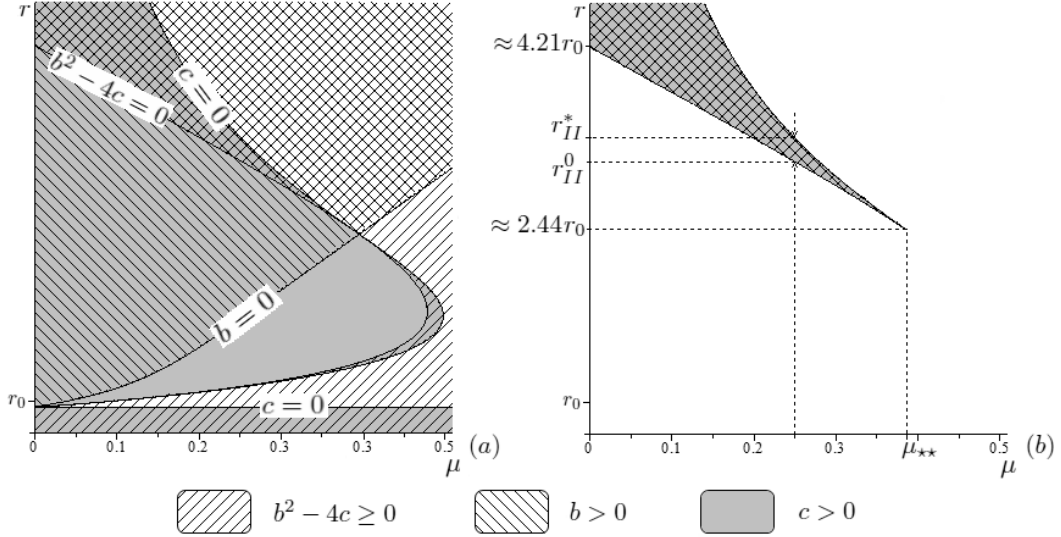


Рис. 1.12: Область значений параметра $\mu = \mu(r)$ при которых выполняются необходимые условия устойчивости установившихся движений из семейства II .

$$\rho_3(x_1, x_2) = \sqrt{\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

На рисунке 1.13 схематично изображены сечения приведенного потенциала (1.85) при $\mu = 1/4$ и характерных значениях параметра β : рис. 1.13a — $\beta \in (0; \beta(r_{II}^*))$, рис. 1.13b — $\beta \in (\beta(r_{II}^*); \beta(r_I^*))$, рис. 1.13c — $\beta \in (\beta(r_I^*); \beta(r_{II}^{**}))$, рис. 1.13d — $\beta > \beta(r_{II}^{**})$.

Символом “*” отмечены точки максимума, символом “*” — точки минимума приведенного потенциала (1.85).

ЗАМЕЧАНИЕ. Для случая $\mu = 3/4$ сечения приведенного потенциала будут только двух типов. Эти сечения по структуре схожи с сечениями на рисунках 1.13a и 1.13d.

Изучение рисунков показывает, что во всех обнаруженных численно случаях установившиеся движения — осевые. Возникает вопрос: существуют ли т.н. “косые” установившиеся движения, для которых массивная точка не располагается ни на одной из осей симметрии треугольника.

Прежде всего исследуем этот вопрос в случае, когда центр масс треугольника и массивная точка расположены неподалёку друг от друга. В малой окрестности точки C для точек плоскости π представим выражение для приведенного потенциала (1.85) в виде разложения

$$W = W_0 + W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + \dots,$$

$$W_0 = \frac{\beta^2 - 2r_0}{2r_0^2}, \quad W_1 = 0, \quad W_2 = -\frac{2\mu\beta^2 + r_0}{4r_0^2} (x_1^2 + x_2^2), \quad W_3 = -\frac{5}{8} \frac{1}{r_0} z (x_1^2 - 3x_2^2),$$

$$W_4 = \frac{32\mu^2\beta^2 - 9r_0}{64r_0^2} (x_1^2 + x_2^2)^2, \quad W_5 = -\frac{35}{128} \frac{1}{r_0} z (x_1^2 - 3x_2^2) (x_1^2 + x_2^2).$$

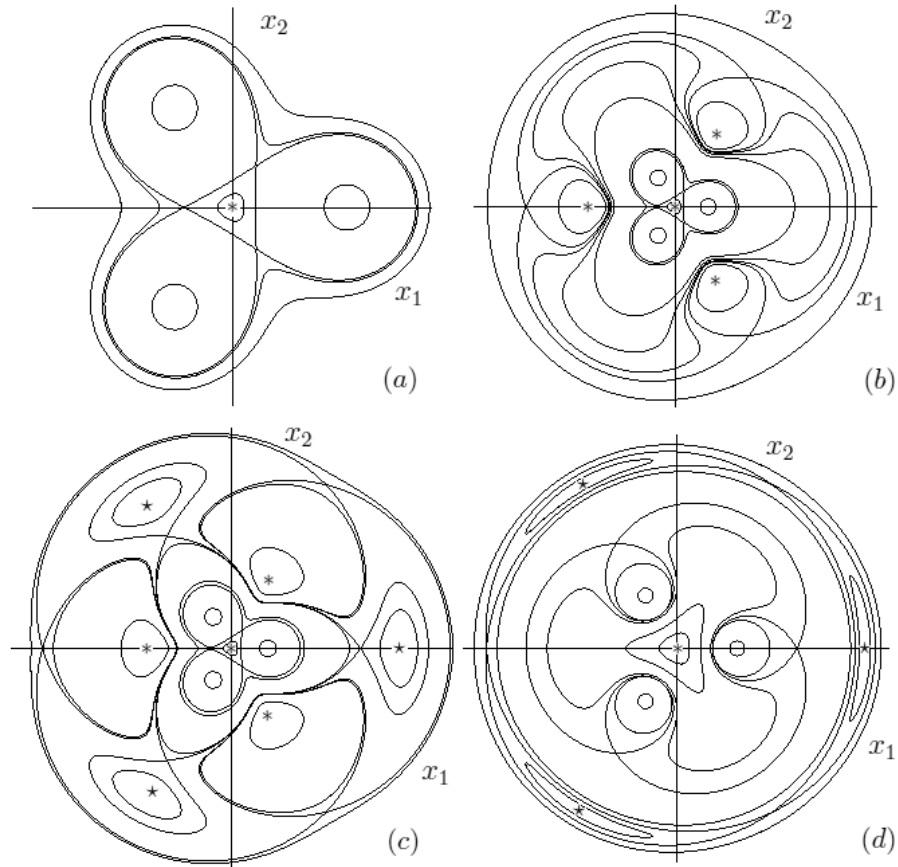


Рис. 1.13: Сечения приведенного потенциала при $\mu = 1/4$ и характерных значениях параметра β : а — $\beta \in (0; \beta(r_{II}^*))$, б — $\beta \in (\beta(r_{II}^*); \beta(r_I^*))$, в — $\beta \in (\beta(r_I^*); \beta(r_{II}^{**}))$, д — $\beta > \beta(r_{II}^{**})$; * — точки максимума, * — точки минимума

Введём функции (ср. [64, 72, 97])

$$j_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad j_3 = \sqrt[3]{x_1^3 - 3x_1x_2^2},$$

инвариантные относительно поворота на угол $\alpha = 2\pi/3$:

$$j_k(x_1, x_2) \equiv j_k(x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha, x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha), \quad k = 2, 3.$$

Якобиан

$$\det \frac{\partial \{j_2, j_3\}}{\partial \{x_1, x_2\}} = \frac{x_2(x_2 - \sqrt{3}x_1)(x_2 + \sqrt{3}x_1)}{j_2 j_3^2},$$

отличен от нуля всюду кроме осей симметрии треугольника. Это означает, что j_2, j_3 могут быть использованы в качестве новых переменных всюду вне осей симметрии треугольника. При этом приведённый потенциал (1.85) запишется в виде

$$W = \frac{\beta^2 - 2r_0}{2r_0^2} - \frac{2\mu\beta^2 + r_0}{4r_0^2} j_2^2 - \frac{5}{8r_0} j_3^3 + \frac{32\mu^2\beta^2 - 9r_0}{64r_0^2} j_2^4 - \frac{35}{128} \frac{1}{r_0} j_3^3 j_2^2 + \dots$$

В переменных (j_2, j_3) уравнения критических точек функции W имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial j_2} &= - \left(\frac{2\mu\beta^2 + r_0}{2r_0^2} - \frac{32\mu^2\beta^2 - 9r_0}{16r_0^2} j_2^2 + \frac{35}{64} \frac{1}{r_0} j_3^3 \right) j_2 + \dots = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial j_3} &= - \frac{15}{8r_0} \left(1 + \frac{7}{16} j_2^2 \right) j_3^2 + \dots = 0. \end{aligned} \tag{1.86}$$

Так как в окрестности начала координат величины (j_2, j_3) малы вместе с (x_1, x_2) , то в такой окрестности уравнения (1.86) не удовлетворяются кроме как при значениях $j_2 = j_3 = 0$, для которых замена переменных некорректна. Это означает, что “косых” стационарных конфигураций, при которых точка P располагается вблизи центра $\Delta P_1 P_2 P_3$, не существует.

Теперь исследуем вопрос о том, возможны ли “косые” установившиеся движения в случае, когда массивная точка располагается далеко от центра треугольника. Для этого введём функции

$$k_2 = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad k_3 = \frac{x_1^3 - 3x_1x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2},$$

Эти функции инвариантны относительно поворота на угол $\alpha = 2\pi/3$:

$$k_p(x_1, x_2) \equiv k_p(x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha, x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha), \quad p = 2, 3.$$

Якобиан

$$\det \frac{\partial \{k_2, k_3\}}{\partial \{x_1, x_2\}} = \frac{3x_2(\sqrt{3}x_1 - x_2)(\sqrt{3}x_1 + x_2)}{(x_1^2 + x_2^2)^{7/2}},$$

отличен от нуля всюду кроме осей симметрии треугольника. Это означает, что величины k_2, k_3 также могут быть использованы в качестве новых переменных всюду вне осей симметрии треугольника. Воспользуемся ими для исследования

вопроса о существовании “косых” стационарных конфигураций в случае, когда центр треугольника и точка достаточно далеки друг от друга.

Если центр треугольника и массивная точка далеки друг от друга, то $0 < k_2 \ll 1$, $|k_3| \ll 1$. Представим выражение для приведённого потенциала (1.85) в виде разложения

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{r_0\sqrt{x_1^2+x_2^2}} + \frac{\beta^2}{2\mu r_0^2(x_1^2+x_2^2)} - \frac{1}{4r_0(x_1^2+x_2^2)^{3/2}} - \\ &\quad - \frac{5x_1(x_1^2-3x_2^2)}{8r_0(x_1^2+x_2^2)^{7/2}} - \frac{\beta^2}{2\mu^2 r_0^2(x_1^2+x_2^2)^2} - \frac{9}{64r_0(x_1^2+x_2^2)^{5/2}} + \dots = \\ &= -\frac{1}{r_0}k_2 + \frac{\beta^2}{2\mu r_0^2}k_2^2 - \frac{1}{4r_0}\left(1 + \frac{5}{2}k_3\right)k_2^3 - \frac{\beta^2}{2\mu^2 r_0^2}k_2^4 - \frac{9}{64r_0}k_2^5 + \dots \end{aligned}$$

Уравнения критических точек имеют вид

$$\frac{\partial W}{\partial k_2} = -\frac{1}{r_0} + \frac{\beta^2}{\mu r_0^2}k_2 - \frac{3}{4r_0}\left(1 + \frac{5}{2}k_3\right)k_2^2 - \frac{2\beta^2}{\mu^2 r_0^2}k_2^3 - \frac{45}{64r_0}k_2^4 + \dots = 0 \quad (1.87)$$

$$\frac{\partial W}{\partial k_3} = -\frac{5}{8r_0}k_2^3 + \dots = 0. \quad (1.88)$$

Нетрудно видеть, что в рамках сделанных предположений о малости k_2 , $|k_3|$ система (1.87), (1.88) решений не имеет. Это означает, что “косые” стационарные конфигурации, на которых центр треугольника и массивная точка далеки друг от друга, не существуют.

Глава 2

Барицентрические координаты. “Проволочный” треугольник

В работе [104] (см. также [105]) изучается вопрос о приближении выражения потенциала для тел с нерегулярным распределением масс с помощью симплицеального разбиения. При этом обсуждается вопрос, где размещать массы — в вершинах такого разбиения или на его рёбрах. Естественно ожидать, что выбор способа распределения масс не должен существенно сказываться на качественном поведении системы в целом.

В настоящем разделе сравнительный анализ таких двух подходов осуществляется на простейшем примере треугольников с массами в вершинах и с массами, равномерно распределёнными вдоль сторон. Показывается, что в этих двух случаях свойства стационарных конфигураций не так близки друг другу, как этого можно было бы ожидать.

2.1 Основные обозначения и постановка задачи.

Как и в предыдущей главе, рассматривается задача о движении треугольника $P_1P_2P_3$ и материальной точки P под действием сил взаимного ньютоновского притяжения. Также предполагается, что $\Delta P_1P_2P_3$ и точка P остаются в одной и той же неподвижной плоскости во все время движения.

Сопоставляются два случая распределения масс в треугольнике. В первом случае масса считается сосредоточенной в вершинах, то есть точки P_1 , P_2 и P_3 оснащены массами m_1 , m_2 и m_3 , соответственно (далее, точечный треугольник). Во втором случае предполагается, что треугольник составлен из однородных стержней — на стороне P_1P_2 равномерно распределена масса величиной m_3 (1, 2, 3) (далее, “проволочный” треугольник).

Задача состоит в отыскании стационарных движений во вращающейся системе отсчета изучаемой механической системы и исследовании достаточных условий их устойчивости с использованием барицентрических координат.

Независимо от распределения масс в треугольнике, приведенная потенциальная энергия рассматриваемой системы записывается в виде (1.10).

Согласно теореме Гюйгенса-Штейнера, величина J определяется как

$$J = m(\overrightarrow{CS}, \overrightarrow{CS}) + M(\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SP}) + J_\Delta$$

где J_Δ — момент инерции треугольника относительно оси, проходящей через его центр масс C и перпендикулярной его плоскости, а точка S — центр масс всей системы.

В случае, когда масса сосредоточена в вершинах треугольника, потенциальная энергия ньютоновского притяжения записывается в виде

$$U_N = -MG \sum_i \frac{m_i}{\rho_i}, \quad \rho_i = \left(\overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{PP_1} \right)^{1/2} \quad (1, 2, 3).$$

В случае, когда масса равномерно распределена на сторонах треугольника — в виде

$$U_N = -MG \int \frac{\sigma_3(s) ds}{\rho},$$

где σ_i — линейная плотность i -й стороны, ds — элемент длины. Интегрирование осуществляется по всему контуру треугольника.

С помощью известного выражения для потенциала однородного стержня (см., например, [36, 73]) находим

$$U_N = - \sum_{(1,2,3)} k_1 \ln \frac{\rho_2 + \rho_3 + \ell_1}{\rho_2 + \rho_3 - \ell_1}, \quad k_1 = MG \frac{m_1}{\ell_1} \quad (1, 2, 3)$$

2.2 Основные величины в барицентрических координатах.

Для описания свойств установившихся движений можно воспользоваться системой барицентрических координат (БК), связанной с $\Delta P_1 P_2 P_3$. По определению (см., например, [6]), барицентрические координаты точки P на плоскости — это тройка чисел (x_1, x_2, x_3) , таких, что

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \tag{2.1}$$

задающих “массы” x_1, x_2, x_3 , которые надо поместить в точки P_1, P_2, P_3 соответственно, чтобы точка P была их центром масс. Тогда

$$\overrightarrow{OP} = x_1 \overrightarrow{OP_1} + x_2 \overrightarrow{OP_2} + x_3 \overrightarrow{OP_3}$$

Определение барицентрических координат не зависит от выбора точки O . Для удобства в качестве точки O возьмем точку C . Тогда в барицентрических координатах

$$r^2 = \left(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CP} \right) = \left(x_1 \overrightarrow{CP_1} + x_2 \overrightarrow{CP_2} + x_3 \overrightarrow{CP_3}, x_1 \overrightarrow{CP_1} + x_2 \overrightarrow{CP_2} + x_3 \overrightarrow{CP_3} \right) = (\Lambda \vec{x}, \vec{x}),$$

где $\Lambda = \|\Lambda_{ij}\|$ — матрица, такая, что $\Lambda_{ij} = \left(\overrightarrow{CP_i}, \overrightarrow{CP_j} \right)$ и $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

С учетом разложений

$$\overrightarrow{P_1 P} = \overrightarrow{P_1 C} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{P_1 C} + x_1 \overrightarrow{CP_1} + x_2 \overrightarrow{CP_2} + x_3 \overrightarrow{CP_3} =$$

$$= -(x_2 + x_3)\overrightarrow{CP_1} + x_2\overrightarrow{CP_2} + x_3\overrightarrow{CP_3} \quad (1, 2, 3),$$

аналогично получаем выражения для ρ_i , $i = 1, 2, 3$:

$$\rho_1(\vec{y}_1) = \left(\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P}\right)^{1/2} = (\Lambda\vec{y}_1, \vec{y}_1)^{1/2}, \quad \vec{y}_1 = (-(x_2 + x_3), x_2, x_3)^T;$$

$$\rho_2(\vec{y}_2) = \left(\overrightarrow{P_2P}, \overrightarrow{P_2P}\right)^{1/2} = (\Lambda\vec{y}_2, \vec{y}_2)^{1/2}, \quad \vec{y}_2 = (x_1, -(x_1 + x_3), x_3)^T;$$

$$\rho_3(\vec{y}_3) = \left(\overrightarrow{P_3P}, \overrightarrow{P_3P}\right)^{1/2} = (\Lambda\vec{y}_3, \vec{y}_3)^{1/2}, \quad \vec{y}_3 = (x_1, x_2, -(x_1 + x_2))^T.$$

Таким образом, r , ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 являются однородными функциями первой степени от x_1 , x_2 , x_3 , имеющих следующий вид

$$\rho_1^2 = x_2^2\ell_3^2 + x_3^2\ell_2^2 + x_2x_3(-\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2) \quad (1, 2, 3)$$

2.2.1 Момент инерции в БК для точечного треугольника

Для случая распределения массы треугольника между его вершинами, в такой системе координат точки P_1 , P_2 , P_3 задаются тройками чисел $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ соответственно, центр масс треугольника – точка C – задается тройкой (μ_1, μ_2, μ_3) , $\mu_i = m_i/m$ и $m = m_1 + m_2 + m_3$.

Выпишем явный вид элементов матрицы Λ . Для этого необходимо определить шесть скалярных произведений вида $(\overrightarrow{CP_i}, \overrightarrow{CP_j})$, где $i \leq j$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$. Согласно определению центра масс треугольника имеем:

$$m_1\overrightarrow{CP_1} + m_2\overrightarrow{CP_2} + m_3\overrightarrow{CP_3} = 0$$

Домножая это соотношение скалярно последовательно на $\overrightarrow{CP_1}$, $\overrightarrow{CP_2}$, $\overrightarrow{CP_3}$, находим три уравнения

$$\begin{aligned} m_1(\overrightarrow{CP_1}, \overrightarrow{CP_1}) + m_2(\overrightarrow{CP_2}, \overrightarrow{CP_1}) + m_3(\overrightarrow{CP_3}, \overrightarrow{CP_1}) &= 0, \\ m_1(\overrightarrow{CP_1}, \overrightarrow{CP_2}) + m_2(\overrightarrow{CP_2}, \overrightarrow{CP_2}) + m_3(\overrightarrow{CP_3}, \overrightarrow{CP_2}) &= 0, \\ m_1(\overrightarrow{CP_1}, \overrightarrow{CP_3}) + m_2(\overrightarrow{CP_2}, \overrightarrow{CP_3}) + m_3(\overrightarrow{CP_3}, \overrightarrow{CP_3}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Далее

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{CP_2} - \overrightarrow{CP_1} \quad (1, 2, 3)$$

Возводя в квадрат, имеем

$$(\overrightarrow{CP_2}, \overrightarrow{CP_2}) - 2(\overrightarrow{CP_2}, \overrightarrow{CP_1}) + (\overrightarrow{CP_1}, \overrightarrow{CP_1}) = \ell_3^2, \quad (1, 2, 3)$$

Тогда

$$(\overrightarrow{CP_1}, \overrightarrow{CP_2}) = (\overrightarrow{CP_2}^2 + \overrightarrow{CP_1}^2 - \ell_3^2)/2, \quad (1, 2, 3) \quad (2.3)$$

Подставляя соотношения (2.3) в (2.2), находим

$$(\overrightarrow{CP_1}, \overrightarrow{CP_1}) = \frac{\ell_3^2 m_2^2 + \ell_2^2 m_3^2 + (-\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2) m_2 m_3}{m^2} \quad (1, 2, 3)$$

С учетом этого, в силу (2.3)

$$(\overrightarrow{CP_1}, \overrightarrow{CP_2}) = \frac{m m_3 (\ell_1^2 + \ell_2^2 - \ell_3^2) - 2(m_1 m_2 \ell_3^2 + m_2 m_3 \ell_1^2 + m_3 m_1 \ell_2^2)}{2m^2} \quad (1, 2, 3)$$

Момент инерции J в данном случае примет вид:

$$J = \frac{1}{2} \frac{mM}{M+m} \sum_{(1,2,3)} (x_1 - \mu_1)^2 (-\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2) + \frac{1}{m} \sum_{(1,2,3)} m_1 m_2 \ell_3^2$$

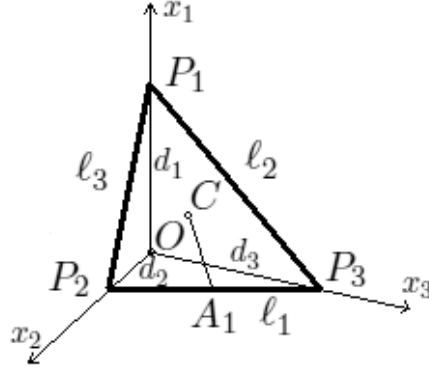


Рис. 2.1:

2.2.2 Момент инерции в БК для “проволочного” треугольника

Барицентрические координаты вершин треугольника и середин его сторон — точек A_1, A_2, A_3 — имеют вид

$$P_1 : (1, 0, 0), \quad P_2 : (0, 1, 0), \quad P_3 : (0, 0, 1);$$

$$A_1 : (0, 1/2, 1/2), \quad A_2 : (1/2, 0, 1/2), \quad A_3 : (1/2, 1/2, 0).$$

Тогда БК точки C записываются в виде

$$\left(\frac{M_1}{2}, \frac{M_2}{2}, \frac{M_3}{2} \right), \quad \text{где} \quad M_1 = \frac{m_2 + m_3}{m} \quad (1, 2, 3) \quad (2.4)$$

Момент инерции J_Δ “проволочного” треугольника $P_1P_2P_3$ равен сумме моментов инерции его сторон относительно оси, проходящей через центр масс C и перпендикулярной его плоскости. Вновь применяя теорему Гюйгенса – Штейнера, находим

$$J_\Delta = \sum_{(1,2,3)} m_i \left(\frac{\ell_i^2}{12} + A_i C^2 \right)$$

Известна [6] геометрическая конструкция, позволяющая наглядно представить вычисления величин $A_i C$, $i = 1, 2, 3$ в барицентрических координатах.

Пусть $Ox_1x_2x_3$ – тройка осей прямоугольной декартовой системы координат. Расположим треугольник таким образом, чтобы его вершины располагались на соответствующих осях: $P_i \in Ox_i$ (рис. 2.1). Обозначив $OP_i = d_i$, в силу теоремы Пифагора имеем соотношения

$$d_2^2 + d_3^2 = \ell_1^2 \quad (1, 2, 3)$$

Складывая их, получаем

$$2(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) = \ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2 \quad \Rightarrow \quad d_1^2 = \frac{\ell_2^2 + \ell_3^2 - \ell_1^2}{2} \quad (1, 2, 3) \quad (2.5)$$

Определим положение центра масс треугольника. Для этого воспользуемся теоремой о группировке. Массу каждой из сторон можно считать сосредоточенной в их серединах — точках A_i . Разобьем эти массы пополам и разнесем половины в ограничивающие стороны вершины. Исходя из определения центра масс (см., например, [6]), имеем

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2m} \sum_{(1,2,3)} (m_2 + m_3) \overrightarrow{OP_1}$$

Так как $\overrightarrow{OA_1} = (\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3})/2$, то

$$\overrightarrow{A_1C} = \frac{1}{2m} \left((m_2 + m_3) \overrightarrow{OP_1} - m_2 \overrightarrow{OP_2} - m_3 \overrightarrow{OP_3} \right)$$

откуда

$$A_1C^2 = (\overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1C}) = \frac{1}{4m^2} [(m_2 + m_3)^2 d_1^2 + m_2^2 d_2^2 + m_3^2 d_3^2]$$

и в силу представлений (2.5) после преобразований

$$A_1C^2 = \frac{1}{4m^2} [-m_2 m_3 \ell_1^2 + (m_2 + m_3)(m_3 \ell_2^2 + m_2 \ell_3^2)] \quad (1, 2, 3)$$

Окончательно

$$J_\Delta = \sum_{(1,2,3)} \left(\frac{m_1}{3} + \frac{m_2 m_3}{m} \right) \frac{\ell_1^2}{4}$$

и

$$J = \frac{1}{2} \frac{mM}{M+m} \sum_{(1,2,3)} (x_1 - M_1/2)^2 (-\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2) + \sum_{(1,2,3)} \left(\frac{m_1}{3} + \frac{m_2 m_3}{m} \right) \frac{\ell_1^2}{4}.$$

2.3 Критические точки приведенного потенциала

Для отыскания стационарных конфигураций воспользуемся методом Рауса [88, 89] (см. также [34]). В силу зависимости между собой переменных x_1, x_2, x_3 для определения критических точек приведенного потенциала (1.10) применим функцию Рауса

$$W_\lambda = W + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 1). \quad (2.6)$$

2.3.1 Критические точки приведенного потенциала в случае точечного треугольника

В этом случае критические точки будут описываться уравнениями

$$\frac{\partial W_\lambda}{\partial x_1} = -\frac{1}{2} \omega^2 \frac{\partial J}{\partial x_1} + GM \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{\rho_i^2} \frac{\partial \rho_i}{\partial x_1} + \lambda = 0 \quad (1, 2, 3) \quad (2.7)$$

где $\omega = P_\psi/J$ и P_ψ — постоянная интеграла площадей. Эти уравнения следует рассматривать вместе с уравнением (2.1), выражающим зависимость переменных.

Домножение i -го уравнения из системы (2.7) на x_i и суммирование всех уравнений позволяет с помощью (2.1) и условий однородности ρ_i найти выражение для λ :

$$\lambda = \frac{1}{2}\omega^2 \left(x_1 \frac{\partial J}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial J}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial J}{\partial x_3} \right) - MG \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \frac{m_3}{\rho_3} \right). \quad (2.8)$$

Подстановка (2.8) в (2.7) дает систему уравнений

$$\frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^3 x_i \left(\frac{\partial J}{\partial x_i} - \frac{\partial J}{\partial x_1} \right) + MG \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{\rho_i^2} \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x_1} - \rho_i \right) = 0 \quad (1, 2, 3) \quad (2.9)$$

Система (2.9) существенно нелинейна, её общее решение в общем случае неочевидно. С другой стороны, если выразить из первых двух уравнений (2.7) величины ω^2 и λ и подставить найденные выражения в третье уравнение, то получится уравнение

$$\mathfrak{f}(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \mathfrak{f} = - \sum_{(1,2,3)} \frac{\partial J}{\partial x_1} \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{\rho_i^2} \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x_2} - \frac{\partial \rho_i}{\partial x_3} \right)$$

задающее двумерную поверхность в пространстве $R^3(x_1, x_2, x_3)$. Ее пересечение с плоскостью (2.1) определяет одномерное множество возможных стационарных конфигураций.

2.3.2 Критические точки приведенного потенциала в случае проволочного треугольника

Критические точки функции (2.6) описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_\lambda}{\partial x_1} = & -\frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial J}{\partial x_1} + \\ & + 2k_1 \left[\frac{\ell_1}{(\rho_2 + \rho_3)^2 - \ell_1^2} \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho_3}{\partial x_1} \right) \right] + 2k_2 \left[\frac{\ell_2}{(\rho_1 + \rho_3)^2 - \ell_2^2} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho_3}{\partial x_1} \right) \right] + \\ & + 2k_3 \left[\frac{\ell_3}{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \ell_3^2} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho_2}{\partial x_1} \right) \right] + \lambda = 0, \quad (1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $\omega = P_\psi/J$. Как и в случае точечного треугольника, эти уравнения надо рассматривать вместе с уравнением (2.1), выражающим зависимость переменных x_1, x_2, x_3 .

Действуя аналогично предыдущему случаю, можно найти выражение для λ :

$$\begin{aligned} \lambda = & \frac{1}{2}\omega^2 \left(x_1 \frac{\partial J}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial J}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial J}{\partial x_3} \right) - 2k_1 \left[\frac{\ell_1}{(\rho_2 + \rho_3)^2 - \ell_1^2} (\rho_2 + \rho_3) \right] - \\ & - 2k_2 \left[\frac{\ell_2}{(\rho_1 + \rho_3)^2 - \ell_2^2} (\rho_1 + \rho_3) \right] - 2k_3 \left[\frac{\ell_3}{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \ell_3^2} (\rho_1 + \rho_2) \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Подстановка (2.11) в (2.10) дает систему уравнений

$$\frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^3 x_i \left(\frac{\partial J}{\partial x_i} - \frac{\partial J}{\partial x_1} \right) +$$

$$+2 \sum_{(1,2,3)} k_1 \left[\frac{\ell_1}{(\rho_2 + \rho_3)^2 - \ell_1^2} \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial x_1} - \rho_2 + \frac{\partial \rho_3}{\partial x_1} - \rho_3 \right) \right] = 0 \quad (1, 2, 3), \quad (2.12)$$

позволяющую найти стационарные конфигурации в зависимости от ω^2 .

2.4 Стационарные конфигурации для точечного треугольника

Хорошо известно, что твердое плоское тело в отсутствие внешних сил может вращаться вокруг оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной его плоскости, с произвольной постоянной угловой скоростью. Если точку P поместить в центр масс треугольника, то

$$m_1 \overrightarrow{P_1 P} + m_2 \overrightarrow{P_2 P} + m_3 \overrightarrow{P_3 P} = 0. \quad (2.13)$$

С другой стороны, пробная точка P' будет находиться в равновесии под действием притяжения со стороны треугольника, если выполнено равенство

$$-MG \left(\frac{m_1 \overrightarrow{P_1 P'}}{\rho_1^3} + \frac{m_2 \overrightarrow{P_2 P'}}{\rho_2^3} + \frac{m_3 \overrightarrow{P_3 P'}}{\rho_3^3} \right) = 0 \quad (2.14)$$

Пусть $P = P'$. Из (2.13) и (2.14) будем иметь соответственно

$$\overrightarrow{P_3 P} = -\frac{m_1 \rho_3^3}{m_3 \rho_1^3} \overrightarrow{P_1 P} - \frac{m_2 \rho_3^3}{m_3 \rho_2^3} \overrightarrow{P_2 P}, \quad \overrightarrow{P_3 P} = -\frac{m_1}{m_3} \overrightarrow{P_1 P} - \frac{m_2}{m_3} \overrightarrow{P_2 P}.$$

Но разложение по базису единственно. Поэтому

$$-\frac{m_1 \rho_3^3}{m_3 \rho_1^3} = -\frac{m_1}{m_3} \quad -\frac{m_2 \rho_3^3}{m_3 \rho_2^3} = -\frac{m_2}{m_3},$$

откуда $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$, и, значит, центр масс треугольника должен совпадать с центром его описанной окружности. Таким образом, доказано

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если центр масс треугольника $P_1 P_2 P_3$ совпадает с центром O его описанной окружности, то существует стационарное движение, при котором точки C и P совпадают, а сам треугольник вращается вокруг своего центра масс с постоянной угловой скоростью.

Известно [6], что барицентрические координаты имеют прозрачный геометрический смысл: $x_i = \mathcal{S}_i / \mathcal{S}$ ($i = 1, 2, 3$), где $\mathcal{S}_1$ — ориентированная площадь треугольника PP_2P_3 (1, 2, 3), а $\mathcal{S}$ ориентированная площадь треугольника $P_1P_2P_3$. Пусть R — радиус окружности, описанной около $\Delta P_1P_2P_3$. Тогда

$$\mathcal{S}_1 = \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha = R^2 \sin \alpha \cos \alpha = R^2 \frac{\ell_1}{2R} \frac{\sqrt{4R^2 - \ell_1^2}}{2R} = \frac{\ell_1}{4} \sqrt{4R^2 - \ell_1^2}, \quad R = \frac{\ell_1 \ell_2 \ell_3}{4\mathcal{S}}.$$

Площадь $\Delta P_1P_2P_3$, согласно формуле Герона, имеет вид

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4} \sqrt{(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)(-\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)(\ell_1 - \ell_2 + \ell_3)(\ell_1 + \ell_2 - \ell_3)}.$$

Тогда данное стационарное движение существует, если в вершинах P_1, P_2, P_3 сосредоточены массы m_1, m_2, m_3 такие, что

$$\frac{m_1}{m} = x_1^* = \frac{\ell_1^2(-\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2)}{16S^2}, \quad (1, 2, 3).$$

Нетрудно видеть, что значения масс оказываются положительными лишь в случае, когда центр описанной окружности находится внутри $\Delta P_1 P_2 P_3$, т.е. этот треугольник - остроугольный.

2.4.1 Случай равностороннего треугольника с симметричным распределением масс

Рассмотрим частный случай, когда задача обладает симметрией. Задачам такого рода посвящены, например, работы [15, 63]. Пусть $m_1 = m_2, \ell_1 = \ell_2$. В этом случае $\Delta P_1 P_2 P_3$ равнобедренный, и его распределение масс симметрично относительно оси геометрической симметрии. Тогда существует семейство частных решений, на которых

$$x_1 = x_2 = x, \quad x_3 = 1 - 2x,$$

и система уравнений (2.9) сведется к двум уравнениям (ср. с (1.75))

$$(1 - 2x) \left(\omega^2 \frac{x - \mu_1}{m + M} - G \left(\left(\frac{\mu_3}{\rho_3^3} + 2 \frac{\mu_1}{\rho_1^3} \right) x - \frac{\mu_1}{\rho_1^3} \right) \right) = 0, \quad (2.15)$$

$$x \left(\omega^2 \frac{x - \mu_1}{m + M} - G \left(\left(\frac{\mu_3}{\rho_3^3} + 2 \frac{\mu_1}{\rho_1^3} \right) x - \frac{\mu_1}{\rho_1^3} \right) \right) = 0.$$

Не трудно проверить, что решение $x = 0$ не удовлетворяет первому уравнению, в то время как значение $x = 1/2$ существует при

$$P_\psi^2 = \frac{G((4\ell_2^2 - \ell_3^2)mm_3 + 2(\ell_3^2(m + 2m_2) + 4\ell_2^2 m_3)m_2)^2}{2(4\ell_2^2 - \ell_3^2)^{3/2}(m + M)}.$$

Отметим, что в силу неравенства треугольника выражение $4\ell_2^2 - \ell_3^2$ в нуль не обращается.

Ограничимся рассмотрением правильного треугольника, с равными массами в вершинах. При этом, оба уравнения системы (2.15) удовлетворяются при любом значении параметра ω , а следовательно — и P_ψ^2 .

Полагая равными единице размерно-независимые величины $G, M, p/3$, где $p = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$, представим условие равенства скобок нулю в виде:

$$P_\psi^2 = \frac{J^2(x)}{3x - 1} \left[\left(\frac{2}{\rho_1^3} + \frac{1}{\rho_3^3} \right) x - \frac{1}{\rho_1^3} \right]. \quad (2.16)$$

$$\rho_1^2 = 3x^2 - 3x + 1, \quad \rho_3^2 = 3x^2, \quad J(x) = 1 + \frac{3}{2} \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} - 2x \right)^2$$

График найденной зависимости представлен на рисунке 2.2. В случае правильного треугольника, в вершинах которого лежат массы равные массе точки P функция (2.16) обращается в нуль в точке $c_0 \approx 0.428239$, она также достигает своих локальных минимумов в точках $c_1 \approx -1.012376$, $P_\psi^2(c_1) \approx 8.860181$ и $c_3 \approx 0.428239$, $P_\psi^2(c_3) \approx 8.042873$ и своего локального максимума в точке $c_2 = 2/3$, $P_\psi^2(c_2) = 125\sqrt{3}/16$.

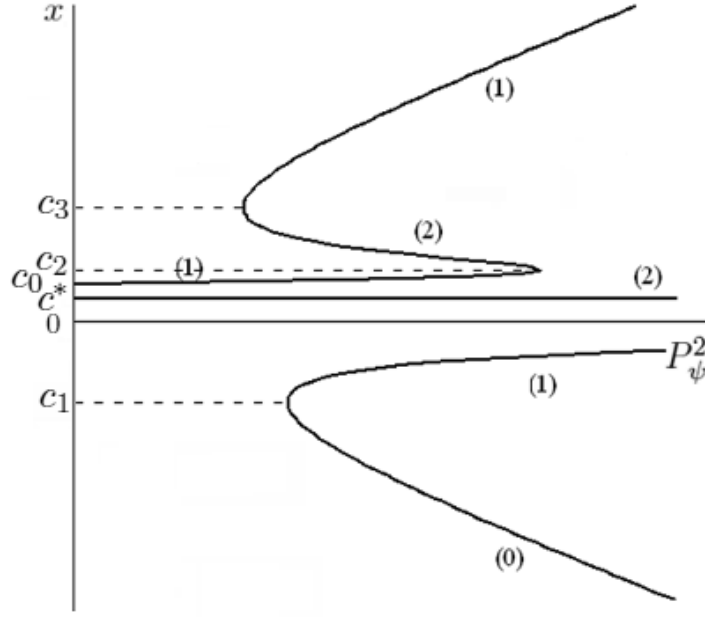


Рис. 2.2: Диаграмма Пуанкаре в случае точечного треугольника ($m = 3M$).

2.5 Стационарные конфигурации для проволочно-го треугольника

УТВЕРЖДЕНИЕ. Система, образованная произвольным треугольником с однородными “проволочными” сторонами равных масс и материальной точкой, обладает стационарным движением, на котором материальная точка располагается в точке пересечения медиан треугольника.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Под действием лишь центробежных сил система будет в равновесии, если точка P располагается в центре масс $\Delta P_1 P_2 P_3$, вращающегося с произвольной угловой скоростью. Этому решению отвечает точка максимума потенциала центробежных сил. Назовем ее K_C .

Под действием лишь сил притяжения точка P может находиться в равновесии лишь если она располагается в точке, для которой результирующий вектор сил притяжения со стороны $\Delta P_1 P_2 P_3$ обращается в нуль. Обозначим ее K_N .

Если точки K_C и K_N совпадают, то существует равномерное вращение системы вокруг $K_0 = K_C = K_N$ с постоянной угловой скоростью. Согласно (2.4), точки K_C и K_N имеют координаты

$$\left(\frac{M_1}{2}, \frac{M_2}{2}, \frac{M_3}{2} \right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{m_1}{m}, \frac{m_2}{m}, \frac{m_3}{m} \right)$$

соответственно, то в этом случае должны выполняться условия

$$\frac{M_1}{2} = \frac{m_1}{m} \quad (1, 2, 3),$$

из которых следует равенство масс сторон треугольника $m_1 = m_2 = m_3$. Координаты точки K_0 при этом имеют вид $x_1 = x_2 = x_3 = 1/3$. Подстановка этих

значений в (2.12) позволяет убедиться в справедливости утверждения.

2.5.1 Случай равностороннего треугольника с однородными сторонами

Пусть в рамках условий утверждения длины сторон треугольника равны $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell_*$. Тогда плотность постоянна по всему периметру треугольника и массы сторон одинаковы. В этом случае распределение масс $\Delta P_1 P_2 P_3$ симметрично относительно его осей симметрий. Снова будем искать частные решения

$$x_1 = x_2 = x, \quad x_3 = 1 - 2x \quad (1, 2, 3)$$

На этих решениях система уравнений (2.9) сводится к одному уравнению

$$(3x - 1) [P_\psi^2 g_1(x) - g_2(x)] = 0, \quad (2.17)$$

$$g_1(x) = \frac{x}{m(m + M)\ell_* (2\mu(3x - 1)^2 + 1)^2}, \quad g_2(x) = \frac{G}{54} \frac{1}{(2x - 1)\sqrt{3x^2 - 3x + 1}}.$$

Решению $x_*^0 = 1/3$ уравнения (2.17) отвечает положение точки в центре треугольника.

Так как при $x \neq 0$ выполняется неравенство $g_1 \neq 0$, то уравнение (2.17) разрешимо относительно $P_\psi^2 = P_\psi^2(x)$.

$$P_\psi^2 = \frac{g_2(x)}{g_1(x)} = \frac{m(m + M)G\ell_*}{54} \frac{(2\mu(3x - 1)^2 + 1)^2}{x(2x - 1)\sqrt{3x^2 - 3x + 1}}$$

Выбирая размерно-независимые параметры так, чтобы выполнялись условия

$$M = 1, \quad \ell_* = 1, \quad G = 1$$

можно построить бифуркационную диаграмму Пуанкаре $P_\psi^2 = P_\psi^2(x)$, в предположении, что масса свободногравитирующей точки вдвое меньше массы треугольника, см. рис. 2.3.

Ветвление стационарных решений происходит в точках

$$B_1 : \quad b_1 = 1.158909054, \quad P_\psi^2(b_1) = 17.38517133,$$

$$B_2 : \quad b_2 = -0.6056033197, \quad P_\psi^2(b_2) = 18.6189928.$$

Диаграмма Смейла — диаграмма зависимостей постоянных интеграла площадей и интеграла полной механической энергии на установившихся решениях — представлена на рисунке 2.4. На диаграмме изображена кривая, разбивающая плоскость параметров (P_ψ^2, K) , где K — постоянная интеграла энергии, на девять областей $(A, B, C, D, E, F, G, H, I)$, каждой из которых соответствуют области возможности движений (ОВД закрашены на рисунке 2.5 темным цветом) различной топологии.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как было показано, в случае равностороннего треугольника с равными массами в вершинах существует интервал значений угловой скорости системы (содержащий ноль), при которых внутри треугольника существует четыре особых точки приведенного потенциала, которым отвечают четыре стационарные вращающихся конфигурации. Для этих конфигураций точка P находится внутри треугольника. Вместе с тем, для правильного треугольника с однородными сторонами общей плотности при любом значении угловой скорости системы критическая точка приведенного потенциала внутри треугольника только одна.

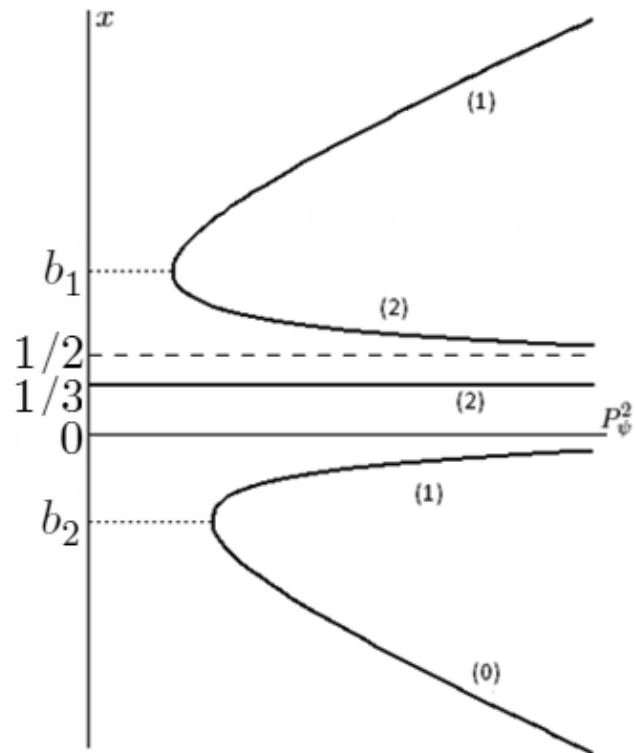


Рис. 2.3: Диаграмма Пуанкаре в случае “проволочного” треугольника ($m = 3M$).

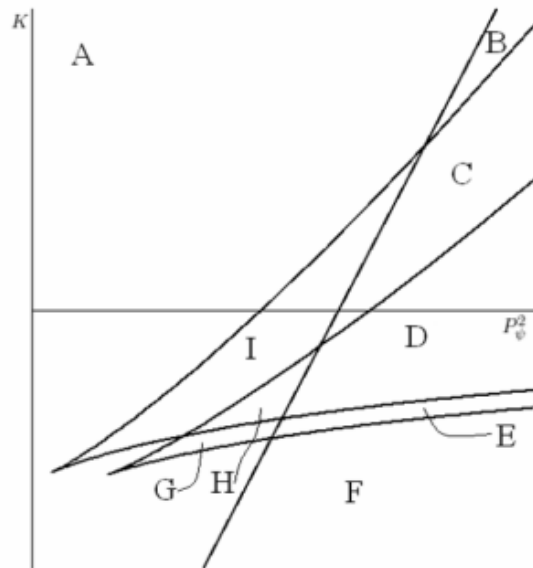


Рис. 2.4: Диаграмма Смейла в случае “проволочного” треугольника ($m = 3M$).

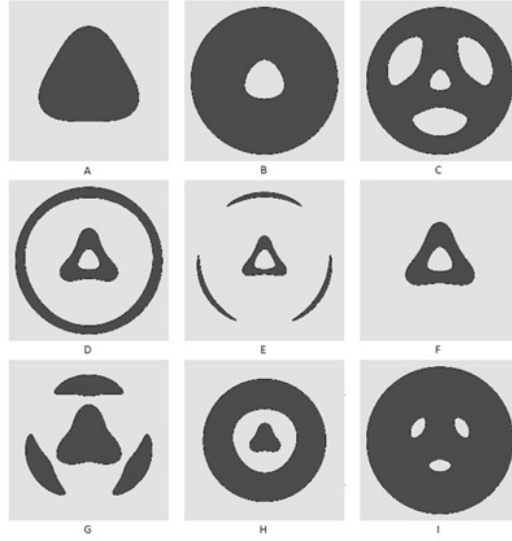


Рис. 2.5: Области возможных движений (темный цвет) в случае “проволочного” треугольника ($m = 3M$).

2.6 Достаточные условия устойчивости

Согласно [61], условия знакоопределенности ограничения второй вариации $\delta^2 W_\lambda$ функции W_λ на линейном многообразии $\delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_3 = 0$ можно найти исследуя матрицу

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_1 \partial x_3} \\ 1 & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_2 \partial x_3} \\ 1 & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x^2} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{1}$ — вектор-строка (1,1,1). Если E — единичная матрица размером 3×3 , то уравнение на собственные значения этого ограничения имеет вид

$$P_2(\sigma) = 0, \quad (2.18)$$

где

$$P_2(\sigma) = \det \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x^2} - \sigma E \end{pmatrix} = -3\sigma^2 + 2b\sigma + c,$$

$$c = \sum_{(1,2,3)} \left[\left(\frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_2^2} \right],$$

$$b = \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_2 \partial x_3},$$

В случае точечного треугольника выражения для вторых смешанных производных выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_1^2} &= -\frac{1}{2} \frac{P_\psi^2}{J^2} \frac{\partial^2 J}{\partial x_1^2} + \frac{P_\psi^2}{J^3} \left(\frac{\partial J}{\partial x_1} \right)^2 + \\ &\quad + Gm \sum_i \left(\frac{m_i}{\rho_i^2} \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_1^2} - 2 \frac{m_i}{r_i^3} \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_1} \right)^2 \right) \quad (1, 2, 3), \\ \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_1 \partial x_2} &= -\frac{1}{2} \frac{P_\psi^2}{J^2} \frac{\partial^2 J}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{P_\psi^2}{J^3} \frac{\partial J}{\partial x_1} \frac{\partial J}{\partial x_2} + \\ &\quad + Gm \sum_i \left(\frac{m_i}{r_i^2} \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_1 \partial x_2} - 2 \frac{m_i}{r_i^3} \frac{\partial r_i}{\partial x_1} \frac{\partial r_i}{\partial x_2} \right) \quad (1, 2, 3). \end{aligned}$$

В случае же проволочного треугольника получается следующее

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_1^2} &= -\frac{1}{2} \frac{P_\psi^2}{J^2} \frac{\partial^2 J}{\partial x_1^2} + \frac{P_\psi^2}{J^3} \left(\frac{\partial J}{\partial x_1} \right)^2 + \\ &\quad + \sum_{(1,2,3)} \frac{2k_1 \ell_1}{(r_2 + r_3)^2 - \ell_1^2} \left[\frac{\partial^2 r_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 r_3}{\partial x_1^2} - \frac{2(r_2 + r_3)}{(r_2 + r_3)^2 - \ell_1^2} \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_1} + \frac{\partial r_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] \quad (1, 2, 3) \\ \frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial x_1 \partial x_2} &= -\frac{1}{2} \frac{P_\psi^2}{J^2} \frac{\partial^2 J}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{P_\psi^2}{J^3} \frac{\partial J}{\partial x_1} \frac{\partial J}{\partial x_2} + \\ &\quad + \sum_{(1,2,3)} \frac{2k_1 \ell_1}{(r_2 + r_3)^2 - \ell_1^2} \left[\frac{\partial^2 r_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 r_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{2(r_2 + r_3)}{(r_2 + r_3)^2 - \ell_1^2} \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_1} + \frac{\partial r_3}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_2} + \frac{\partial r_3}{\partial x_2} \right) \right] \quad (1, 2, 3) \end{aligned}$$

Оба корня уравнения (2.18) вещественны. По теореме Виета если $b > 0$ и $c < 0$, то степень неустойчивости $\chi = 0$ и движение устойчиво по Ляпунову. Если $c > 0$, то степень неустойчивости $\chi = 1$ и движение неустойчиво. Если $b < 0$ и $c < 0$, то степень неустойчивости $\chi = 2$ и имеется возможность гироскопической стабилизации.

2.6.1 Достаточные условия устойчивости в случае равностороннего точечного треугольника

Для определенности рассмотрим частный случай изучаемой системы — равносторонний треугольник. Массы m_1, m_2, m_3 равны массе M .

Отметим, что решению $c^* = 1/3$, соответствующее середина треугольника, имеет $\chi = 2$. В точках c_1, c_2, c_3 — точки ветвления решений из пункта 2.4.1 — происходит смена степени неустойчивости. Так $\chi = 0$ и имеет место вековая устойчивость при $x \in (-\infty, 1)$; $\chi = 1$ и решение неустойчиво при $x \in [c_1, 0) \cup [c_0, c_2] \cup (c_3, \infty)$; $\chi = 2$ и возможна гироскопическая стабилизация при $x \in (c_2, c_3] \cup \{1/3\}$.

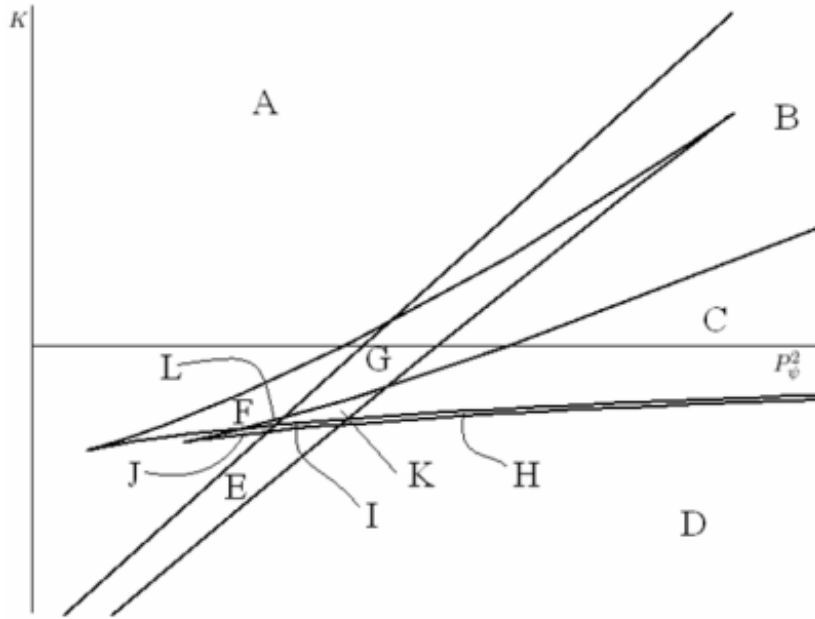


Рис. 2.6: Диаграмма Смейла в случае точечного треугольника ($m = 3M$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Значению c_0 отвечает положение равновесия точки P под действием притяжения со стороны правильного треугольника с равными массами в вершинах, причем соответствующее положение равновесия не совпадает с точкой пересечения осей симметрии треугольника. Для данной задачи таких положений равновесия три, и они, вообще говоря, не исчезают в случае, когда равны лишь две массы в вершинах треугольника. Таким образом, когда притягивающая точка находится внутри покоящегося треугольника, имеется как минимум четыре равновесия: три седла и максимум с координатами соответственно (см [55])

$$(0, 4282; 0, 4282; 0, 1435), \quad (0, 1435; 0, 4282; 0, 4282), \quad (0, 4282; 0, 1435; 0, 4282) \\ (1/3; 1/3; 1/3)$$

На рисунке 2.6 представлена диаграмма Смейла, на которой изображена кривая, разбивающая пространство параметров (P_ψ^2, K) , где K — константа интеграла энергии, на двенадцать областей ($A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L$). Каждой из этих областей соответствуют области возможных движений с отличительными топологиями, выделенные на рисунке 2.7 темным цветом.

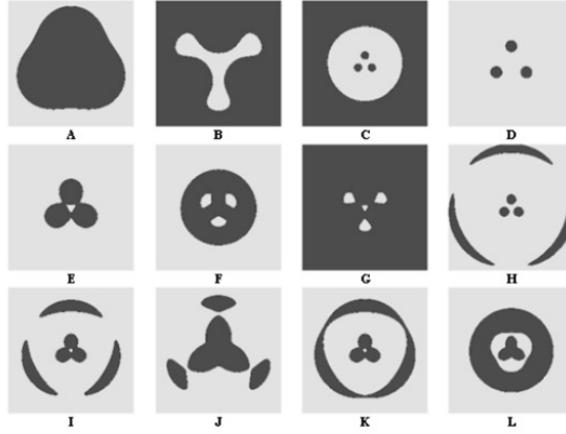


Рис. 2.7: Области возможных движений (темный цвет) в случае точечного треугольника ($m = 3M$).

2.6.2 Достаточные условия устойчивости в случае равностороннего проволочного треугольника

На рис. 2.3 для каждой ветви бифуркаций отмечены степени неустойчивости. Стоит отметить, что при $x = 1/2$, когда происходит переход через сторону треугольника, меняется знак производной приведенной потенциальной энергии. Поэтому, на диаграмме наблюдаются две расположенные рядом ветви, степени неустойчивости которых χ равны 2.

Таким образом, устойчивыми оказываются конфигурации, на которых точка P достаточно удалена от треугольника и располагается напротив вершины.

Глава 3

Существование и устойчивость точек либраций равномерно вращающегося треугольника, оснащённого вещественными или комплексифицированными гантелями

После основополагающих работ Аксёнова, Гребеникова, Дёмина [2], Кислика [38] и Винти [103] стало возможным использование комплексификации гравитационного потенциала для описания притяжения сплюснутых твердых тел. Такие модели полей притяжения нашли своё применение как при качественном анализе траекторий в окрестности несимметричных тел, в частности, астероидов и комет (Алексеев, [3]), так и при описании их притяжения [41, 42, 70] (см. также [26, 75]).

Обсуждению свойств притяжения комплексифицированных несимметричных тел и посвящена настоящая глава.

Исследования, выполненные в [9, 11, 13, 60], продемонстрировали весьма сложную динамику в окрестности малых небесных тел уже в простейшем случае, когда поле их притяжения представлено полем притяжения гантелеобразного тела. Но для описания поля притяжения тел, не близких к динамически симметричным, такое приближение оказывается недостаточным. Были развиты подходы, основанные на триангуляции гравитирующих тел [95, 104, 105], а также подходы, опирающиеся на аналитическое продолжение выражений для гравитационного потенциала в области, примыкающие к поверхности тела [98, 99] (см. также [95]). Полученные в этих работах выражения для потенциалов достаточно громоздки и малоприспособлены по крайней мере для аналитического исследования задачи.

3.1 Комплексифицированная гантель

Пусть $Oxyz$ — некоторая система координат, а в ней — точки P_+ и P_- : $\overrightarrow{OP_{\pm}} = (0, 0, \pm\omega a)$ оснащенные "зарядами" " $m + \omega\mu$ " и " $m - \omega\mu$ " соответственно ($\mu > 0$).

Здесь и далее $\omega = i$ в случае “комплексифицированной” гантели¹ и $\omega = 1$ в случае гантели классической, “вещественной”. Гравитационный потенциал таких гантелей имеет вид

$$U = G \left(\frac{m + \omega\mu}{\rho_-} - \frac{m - \omega\mu}{\rho_+} \right), \quad \rho_{\pm} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z \pm \omega a)^2}, \quad a > 0, \quad (3.1)$$

где G — гравитационная постоянная.

Потенциал (3.1) действительная гармоническая функция, т.е.

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

В общем случае, U инвариантна относительно поворота около оси Oz и неинвариантна относительно отражения $z \mapsto -z$.

Для $\omega = 1$ справедливость утверждения проверяется непосредственно. Пусть $\omega = i$. Тогда

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (z \pm ai)^2 &= u(\cos \varphi \pm i \sin \varphi), \\ u &= \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2 z^2} \\ \sin \varphi &= \frac{2az}{u}, \quad \cos \varphi = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}{u}, \end{aligned}$$

и функция $U = U(x, y, z)$ может быть представлена в следующем виде

$$U = -\frac{2G}{\sqrt{u}} \left(m \cos \frac{\varphi}{2} - \mu \sin \frac{\varphi}{2} \right), \quad \varphi = \varphi(x, y, z),$$

откуда видно, что потенциал $U = U(x, y, z)$ принимает вещественные значения при всех допустимых значениях аргументов.

Силовые линии (черные) и эквипотенциальные кривые силового поля (серые) представлены на рисунке 3.1.

При $m = 0, \omega = 1$ имеет место классический, “вещественный” диполь. При $m = 0, \omega = i$, вероятно, целесообразно говорить о “комплексном” диполе. Для таких диполей напряжённость силового поля определяется соотношением

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}, \quad \vec{r} = (x, y, z)^T, \\ \vec{E} &= \mu G \omega \frac{\rho_+^3 - \rho_-^3}{\rho_+^3 \rho_-^3} \left(x, y, z - \omega a \frac{\rho_+^3 + \rho_-^3}{\rho_+^3 - \rho_-^3} \right) \end{aligned}$$

Пусть $\vec{e} = (e_x, e_y, e_z)^T$ — некоторый постоянный единичный вектор, задающий направления в осях $Oxyz$. Тогда проекция вектора напряжённости на задаваемое вектором $\vec{e}$ направление имеет вид

$$(\vec{e}, \vec{E}) = \mu G \omega \frac{\rho_+^3 - \rho_-^3}{\rho_+^3 \rho_-^3} \left(x e_x + y e_y + \left(z - \omega a \frac{\rho_+^3 + \rho_-^3}{\rho_+^3 - \rho_-^3} \right) e_z \right). \quad (3.2)$$

Пусть $\rho = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \gg a$, т.е. $\varepsilon = a/\rho \ll 1$. Разложение выражения (3.2) в ряд по степеням параметра ε даёт

$$(\vec{e}, \vec{E}) = \frac{\mu G \omega^2}{\rho^3} \left(6 \frac{z}{\rho} (x e_x + y e_y) \varepsilon + \left(-2a + 6 \frac{z^2}{\rho} \varepsilon - 3\omega^2 a \left(1 - 5 \frac{z^2}{\rho^2} \right) \varepsilon^2 \right) e_z \right) + o(\varepsilon^2) =$$

¹где i — мнимая единица

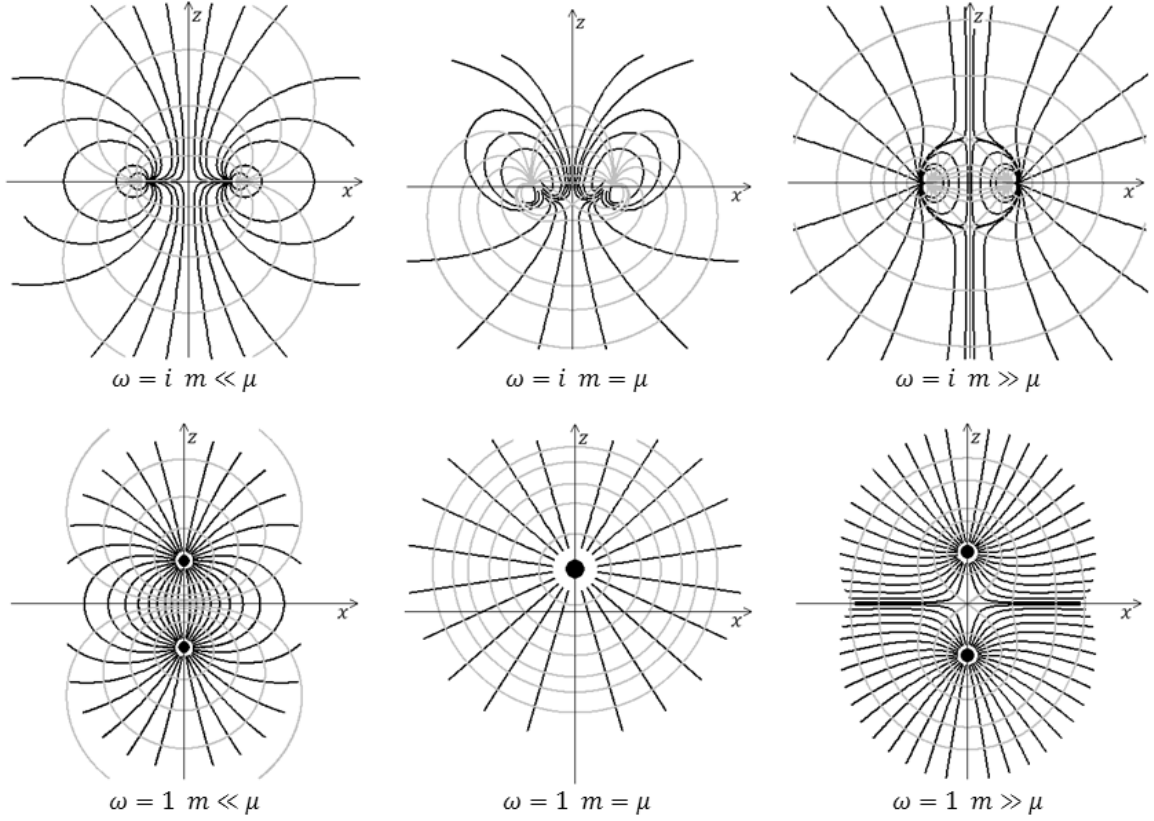


Рис. 3.1: Силовые линии (чёрные) и эквипотенциальные кривые (серые)

$$\begin{aligned}
 &= 2\mu G\omega^2 \left(3\frac{z}{\rho^4}(xe_x + ye_y)\varepsilon + \left(-\frac{1}{\rho^2} + 3\frac{z^2}{\rho^4} \right) \varepsilon e_z \right) + o(\varepsilon^2) = \\
 &= 2\mu G\omega^2 a \left(3\frac{z}{\rho^5}(xe_x + ye_y) + \left(-\frac{1}{\rho^3} + 3\frac{z^2}{\rho^5} \right) e_z \right) + o\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Старшие слагаемые в (3.3) для $\omega = 1$ и $\omega = i$ отличаются лишь знаком. Как для $\omega = 1$, так и для $\omega = i$ силовое поле убывает как ρ^{-2} при $\rho \rightarrow \infty$.

Пусть $z = 0$. Тогда $\rho_{\pm} = [x^2 + y^2 - a^2]^{1/2}$, и функция U определена при выполнении условия

$$x^2 + y^2 - a^2 > 0 \tag{3.4}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для “комплексифицированного” потенциала начало координат не входит в область определения задающей потенциал вещественной функции. Разложение с особенностью в начале координат можно осуществлять по безразмерным параметрам

$$\varepsilon_{\pm} = \frac{\pm 2\omega a z + \omega^2 a^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

“ухватывающим” особенность на границе области определения вещественнозначного потенциала.

С другой стороны, можно использовать и такие параметры как

$$\delta_{\pm} = \frac{\pm 2\omega a z}{x^2 + y^2 + z^2 + \omega^2 a^2}$$

Как показано в [101] для $\omega = 1$ использование параметров, схожих с $\delta_{\pm}$, приводит к разложениям без особенностей. Эти разложения полезны для описания движения кольце-подобных тел и тел, состоящих из конечного набора материальных точек (см. также [17, 18]). Для случая $\omega = i$ использование тех же параметров уже не исключает особенности в знаменателях, поэтому работа с ними должна вестись с большим вниманием. Исследование вопроса об использовании выражений для потенциала без особенностей, восходит, вероятно, к работе Борна и Инфельда [69] (см. также [96]).

3.2 Комплексифицированная модель гравитационного потенциала

Рассмотрим движение твёрдого тела $\mathfrak{B}$ и материальной точки P массы M под действием сил взаимного гравитационного притяжения. Для более гибкого подхода к описанию гравитационного поля, тело $\mathfrak{B}$ предполагается составленным из некоторого конечного числа N точек $P_1, \dots, P_N$. Каждой точке P_k , $k = 1..N$, ставится в соответствие единичный вектор $\mathbf{e}_k$ и пара точек $P_k^{\pm}$: $\overrightarrow{P_k P_k^{\pm}} = \pm \omega_k a_k \mathbf{e}_k$, где $2a_k$ — длина гантели. Поскольку векторы $\mathbf{e}_k$ и их длины e_k считаются постоянными, то расположение точек $P_k^{\pm}$ фиксировано в $\mathfrak{B}$ или в его комплексификации соответственно.

Если точкам $P_k^{\pm}$ поставить в соответствие массы $m_k \pm \omega_k \mu_k$, то, как обсуждалось, каждая гантель будет порождать вещественный гармонический потенциал. Ясно, что при суммировании по всем точкам P_k гармоничность не пропадёт.

Пусть тело $\mathfrak{B}$ равномерно вращается с постоянной угловой скоростью Ω относительно оси фиксированной как в абсолютном пространстве, так и в теле. Пусть $C\xi\eta\zeta$ — система отсчёта (ПСО), равномерно вращающаяся с телом $\mathfrak{B}$ около оси $C\zeta$. Положение точки P в этой системе координат определяется радиус-вектором $\overrightarrow{CP} = (\xi, \eta, \zeta)$. Предполагается, что движение точки P не оказывает влияния на динамику тела $\mathfrak{B}$.

Потенциал центробежных сил имеет следующий вид

$$U_C = -\frac{1}{2}M\Omega^2(\xi^2 + \eta^2).$$

Гравитационный потенциал зависит от распределения масс в теле $\mathfrak{B}$. Обозначим его как функцию от ξ , η и ζ : $U_N = U_N(\xi, \eta, \zeta)$.

Согласно теории Рауса [88] (см. также [34]), относительные равновесия точки P определяются как критические точки изменённого потенциала

$$U = U_N + U_C.$$

Ниже рассматривается тело $\mathfrak{B}$, моделируемое равносторонним треугольником, оснащённым дополнительными гантелеобразными включениями (РТОДГВ).

3.3 Точки либраций равномерно вращающегося РТОДГВ

В предыдущих главах рассматривались плоские движения взаимно гравитирующих треугольника и точки. Целесообразно сопоставить обнаруженные в этой работе динамические эффекты с эффектами, возникающими в случае комплексификации масс. Согласно [99], треугольные модели дают в ряде случаев удовлетворительные результаты при аппроксимации гравитационного потенциала тел, чья форма далека от шарообразной, а распределение масс нерегулярно.

Пусть тело $\mathfrak{B}$ представляет собой треугольник $P_1P_2P_3$, расположенный в плоскости Oxy трёхмерного евклидова пространства, оснащённого абсолютной системой отсчёта $Oxyz$ (АСО). Координаты векторов $\overrightarrow{OP_k}$ в проекциях на оси АСО обозначим $(x_i, y_i, 0)$. Длины сторон рассматриваемого $\Delta P_1P_2P_3$ записываются как

$$(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_2})^{1/2} = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2} = \ell_3 \quad (1, 2, 3)$$

и предполагаются неизменными во все время движения.

Каждой вершине $\Delta P_1P_2P_3$ поставим в соответствие пару точек P_k^+ и P_k^- : $\overrightarrow{OP_k^\pm} = (x_k, y_k, \pm \omega_k a_k)$, где $\omega_k \in \{i, 1\}$. Оснастим точки P_k^+ и P_k^- комплексно-сопряжёнными массами $m_k + \omega_k \mu_k$ и $m_k - \omega_k \mu_k$. Потенциал гравитационного взаимодействия $\Delta P_1P_2P_3$ и точки P имеет вид

$$U_N = -MG \sum_{k=1}^3 \left[\frac{m_k + \omega_k \mu_k}{\rho_k^-} + \frac{m_k - \omega_k \mu_k}{\rho_k^+} \right],$$

$$\rho_k^\pm = [(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z \pm \omega_k a_k)^2]^{1/2}.$$

Рассмотрим равносторонний $\Delta P_1P_2P_3$ такой, что $\ell_k = \ell$, $a_k = a$, $\mu_k = \mu$, $m_k = m$, $k = 1, 2, 3$. Гантели, которыми оснащены вершины, располагаются перпендикулярно его плоскости.

Пусть этот комплексифицированный треугольник равномерно вращается около оси, ортогональной его плоскости и проходящей через его центр, с постоянной угловой скоростью Ω . Рассмотрим задачу о существовании и устойчивости точек либрации.

Пусть начало ПСО — точка C — расположена в центре треугольника, ось $C\zeta$ сонаправлена с осью Oz и ось $C\xi$ параллельна стороне P_1P_2 . Тогда векторы $\overrightarrow{CP_k^+}$ и $\overrightarrow{CP_k^-}$ имеют следующие координаты:

$$\overrightarrow{CP_1^\pm} : \left(-\frac{\ell}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\ell, \pm\omega_1 a \right), \quad \overrightarrow{CP_2^\pm} : \left(\frac{\ell}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\ell, \pm\omega_2 a \right), \quad \overrightarrow{CP_3^\pm} : \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\ell, \pm\omega_3 a \right).$$

Измененный потенциал принимает вид

$$U = U_N - \frac{1}{2}M\Omega^2(\xi^2 + \eta^2) = MU_*.$$

Относительные равновесия определяются из следующей системы алгебраических уравнений

$$a : \frac{\partial U_*}{\partial \xi} = 0; \quad b : \frac{\partial U_*}{\partial \eta} = 0; \quad c : \frac{\partial U_*}{\partial \zeta} = 0. \quad (3.5)$$

Рассмотрим частные случаи:

- I. $\omega_1 = \omega_2 = i, \omega_3 = 1$ (тело сплюснуто у первой и второй вершин и вытянуто у третьей)
- II. $\omega_1 = \omega_2 = 1, \omega_3 = i$ (тело вытянуто у первой и второй вершин и сплюснуто у третьей)
- III. $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = i$ (тело сплюснуто у трёх вершин) (ср. [5])

Случаи I. и II. в определённом смысле противоположны друг другу.

Во всех случаях распределение масс тела симметрично относительно плоскости $C\eta\zeta$. Тогда могут существовать частные решения располагающиеся в этой плоскости, для которых $\xi = 0, \rho_1^+ = \rho_2^+, \rho_1^- = \rho_2^-$ и уравнение (3.5a) выполняется тождественно. При фиксированном значении Ω уравнения (3.5b) и (3.5c) задают кривые $f_1 = f_1(\eta, \zeta, \Omega)$ и $f_2 = f_2(\eta, \zeta)$. Зафиксируем величины a, m и μ . Тогда точки пересечения кривых f_1 и f_2 , если таковые существуют, отвечают точкам либрации, зависящим от угловой скорости Ω и расположенным вне плоскости треугольника. Примеры таких плоскостей для некоторых характерных параметров a при $\mu = 0$ представлены на рисунках 3.2, 3.3 и 3.4. Кривая $f_2 = f_2(\eta, \zeta)$ черного цвета, в то время как кривые $f_1 = f_1(\eta, \zeta, \Omega)$ — серого, с помеченным значением Ω^2 .

Рассмотрим случай, когда свободная точка P располагается в плоскости $C\xi\eta$, т.е. $\zeta = 0$. Тогда уравнение (3.5c) выполняется тождественно, и точки либрации определяются из следующей системы уравнений

$$\Omega^2 \xi = \sqrt{2}mG \left(\frac{\xi + \frac{\ell}{2}}{u_1^{3/2}} + \frac{\xi - \frac{\ell}{2}}{u_2^{3/2}} + \frac{\xi}{u_3^{3/2}} \right) \quad (3.6)$$

$$\Omega^2 \eta = \sqrt{2}mG \left(\frac{\eta + \frac{\sqrt{3}}{6}\ell}{u_1^{3/2}} + \frac{\eta + \frac{\sqrt{3}}{6}\ell}{u_2^{3/2}} + \frac{\eta - \frac{\sqrt{3}}{3}\ell}{u_3^{3/2}} \right) \quad (3.7)$$

$$u_1(\xi, \eta) = \left(\xi + \frac{\ell}{2} \right)^2 + \left(\eta + \frac{\sqrt{3}}{6}\ell \right)^2 + \omega_1^2 a^2,$$

$$u_2(\xi, \eta) = \left(\xi - \frac{\ell}{2} \right)^2 + \left(\eta + \frac{\sqrt{3}}{6}\ell \right)^2 + \omega_2^2 a^2,$$

$$u_3(\xi, \eta) = \xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{3}}{3}\ell \right)^2 + \omega_3^2 a^2$$

Рассмотрим решения, расположенные на оси симметрии $\xi = 0$. Тогда уравнение (3.6) выполняется тождественно, а из (3.7) находим²

$$\Omega^2 = \frac{mG}{\eta} \left(\frac{2\eta + \frac{\sqrt{3}}{3}\ell}{u_1^{3/2}(0, \eta)} + \frac{\eta - \frac{\sqrt{3}}{3}\ell}{u_3^{3/2}(0, \eta)} \right) \quad (3.8)$$

Кривая $\Omega^2 = f(\eta)$ в плоскости (Ω^2, η) , задаваемая соотношением (3.8), представляет собой диаграмму Пуанкаре.

²точка $(\xi, \eta) = (0, 0)$ — равновесие и исключается из рассмотрения

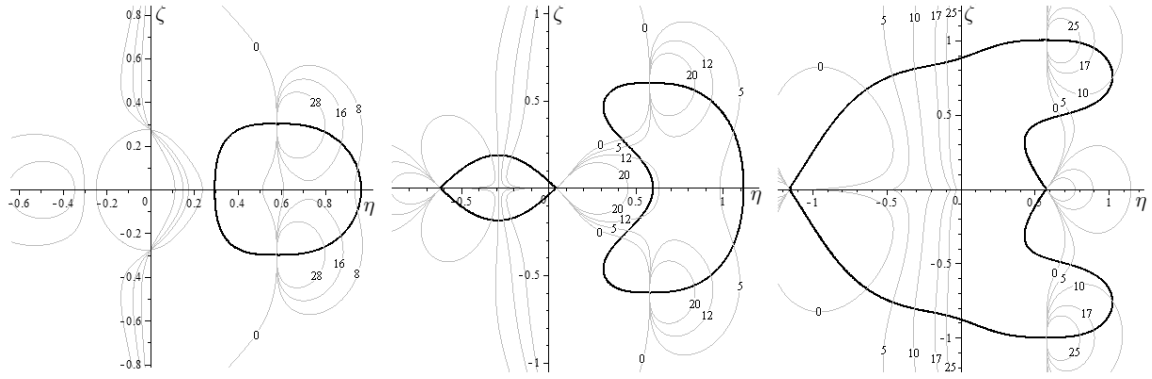


Рис. 3.2: Зависимость точек либрации от угловой скорости в случае *I*. на примере, когда $a = 0.3\ell$, $a = 0.6\ell$ и $a = \ell$

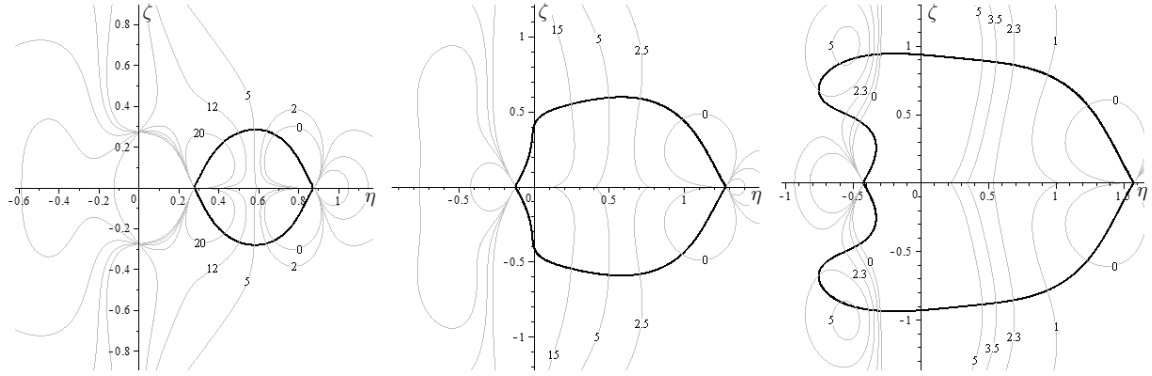


Рис. 3.3: Зависимость точек либрации от угловой скорости в случае *II*. на примере, когда $a = 0.3\ell$, $a = 0.7\ell$ и $a = \ell$

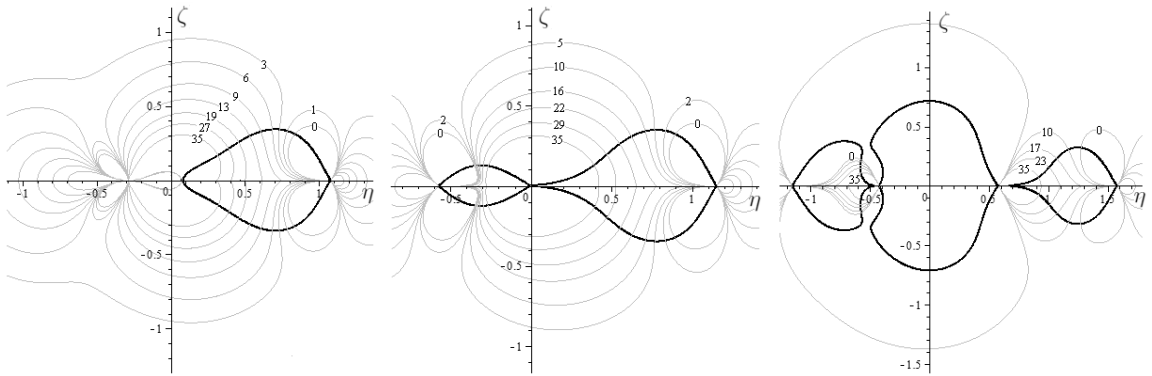


Рис. 3.4: Зависимость точек либрации от угловой скорости в случае *III*. на примере, когда $a = 0.5\ell$, $a = 0.575\ell$ и $a = \ell$

Пусть размерные постоянные выбраны таким образом, что $m = 1$, $G = 1$, $\ell = 1$. На рисунках 3.5, 3.6 и 3.7 представлены соответствующие диаграммы Пуанкаре для некоторых характерных значений параметра a .

Для каждого из случаев, вычислены отмеченные точки соответствующих диаграмм.

Так, в случае I ., при $a = 1/3$ $\eta_1 \approx -0.4597$, $\Omega_1^2 \approx 25.0753$; $\eta_2 \approx -0.2589$; $\eta_3 \approx 0.2375$, $\Omega^2(\eta_3) \approx 6.5344$; $\eta_4 \approx 0.3106$; $\eta_5 \approx 0.4683$; $\eta_6 \approx 0.7352$, $\Omega_6^2 \approx 12.8655$.

Если $a = 0.4$ $\eta_1 \approx -0.51$, $\Omega_1^2 \approx 36.2437$; $\eta_2 \approx -0.2748$; $\eta_3 \approx 0.3151$, $\Omega^2(\eta_3) \approx 9.7967$; $\eta_4 \approx 0.44$, $\Omega_4^2 \approx 5.2844$; $\eta_5 \approx 0.7292$, $\Omega_5^2 \approx 9.9902$.

И для последней диаграммы в случае I ., при $a = 1$ $\eta_1 = -1 + \sqrt{3}/3$; $\eta_2 = 1 + \sqrt{3}/3$;

В случае II ., при $a = 0.1$ $\eta_1 \approx -0.465$, $\Omega_1^2 \approx 13.6718$; $\eta_2 \approx -0.136$; $\eta_3 \approx -0.0415$; $\eta_4 = \sqrt{3}/3 - 0.1$; $\eta_5 = \sqrt{3}/3 + 0.1$.

Если $a = 0.2$ $\eta_1 \approx -0.4536$, $\Omega_1^2 \approx 12.535$; $\eta_2 \approx -0.1572$, $\Omega_2^2 \approx 6.8276$; $\eta_3 = \sqrt{3}/3 - 0.2$; $\eta_4 = \sqrt{3}/3 + 0.2$.

И, наконец, при $a = 1$ $\eta_1 = -1 + \sqrt{3}/3$; $\eta_2 = 1 + \sqrt{3}/3$;

Для случая III ., при $a = 1/3$, горизонтальные асимптоты и точки бифуркаций определяются следующими величинами: $\eta_4 = \sqrt{3}/3 + 1/3$, $\eta_3 = \sqrt{3}/3 - 1/3$, $\eta_2 \approx -0.23545$, $\eta_1 \approx -0.4498$, $\Omega_1^2 \approx 26.3878$.

При $a = 1/2$ горизонтальные асимптоты определяются значениями η_4 , η_3 и η_2 , определенными выше.

Кроме того, также появляется значение $\eta = 1/2$ — особенность, которая должна быть исключена из рассмотрения, поскольку она не входит в область определения потенциальной энергии гравитационного взаимодействия (выражение (3.4)).

Для $a = 1$ область, исключаемая из рассмотрения, покрывает весь $\Delta P_1 P_2 P_3$, включая $\eta_4 = 1 + \sqrt{3}/3$, $\eta_3 = -1 + \sqrt{3}/3$

3.4 Устойчивость относительных равновесий

Анализ собственных значений матрицы Гессе изменённого потенциала позволяет определить соответственные степени неустойчивости для каждой ветки бифуркационной диаграммы Пуанкаре. Характеристический полином имеет вид

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U_*}{\partial \xi^2} - \lambda & \frac{\partial^2 U_*}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 U_*}{\partial \eta \partial \xi} & \frac{\partial^2 U_*}{\partial \eta^2} - \lambda \end{pmatrix},$$

где производные считаются в относительных положениях равновесия.

Оба корня уравнения $P(\lambda) = \lambda^2 - p\lambda + q = 0$ действительные. Обозначим через χ так называемую степень неустойчивости, то есть число отрицательных корней полинома $P(\lambda)$. Если $p > 0$ и $q > 0$, то степень неустойчивости $\chi = 0$ и движение устойчиво по Ляпунову. Если $q < 0$, то степень неустойчивости $\chi = 1$ и движение неустойчиво. Если $p < 0$ и $q > 0$, то степень неустойчивости $\chi = 2$ и имеется возможность гироскопической стабилизации.

Определим степень неустойчивости равновесия $(\xi, \eta) = (0, 0)$. Тогда

$$p = -2 \left(\Omega^2 + \sqrt{2}mG \frac{\frac{\ell^2}{2} + 3a^2}{(\frac{\ell^2}{3} - a^2)^{5/2}} \right) < 0, \quad q = \left(\Omega^2 + \sqrt{2}mG \frac{\frac{\ell^2}{2} + 3a^2}{(\frac{\ell^2}{3} - a^2)^{5/2}} \right)^2 > 0.$$

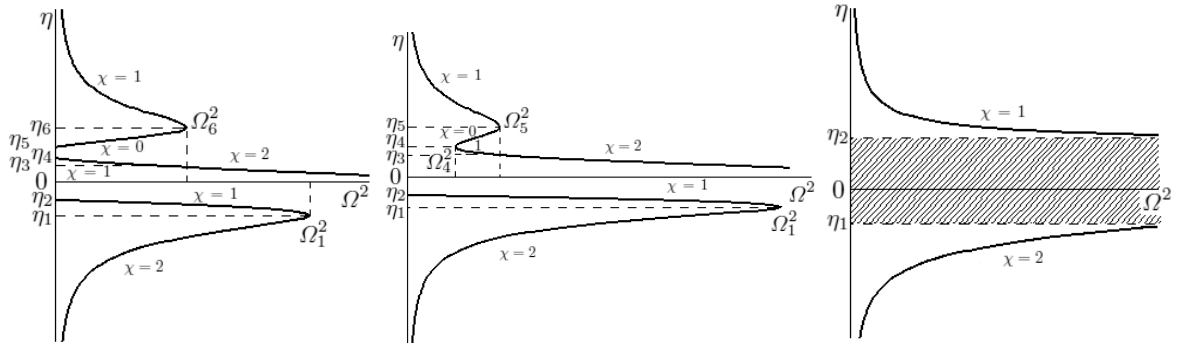


Рис. 3.5: Бифуркационные диаграммы Пуанкаре в случае *I*. на примере, когда $a = 1/3$, $a = 0.4$, $a = 1$.

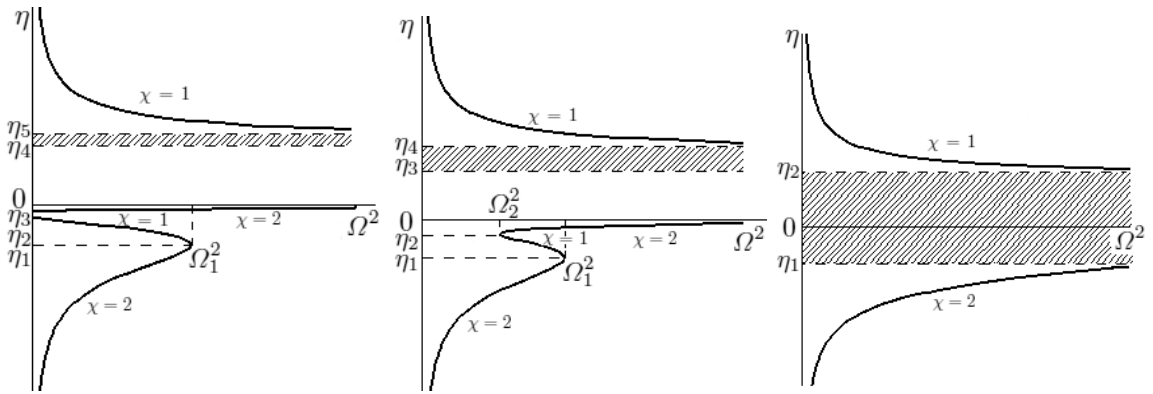


Рис. 3.6: Бифуркационные диаграммы Пуанкаре в случае *II*. на примере, когда $a = 0.1$, $a = 0.2$, $a = 1$.

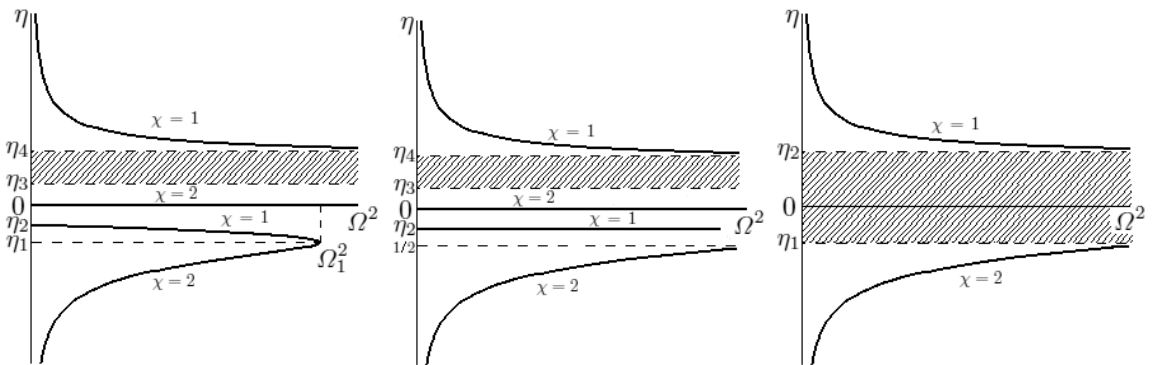


Рис. 3.7: Бифуркационные диаграммы Пуанкаре в случае *III*. на примере, когда $a = 1/3$, $a = 0.5$, $a = 1$.

Следовательно, степень неустойчивости решения $(\xi, \eta) = (0, 0)$ равна двум.

Для характерных случаев значений параметра a соответственные степени неустойчивости определены для каждой ветви бифуркационной диаграммы (см. рис. 3.5, 3.6 и 3.7). В рассматриваемой задаче не оказалось нулевых степеней неустойчивости, что является следствием предположения малости гравитирующей точки в сравнении с массой треугольника (ср. с результатами [56], где такого предположения о малости не делалось).

При изучении устойчивости равновесий в случае I . когда $a = 1/3$ и $a = 0.4$ существует критическое значение угловой скорости Ω , при котором наблюдается смена степеней неустойчивости решения η_4 . В точке η_3 у системы наблюдается бифуркация типа вилка, см. 3.8 и 3.9.

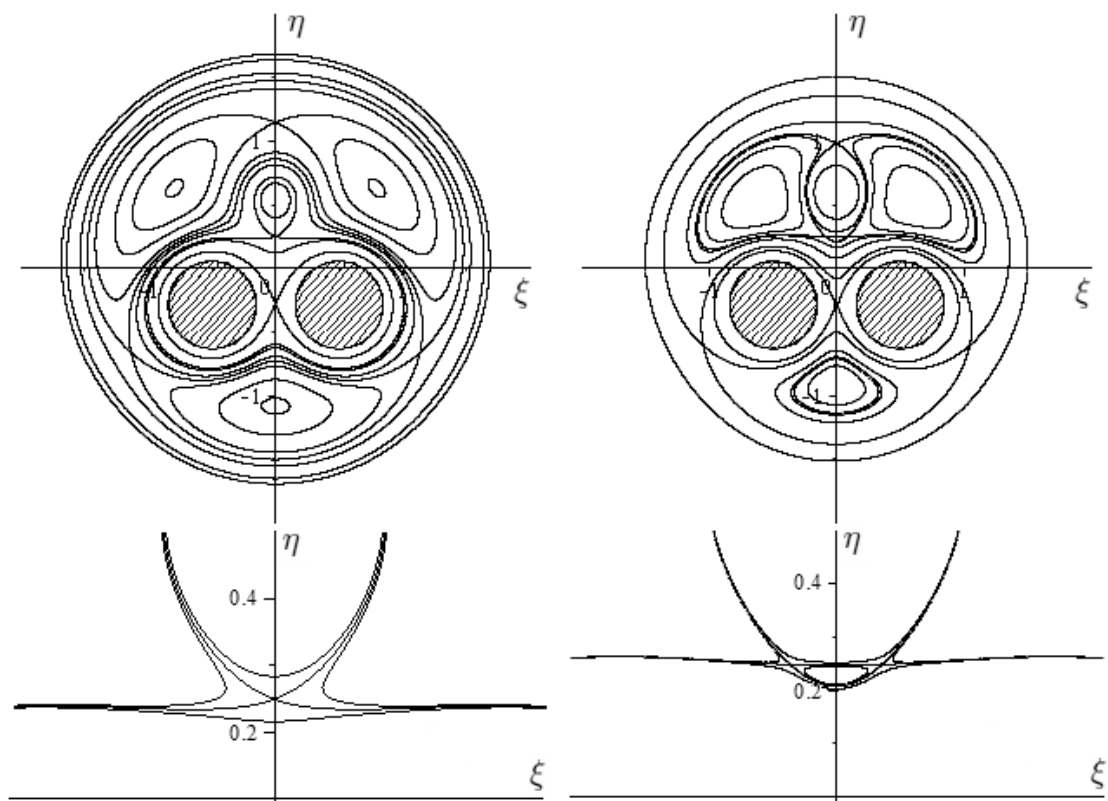


Рис. 3.8: Сечения измененного потенциала в случае I . при $a = 1/3$. $\Omega^2 = 5$ слева, $\Omega^2 = 8$ справа.

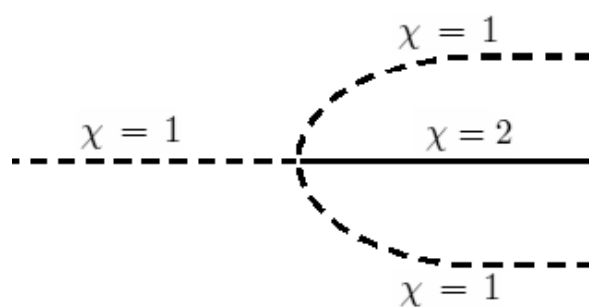


Рис. 3.9: Бифуркационная диаграмма (как функция от Ω) устойчивости точки либрации $(0, \eta_3)$ в случае I . Ω возрастает слева на право.

Заключение

В диссертационной работе изучен ряд задач динамики взаимногравитирующих треугольного твердого тела, приближающего малое небесное тело с нерегулярным распределением масс, и материальной точки.

В задаче о движении в общей плоскости треугольника с массами, сосредоточенными в его вершинах, и материальной точки, в системе отсчёта, связанной с треугольником указана кривая Γ и семейство кривых Γ_β , пересечениям которых отвечают стационарные конфигурации. Доказано, что на кривой Γ располагаются центр масс треугольника и центр описанной окружности, а вершины треугольника являются её выколотыми точками. Доказано, что при больших (по сравнению с размерами треугольника) расстояниях между треугольником и точкой кривая Γ хорошо приближается гиперболой, и имеется не менее четырёх стационарных конфигураций.

Полученные результаты проиллюстрированы с помощью модельного примера пифагорейского треугольника с равными массами в вершинах, а также на примерах астероидов Эрос и Итокава.

Для равнобедренного треугольника число и структура стационарных конфигураций исследованы в зависимости от постоянной интеграла площадей. Для того же треугольника исследована структура множества “обычных” равновесий и их устойчивость в зависимости от параметров задачи. Для правильного треугольника с равными массами в вершинах доказано наличие равновесий, лежащих на осях симметрии и не совпадающих с центром масс треугольника.

В предположении о том, что треугольное тело с равными массами в вершинах выдерживает группу симметрий правильного треугольника, определяются условия существования, устойчивости и ветвления решений, располагающихся на осях симметрии. Выводы иллюстрируются с помощью диаграмм Пуанкаре. Определены необходимые и достаточные условия устойчивости найденных стационарных конфигураций. Используя в качестве координат функции от полиномиальных инвариантов группы поворотов правильного треугольника, доказывается отсутствие стационарных конфигураций на которых точка располагается вне осей симметрии.

Предлагается модель “обобщённого треугольника”, у которого вершинам поставлены в соответствие вещественные и комплексифицированные гантели. В предположении о том, что треугольник равномерно вращается вокруг своего центра масс, выявлены точки либрации, исследована зависимость точек либрации от параметров задачи, в частности, от угловой скорости вращения. Изображены бифуркационные диаграммы Пуанкаре.

Доказано, что у системы, состоящей из взаимногравитирующих материальной точки и плоского тела, состоящего из n точек, располагающихся в общей плоскости, число точек либрации может принимать значения от 2 до $n + 1$.

Приложение. Оценка числа относительных равновесий гравитирующих точечного плоского твердого тела и материальной точки

В главах 1 и 2 (см. [56]) рассматривалась плоская задача о движении массивного треугольника и материальной точки под действием сил взаимного притяжения. Показано, что в зависимости от константы интеграла площадей, масс в вершинах треугольника и длин его сторон система обладает от двух до шестнадцати различных относительных равновесий с учетом различных симметрий этой механической системы.

Настоящий раздел вынесли в приложение, так как он несколько выбивается из основной линии изложения выстроенной в предыдущих главах. В неё (см. [52]) показывается, что наличие относительных равновесий в таких системах носит общий характер. Рассматриваются относительные равновесия плоского твердого тела общего вида с дискретным распределением n точечных масс и материальной точки под действием взаимного притяжения. Показывается, что в общем случае система допускает от двух до $n + 1$ относительного равновесия.

П1. Оценка числа точек либрации

Рассмотрим сначала случай, когда масса точки пренебрежимо мала и сила гравитационного притяжения к ней не влияет на движение твердого тела. Пусть твердое тело T состоит из набора материальных точек A_i , $i = 1, \dots, n$, с массами m_i , $i = 1, \dots, n$, соответственно. Расстояние между точками полагается постоянным. Тело вращается в своей плоскости вокруг центра масс O с постоянной угловой скоростью ω . В плоскости тела движется материальная точка A массы m под действием гравитационного притяжения к T .

Введем связанную с телом T прямоугольную декартову систему координат Oxy с началом в центре масс. Будем искать положения относительного равновесия точки A в предположении, что движение точки не влияет на движение тела.

Пусть в системе Oxy точки $A_1, \dots, A_n$ имеют постоянные координаты $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ соответственно, а точка A — координаты (x, y) . В положении равновесия на точку действуют сила гравитационного притяжения и центробежная сила.

Силовая функция имеет вид

$$U(x, y) = U_T + U_C = \sum_{i=1}^n \frac{\gamma m m_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

где U_T — силовая функция ньютоновского тяготения, U_C — силовая функция переносной силы инерции, γ — гравитационная постоянная.

Положения относительного равновесия — это критические точки силовой функции.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. При $\omega > 0$ и $n > 1$ существует не менее двух различных положений относительного равновесия точки. Если поворот вокруг центра масс O на угол $\alpha = \frac{\pi}{q}$, где $q \in \mathbb{N}$, является симметрией для тела T , то существует не менее $q + 1$ положений относительного равновесия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если критических точек силовой функции бесконечное количество, то утверждение доказано. Пусть их число конечно. Обозначим через h_1 максимум силовой функции на этих точках.

При $(x, y) \rightarrow (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, n$, имеем

$$U_T \rightarrow +\infty, \quad \frac{\partial U_T}{\partial x} \rightarrow -\infty, \quad \frac{\partial U_T}{\partial y} \rightarrow -\infty.$$

При $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$ имеем

$$\begin{aligned} U_T &\rightarrow 0, & \frac{\partial U_T}{\partial x} &\rightarrow 0, & \frac{\partial U_T}{\partial y} &\rightarrow 0, \\ U_C &\rightarrow +\infty, & \frac{\partial U_C}{\partial x} &\rightarrow +\infty, & \frac{\partial U_C}{\partial y} &\rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Подберем радиус $r > 0$ таким малым, чтобы на окружностях

$$S_i : (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = r^2, \quad i = 1, \dots, n,$$

градиент силовой функции отличался от нуля и был направлен внутрь кругов B_i , ограниченных этими окружностями. А радиус $R > 0$ подберем таким большим, чтобы на окружности

$$S_0 : x^2 + y^2 = R^2$$

градиент силовой функции отличался от нуля и был направлен во внешнюю часть круга B_0 , ограниченного этой окружностью.

Радиус r уменьшим, а радиус R увеличим так, чтобы диски

$$B_i : (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \leq r^2, \quad i = 1, \dots, n,$$

не пересекались и лежали внутри диска

$$B_0 : x^2 + y^2 \leq R^2.$$

Тогда множество

$$W = \overline{B_0 \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n)}$$

является непустым компактным множеством.

Пусть h_2 — максимум силовой функции на этом множестве. Уменьшая r и увеличивая R , добьемся выполнимости неравенства $h_2 > h_1$ и положим $h_0 = \max\{h_1, h_2\} + 1$.

Для любого $h^* \geq h_0$ неравенство $U(x, y) \leq h^*$ определяет некоторую замкнутую область D_{h^*} . Рассмотрим границу области

$$D_{h^*} : \Gamma(D_{h^*}) = \{(x, y) : U(x, y) = h^*\}.$$

На ней $U(x, y) > h_2$. Следовательно, граница не содержит критических точек силовой функции и представляет собой гладкую кривую.

Рассмотрим множество $D_{h^*} \setminus W$. По построению в этой области и на ее границе градиент силовой функции не обращается в нуль. Граница этого множества несвязна и состоит из двух непересекающихся замкнутых кривых $\Gamma(D_{h^*})$ и Γ_W , причем на Γ_W градиент силовой функции направлен внутрь области $D_{h^*} \setminus W$, а на $\Gamma(D_{h^*})$ — во внешнюю часть. Следовательно, кривые Γ_W и $\Gamma(D_{h^*})$ диффеоморфны. Диффеоморфизм устанавливается сдвигом вдоль градиентного потока силовой функции [65].

Граница Γ_W множества W представляет собой $n + 1$ окружность. Следовательно, при $h^* \geq h_0$ кривая $\Gamma(D_{h^*})$ также представляет собой семейство из $n + 1$ гладкой кривой, диффеоморфных окружности.

Введем ось Oz так, чтобы система координат $Oxyz$ была правой тройкой. Пусть $F(x, y, z) = z - U(x, y)$, тогда $\text{grad } F = (-U_x, -U_y, 1) \neq 0$. Возьмем произвольное число $h > h_0$ и зададим поверхность

$$\Sigma_h = \{(x, y, z) : F = z - U(x, y) = 0, U(x, y) \leq h\}.$$

По построению граница $\Gamma(D_h)$ не содержит критических точек силовой функции. Поэтому Σ_h — гладкое многообразие с краем.

Поверхность $|z| = h - U(x, y)$ кусочно-гладкая. Нарушение гладкости происходит в точках, у которых $z = 0$. Сгладим эту поверхность в поясе $\Omega_\varepsilon = \{(x, y, z) \in \Sigma_h, |z| < \varepsilon\}$. Подберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы любая $\Gamma_{h'}$, где $h' \in [h - \varepsilon; h + \varepsilon]$, не содержала критических точек. Для $s \in R$ зададим такую выпуклую неотрицательную гладкую функцию $\nu_\varepsilon(s)$, которая при $|s| \geq \varepsilon$ совпадает с функцией $|s|$. Подчеркнем, что в поясе Ω_ε нет критических точек силовой функции.

Двумерное многообразие M^2 , задаваемое уравнением $\nu_\varepsilon(z) = h - U(x, y)$, является гладким компактным связным, но неодносвязным многообразием. Категория Люстерника–Шнирельмана такого многообразия равна трем. Следовательно, произвольная гладкая функция $f(x, y, z) = z$, заданная на таком многообразии M^2 имеет не менее трех различных критических точек [65]. Ввиду симметричности многообразия M^2 относительно плоскости $z = 0$ число критических точек должно быть четным. Значит, функция f на M^2 имеет не менее четырех различных критических точек. Следовательно, в области D_h функция $U(x, y)$ имеет не менее двух различных критических точек.

Доказательство первой части утверждения завершено.

Пусть теперь тело T допускает симметричный поворот вокруг центра масс на угол $\alpha = \pi/q$, $q \in \mathbb{N}$. Поскольку две найденные выше критические точки различны, то при повороте как минимум одна точка также повернется и перейдет в новое положение относительного равновесия. Поэтому положений относительного равновесия будет не менее $q + 1$.

СЛЕДСТВИЕ. Если точки твердого тела имеют одинаковые массы и расположены в вершинах равностороннего n -угольника, то точка C имеет как минимум $n + 1$ положение относительного равновесия.

П2. Оценка числа равновесий

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. При $\omega = 0$ и $n > 1$ существует, по крайней мере, одно положение равновесия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma_r(P) = \{(x, y) : (x_P - x)^2 + (y_P - y)^2 = r^2\}$ — окружность с началом в точке $P = (x_P, y_P)$ радиуса r .

Подберем $r = r_i$, так, чтобы вектор $\text{grad } U|_{\omega=0}$ в каждой точке окружности $\Gamma_i = \Gamma_{r_i}(A_i)$ был направлен внутрь замкнутого круга D_i , ограниченного окружностью Γ_i , $i = 1, \dots, n$. Для центра масс O тела подберем радиус $r = r_O$, настолько большим, чтобы вектор $\text{grad } U|_{\omega=0}$ в каждой точке окружности $\Gamma_0 = \Gamma_{r_O}(O)$ был направлен внутрь области, ограниченной Γ_0 , и все круги D_i $i = 1, \dots, n$, лежали внутри замкнутого круга D_0 , ограниченного окружностью Γ_0 . Поскольку функция $U|_{\omega=0}$ непрерывна во всех точках, за исключением притягивающих центров, то числа $r_O, r_1, \dots, r_n$ существуют.

Рассмотрим область $D = D_0 \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_n)$ с границей $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Положительным будем считать обход границы, при котором область D остается слева. Число вращения вектора $\text{grad } U|_{\omega=0}$ при обходе окружности Γ_0 равно $+1$, а при обходе окружностей Γ_i равно -1 , $i = 1, \dots, n$. Суммарное число вращения вектора $\text{grad } U|_{\omega=0}$ при обходе границы области D равно $1 - n$. При $n > 1$ получаем, что число вращения отлично от нуля. Следовательно, внутри области D есть одна или несколько особых точек векторного поля $\text{grad } U|_{\omega=0}$, причем суммарный индекс этих особых точек равен $n - 1$ [51].

П3. Оценка числа относительных равновесий

Рассмотрим общий случай движения плоского твердого тела и материальной точки под действием их взаимного гравитационного притяжения. Точка и тело движутся в неподвижной плоскости. Если система находится в относительном равновесии, то система вращается как единое твердое тело с некоторой угловой скоростью ω вокруг общего центра масс O .

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. При $n > 1$ для любого значения $\omega > 0$ существует не менее двух различных положений относительного равновесия системы тело–точка. Если поворот вокруг центра масс тела на угол $\alpha = \frac{\pi}{q}$, где $q \in \mathbb{N}$, является симметрией для тела, то существует не менее $q + 1$ положения относительного равновесия системы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть O — центр масс системы и Oxy — система координат с началом в точке O , вращающаяся с угловой скоростью ω . Относительные равновесия системы тело–точка — это равновесия в системе Oxy . Если система тело–точка находится в положении равновесия, то все положения, получающиеся из данного поворотом системы тело–точка как твердого тела вокруг точки O на

любой угол, также являются положениями равновесия. Такие положения равновесия мы не будем различать.

Добавим к активным силам, действующим на точки механической системы, кориолисову и переносную силы инерции. Тогда можно считать, что система Oxy инерциальна. Положение системы тело–точка в этой системе координат будем задавать тремя обобщенными координатами ξ, η, φ , которые вводятся следующим образом. Свяжем с телом систему координат Suv , начало которой находится в центре масс S тела. Пусть в системе Oxy точка имеет координаты (x, y) и угол между осью Ox и осью Su равен φ (при повороте на угол φ против часовой стрелки ось Ox станет сонаправлена оси Su). Обозначим через P_φ такое положение системы тело–точка. Тогда (ξ, η) — точка, в которую перейдет точка (x, y) при повороте на угол $-\varphi$ вокруг точки O :

$$\xi = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \quad \eta = x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

Поясним геометрический смысл обобщенных координат ξ, η, φ . Рассмотрим положение P_0 системы тело–точка, в котором ось Ou сонаправлена с осью Ox и материальная точка имеет координаты (ξ, η) . Тогда при повороте системы тело–точка как единого твердого тела вокруг точки O на угол φ система из положения P_0 перейдет в положение P_φ . Требуется показать, что при $\varphi = 0$ система тело–точка имеет не менее двух различных положений равновесия. Пусть, как и раньше, $U = U_T + U_C$ — силовая функция системы, U_T — силовая функция ньютоновского тяготения, U_C — силовая функция переносных сил инерции. При повороте системы тело–точка как единого твердого тела вокруг точки O работа сил ньютоновского тяготения будет равна нулю, поскольку они являются внутренними силами системы. Работа переносных сил инерции, также равна нулю, поскольку эти силы являются центральными с центром в точке O . Значит, U_T и U_C не меняются при изменении обобщенной координаты φ . Следовательно, силовая функция системы не зависит от φ , т.е. $U = U(\xi, \eta)$. Определим эту функцию, считая, что $\varphi = 0$.

Материальная точка имеет координаты (ξ, η) в системе Oxy . Поскольку центр масс системы тело–точка располагается в точке O , то координаты (s_x, s_y) центра масс S тела в системе Oxy равны $s_x = -\frac{m\xi}{M}$, $s_y = -\frac{m\eta}{M}$, где m, M — масса точки и тела соответственно. Так как $\varphi = 0$, то для координат (x_i, y_i) точек тела в системе Oxy имеем

$$x_i = s_x + u_i = u_i - \lambda \xi, \quad y_i = s_y + v_i = v_i - \lambda \eta, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $\lambda = \frac{m}{M}$, а постоянные (u_i, v_i) — это координаты точек тела в системе Suv .

Силовая функция ньютоновского тяготения равна

$$U_T(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \frac{\gamma m m_i}{\sqrt{(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2}} = \sum_{i=1}^n \frac{\gamma \tilde{m} m_i}{\sqrt{(\xi - a_i)^2 + (\eta - b_i)^2}},$$

где

$$a_i = \frac{u_i}{1 + \lambda}, \quad b_i = \frac{v_i}{1 + \lambda}, \quad \tilde{m} = \frac{m}{1 + \lambda}.$$

Поскольку центр масс тела расположен в начале системы координат Suv , то

$$\sum_{i=1}^n m_i u_i = \sum_{i=1}^n m_i v_i = 0.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^n m_i(x_i^2 + y_i^2) = M(s_x^2 + s_y^2) + \sum_{i=1}^n m_i(u_i^2 + v_i^2) = M\lambda^2(\xi^2 + \eta^2) + \sum_{i=1}^n m_i(u_i^2 + v_i^2).$$

Силовая функция переносной силы инерции равна

$$U_C(\xi, \eta) = \frac{m\omega^2}{2}(\xi^2 + \eta^2) + \sum_{i=1}^n \frac{m_i\omega^2}{2}(x_i^2 + y_i^2) = \frac{\widetilde{M}\omega^2}{2}(\xi^2 + \eta^2) + c,$$

где

$$\widetilde{M} = m + M\lambda^2, \quad c = \sum_{i=1}^n \frac{m_i\omega^2}{2}(u_i^2 + v_i^2).$$

Отбросив постоянную c , получаем, что силовая функция системы имеет вид

$$U(\xi, \eta) = U_T + U_C = \sum_{i=1}^n \frac{\gamma \widetilde{m} m_i}{\sqrt{(\xi - a_i)^2 + (\eta - b_i)^2}} + \frac{\widetilde{M}\omega^2}{2}(\xi^2 + \eta^2)$$

Положения относительного равновесия — это критические точки силовой функции. Эта функция по форме совпадает с силовой функцией из утверждения 1. Следовательно, верны все утверждения относительно ее критических точек.

В завершение доказательства отметим, что при $\xi = 0$, $\eta = 0$ обобщенные координаты вырождаются. Требуется рассмотреть этот случай особо. Пусть $(0, 0)$ — критическая точка функции $U(\xi, \eta)$. В качестве обобщенных координат возьмем x, y, φ , где (x, y) — координаты материальной точки в системе координат Oxy , φ — угол между осью Ox и осью Su . Эти координаты не вырождаются при $(x = 0, y = 0)$. Обозначим через $\widetilde{U}(x, y, \varphi)$ силовую функцию в этих обобщенных координатах. Положения относительного равновесия — это критические точки силовой функции. Покажем, что точка $(x = 0, y = 0, \varphi = 0)$ является критической точкой силовой функции $\widetilde{U}$. При $\varphi = 0$ имеем $\xi = x$, $\eta = y$, поэтому $\widetilde{U}(x, y, 0) = U(x, y)$. Значит,

$$\left. \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial x} \right|_0 = \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_0 = 0, \quad \left. \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial y} \right|_0 = \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_0 = 0.$$

При изменении угла φ твердое тело поворачивается вокруг своего центра масс. Значит, $\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \varphi}$ — это суммарный момент гравитационных сил и переносных сил инерции, действующих на точки тела, относительно его центра масс. Если $x = 0$, $y = 0$, то материальная точка совпадает с центром масс тела и обе эти точки совпадают с центром масс O системы. В этом случае гравитационные силы и переносные силы инерции, действующие на точки тела, являются центральными с центром в точке O и их момент относительно этой точки равен нулю. Следовательно,

$$\left. \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \varphi} \right|_0 = 0.$$

Таким образом, точка $(x = 0, y = 0, \varphi = 0)$ является критической точкой силовой функции $\widetilde{U}(x, y, \varphi)$ и, следовательно, это — положение относительного равновесия систем.

Доказательство завершено.

Литература

1. *Абрарова Е.В., Карапетян А.В.* О ветвлении и устойчивости стационарных движений и относительных равновесий твердого тела в центральном гравитационном поле // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 375-387.
2. *Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г.* Обобщённая задача двух неподвижных центров и ее применение в теории движения искусственных спутников Земли // *Астрономический журнал*. 1963. Т. 40. Вып. 2. С. 363.
3. *Алексеев В. М.* Обобщенная пространственная задача двух неподвижных центров. Классификация движений // *Бюл. Ин-та теор. астрономии*. 1965. Т. 10. N 4. С. 241–272.
4. *Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. М: Наука, 1988. 272 с.
5. *Баландин Д.В., Никонов В.И.* О точках либрации вращающегося “комплексифицированного” треугольника // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика*. 2016. Т. 71. N 3. С. 25–31.
6. *Балк М.Б., Болтянский В.Г.* Геометрия масс. М.: Наука, 1987. Вып. 61. 160 С.
7. *Батраков Ю.В.* Периодические движения частицы в поле тяготения вращающегося трехосного эллипсоида // *Бюлл. ИТА АН СССР*. 1957. Т. 6. N 8. С. 524-542.
8. *Батраков Ю.В., Василькова О.О.* О возможной эрозии эллипсоидального тела в пылевом облаке // *Тезисы конференции Компьютерные методы небесной механики-97*, 18-20 ноября 1997, Санкт-Петербург, ИТА, С. 25.
9. *Белецкий В.В.* Обобщенная ограниченная круговая задача трех тел как модель динамики двойных астероидов // *Космич. исследования*. 2007. Т. 45. N 6. с. 435-442.
10. *Белецкий В.В., Пономарева О.Н.* Параметрический анализ устойчивости относительного равновесия в гравитационном поле // *Космич. исследования*. 1990. Т. 28. N 5. С. 664-675.
11. *Белецкий В.В., Родников А.В.* Об устойчивости треугольных точек либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трёх тел // *Космические исследования*. 2008. Т. 46. N 1. С. 42-50.

12. *Белецкий В.В., Родников А.В.* Компланарные точки либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. N 3. С. 569-576.
13. *Белецкий В.В., Родников А.В.* Точки либрации обобщённой ограниченной круговой задачи трех тел в случае мнимого расстояния между притягивающими центрами // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. N 5. С. 931-940.
14. *Березкин Е.Н.* Курс теоретической механики (2-е изд.). М.: Изд. МГУ, 1974.
15. *Буров А.А.* О динамике тел, допускающих симметрии // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН. 1993. С. 3-12.
16. *Буров А.А.* О движении крестообразных тел вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 1. С. 30-36.
17. *Буров А.А., Герман А.Д., Суликашвили Р.С.* Об орбитальном движении тетраэдра-гиростата // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 4. С. 594-609.
18. *Буров А.А., Герман А.Д., Суликашвили Р.С.* Об установившихся движениях гиростатов с равными моментами инерции в центральном поле сил // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 738-744.
19. *Буров А.А., Карапетян А.В.* О движении крестообразных тел // Изв. РАН. МТТ. 1995. N 6. С. 14 – 18.
20. *Буров А.А., Мотт И., Славяновский Я.Е., Степанов С.Е.* Об устойчивости и бифуркациях стационарных движений гантели по сфере // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН. 2006. С. 93–104.
21. *Буров А.А., Никонов В.И.* Об устойчивости и ветвлении стационарных вращений в плоской задаче о движении взаимно гравитирующих треугольника и материальной точки // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12. N 2. С. 179-196.
22. *Буров А.А., Шевалье Д.П.* О движении твердого тела в жидкости под действием центральных сил ньютоновского притяжения // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 4. С. 602-618.
23. *Василькова О.О.* Движение спутника в близкой окрестности астероида. Дис. канд. физ.-мат. наук. Главная астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, 2006.
24. *Видякин В.В.* Разложение силовой функции двух однородных сфероидов с несовпадающими плоскостями симметрии // Астроном. журнал. 1972. Т. 49. N 3. с. 641-646.
25. *Гасанов С.А., Лукьянов Л.Г.* О точках либрации в задаче о движении звезды внутри эллиптической галактики // Астрономический журнал. 2002 Т. 79. N. 10. С. 944-951.
26. *Голиков А.Р.* Интегрирование уравнений движений материальной точки в поле тяготения осесимметричной планеты // Космич. исследования. 1984. Вып. 5. С. 651–662.

27. *Демин В.Г.* Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. Москва-Ижевск: НИИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ижевский институт компьютерных исследований. 2010. 420 с.
28. *Дубошин Г.Н.* Об одном частном случае задачи о поступательно-вращательном движении двух тел // *Астроном. журнал.* 1959. Т. 36. N 1. С. 153-163.
29. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. Издание 3-е, дополненное. М: Наука, 1975 . 800 с.
30. *Журавлев С.Г.* Об устойчивости точек либрации вращающегося трехосного эллипсоида в пространственном случае // *Астроном. журнал.* 1974. Т. 51. N 6. С. 1330-1334.
31. *Журавлев С.Г., Зленко А.А.* О некоторых частных случаях поступательно-вращательного движения осесимметричного спутника трехосной планеты // *Космические исследования.* 1981. Т. 19. N 3. С. 367-376.
32. *Журавлев С.Г., Зленко А.А.* О стационарных решениях в задаче о поступательно-вращательном движении трехосного спутника трехосной планеты // *Астроном. журнал.* 1983. Т. 60. N 2. С. 367-374.
33. *Журавлев С.Г., Зленко А.А.* Условно-периодические поступательно-вращательные движения спутника трехосной планеты // *Астроном. журнал.* 1983. Т. 60. N 6. С. 1217-1222.
34. *Карпетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС Москва, 1998. 168 с.
35. *Карпетян А.В., Нараленкова И.И.* О бифуркации равновесий механических систем с симметричным потенциалом // *Известия АН СССР ПММ.* 1998. Т. 62. N 1. С. 12-21.
36. *Карпетян А.В., Сахокия И.Д.* О бифуркации и устойчивости стационарных движений двух гравитирующих тел. // *ПММ.* 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 935-938.
37. *Карпетян А.В., Шаракин С.А.* О стационарных движениях двух взаимно гравитирующих тел и их устойчивости // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.* 1992. N 3. С. 42-48.
38. *Кислик М.Д.* Движение искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли // *Сб. Искусственные спутники Земли.* 1960. Вып. 4. С. 13-17.
39. *Классическая динамика в неевклидовых пространствах* Москва - Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2004. – 348 с.
40. *Козел С.М., Раиба Э.И., Славатинский С.А.* Сборник задач по физике. Задачи МФТИ. М.: Наука, 1978.
41. *Козлов И.С.* Задача четырех неподвижных центров и ее приложение к теории движения небесных тел // *Астроном. журнал.* 1974. Т. 51. Вып. 1. С. 191–198.

42. *Козлов И. С.* О равновесии суточных спутников планеты с учетом её трехосности // *Астроном. журнал.* 1975. Т. 52. Вып. 1. С. 159–163.
43. *Кондурарь В.Т.* Проблемы движения двух эллипсоидов под действием взаимного притяжения // *Астроном. журнал.* 1936. Т. 13. N 6. с. 563–588.
44. *Кондурарь В.Т.* Частные решения общей задачи о поступательно-вращательном движении сфероида под действием притяжения шара // *Астроном. журнал.* 1959. Т. 36. N 5. с. 890–901.
45. *Косенко И.И.* О точках либрации вблизи гравитирующего вращающегося трехосного эллипсоида // *ПММ.* 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 26–33.
46. *Косенко И.И.* Точки либрации в задаче о трехосном гравитирующем эллипсоиде: Геометрия области устойчивости // *Космич. исслед.* 1981. Т. 19. N 2. С. 200–209.
47. *Косенко И.И.* Нелинейный анализ устойчивости точек либрации трехосного эллипсоида // *ПММ.* 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 16–24.
48. *Косенко И.И.* О разложении гравитационного потенциала неоднородного эллипсоида в ряд // *ПММ.* 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 194–199.
49. *Косенко И.И.* Об устойчивости точек либрации неоднородного трёхосного эллипсоида // *ПММ.* 1987. Т. 51. Вып. 1. С. 3–8.
50. *Косенко И.И., Степанов С.Я.* Устойчивость положений относительного равновесия орбитальной связки с учётом ударных взаимодействий. Неограниченная задача // *Изв. РАН. МТТ.* 2006. N 4. С. 86–96.
51. *Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П.* Векторные поля на плоскости. М.: Физматгиз, 1963.
52. *Кугушев Е.И., Никонов В.И.* Оценка числа относительных равновесий гравитирующих точечного плоского твердого тела и материальной точки // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.* 2015. N 6. С. 37–41.
53. *Меркин Д.Р.* Алгебра свободных и скользящих векторов. М.: изд-во “Физматгиз”, 1962.
54. *Муницына М.А.* О стационарных движениях двух взаимно гравитирующих тел и их устойчивости // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.* 2005. N 6. С. 39–42.
55. *Никонов В.И.* Задачник Кванта. Задача Ф2325 // *Квант.* 2013. N 5–6. С. 14.
56. *Никонов В.И.* Относительные равновесия в задаче о движении треугольника и точки под действием сил взаимного притяжения // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.* 2014. N 2. С. 45–51.
57. *Никонов В.И.* Существование и устойчивость стационарных конфигураций в задаче о движении проволочного треугольника и точки под действием сил взаимного притяжения // *ПММ.* 2015. Т. 79. Вып. 3. С. 334–343.

58. *Ожунев Ю.М.* О возможных движениях длинной гантели в центральном поле сил // Космич. исследования. 1969. Т. 7. N 5. С. 637-642.
59. *Родников А.В.* О движении материальной точки вдоль леера, закрепленного на прецессирующем твердом теле // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. N 2. С. 295–311.
60. *Родников А.В.* Компланарные точки либрации обобщённой ограниченной круговой задачи трех тел в случае комплексно-сопряжённых масс притягивающих центров // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. N 4. С. 697-710.
61. *Степанов С.Я.* Симметризация критериев знакоопределённости симметричных квадратичных форм // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 6. С. 979-987
62. *Суликашвили Р.С.* О стационарных движениях тетраэдра и октаэдра в центральном поле тяготения // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР. 1987. С. 57-66.
63. *Суликашвили Р.С.* Об устойчивости стационарных движений тел с шаровым тензором инерции в ньютоновском поле сил // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 758-762.
64. *Суликашвили Р.С.* Стационарные движения тел, допускающих группы симметрий правильного многогранника в ньютоновском поле сил // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 582–586.
65. *Фоменко А.Т.* Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
66. *Холшевников К.В., Питъев Н.В., Тутов В.Б.* Притяжение небесных тел. СПб.:Изд-во СПб. ун-та, 2005. 104 с.
67. *Beletsky V.V., Rodnikov A.V.* On evolution of libration points similar to Eulerian in the model problem of the binary-asteroids dynamics // Journal of Vibroengineering. 2008. Vol. 10. No. 4. Pp. 550–556.
68. *Borisov A. V., Mamaev I.S., Kilin A.A.* Two-body problem on a sphere. Reduction, stochasticity, periodic orbits// RCD. 2004. vol 9. No. 3. С. 265-279.
69. *Born M., Infeld L.* Foundations of the new field theory // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.. 1934. Vol. 144. No. 852. Pp. 425-451.
70. *Breiter S., Bartczak P.*, Double material segment as the model of irregular bodies // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2003. Vol.86. No. 2. Pp.131–141.
71. *Bourov A., Chevallier D.* On Routh Reduction and its Application in Rigid Body Dynamics // Z. angew. Math. Mech.. 1998. Vol. 78 No. 10. Pp. 695–702.
72. *Burov A.A., Sulikashvili R.S.* On the motion of a rigid body possessing a finite group of symmetry // Prepublication de la laboratoire de mathématiques appliquées, Paris: Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Avril 1993, no 25, Pp. 8.

73. *Elpe A., Riaguas A.* Nonlinear stability under a logarithmic gravity field, Pre-publicaciones del seminario matematico, 2003.
74. *Farquhar R.W.* NEAR Shoemaker at Eros: Mission Director's Introduction. Johns Hopkins APL Technical Digest, 23(1), January-March 2002.
75. *Goździewski K., Maciejewski A.J.* Unrestricted planar problem of a symmetric body and a point mass. Triangular libration points and their stability // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1999. Vol. 75. No. 4. Pp. 251-285.
76. *Goździewski K., Maciekewski A.J.* Nonlinear stability of the Lagrangian libration points in the Chermnykh problem // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1998. Vol. 70. No. 1. Pp. 41-58.
77. *Hernández-Garduño A., Marsden J.E.* Regularization of the amended potential and the bifurcation of relative equilibria // *Journal of Nonlinear Science*. 2005. Vol. 15. No. 2. Pp. 93-132.
78. *Herrera-Sucarrat E.* The full problem of two and three bodies: application to asteroids and binaries. Ph. D. Dissertation. University of Surrey, 2012.
79. *Herrera-Sucarrat E., Palmer P.L., Roberts R.M.* Modeling the Gravitational Potential of a Non-spherical Asteroid // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2013. Vol. 36. Pp. 790-798.
80. *Karapetyan A.V.* On construction of the effective potential in singular cases // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2000. Vol. 5. No. 2. Pp. 219-224.
81. *Konopliv A.S., Miller J. K., Owen W. M., Yeomans D. K., Giorgini J. D., Garmier R., Barriot J. P.* A Global Solution for the Gravity Field, Rotation, Landmarks, and Ephemeris of Eeros // 16-th International Symposium on Space Flight Dynamics, Dec. 3-6, 2001, Pasadena, CA.
82. *Koon W.S., Marsden J.E., Ross S.D., Lo M., Scheeres D.J.* Geometric mechanics and the dynamics of asteroid pairs // *United States Annals of the New York Academy of Sciences*. 2004. No. 1017 Pp. 11-38.
83. *Kubota T., Hashimoto T., Kawaguchi J.* Guidance and navigation of Hayabusa spacecraft for asteroid exploration and sample return mission // *Sice-Icase International Joint Conference*, October 18-21 2006.
84. *Maciejewski A.J.* Reduction, relative equilibria and potential in the two rigid bodies problem // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1995. Vol. 63. No.1. Pp. 1-28.
85. *Moran J.P.* Effects of Plane Librations on the Orbital Motion of a Dumbbell Satellite // *ARS Journal*. 1961. Vol. 31. No. 8. Pp. 1089-1096.
86. *Nikonov V.* On relative equilibria of mutually gravitating massive point and triangular rigid body // *Proc. of the Internat. Astronomical Union*. 2015. Vol. 9. s310. pp 170-171.

87. *Rodnikov A.V.* Rotations of a dumbbell equipped with the “leier constraint” // Journal of Vibroengineering. 2008. Vol. 10. No. 4. Pp. 557–561.
88. *Routh E.J.* Treatise on the Stability of a Given State of Motion. Cambridge: Cambridge University press. 1877. 108p.
89. *Routh E.J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. L.: McMillan. 1884. 343 p.
90. *Schechter H.B.* Dumbbell librations in elliptic orbits // AIAA Journal. 1964. Vol. 2. No. 6. Pp. 1000-1003.
91. *Scheeres D.J.* Stability in the full two-body problem // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2002. Vol. 83 No. 1. Pp. 155–169.
92. *Scheeres D.J.* Stability of relative equilibria in the full two-body problem // United States Annals of the New York Academy of Sciences. 2004. No. 1017 Pp. 81-94.
93. *Scheeres D.J.* Relative equilibria for general gravity fields in the sphere-restricted full two-body problem // United States Annals of the New York Academy of Sciences. 2005. No. 1065. Pp. 375-90.
94. *Scheeres D.J.* Stability of the planar full 2-body problem // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2009. Vol. 104. No. 1. Pp. 103–128.
95. *Scheeres D.J.* Orbital motion in strongly perturbed environments: applications to asteroid, comet and planetary satellite orbiters, 390 p. Berlin: Springer, 2012
96. *Stawianowski J.J.* Bertrand systems on spaces of constant sectional curvature. The action-angle analysis // Reports on Mathematical Physics. 2000. Vol. 46. No. 3. Pp. 429-460.
97. *Sulikashvili R.S.* On stationary motions of Plato’s bodies in a gravitational field // Teor. Primen. Meh.. 1989. No. 15. Pp. 119-125.
98. *Takahashi Yu., Scheeres D. J., Werner R. A.* Surface Gravity Fields for Asteroids and Comets // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2013. Vol. 36. No. 2. Pp. 362-374.
99. *Turconi A., Palmer Ph., Roberts M.* Simple Gravitational Models and Control Laws for Autonomous Operations in Proximity of Uniformly Rotating Asteroids // AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Vail, USA, 2015. Conference paper AAS-15 Pp. 693.
100. *Turconi A., Palmer Ph., Roberts M.* Efficient Modelling of Small Bodies Gravitational Potential for Autonomous Proximity Operations // Astrodynamics Network AstroNet-II: The Final Conference, Astrophysics and Space Science Proceedings. 2016. Vol. 44. Pp. 257-272.
101. *Vashkoviak M.A.* On the stability of circular ‘asteroid’ orbits in an N-planetary system // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1976. Vol. 13. No. 3. Pp. 313-324.

102. *Vereshchagin M., Maciejewski A.J., Goździewski K.* Relative equilibria in the unrestricted problem of a sphere and symmetric rigid body // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2010. Vol. 403. No. 2. pp 848–858.
103. *Vinti J.P.* Theory of accurate intermediate orbit for satellite astronomy // Journ. Res. Nat. Bur. Standards, 63B math. and math. physics. 1961. No. 3. Pp. 169–201.
104. *Werner R.A., Scheeres D.J.* Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1997. Vol. 65. No. 3. Pp. 313–344.
105. *Werner R.A., Scheeres D.J.* Mutual Potential of Homogenous Polyhedra // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2005. Vol. 91. No. 3. Pp. 337–349.
106. *Zeng X.Y., Jiang F.H., Li J.F., Baoyin H.X.* Study on the connection between the rotating mass dipole and natural elongated bodies // Astrophys. Space Sci.. 2015. Vol. 355. Pp. 2187.
107. *Zeng X., Baoyin H., Li J.* Updated rotating mass dipole with oblateness of one primary (I): equilibria in the equator and their stability // Astrophys. Space Sci.. 2016. Vol. 361. Pp. 14.
108. *Zeng X., Baoyin H., Li J.* Updated rotating mass dipole with oblateness of one primary (II): out-of-plane equilibria and their stability // Astrophys. Space Sci.. 2016. Vol. 361. Pp. 15.
109. *Zhuravlev S.G.* Stability of the Libration Points of a Rotating Triaxial Ellipsoid // Celestial Mechanics. 1972. Vol. 6. No. 3. Pp. 255–267.
110. *Zhuravlev S.G.* About the Stability of the Libration Points of a Rotating Triaxial Ellipsoid in a Degenerate Case // Celestial Mechanics. 1973. Vol. 8. No. 1. Pp. 75–84.