МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Вондрухов Андрей Сергеевич

БРАХИСТОХРОНА ПРИ ДЕЙСТВИИ РАЗГОНЯЮЩЕЙ СИЛЫ, А ТАКЖЕ СУХОГО И ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

Специальность 01.02.01 — «Теоретическая механика»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2016

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель: Голубев Юрий Филиппович, доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: Кобрин Александр Исаакович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Сумбатов Александр Сумбатович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, старший научный сотрудник Федерального государственного учреждения Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук

Защита диссертации состоится 16 декабря 2016 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д.501.001.22, созданного на базе Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119234, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться читальном зале отдела диссертаций Фундаментальной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: Ломоносовский проспект, д. 27 и на сайте http://mech.math.msu.su/~snark/files/diss/0138diss.pdf.

Автореферат разослан   октября 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета   Прошкин Владимир Александрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Классическая постановка задачи поиска кривой наискорейшего спуска – брахистохроны содержит предположение о потенциальности действующих на точку сил. В общем же случае действия на точку сухого и вязкого трения, а также разгоняющей силы тяги возникают трудности, связанные с тем, что скорость точки на оптимальной траектории зависит не только от ее положения в вертикальной плоскости, но и от пути, пройденного по оптимальной траектории.

В работах российских и иностранных авторов предложены различные подходы к решению задачи о брахистохроне с сухим и вязким трением. В основном авторы концентрировались на нахождении искомой траектории для двух заданных фиксированных точек, что зачастую приводило к появлению громоздких вычислений. При этом вопрос анализа свойств полученных траекторий оставался открытым.

Особенностью данной работы является то, что помимо силы тяжести и трения на точку действует разгоняющая сила, сонаправленная скорости и зависящая от ее величины. Кроме того, рассматривается старт с нулевой начальной скоростью, что стало причиной возникновения особенности в начальной точке траектории, для устранения которой предложен оригинальный метод применения дополнительной переменной.

В данной работе найдено полное семейство траекторий, удовлетворяющих условиям оптимальности, из одной фиксированной начальной точки. При этом определение параметров, изменение которых позволяет получать все оптимальные траектории, в совокупности с изучением свойств таких траекторий позволяет получать необходимые оптимальные траектории между двумя заданными точками.

Целью данной работы является исследование и описание основных свойств брахистохрон в поле силы тяжести при действии трения и разгоняющей силы, а также реализация алгоритма получения всего семейства оптимальных траекторий, исходящих из одной начальной точки.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Получить формулу для оптимального управления и систему уравнений, решение которой позволяет получать траектории, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности.
2. Исследовать свойства траекторий, удовлетворяющих условиям оптимальности.
3. Разработать способ устранения особенности, которая возникает при старте с нулевой скоростью.
4. Получить систему уравнений, для которой решение задачи Коши позволяет получить полное параметрическое семейство оптимальных траекторий.

Научная новизна:

1. Рассматривается постановка задачи о брахистохроне, включающая помимо сухого и вязкого трения разгоняющую силу, действующую на материальную точку, при старте с нулевой начальной скоростью.
2. В явном виде получена формула, представленная в зависимости от скорости, которая обеспечивает синтез оптимального управления для случая действия на точку сухого и вязкого трения, а также разгоняющей силы.
3. Выполнено исследование свойств оптимальных траекторий для действия отдельно сухого трения и для действия вязкого трения одновременно с разгоняющей силой, позволяющих создать представление о форме оптимальных траекторий.
4. Предложен и обоснован оригинальный способ избежания особенности в начальной точке при построении оптимальных траекторий при действии вязкого трения с использованием квазипостоянной разгоняющей силы.
5. Предложена система дифференциальных уравнений с дополнительной переменной, которая позволяет строить полное двухпараметрическое семейство оптимальных траекторий путем решения задачи Коши.

Научная и практическая значимость Научная значимость работы состоит в том, что разработаны новые методы и подходы, позволяющие решать сложную нелинейную задачу оптимального управления.

На практике брахистохроны, полученные в настоящей работе, могут быть использованы в технике для сокращения времени получения требуемых результатов работ, например, при определении оптимальной формы аварийных надувных трапов. Аварийные надувные трапы в настоящее время, помимо использования в каждом пассажирском самолете, находят широкое применение в системах пожарной безопасности в школах и больницах как быстрый способ эвакуации с нижних этажей здания через окна. В случаях применения таких трапов в зданиях их форма должна разрабатываться индивидуально в каждом случае с учетом городской застройки. Корректный подбор формы трапа позволит ускорить эвакуацию, от чего во многом зависит успех аварийно-спасательных работ.

Результаты, полученные в работе, могут использоваться в военно-космической отрасли при расчете траекторий для запуска ракет с неподвижных объектов, находящихся над поверхностью земли, например, зависший в воздухе вертолет, высокая башня или пусковая установка, находящаяся на возвышенности. Результаты позволяют получать траектории, обеспечивающие наискорейшее достижение цели.

Кроме того, можно использовать оптимальные траектории, полученные в данной работе, и для проектирования устройств подачи материала в автоматических производствах. Правильная форма направляющих позволяет ускорить процесс подачи материала, повысив тем самым эффективность таких устройств.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Получена формула для оптимального управления в общем случае действия на точку одновременно силы тяжести, сухого и вязкого трения, реакции опоры и разгоняющей силы.
2. Получена система уравнений с дополнительной переменной, но не содержащая сопряженных переменных, которая позволяет путем решения задачи Коши получать оптимальные траектории в поле силы тяжести при действии на точку сухого трения или вязкого трения одновременно с разгоняющей силой тяги.
3. Доказано, что если на точку в поле силы тяжести действует только сухое трение или вязкое трение одновременно с разгоняющей силой, то при нулевой начальной скорости касательная в начальной

точке оптимальной траектории вертикальна. Кроме того, доказано свойство выпуклости оптимальных траекторий при действии помимо силы тяжести только сухого трения, а в случае действия помимо силы тяжести вязкого терния и разгоняющей силы свойство выпуклости оптимальных траекторий доказано для вязкого трения, зависимость которого от скорости определяется степенной функцией. Также определены ограничения на величину угла наклона касательной в произвольной точке оптимальной траектории.

4. Доказано свойство автомодельности оптимальных траекторий, которое позволяет получать все оптимальные траектории путем масштабирования некоторого их подмножества.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на семинарах «Динамика относительного движения» (рук. чл.-корр. РАН, проф. В.В. Белецкий, проф. Ю.Ф. Голубев, проф. В.Е. Павловский, доц. К.Е. Якимова, доц. Е.В. Мелкумова) в Московском Государственном Университете им. М.В. Ломоносова (Москва, 2015 год), на Ломоносовских чтениях (Москва, 2014 год), на XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механике (Казань, 2015 год), на XIII Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого) (Москва, 2016 год).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 печатных изданиях [1—6], 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1—3], 3 — в тезисах докладов [4—6].

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена постановке задачи и выводу уравнений для оптимального управления в общем случае действия на точку одновременно силы тяжести, разгоняющей силы, а также сухого и вязкого трения.

Рассматривается плоскопараллельное движение материальной точки постоянной массы m, скользящей по кривой в поле силы тяжести. На точку действует разгоняющая сила тяги F_t, сонаправленная скорости, сила сухого трения F_s, сила вязкого трения F_v, а также составляющая реакции опоры N, перпендикулярная скорости. Движение начинается из некоторой заданной точки A с нулевой начальной скоростью. Необходимо построить семейство кривых (траекторий), движение по которым обеспечит достижение заданной точки B пространства за минимальное время.

Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = N\cos\phi + F_t\sin\phi - F_v\sin\phi - F_s\sin\phi, \\ m\ddot{z} = N\sin\phi - F_t\cos\phi + F_v\sin\phi + F_s\cos\phi - mg, \end{cases}$$

где ϕ – угол между вектором скорости и направлением силы тяжести, отсчитываемый против хода часовой стрелки. Начальные условия в момент старта при $t = 0$:

$$x(0) = \dot{x}(0) = z(0) = \dot{z}(0) = 0.$$

Величина силы сухого трения определяется соотношением $F_s = k|N|$, где k – некоторый постоянный неотрицательный коэффициент.

Введем управление u:

$$u = \frac{N}{mv},$$

где v - величина скорости.

Для удобства дальнейших вычислений используется коэффициент K, зависящий от знака управления u следующим образом:

$$K = \begin{cases} k, & \text{если } u \geq 0, \\ -k, & \text{если } u < 0. \end{cases}$$

Система уравнений движения в переменных v и ϕ принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \sin\phi, \\ \dot{z} = -v\cos\phi, \\ \dot{v} = g\cos\phi + v\mu(v^2) - Kvu, \\ \dot{\phi} = u - \dfrac{\sin\phi}{v}, \end{cases} \tag{1}$$

где функция $\mu(v^2)$ определяет равнодействующую сил тяги и вязкого трения следующим образом:

$$F_t - F_v = \mu(v^2)mv,$$

при этом начальные условия запишутся в виде $x(0) = z(0) = v(0) = 0$ и $\phi(0) = \phi_0$.

Таким образом, задача поиска траектории, обеспечивающей минимальное время достижения указанной точки, сводится к поиску управления u, которое минимизирует функционал Φ:

$$\Phi = \int_0^T 1 dt.$$

Поиск экстремума функционала Φ осуществлен с использованием принципа максимума Понтрягина. Оптимальное управление в переменных v и ϕ принимает вид:

$$u = \frac{\hat{B}(g,k,v,\mu(v^2),\phi,\Psi)}{v\hat{A}(g,k,v,\mu(v^2),\phi,\Psi)}, \tag{2}$$

где $\hat{A}$ и $\hat{B}$ – функции, зависящие от параметров среды и скорости, а $\Psi = const$ – параметр, который определяется выражением

$$\Psi = \left.\frac{K\sin\phi - \cos\phi}{\sin\phi + K\cos\phi}\right|_{t=T}. \tag{3}$$

Отметим, что при заданных g, k и зависимости $\mu(v^2)$ оптимальное управление (2) зависит только от величин скорости v и угла ϕ. При получении выражения для оптимального управления не накладывались никакие ограничения на силы, действующие на точку. Кроме того, полученная формула верна для любой фиксированной начальной скорости.

Рассматривается старт с нулевой скоростью, значение которой в виде множителя присутствует в знаменателе выражения (2). Это значит, что имеется особенность в начальной точке, для устранения которой далее будет предложен оригинальный метод введения дополнительной переменной.

При старте с ненулевой скоростью система (1) позволяет путем решения задачи Коши получать траектории, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности, в общем случае, т.е. при произвольных фиксированных g, k и любых законах изменения силы тяги и вязкого трения в зависимости от величины скорости.

В силу громоздкости полученного выражения для оптимального управления (2) далее исследуются частные случаи сил, действующих на материальную точку:

1. На точку помимо силы тяжести действует только сухое трение.
2. На точку помимо силы тяжести действует сила вязкого трения и постоянная разгоняющая сила. Сухое трение при этом отсутствует.
3. В отсутствие трения на точку помимо силы тяжести действует только постоянная разгоняющая сила.

Во **второй главе** рассмотрен случай, когда на точку действуют силы тяжести и сухое трение. Для этого случая получена упрощенная формула для оптимального управления и система уравнений движения, не содержащая сопряженных переменных, на основе которой предложен способ получения оптимальных траекторий. Установлены некоторые свойства оптимальных траекторий, в том числе свойство выпуклости и свойство автомодельности.

В отсутствие вязкого трения и разгоняющей силы ($\mu(v^2) \equiv 0$) выражение для управления (2) принимает следующий вид:

$$u = \frac{\dfrac{2g\sin\phi}{v}(1 + K\Psi)}{1 - K(-3\Psi + 2\Psi\cos^2\phi - 2\sin\phi\cos\phi) - 2K^2\sin\phi(\sin\phi - \Psi\cos\phi)}, \quad (4)$$

где Ψ определяется выражением (3). Заметим, что выражение $1 + K\Psi$ в числителе – это константа, которая определена для оптимальной траектории, заданной параметром Ψ. Таким образом, числитель может обращаться в ноль только когда $\sin\phi = 0$, т.е. когда старт происходит вертикально вниз (старт вертикально вверх, очевидно, невозможен из-за отсутствия разгоняющей силы). Знаменатель же, напротив, обращается в ноль в начале движения, так как содержит скорость в виде множителя. Это позволяет сделать вывод, что невертикальный старт невозможен, так как в этом случае управление при $t = 0$ не определено.

Система уравнений движения (1) с учетом отсутствия вязкого трения и разгоняющей силы преобразуется следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = v\sin\phi, \\ \dot{z} = -v\cos\phi, \\ \dot{v} = g\cos\phi - Kvu, \\ \dot{\phi} = \dfrac{\sin\phi}{v}\dfrac{g\big[1 + K^2 + K(\Psi - K)\cos 2\phi - K(1 + K\Psi)\sin 2\phi\big]}{\big[1 - K^2 + 2K\Psi + K(K - \Psi)\cos 2\phi + K(1 + K\Psi)\sin 2\phi\big]}, \end{cases} \tag{5}$$

а начальные условия с учетом возможности только вертикального старта запишем как

$$x(0) = z(0) = v(0) = \phi(0) = 0.$$

Далее доказаны некоторые свойства оптимальных траекторий при действии сухого трения.

С в о й с т в о 1. При старте с положительным управлением угол ϕ возрастает в течение некоторого времени после начала движения.

С в о й с т в о 2. При движении по оптимальной траектории $\dot{\phi}$ может менять знак только одновременно с изменением знака u в точках, в которых касательная к траектории вертикальна, т.е. $\sin\phi = 0$.

В результате получено, что оптимальные траектории при старте с положительным управлением – это выпуклые вниз (т.к. $\dot{\phi} > 0$ в течение всего движения) кривые, касательная к которым в начальной точке вертикальна, а в конечной точке угол ϕ наклона касательной лежит в промежутке $(0;\ \pi)$. В случае действия на точку силы тяжести и сухого трения оптимальные траектории являются опорными кривыми, т.е. управление не меняет свой знак в течение всего движения.

С в о й с т в о 3. При движении по оптимальной траектории знаменатель в выражении для управления (4) не обращается в ноль.

Решая систему (5) с начальными условиями $x(0) = z(0) = v(0) = \phi(0) = 0$, можно получить оптимальные траектории с вертикальной касательной в начальной точке. Чтобы устранить влияние особенности в момент старта, когда скорость равна нулю, введем дополнительную переменную

$$R = \frac{\sin\phi}{v} \tag{6}$$

Будем предполагать, что в начальный момент существует конечный предел

$$R_0 = \lim_{v\to 0}\frac{\sin\phi}{v}.$$

Параметр R_0, по существу, задает кривизну траектории в начальный момент времени и, вообще говоря, определяется краевыми условиями краевой задачи принципа максимума. Этот параметр задает радиус кривизны циклоиды в классической задаче о брахистохроне.

С учетом переменной (6) система (5) преобразуется в систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = v\sin\phi, \\ \dot{z} = -v\cos\phi, \\ \dot{v} = g\cos\phi - Kvu, \\ \dot{\phi} = R\dfrac{g\left[1 + K^2 + K(\Psi - K)\cos 2\phi - K(1 + K\Psi)\sin 2\phi\right]}{\left[1 - K^2 + 2K\Psi + K(K - \Psi)\cos 2\phi + K(1 + K\Psi)\sin 2\phi\right]}, \\ \dot{R} = -R^2\dfrac{2gK\left[(1 + K\Psi)\cos 2\phi + (\Psi - K)\sin 2\phi\right]}{\left[1 - K^2 + 2K\Psi + K(K - \Psi)\cos 2\phi + K(1 + K\Psi)\sin 2\phi\right]}, \end{cases}$$

решение которой с начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad R(0) = R_0$$

позволяет получить полное семейство оптимальных траекторий, заданных параметрами R_0, Ψ, касательные к которым в начальной точке вертикальны. При этом момент достижения конечной точки однозначно определяется условием (3).

Кроме того, доказано свойство автомодельности оптимальных траекторий, которое заключается в том, что любая оптимальная траектория, определенная параметрами (Ψ, R_0) и соответствующая заданному значению k, может быть получена из оптимальной траектории, определенной параметрами $(\Psi, 1)$, масштабированием в $1/R_0^2$ раз относительно точки A старта. При этом общее время движения по брахистохроне изменится в соответствии с отношением $\tilde{T} = T/R_0$, и скорость в конечной точке оптимальной траектории изменится аналогично.

В **третьей главе** рассмотрен случай, когда сухое трение отсутствует, но на материальную точку помимо силы тяжести действуют разгоняющая сила и сила вязкого трения.

Принимается, что сила тяги не возрастает при росте скорости, сила вязкого трения не убывает при росте скорости, а коэффициент μ не возрастает при росте скорости.

Без ограничения общности считаем, что на точку действует постоянная разгоняющая сила, величина которой определяется константой c, и вязкое трение $F(v)$, которое равно нулю, когда точка не движется, и не убывает при росте скорости:

$$\mu = \mu_1 - \mu_2, \quad \mu_1 = c/v > 0, \quad F(v) = v\mu_2 \geq 0, \quad F(0) = 0, \quad \partial F/\partial v = F'_v \geq 0.$$

В отсутствие сухого трения (когда $k \equiv 0$) выражение (2) можно записать в следующем упрощенном виде:

$$u = \frac{\sin\phi}{v}\Big[2g + 2v(\cos\phi + \Psi\sin\phi)(\mu + \mu' v^2)\Big],$$

где Ψ – параметр, который при $k = 0$ выражается через величину угла ϕ в момент T следующим образом:

$$\Psi = -\operatorname{ctg}\phi(T).$$

Для того чтобы определить форму оптимальных траекторий, докажем некоторые их свойства.

С в о й с т в о 1. Оптимальная траектория в отсутствие сухого трения, но при действии разгоняющей силы и (или) вязкого трения, имеет вертикальную касательную в конечной точке тогда и только тогда, когда горизонтальная скорость тождественно равна нулю, т.е. оптимальная траектория представляет собой вертикальный отрезок.

С в о й с т в о 2. Оптимальные траектории при действии постоянной разгоняющей силы и вязкого трения, которое зависит от величины скорости, обеспечивающие достижение заданной точки B из фиксированной точки A с нулевой начальной скоростью за минимальное время, имеют в точке A вертикальную касательную.

С в о й с т в о 3. Неравенство $\cos\phi + \Psi\sin\phi > 0$ выполняется на оптимальной траектории везде, кроме конечной ее точки.

Следствием выполнения свойства 3 является возможность использования равенства $\cos\phi+\Psi\sin\phi = 0$ как индикатора достижения конечной точки оптимальной траектории.

С в о й с т в о 4. Оптимальные траектории в поле силы тяжести при действии на точку постоянной разгоняющей силы и вязкого трения, величины которых определяются функцией

$$\mu = \frac{c}{v} - dv^n,$$

где $n \geq 0$ – некоторое фиксированной целое число и $d = const > 0$, являются выпуклыми вниз кривыми, т.е. $\dot{\phi} \geq 0$ на протяжении всей оптимальной траектории.

Доказав, что касательная к оптимальной траектории в начальной точке вертикальна, мы получили возможность ввести дополнительную переменную R, аналогично секции 2.3:

$$R = \frac{\sin\phi}{v}. \tag{7}$$

С учетом переменной (7) система система уравнений движения преобразуется в систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = v\sin\phi, \\ \dot{z} = -v\cos\phi, \\ \dot{v} = \mu v + g\cos\phi, \\ \dot{\phi} = R\big[g + 2v(\cos\phi + \Psi\sin\phi)(\mu + \mu' v^2)\big], \\ \dot{R} = R\big[-\mu + 2\cos\phi(\cos\phi + \Psi\sin\phi)(\mu + \mu' v^2)\big], \end{cases} \tag{8}$$

решение которой с начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad R(0) = R_0$$

позволяет получить полное семейство оптимальных траекторий, определенных параметрами R_0, Ψ, если $\mu(v^2)$ не содержит особенности при $v = 0$. Любой полиномиальный закон, определяющий величину вязкого трения, не будет содержать особенности в начальной точке. К таким законам относятся наиболее часто применяемые: линейное вязкое трение и вязкое трение, квадратично зависимое от величины скорости.

Постоянная разгоняющая сила задается функцией $\mu = c/v$ и, очевидно, содержит особенность в начальной точке. Сначала рассмотрим влияние этой особенности в случае отсутствия трения, а затем предложим способ ее избежания для случая одновременного действия разгоняющей силы и вязкого трения.

Когда трение отсутствует, и на точку действует только постоянная разгоняющая сила ($\mu = c/v$), оптимальное управление с учетом дополнительной переменной (7) принимает упрощенный вид:

$$u = R\Big[2g + (\cos\phi + \Psi\sin\phi)\Big].$$

Система уравнений движения (8) преобразуется следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = v\sin\phi, \\ \dot{z} = -v\cos\phi, \\ \dot{v} = c + g\cos\phi, \\ \dot{\phi} = R\big[g + c(\cos\phi + \Psi\sin\phi)\big], \\ \dot{R} = \dfrac{cR}{v}\big[-1 + \cos\phi(\cos\phi + \Psi\sin\phi)\big], \end{cases}$$

а начальные условия запишутся в виде

$$x(0) = 0,\ z(0) = 0,\ v(0) = 0,\ \phi(0) = 0,\ R(0) = R_0.$$

Показано, что в этом случае выполняется свойство автомодельности, аналогичное доказанному выше для случая действия только сухого трения, а также отмечено свойство выпуклости оптимальных траекторий в отсутствие трения.

Запишем выражение для производной угла ϕ:

$$\dot{\phi} = \frac{R_0\big[g + c(\cos\phi + \Psi\sin\phi)\big]^2}{(g+c)}.$$

С его помощью, а также учитывая свойство монотонного возрастания угла ϕ, перейдем к дифференцированию по ϕ:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\phi} = \dfrac{1}{R_0^2}\dfrac{(g+c)^2\sin^2\phi}{\big[g + c(\cos\phi + \Psi\sin\phi)\big]^3}, \\ \dfrac{dz}{d\phi} = -\dfrac{1}{R_0^2}\dfrac{(g+c)^2\sin\phi\cos\phi}{\big[g + c(\cos\phi + \Psi\sin\phi)\big]^3}. \end{cases} \tag{9}$$

Можно убедиться, что уравнения (9) при $c = 0$ (классическая брахистохрона), как и ожидалось, задают циклоиду.

Учитывая свойство автомодельности, можно сделать вывод, что если для некоторой конечной точки при заданной начальной существует соединяющая их траектория, то такая траектория единственна для этой пары.

Для получения оптимальных траекторий при одновременном действии вязкого трения и постоянной разгоняющей силы воспользуемся системой (8). Для устранения особенности в начальной точке предлагается использование квазипостоянной разгоняющей силы, заданной следующим коэффициентом:

$$\mu_1 = \frac{c}{\theta + v},$$

где c – константа, определяющая значение силы тяги, а $\theta > 0$ – некоторая малая постоянная величина. Соответствующая сила тяги равна нулю при нулевой скорости и стремится к постоянному значению c при росте скорости. Модуль разности между используемым приближенным значением разгоняющей силы и постоянным значением $F_t = c$ будет равен $\theta c/(\theta + v)$. При достаточно малых значениях θ эта разница будет наблюдаться лишь в малой окрестности начальной точки.

По сути, использование квазипостоянной разгоняющей силы оказывает влияние только тогда, когда движение происходит почти вертикально вниз (некоторое время после старта). Именно этот нюанс является причиной малого искажения результатов расчета.

Кроме того, существует возможность проверки выполненных расчетов. Достаточно после построения оптимальной траектории из заданной точки А при действии квазипостоянной разгоняющей силы и вязкого трения для некоторых параметров Ψ и R_0 произвести интегрирование системы (8) в обратном времени из полученной конечной точки, но уже используя постоянную разгоняющую силу. Моделирование подобных ситуаций показывает, что расстояние между заданной точкой А и точкой А', полученной в результате интегрирования в обратном времени, пренебрежимо мало в сравнении с расстоянием, пройденным материальной точкой по оптимальной траектории от т. А до т. В.

В **заключении** приведены результаты работы, главным из которых является возможность построения полного семейства оптимальных траекторий с общим началом с помощью решения задачи Коши, при этом начальная скорость может быть как нулевой, так и ненулевой. Выявлена зависимость оптимальных траекторий от двух параметров, один из которых определяет угол наклона касательной в конечной точке, а второй - кривизну кривой в начальной точке. Такой подход позволяет сформировать представление о форме и свойствах оптимальных траекторий и подготовить основу для их нахождения. Кроме того, отмечены следующие ключевые результаты:

1. Получена формула, обеспечивающая синтез оптимального управления, и система уравнений движения, для которой решение задачи Коши позволяет получать траектории, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности, в общем случае действия на точку одновременно вязкого трения, сухого трения и разгоняющей силы при старте с некоторой заданной скоростью.
2. На основе анализа уравнений движения доказаны некоторые свойства оптимальных траекторий отдельно для случая действия на точку сухого трения, а также для случая действия на точку вязкого трения и постоянной разгоняющей силы при старте с нулевой начальной скоростью. На основе доказанных свойств предложен способ избежания особенности в начальной точке при численных расчетах.
3. Для случая действия на точку сухого трения, а также для постоянной разгоняющей силы доказано свойство автомодельности, благодаря которому для построения полного двухпараметрического семейства оптимальных траекторий достаточно построить множество траекторий при фиксированном одном параметре и масштабировать это множество относительно точки A старта.
4. Проведено исследование влияния различных параметров, используемых при расчете, на форму оптимальных траекторий и их свойства.
5. Разработан метод, позволяющий получать не отдельную оптимальную траекторию, а множество всех оптимальных траекторий для фиксированной начальной точки.
6. Численные исследования подтверждают полученные выводы. Представлены графики оптимальных траекторий, иллюстрирующие основные результаты работы.

Результаты, представленные в диссертации, получены лично автором.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Вондрухов А. С.*, *Голубев Ю. Ф.* Брахистохрона с разгоняющей силой // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2014. — № 6. — С. 50—64.

2. *Вондрухов А. С.*, *Голубев Ю. Ф.* Оптимальные траектории в задаче о брахистохроне с разгоняющей силой // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2015. — № 4. — С. 37—47.

3. *Вондрухов А. С.*, *Голубев Ю. Ф.* Оптимальные траектории в задаче о брахистохроне с сухим трением // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2016. — № 3. — С. 11—18.

4. *Вондрухов А. С.* Оптимальные траектории в задаче о брахистохроне с сухим трением // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Сборник трудов, Казань, 20 – 24 августа 2015 г. — Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета Казань, 2015.

5. *Вондрухов А. С.*, *Голубев Ю. Ф.* Брахистохрона с разгоняющей силой // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 14–23 апреля 2014 г., Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова. — Издательство Московского университета Москва, 2014. — С. 47—48.

6. *Вондрухов А. С.*, *Голубев Ю. Ф.* Брахистохроны с разгоняющей силой и трением // XIII Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого), Материалы XIII Международной конференции, Москва, 1 – 3 июня 2016 г. — Издательство ИПУ РАН, 2016. — С. 109—111.