

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

Вондрухов Андрей Сергеевич

**БРАХИСТОХРОНА ПРИ ДЕЙСТВИИ
РАЗГОНЯЮЩЕЙ СИЛЫ, А ТАКЖЕ
СУХОГО И ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ**

Специальность 01.02.01 —
«Теоретическая механика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ-мат наук, профессор
Голубев Юрий Филиппович

Москва — 2016

Оглавление

	Стр.
Введение	4
 Глава 1. Оптимальное управление при действии на точку силы тяжести, разгоняющей силы и трения	
1.1 Постановка задачи	10
1.2 Условия экстремальности	12
1.2.1 Управление, тождественно равное нулю	14
1.2.2 Управление, не равное нулю тождественно	15
1.3 Оптимальное управление и система уравнений движения	18
 Глава 2. Оптимальные траектории в поле силы тяжести при действии на точку сухого трения	
2.1 Оптимальное управление и система уравнений движения	21
2.2 Свойства оптимальных траекторий	22
2.3 Построение оптимальных траекторий	27
2.4 Свойство автомодельности оптимальных траекторий	29
 Глава 3. Оптимальные траектории в поле силы тяжести при действии на точку разгоняющей силы и вязкого трения	
3.1 Оптимальное управление и система уравнений движения	32
3.2 Свойства оптимальных траекторий	33
3.3 Дополнительная переменная	41
3.4 Оптимальные траектории в поле силы тяжести при действии на точку разгоняющей силы в отсутствие трения	42
3.4.1 Свойство автомодельности	43
3.4.2 Свойство выпуклости	44
3.4.3 Построение оптимальных траекторий	45
3.5 Оптимальные траектории в поле силы тяжести при действии на точку одновременно разгоняющей силы и вязкого трения	48
3.5.1 Квазипостоянная разгоняющая сила	49
3.5.2 Построение оптимальных траекторий	50

Заключение	52
Список литературы	54
Список рисунков	58

Введение

Задача о брахистохроне имеет давнюю историю. Она была впервые строго математически сформулирована Иоганном Бернулли в лейпцигском журнале «Acda Eruditorum» в 1696 году в заметке под названием «Problema novum ad cuius solutionem mathematice invitatur» (Новая проблема предлагается математикам для решения). Уже через год задача была решена несколькими различными способами самим Иоганном Бернулли, Якобом Бернулли, Г.Ф. Лопиталем, Г.В. Лейбницем и Исааком Ньютоном. В частности, способ решения, предложенный Исааком Ньютоном, лег в основу вариационного исчисления.

Классическая постановка задачи о брахистохроне содержит предположение о потенциальности действующих на точку сил. В общем же случае действия на точку сухого и вязкого трения, а также разгоняющей силы тяги возникают трудности, связанные с тем, что скорость точки на оптимальной траектории зависит не только от ее положения в вертикальной плоскости, но и от пути, пройденного по оптимальной траектории.

В работах [1—4] предложены различные подходы к решению задачи о брахистохроне с сухим трением. В статье [3] задача была решена сведением к уравнениям Эйлера-Лагранжа третьего порядка с неопределенными множителями дифференциальных связей, а в работе [4] автором предложен подход, позволяющий избежать повышения порядка дифференциальных уравнений экстремали. В статье [5] автор рассмотрел несколько иную постановку задачи, где рассмотрены отдельно и сухое и вязкое трения, причем вязкое трение нелинейно по скорости, а сухое трение нелинейно по силе нормального давления. Применение в указанных работах метода варьирования связей неизбежно приводило к появлению громоздких вычислений, затрудняющих анализ свойств брахистохрон.

В работах [6—8] исследуются некоторые свойства брахистохрон при действии на точку сухого и вязкого трения, а также дополнительно ставится задача максимизации горизонтальной дальности. С помощью принципа максимума Понтрягина задача поиска оптимального управления сводится к краевой задаче для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений. При расчетах принималось, что начальная скорость ненулевая.

Некоторые авторы в своих исследованиях использовали оригинальные постановки задачи поиска кривой наискорейшего спуска. В работе [9] аналогичная брахистохроне кривая строилась не для материальной точки, а для диска, катящегося по кривой в вертикальной плоскости. Параметрические формулы для брахистохрон для катящегося цилиндра при действии сухого и вязкого линейного трения аналитически найдены в [10]. В статье [11] показана полная аналогия траектории системы твердых тел, образующих замкнутую кинематическую цепь, с результатом Бернулли для материальной точки. Кроме того, доказано, что при отсутствии внешних связей траектория движения системы в конфигурационном пространстве является геодезической. В работе [12] рассматривается брахистохрона для точки, перемещающейся в поле центробежной силы инерции. В статье [13] аналитически получены оптимальные траектории при действии сухого трения для точки, движущейся по поверхности. В работе [14] получены параметрические уравнения кривой, удовлетворяющей необходимому условию оптимальности, в задаче о брахистохроне с сухим трением в постановке с частично освобожденным концом.

Брахистохрона в том или ином виде применяется при решении некоторых практических задач, например, в статьях [15; 16] при определении профиля сортировочной горки на железнодорожной станции. А в [17] показывается эффективность поверхности рабочего тела гасителя колебаний, образованной брахистохроной.

В данной работе помимо силы тяжести и трения на точку действует разгоняющая сила, сонаправленная скорости и зависящая от ее величины. Кроме того, рассматривается старт с нулевой начальной скоростью, что стало причиной возникновения особенности в начальной точке траектории, для устранения которой предложен оригинальный метод применения дополнительной переменной.

Помимо множества различных постановок задач о поиске кривой наискорейшего спуска, стоит отметить и многообразие подходов, используемых при их исследовании. В работе [18] для решения задачи о брахистохроне, обобщенной путем введения неконсервативной силы кулоновского трения, применялся эволюционный вычислительный метод, основанный на естественном отборе Дарвина и выживании сильнейшего. А в работе [19] изложен оригинальный метод решения задачи о брахистохроне, основанный на оптической аналогии.

Как и в работах [20—22], в настоящей работе использовался принцип максимума Понтрягина. В работах [23—25] отмечено, что разработанный Д.Е. Охотимским и Т.М. Энеевым метод первой вариации для задач управления также позволяет найти дифференциал функционала при весьма необременительных ограничениях. В данной работе используются процедуры, предложенные Л.С. Понтрягиным.

Отдельно следует отметить работы, в которых авторы получали оптимальные траектории численно с помощью оригинальных программных алгоритмов, в частности, в работе [26] предлагается способ численного решения задачи о брахистохроне в центральном поле тяготения, а в работе [27] для решения аналогичной задачи применяются нейронные сети. В связи с существенным ростом вычислительных мощностей компьютерной техники в настоящее время появилась возможность по-другому взглянуть на задачу о брахистохроне. Аналитическое получение формул для оптимальных траекторий не всегда осуществимо и при этом зачастую не является необходимым.

В настоящей работе предлагается построить полное семейство траекторий, удовлетворяющих условиям оптимальности, из одной фиксированной начальной точки. При этом определение параметров, изменение которых позволяет получать все оптимальные траектории, в совокупности с изучением свойств таких траекторий дает возможность получать необходимые оптимальные траектории между двумя заданными точками.

Целью данной работы является исследование и описание основных свойств брахистохрон в поле силы тяжести при действии трения и разгоняющей силы, а также реализация алгоритма получения всего семейства оптимальных траекторий, исходящих из одной начальной точки.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Получить формулу для оптимального управления и систему уравнений, решение которой позволяет получать траектории, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности.
2. Исследовать свойства траекторий, удовлетворяющих условиям оптимальности.
3. Разработать способ устранения особенности, которая возникает при старте с нулевой скоростью.

4. Получить систему уравнений, для которой решение задачи Коши позволяет получить полное параметрическое семейство оптимальных траекторий.

Научная новизна:

1. Рассматривается постановка задачи о брахистохроне, включающая разгоняющую силу, действующую на материальную точку, при старте с нулевой начальной скоростью.
2. В явном виде получена формула, представленная в зависимости от скорости, которая обеспечивает синтез оптимального управления для случая действия на точку сухого и вязкого трения, а также разгоняющей силы.
3. Выполнено исследование свойств оптимальных траекторий для действия отдельно сухого или вязкого трения, позволяющих создать представление о форме оптимальных траекторий.
4. Предложен оригинальный способ избежания особенности в начальной точке при построении оптимальных траекторий при действии вязкого трения с использованием квазипостоянной разгоняющей силы, а также показана его применимость.
5. Предложена система дифференциальных уравнений с дополнительной переменной, которая позволяет строить оптимальные траектории путем решения задачи Коши.

Научная и практическая значимость Научная значимость работы состоит в том, что разработаны новые методы и подходы, позволяющие решать сложную нелинейную задачу оптимального управления.

На практике брахистохроны, полученные в настоящей работе, могут быть использованы в технике для сокращения времени получения требуемых результатов работ, например, при определении оптимальной формы аварийных надувных трапов. Аварийные надувные трапы в настоящее время, помимо использования в каждом пассажирском самолете, находят широкое применение в системах пожарной безопасности в школах и больницах как быстрый способ эвакуации с нижних этажей здания через окна. В случаях применения таких трапов в зданиях их форма должна разрабатываться индивидуально в каждом случае с учетом городской застройки. Корректный подбор формы трапа

позволит ускорить эвакуацию, от чего во многом зависит успех аварийно-спасательных работ.

Результаты, полученные в работе, могут использоваться в военно-космической отрасли при расчете траекторий для запуска ракет с неподвижных объектов, находящихся над поверхностью земли, например, зависший в воздухе вертолет, высокая башня или пусковая установка, находящаяся на возвышенности. Результаты позволяют получать траектории, обеспечивающие наискорейшее достижение цели.

Кроме того, можно использовать оптимальные траектории, полученные в данной работе, и для проектирования устройств подачи материала в автоматических производствах. Правильная форма направляющих позволяет ускорить процесс подачи материала, повысив тем самым эффективность таких устройств. В частности, форма брахистохрон может быть использована при проектировании профиля разделяющего элемента гравитационного сепаратора с клиновидными просеивающими отверстиями. В работах [28; 29] описано применение такого профиля, а также теоретически и экспериментально обосновано преимущество брахистохронного рабочего органа над плоским.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Получена формула для оптимального управления в общем случае действия на точку одновременно силы тяжести, сухого и вязкого трения, реакции опоры и разгоняющей силы.
2. Получена система уравнений с дополнительной переменной, но не содержащая сопряженных переменных, которая позволяет путем решения задачи Коши получать оптимальные траектории в поле силы тяжести при действии на точку сухого трения или вязкого трения одновременно с разгоняющей силой тяги.
3. Доказано, что если на точку в поле силы тяжести действует только сухое трение, то при нулевой начальной скорости касательная в начальной точке оптимальной траектории вертикальна. Кроме того, доказано свойство выпуклости таких оптимальных траекторий.
4. При действии на точку силы тяжести, вязкого трения и разгоняющей силы доказано, что при нулевой начальной скорости касательная в начальной точке вертикальна, а также определены ограничения на величину угла наклона касательной в произвольной точке оптимальной

траектории. Свойство выпуклости таких траекторий доказано для вязкого трения, линейно зависящего от скорости.

5. Доказано свойство автомодельности оптимальных траекторий, которое позволяет получать все оптимальные траектории путем масштабирования некоторого их подмножества.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на семинарах «Динамика относительного движения» (рук. чл.-корр. РАН, проф. В.В. Белецкий, проф. Ю.Ф. Голубев, проф. В.Е. Павловский, доц. К.Е. Якимова, доц. Е.В. Мелкумова) в Московском Государственном Университете им. М.В. Ломоносова (Москва, 2015 год), на Ломоносовских чтениях (Москва, 2014 год), на XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механике (Казань, 2015 год), на XIII Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого) (Москва, 2016 год).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 печатных изданиях [30—35], 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [30—32], 3 — в тезисах докладов [33—35].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 58 страниц, включая 13 рисунков. Список литературы содержит 35 наименований.

Глава 1. Оптимальное управление при действии на точку силы тяжести, разгоняющей силы и трения

1.1 Постановка задачи

Рассматривается плоскопараллельное движение материальной точки постоянной массы m , скользящей по кривой в поле силы тяжести. На точку действует разгоняющая сила тяги F_t , сонаправленная скорости, сила сухого трения F_s , сила вязкого трения F_v , а также составляющая реакции опоры N , перпендикулярная скорости (рис. 1.1).

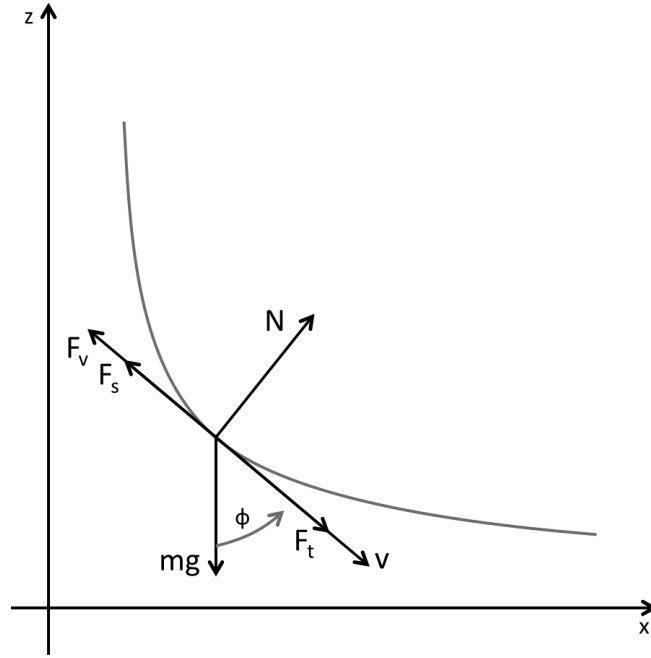


Рисунок 1.1 — Силы, действующие на материальную точку.

Движение начинается из некоторой заданной точки A с нулевой начальной скоростью. Необходимо построить семейство кривых (траекторий), движение по которым обеспечит достижение заданной точки B пространства за минимальное время. Введем ортогональную декартову систему координат с началом в точке A , где x — горизонтальная, а z — вертикальная координаты.

Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = N \cos \phi + F_t \sin \phi - F_v \sin \phi - F_s \sin \phi, \\ m\ddot{z} = N \sin \phi - F_t \cos \phi + F_v \sin \phi + F_s \cos \phi - mg, \end{cases} \quad (1.1)$$

где ϕ – угол между вектором скорости и направлением силы тяжести, отсчитываемый против хода часовой стрелки. Начальные условия в момент старта при $t = 0$:

$$x(0) = \dot{x}(0) = z(0) = \dot{z}(0) = 0. \quad (1.2)$$

Считаем, что модуль силы тяги и модуль силы вязкого трения зависят от скорости. Выражения для силы тяги и силы вязкого трения запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} F_t = \mu_1(v^2)mv = \mu_1(\gamma)m\sqrt{\gamma}, \\ F_v = \mu_2(v^2)mv = \mu_2(\gamma)m\sqrt{\gamma}, \end{cases} \quad (1.3)$$

где μ_1 и μ_2 – некоторые неотрицательные функции от $\gamma = v^2$.

Имея две противоположно направленные силы, приложенные к одной точке, каждая из которых представлена в виде произведения модуля скорости на коэффициент, зависящий от γ , можно заменить эти две силы их равнодействующей.

Введем функцию $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Таким образом, в совокупности с (1.3) имеем:

$$F_t - F_v = \mu(v^2)mv = \mu(\gamma)m\sqrt{\gamma}. \quad (1.4)$$

Величина силы сухого трения определяется соотношением $F_s = k|N|$, где k – некоторый постоянный неотрицательный коэффициент.

Введем управление u :

$$u = \frac{N}{m\sqrt{\gamma}}.$$

И сделаем следующую замену переменных:

$$q_1 = x, \quad q_2 = \dot{x}, \quad q_3 = z, \quad q_4 = \dot{z}.$$

Уравнения движения (1.1) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = q_2, \\ \dot{q}_2 = -kq_2|u| + q_2\mu(\gamma) - q_4u, \\ \dot{q}_3 = q_4, \\ \dot{q}_4 = -g - kq_4|u| + q_4\mu(\gamma) + q_2u. \end{cases} \quad (1.5)$$

Начальные условия (1.2) в момент старта при $t = 0$ запишем в виде:

$$q_1(0) = q_2(0) = q_3(0) = q_4(0) = 0. \quad (1.6)$$

Таким образом, задача поиска траектории, обеспечивающей минимальное время достижения указанной точки, сводится к поиску управления u , которое минимизирует функционал Φ :

$$\Phi = \int_0^T 1 dt.$$

1.2 Условия экстремальности

Поиск экстремума функционала Φ будем осуществлять с использованием принципа максимума Понтрягина. Для этого составим гамильтониан задачи H и систему дифференциальных уравнений для сопряженных переменных ψ_i .

Гамильтониан задачи имеет следующий вид:

$$H = \psi_4(-g - kq_4|u| + q_4\mu(\gamma) + q_2u) + \\ + \psi_2(-kq_2|u| + q_2\mu(\gamma) - q_4u) + \psi_1q_2 + \psi_3q_4 + 1. \quad (1.7)$$

Отсюда следует система уравнений для сопряженных переменных:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + k\psi_2|u(t)| - 2q_2(q_2\psi_2 + q_4\psi_4)\mu'(\gamma) - \psi_2\mu(\gamma) - \psi_4u(t), \\ \dot{\psi}_3 = 0, \\ \dot{\psi}_4 = -\psi_3 + k\psi_4|u(t)| - 2q_4(q_2\psi_2 + q_4\psi_4)\mu'(\gamma) - \psi_4\mu(\gamma) + \psi_2u(t). \end{cases} \quad (1.8)$$

Так как в конце движения (при достижении нужной точки пространства) горизонтальная и вертикальная составляющие скорости, а также время, не фиксированы, получаем следующие граничные условия:

$$\psi_1(T) = \alpha, \quad \psi_2(T) = 0, \quad \psi_3(T) = \beta, \quad \psi_4(T) = 0, \quad (1.9)$$

$$1 + \alpha q_2(T) + \beta q_4(T) = 0, \quad (1.10)$$

где α и β – некоторые константы.

Найдем производную гамильтониана H по управлению u :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \begin{cases} f_+ = \psi_2(-kq_2 - q_4) + \psi_4(q_2 - kq_4), & \text{если } u \geq 0, \\ f_- = \psi_2(kq_2 - q_4) + \psi_4(q_2 + kq_4), & \text{если } u < 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

На управление u не наложено никаких ограничений. Условия экстремальности принимают вид $f_- f_+ \equiv 0$ на оптимальной кривой.

Рассмотрим производную по времени от $\partial H / \partial u$ для момента времени T (момент достижения требуемой точки B):

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \Big|_T = \begin{cases} \alpha k q_2(T) + \beta k q_4(T) + \alpha q_4(T) - \beta q_2(T), & \text{если } u(T) \geq 0, \\ -\alpha k q_2(T) - \beta k q_4(T) + \alpha q_4(T) - \beta q_2(T), & \text{если } u(T) < 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Уравнения (1.12) в совокупности с условием (1.10) позволяют выразить постоянные величины α и β через значения компонент скорости в конечной точке оптимальной траектории:

$$\alpha = \begin{cases} \alpha^+ = \frac{-q_2 + kq_4}{\gamma}, & \text{если } u(T) \geq 0, \\ \alpha^- = \frac{-q_2 - kq_4}{\gamma}, & \text{если } u(T) < 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\beta = \begin{cases} \beta^+ = \frac{-q_4 - kq_2}{\gamma}, & \text{если } u(T) \geq 0, \\ \beta^- = \frac{-q_4 + kq_2}{\gamma}, & \text{если } u(T) < 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Далее рассмотрим два случая, при которых выполняются условия экстремальности: $f_- \equiv 0$ при отрицательном управлении и $f_+ \equiv 0$ при положительном управлении, а также случай $u \equiv 0$, подозрительный на экстремум.

1.2.1 Управление, тождественно равное нулю

Докажем оптимальность управления $u \equiv 0$ для общего случая действия на точку одновременно силы тяги, а также сухого и вязкого трения. Введем угол ϕ между скоростью и направлением силы тяжести, отсчитываемый против хода часовой стрелки. Движение начинается с нулевой скоростью, поэтому при $t = 0$ ускорение (а значит, и равнодействующая сил, действующих на тело в момент времени $t = 0$) должно быть сонаправлено скорости. Это условие можно записать в следующем виде (проекция сил на направление, перпендикулярное скорости, равна нулю в начале движения):

$$(N - mg \sin \phi)|_{t=0} = 0,$$

и заменой переменных привести к следующему виду:

$$(u\sqrt{\gamma} - g \sin \phi)|_{t=0} = 0, \quad (1.15)$$

что при $u \equiv 0$ запишется как $\sin \phi(0) = 0$. Таким образом, точка начинает движение вертикально вверх или вертикально вниз. Так как управление тождественно равно нулю, при вертикальном движении все силы (разгоняющая сила, сила вязкого трения и силы тяжести), действующие на точку, направлены вдоль вертикальной прямой. В этом случае нет силы, способной изменить направление движения, заданное при старте, т.е. $q_2 \equiv 0$. Вертикальная составляющая скорости при этом либо постоянно возрастает, либо постоянно убывает, а траектории представляют собой вертикальные отрезки.

Условия оптимальности принимают вид $\psi_2 \equiv 0$, что с учетом выражений (1.13) и (1.14), а также условий трансверсальности (1.9) и (1.10), позволяет записать уравнения для сопряженных переменных

$$\begin{cases} \psi_1 \equiv 0, \\ \psi_2 \equiv 0, \\ \psi_3 \equiv -\frac{1}{q_4(T)}, \\ \dot{\psi}_4 = -\psi_3 - \psi_4(2q_4^2\mu'(q_4^2) + \mu(q_4^2)). \end{cases} \quad (1.16)$$

Уравнения движения принимают вид:

$$\begin{cases} q_1 \equiv 0, \\ q_2 \equiv 0, \\ \dot{q}_3 = q_4, \\ \dot{q}_4 = -g + q_4\mu(q_4^2). \end{cases} \quad (1.17)$$

Запишем условие равенства нулю гамильтониана

$$H = \psi_4(-g + q_4\mu(\gamma)) + \psi_3 q_4 + 1 = 0, \quad (1.18)$$

из которого выразим ψ_4 :

$$\psi_4 = \frac{1 - \frac{q_4}{q_4(T)}}{g - q_4\mu(\gamma)}. \quad (1.19)$$

Нетрудно убедиться, что выражение (1.19) удовлетворяет четвертому уравнению системы (1.16). Таким образом, найдены сопряженные переменные, одновременно не равные нулю тождественно и являющиеся решениями системы (1.8). Это доказывает оптимальность нулевого управления в общем случае.

Движению с тождественно нулевым управлением соответствуют оптимальные траектории, представляющие собой вертикальное падение или вертикальный взлет (при достаточной величине разгоняющей силы в начале движения). Далее будем рассматривать оптимальные траектории, не равные нулю тождественно. Для определенности будем считать, что $u > 0$ в некоторой проколотовой окрестности начальной точки.

1.2.2 Управление, не равное нулю тождественно

Для удобства дальнейших вычислений введем коэффициент K , зависящий от знака управления u следующим образом:

$$K = \begin{cases} k, & \text{если } u \geq 0, \\ -k, & \text{если } u < 0. \end{cases}$$

При $u \neq 0$ уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = q_2, \\ \dot{q}_2 = -Kq_2u + q_2\mu(\gamma) - q_4u, \\ \dot{q}_3 = q_4, \\ \dot{q}_4 = -g - Kq_4u + q_4\mu(\gamma) + q_2u. \end{cases}$$

Гамильтониан представляется выражением:

$$H = \psi_4(-g - Kq_4u + q_4\mu(\gamma) + q_2u) + \\ + \psi_2(-Kq_2u + q_2\mu(\gamma) - q_4u) + \alpha^+q_2 + \beta^+q_4 + 1. \quad (1.20)$$

Запишем выражения (1.13) и (1.14) с использованием коэффициента K :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{-q_2(T) + Kq_4(T)}{\gamma(T)}, \\ \beta = \frac{-q_4(T) - Kq_2(T)}{\gamma(T)}. \end{cases} \quad (1.21)$$

Система для сопряженных переменных принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_2 = -\alpha + K\psi_2u(t) - 2q_2(q_2\psi_2 + q_4\psi_4)\mu'(\gamma) - \psi_2\mu(\gamma) - \psi_4u(t), \\ \dot{\psi}_4 = -\beta + K\psi_4u(t) - 2q_4(q_2\psi_2 + q_4\psi_4)\mu'(\gamma) - \psi_4\mu(\gamma) + \psi_2u(t). \end{cases}$$

Условия экстремальности

$$f = \frac{\partial H}{\partial u} = \psi_2(-Kq_2 - q_4) + \psi_4(q_2 - Kq_4) \equiv 0 \quad (1.22)$$

продифференцируем по времени, чтобы получить выражение для управления. Дифференцируем первый раз:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = gK\psi_4 + g\psi_2 + 2K\gamma\mu'(\gamma)(\psi_2q_2 + \psi_4q_4) + K\alpha q_2 + K\beta q_4 + \alpha q_4 - \beta q_2 \equiv 0. \quad (1.23)$$

В первую часть уравнения (1.23) управление не входит, поэтому дифференцируем второй раз:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = Au - B \equiv 0.$$

Таким образом, если $A \neq 0$, для управления получаем следующее выражение:

$$u = \frac{B}{A}, \quad (1.24)$$

где

$$\begin{aligned} B = & \left[2gq_2\mu'(\psi_2q_2 + \psi_4q_4) + g\psi_2\mu + 2g\psi_1(\psi_3q_2 - \psi_1q_4)\mu \right] + \\ & + K \left[2gq_4(2\gamma\mu'' + 3\mu')(\psi_2q_2 + \psi_4q_4) + g\psi_4(2\gamma\mu' + \mu) + 4\gamma^2\mu'^2 - \right. \\ & \left. - 4\gamma\mu(\gamma\mu'' + \mu')(\psi_2q_2 + \psi_4q_4) + (\psi_1q_2 + \psi_3q_4)(2\gamma\mu' - \mu) + 2g\psi_3 \right], \quad (1.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A = & \left[(\psi_1q_2 + \psi_3q_4) - g\psi_4 \right] + 2K \left[(\psi_3q_2 - \psi_1q_4) + g\psi_2 \right] - \\ & - K^2 \left[(\psi_1q_2 + \psi_3q_4) - g\psi_4 + 4\gamma(\gamma\mu'' + \mu')(q_2\psi_2 + q_4\psi_4) \right], \quad (1.26) \end{aligned}$$

при этом $\mu'' = d^2\mu/d\gamma^2$.

Найденные условия оптимальности (1.22) и результат дифференцирования по времени (1.23) позволяют выразить сопряженные переменные ψ_2 и ψ_4 через фазовые координаты:

$$\begin{cases} \psi_2 = \psi_1(q_2 - Kq_4)X, \\ \psi_4 = -\psi_1(-Kq_2 - q_4)X, \end{cases} \quad (1.27)$$

где

$$X = \frac{(-Kq_2 - q_4) + \Psi(q_2 - Kq_4)}{gq_2(K^2 + 1) + 2K\gamma^2\mu'},$$

а $\Psi = \psi_3/\psi_1$. Предполагается, что $\psi_1 \neq 0$. Случай $\psi_1 = 0$ будет рассмотрен отдельно.

С помощью (1.27) исключим ψ_2 и ψ_4 из выражения (1.24) и получим формулу для оптимального управления в зависимости от компонент скорости q_2 и q_4 и постоянной Ψ , определяемой через компоненты конечной скорости:

$$u = \frac{(2g - 2q_4\gamma\mu') + \Psi(2gK + 2q_2\gamma\mu') + X(\mu Y + 4K\gamma g q_4(2\mu' + \gamma\mu''))}{(q_2 - Kq_4) - \Psi(-Kq_2 - q_4) + X(KY - gq_4(K^2 + 1))}, \quad (1.28)$$

где $Y = 2gq_2(1 + K^2) - 2K\gamma^2(\mu' + 2\gamma\mu'')$.

1.3 Оптимальное управление и система уравнений движения

Перейдем к переменным v и ϕ , воспользовавшись следующими выражениями:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = q_2 = v \sin \phi, \\ \dot{q}_3 = q_4 = -v \cos \phi. \end{cases} \quad (1.29)$$

Оптимальное управление (1.28) в новых переменных принимает вид:

$$u = \frac{\hat{B}}{v\hat{A}}, \quad (1.30)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{B} = & \left[-2g^2 \sin \phi - 2gv \sin \phi (\mu + v^2 \mu') (\cos \phi + \Psi \sin \phi) \right] + \\ & + K \left[-2g^2 \Psi \sin \phi + (-4v^6 \mu'^2 + 2v^4 \mu \mu' + 4v^6 \mu \mu'') (\cos \phi + \Psi \sin \phi) + \right. \\ & + 2gv \sin \phi (2v^2 \mu' - \mu) (\Psi \cos \phi - \sin \phi) + 4gv^3 \cos \phi (\mu' + v^2 \mu'') (\cos \phi + \Psi \sin \phi) \left. \right] + \\ & + K^2 \left[-2gv^3 \sin \phi (3\mu' + v^2 \mu'') (\cos \phi + \Psi \sin \phi) + 2v^4 \mu (\mu' + 2v^2 \mu'') (\Psi \cos \phi - \sin \phi) - \right. \\ & \quad \left. - 2g^2 \sin \phi + 4gv^3 \cos \phi (\mu' + v^2 \mu'') (\Psi \cos \phi - \sin \phi) \right] + \\ & + K^3 \left[-2g^2 \Psi \sin \phi - 2gv \mu' \sin \phi (\cos \phi + \Psi \sin \phi) - 2gv \mu \sin \phi (\Psi \cos \phi - \sin \phi) \right], \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned}
\hat{A} = & -g + K \left[-g\Psi - 2g\Psi \sin \phi (\cos \phi + \Psi \sin \phi) + 2v^3 \mu' (\Psi \cos \phi - \sin \phi) \right] + \\
& + K^2 \left[g - 2g \cos \phi (\cos \phi + \Psi \sin \phi) + 4v^5 \mu'' (\cos \phi + \Psi \sin \phi) \right] + \\
& + K^3 \left[-g\Psi - 2g \sin \phi (\cos \phi + \Psi \sin \phi) + 2v^3 (\mu' + 2\mu'') (\Psi \cos \phi - \sin \phi) \right] + \\
& + K^4 \left[2g - 2g \cos \phi (\cos \phi + \Psi \sin \phi) \right], \quad (1.32)
\end{aligned}$$

а параметр Ψ определяется выражением

$$\Psi = \frac{K \sin \phi - \cos \phi}{\sin \phi + K \cos \phi} \Big|_{t=T}. \quad (1.33)$$

Отметим, что при заданных g , k и зависимости $\mu(\gamma)$ оптимальное управление зависит только от величин скорости v и угла ϕ . При получении выражения для оптимального управления не накладывались никакие ограничения на силы, действующие на точку. Кроме того, полученная формула верна для любой фиксированной начальной скорости.

Рассматривается старт с нулевой скоростью, значение которой в виде множителя присутствует в знаменателе выражения (1.30). Это значит, что имеется особенность в начальной точке, для устранения которой далее будет предложен оригинальный метод введения дополнительной переменной.

Система (1.5) уравнений движения преобразуется следующим образом

$$\begin{cases} \dot{x} = v \sin \phi, \\ \dot{z} = -v \cos \phi, \\ \dot{v} = g \cos \phi + v\mu - Kvu, \\ \dot{\phi} = u - \frac{\sin \phi}{v}, \end{cases} \quad (1.34)$$

при этом начальные условия запишутся в виде $x(0) = z(0) = v(0) = 0$ и $\phi(0) = \phi_0$.

При старте с ненулевой скоростью система (1.34) позволяет путем решения задачи Коши получать траектории, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности, в общем случае, т.е. при произвольных фиксированных

g , k и любых законах изменения силы тяги и вязкого трения в зависимости от величины скорости.

Далее рассмотрим частные случаи сил, действующих на материальную точку:

1. На точку помимо силы тяжести действует только сухое трение.
2. На точку помимо силы тяжести действует сила вязкого трения и постоянная разгоняющая сила. Сухое трение при этом отсутствует.
3. В отсутствие трения на точку помимо силы тяжести действует только постоянная разгоняющая сила.

Глава 2. Оптимальные траектории в поле силы тяжести при действии на точку сухого трения

Во второй главе рассмотрен случай, когда на точку действуют силы тяжести и сухое трение. Для этого случая получена упрощенная формула для оптимального управления и система уравнений движения, не содержащая сопряженных переменных, на основе которой предложен способ получения оптимальных траекторий. Установлены некоторые свойства оптимальных траекторий, в том числе свойство выпуклости и свойство автономности.

2.1 Оптимальное управление и система уравнений движения

В отсутствие вязкого трения и разгоняющей силы ($\mu(\gamma) \equiv 0$) выражение для управления (1.30) с учетом (1.31) и (1.32) принимает следующий вид:

$$u = \frac{\frac{2g \sin \phi}{v}(1 + K\Psi)}{1 - K(-3\Psi + 2\Psi \cos^2 \phi - 2 \sin \phi \cos \phi) - 2K^2 \sin \phi (\sin \phi - \Psi \cos \phi)}, \quad (2.1)$$

где Ψ определяется выражением (1.33). Заметим, что выражение $1 + K\Psi$ в числителе – это константа, которая определена для оптимальной траектории, заданной параметром Ψ . Таким образом, числитель может обращаться в ноль только когда $\sin \phi = 0$, т.е. когда старт происходит вертикально вниз (старт вертикально вверх, очевидно, невозможен из-за отсутствия разгоняющей силы). Знаменатель же, напротив, обращается в ноль в начале движения, так как содержит скорость в виде множителя. Это позволяет сделать вывод, что невертикальный старт невозможен, так как в этом случае управление при $t = 0$ не определено. Далее будем считать, что $\phi(0) = \phi_0 = 0$.

Система уравнений движения (1.34) с учетом отсутствия вязкого трения и разгоняющей силы преобразуется следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \sin \phi, \\ \dot{z} = -v \cos \phi, \\ \dot{v} = g \cos \phi - Kvu, \\ \dot{\phi} = \frac{\sin \phi}{v} \frac{g[1 + K^2 + K(\Psi - K) \cos 2\phi - K(1 + K\Psi) \sin 2\phi]}{[1 - K^2 + 2K\Psi + K(K - \Psi) \cos 2\phi + K(1 + K\Psi) \sin 2\phi]}, \end{cases} \quad (2.2)$$

а начальные условия с учетом возможности только вертикального старта запишем как

$$x(0) = z(0) = v(0) = \phi(0) = 0.$$

Отметим, что при отсутствии разгоняющей силы и силы вязкого трения все равно сохраняется особенность в начальной точке при $t = 0$. Кроме этого знаменатель управления содержит множитель

$$-K^2 + 2K\Psi + K(K - \Psi) \cos 2\phi + K(1 + K\Psi) \sin 2\phi, \quad (2.3)$$

который может обратиться в ноль при движении по оптимальной кривой, что требует отдельного рассмотрения.

Далее докажем некоторые свойства оптимальных траекторий при действии сухого трения.

2.2 Свойства оптимальных траекторий

Полученная система уравнений движения (2.2) позволяет сделать некоторые выводы о форме оптимальных траекторий.

С в о й с т в о 1. При старте с положительным управлением угол ϕ возрастает в течение некоторого времени после начала движения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим обратное. В некоторой окрестности $t = 0$ угол ϕ убывает, т.е. существует момент времени t^* такой, что $\dot{\phi}(t) < 0$ при $0 < t < t^*$. Так как $\phi(0) = 0$, значит, $\sin \phi(t) < 0$ при $0 < t < t^*$. Четвертое

уравнение системы (2.2), записанное в следующем виде:

$$\dot{\phi} = u - \frac{g \sin \phi}{v},$$

позволяет сделать вывод, что $\dot{\phi} > u \geq 0$ при $0 < t < t^*$. Но должно быть $\dot{\phi} < 0$, следовательно, имеем противоречие. Свойство доказано.

Пусть знаменатель в выражении (2.1) для оптимального управления не обращается в ноль на оптимальной траектории нигде, кроме начальной точки, т.е. не выполняется следующее равенство:

$$-K^2 + 2K\Psi + K(K - \Psi) \cos 2\phi + K(1 + K\Psi) \sin 2\phi = 0. \quad (2.4)$$

С в о й с т в о 2. При движении по оптимальной траектории $\dot{\phi}$ может менять знак только одновременно с изменением знака u в точках, в которых касательная к траектории вертикальна, т.е. $\sin \phi = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что управление может обращаться в ноль только при $\sin \phi = 0$. Таким образом, смена знака u может происходить только при $\phi = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Из четвертого уравнения системы (2.2) следует, что знак $\dot{\phi}$ зависит только от величины угла ϕ и знака u (от знака u зависит K). Это значит, что $\dot{\phi}$ может изменять свой знак только в момент, когда управление меняет свой знак – в момент, когда $\sin \phi = 0$. Свойство доказано.

Согласно свойствам 1 и 2 при старте с положительным управлением угол ϕ возрастает в начале движения и продолжает возрастать, пока не выполнится одно из следующих условий:

1. величина угла ϕ , возрастая, достигла значения π в некоторой промежуточной точке оптимальной траектории;
2. угол ϕ возрастает и достигает значения π в конечной точке оптимальной траектории;
3. конечная точка траектории достигнута раньше, чем угол ϕ , возрастая, достиг значения $\phi = \pi$.

Рассмотрим каждый из трех указанных выше вариантов.

В первом случае в момент времени t^* , когда угол ϕ достигает значения $\phi = \pi$, дальнейшее движение с положительным управлением продолжиться не может. При дальнейшем уменьшении угла возникает противоречие со свойством 2, при дальнейшем увеличении угла изменится знак выражения (2.1) при

$K=k$, что означает перемену знака управления. Таким образом, если при движении по оптимальной траектории было достигнуто значение $\phi = \pi$ в некоторой промежуточной точке, то в этой точке обязательно происходит переключение управления, и движение продолжается с $u < 0$. Покажем, что и этот вариант невозможен.

Нетрудно убедиться, что уравнение для заданного параметра Ψ

$$\Psi = \frac{-k \sin \phi - \cos \phi}{\sin \phi - k \cos \phi} \quad (2.5)$$

имеет единственное решение $\phi = \phi_1(\Psi)$ из промежутка $0 < \phi_1 < \pi$. Пусть $k/(k^2 + 1)$ и $1/(k^2 + 1)$ – это соответственно косинус и синус некоторого угла θ , тогда

$$\Psi = \frac{\cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi}{\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi} = \operatorname{tg}(\phi + \theta). \quad (2.6)$$

Аналогично доказывается, что для любого Ψ существует единственный угол $\phi = \phi_2(\Psi)$ из промежутка $\pi < \phi_2 < 2\pi$ такой, что выполняется равенство (2.5). Подставив выражение (2.5) в четвертое уравнение системы (2.2) получим, что

$$\begin{cases} \dot{\phi}(\phi_1) = \frac{g \sin \phi_1}{v} > 0, \\ \dot{\phi}(\phi_2) = \frac{g \sin \phi_2}{v} < 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Если после достижения значения $\phi = \pi$ угол начнет убывать, то ϕ достигнет значения $\phi = \phi_1$, так как на промежутке $(\phi_1; \pi)$ нет углов, удовлетворяющих условию в конечной точке траектории. Но согласно (2.7) при достижении значения $\phi = \phi_1$ угол ϕ должен возрасть – противоречие. При возрастании угла ϕ после момента времени $t = t^*$ достижения значения $\phi = \pi$ также приходим к противоречию. Таким образом, движение по оптимальным траекториям, получаемым при старте с положительным управлением, не может происходить вертикально вверх.

Отдельно рассмотрим случай, когда значение $\phi = \pi$ достигается в конечной точке оптимальной траектории. В этом случае $\sin \phi(T) = 0$, а выражение (1.33) принимает вид $\Psi = -1/k$ (при движении с положительным управлением $K = k$). Подставив $\Psi = -1/k$ в выражение (2.1) получим $u \equiv 0$, но в рассматриваемой траектории $u(0) > 0$. Отметим, что параметр $\Psi = -1/k$ задает семейство оптимальных траекторий, получающихся при использовании управления

$u \equiv 0$, оптимальность которого показана в [21]. Эти траектории представляют собой вертикальные отрезки.

В результате получаем, что оптимальные траектории при старте с положительным управлением – это выпуклые вниз (т.к. $\dot{\phi} > 0$ в течение всего движения) кривые, касательная к которым в начальной точке вертикальна, а в конечной точке угол ϕ наклона касательной лежит в промежутке $(0; \pi)$. В случае действия на точку силы тяжести и сухого трения оптимальные траектории являются опорными кривыми, т.е. управление не меняет свой знак в течение всего движения.

С в о й с т в о 3. При движении по оптимальной траектории знаменатель в выражении для управления (2.1) не обращается в ноль.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Знаменатель обращается в ноль на оптимальной траектории, заданной параметром Ψ , когда выполнено равенство (2.4). Заметим, что при $\sin \phi = 0$ знаменатель ненулевой. Подставив Ψ из (1.33) в (2.4) получим зависимость угла ϕ , удовлетворяющего равенству (2.4), от конечного угла наклона касательной к траектории $\phi(T)$. Учитывая, что $\sin \phi(T) \neq 0$, получаем следующее выражение:

$$\frac{1}{2K \sin^2 \phi} + \operatorname{ctg} \phi = \operatorname{ctg} \phi(T). \quad (2.8)$$

Отсюда следует, что угол ϕ , удовлетворяющий равенству (2.4), больше, чем угол $\phi(T)$ в конечной точке траектории. Как было показано ранее, угол $\phi(T) > \phi(t)$ для любого $0 \leq t < T$. Свойство доказано.

С л е д с т в и е. Свойство 3 оправдывает сделанное ранее предположение о неравенстве нулю знаменателя в выражении (2.1).

В качестве иллюстрации доказанных свойств на рисунке 2.1 изображены графики функций (1.33) (сплошная кривая), (2.4) (пунктирная кривая) и $\Psi = -1/K$ (горизонтальная сплошная прямая линия) на плоскости $(\phi; \Psi)$. Коэффициент трения принят равным $k = 0.5$, а ускорение силы тяжести – $g = 10$. Движению по оптимальной кривой, заданной параметром Ψ , соответствует движение в плоскости $(\phi; \Psi)$ из точки $(0; \Psi)$ направо по прямой, параллельной горизонтальной оси. Момент достижения конечной точки совпадает с моментом достижения на плоскости $(\phi; \Psi)$ графика функции (2.4).

Из рисунка 2.1 следует, что при любом выбранном значении параметра Ψ при движении из точки $(0; \Psi)$ направо сплошная кривая будет достигнута раньше, чем пунктирная, а это значит, что конечная точка оптимальной траектории будет достигнута раньше, чем выполнится равенство (2.4).

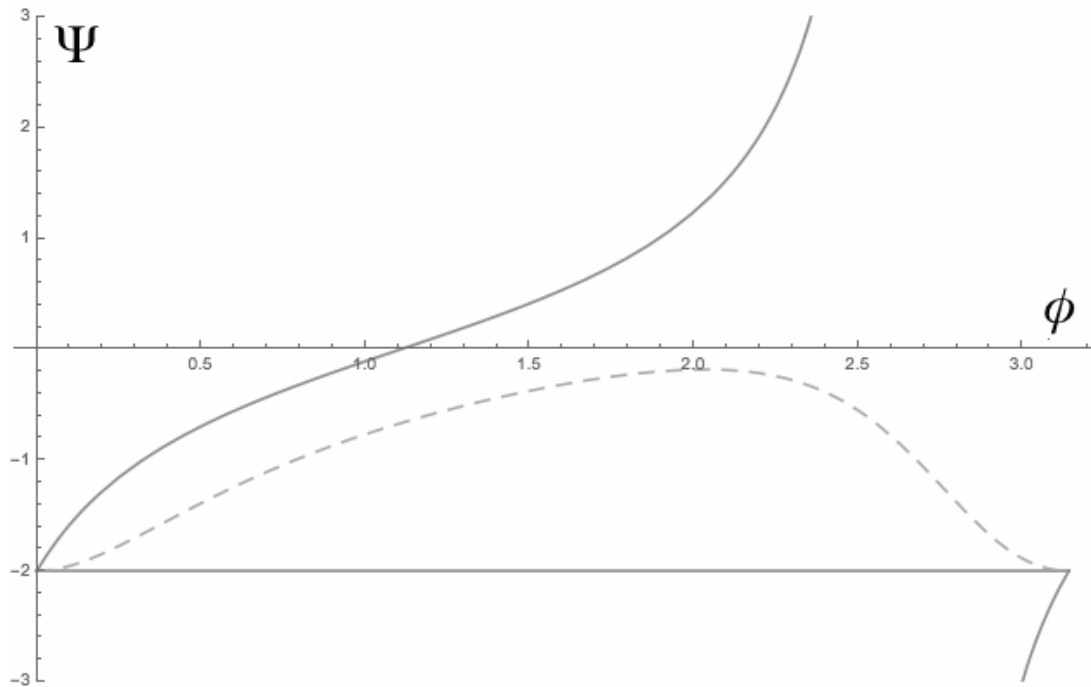


Рисунок 2.1 — Кривые, определяющие выполнение условия обнуления знаменателя выражения (2.1) и равенства (2.5) в конце движения при $k = 0.5$.

Аналогичные графики (рис. 2.2) построены для случая, когда $k = 3$, где в силу увеличенного коэффициента трения k график функции (2.4), изображенный пунктирной кривой, принимает несколько иной вид. Однако нетрудно заметить, что и в этом случае при любом выбранном значении параметра Ψ , определяющего оптимальную траекторию, при движении из точки $(0; \Psi)$ направо сплошная кривая будет достигнута раньше, чем пунктирная. Это значит, что знаменатель выражения (2.1) не обращается в ноль нигде, кроме начальной точки (где скорость нулевая).

Далее предложен способ получения оптимальных траекторий путем решения задачи Коши.

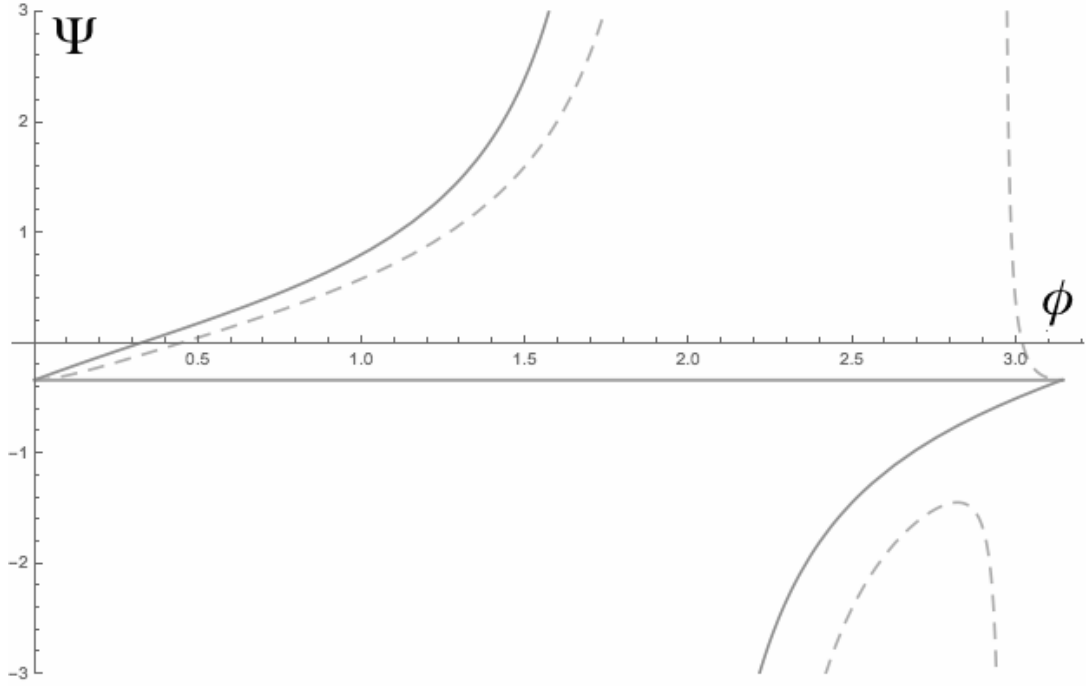


Рисунок 2.2 — Кривые, определяющие выполнение условия обнуления знаменателя выражения (2.1) и равенства (2.5) в конце движения при $k = 3$.

2.3 Построение оптимальных траекторий

Решая систему (2.2) с начальными условиями $x(0) = z(0) = v(0) = \phi(0) = 0$, можно получить оптимальные траектории с вертикальной касательной в начальной точке. Чтобы устранить влияние особенности в момент старта, когда скорость равна нулю, введем дополнительную переменную

$$R = \frac{\sin \phi}{v} = \frac{q_2}{\gamma} \quad (2.9)$$

и найдем ее производную в силу системы (2.2):

$$\dot{R} = -R^2 \frac{2gK[(1 + K\Psi) \cos 2\phi + (\Psi - K) \sin 2\phi]}{[1 - K^2 + 2K\Psi + K(K - \Psi) \cos 2\phi + K(1 + K\Psi) \sin 2\phi]}. \quad (2.10)$$

Будем предполагать [20], что в начальный момент существует конечный предел

$$R_0 = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{q_2}{\gamma}.$$

Параметр R_0 , по существу, задает кривизну траектории в начальный момент времени и, вообще говоря, определяется краевыми условиями краевой задачи принципа максимума. Этот параметр аналогичен радиусу кривизны циклоиды в классической задаче о брахистохроне.

Равенство (2.9) совместно с (2.2) образует систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = v \sin \phi, \\ \dot{z} = -v \cos \phi, \\ \dot{v} = g \cos \phi - Kvu, \\ \dot{\phi} = R \frac{g[1 + K^2 + K(\Psi - K) \cos 2\phi - K(1 + K\Psi) \sin 2\phi]}{[1 - K^2 + 2K\Psi + K(K - \Psi) \cos 2\phi + K(1 + K\Psi) \sin 2\phi]}, \\ \dot{R} = -R^2 \frac{2gK[(1 + K\Psi) \cos 2\phi + (\Psi - K) \sin 2\phi]}{[1 - K^2 + 2K\Psi + K(K - \Psi) \cos 2\phi + K(1 + K\Psi) \sin 2\phi]}, \end{cases} \quad (2.11)$$

решение которой с начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad R(0) = R_0 \quad (2.12)$$

позволяет получить оптимальную траекторию, определенную значениями параметров R_0 , Ψ , касательная к которой в начальной точке вертикальна. При этом момент достижения конечной точки однозначно определяется условием (1.33).

Будем решать задачу Коши для системы (2.11) с начальными условиями (2.12). Параметр R_0 для расчетов примем равным 0.05, а коэффициент трения $K = 0.1$. Момент достижения конечной точки траектории определяется равенством (1.33). Полученные траектории для различных значений параметра Ψ представлены на рисунке 2.3.

Финишная кривая – это множество конечных точек траекторий, определенных параметрами Ψ и R_0 , при фиксированном одном из параметров и изменяющемся другом. На рисунке 2.4 построены финишные кривые при фиксированном параметре $R_0 = 0.05$ и различных значениях коэффициента трения из промежутка от 0 до 0.5.

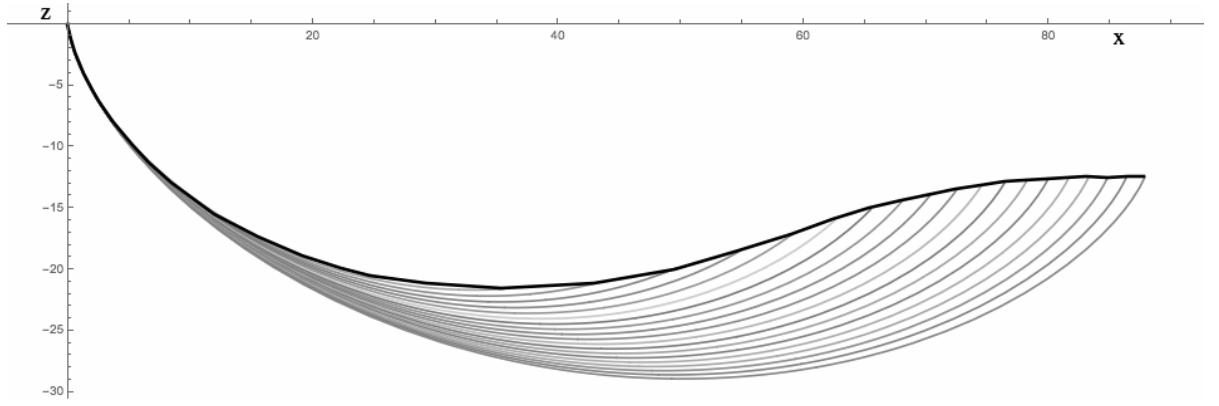


Рисунок 2.3 — Оптимальные траектории для $R_0 = 0.05$, $K = 0.1$ и различных значений параметра Ψ .

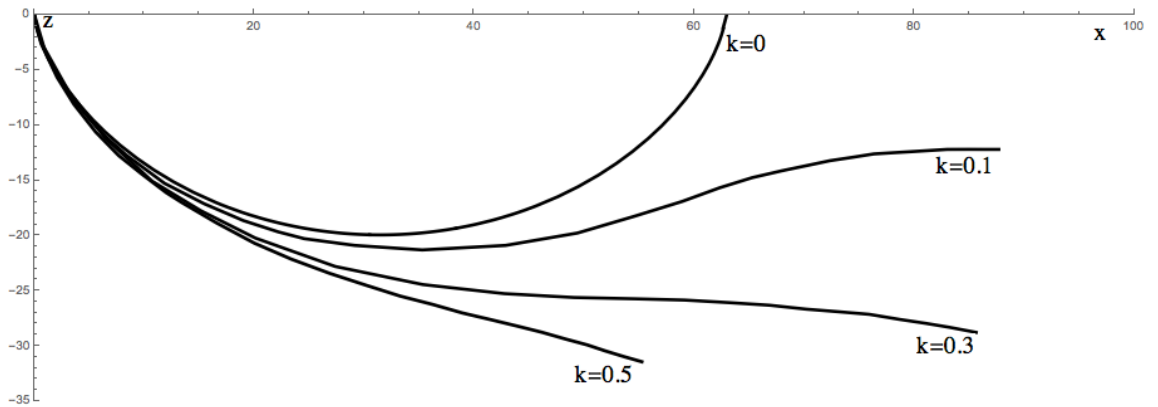


Рисунок 2.4 — Финишные кривые для различных значений коэффициента трения при фиксированном $R_0 = 0.05$.

2.4 Свойство автомодельности оптимальных траекторий

Предположим, что при некотором фиксированном Ψ функции $(x(t), z(t), v(t), \phi(t), R(t))$ являются решением системы (2.11) с начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad R(0) = 1. \quad (2.13)$$

Подстановкой в систему (2.11) можно убедиться, что функции

$$\left(\frac{x(\tilde{t})}{R_0^2}, \frac{z(\tilde{t})}{R_0^2}, \frac{v(\tilde{t})}{R_0}, \phi(\tilde{t}), R_0 R(\tilde{t}), \tilde{t} = \frac{t}{R_0} \right)$$

являются решением системы (2.11) с начальными условиями (2.12) при том же значении Ψ . Таким образом, любая оптимальная траектория, определенная

параметрами (Ψ, R_0) и соответствующая заданному значению k , может быть получена из оптимальной траектории, определенной параметрами $(\Psi, 1)$, масштабированием в $1/R_0^2$ раз относительно точки A старта. При этом общее время движения по брахистохроне изменится в соответствии с отношением $\tilde{T} = T/R_0$, и скорость в конечной точке оптимальной траектории изменится аналогично.

В качестве иллюстрации свойства автомодельности построены оптимальные траектории (рис. 2.5) для фиксированных значений параметра Ψ и различных R_0 .

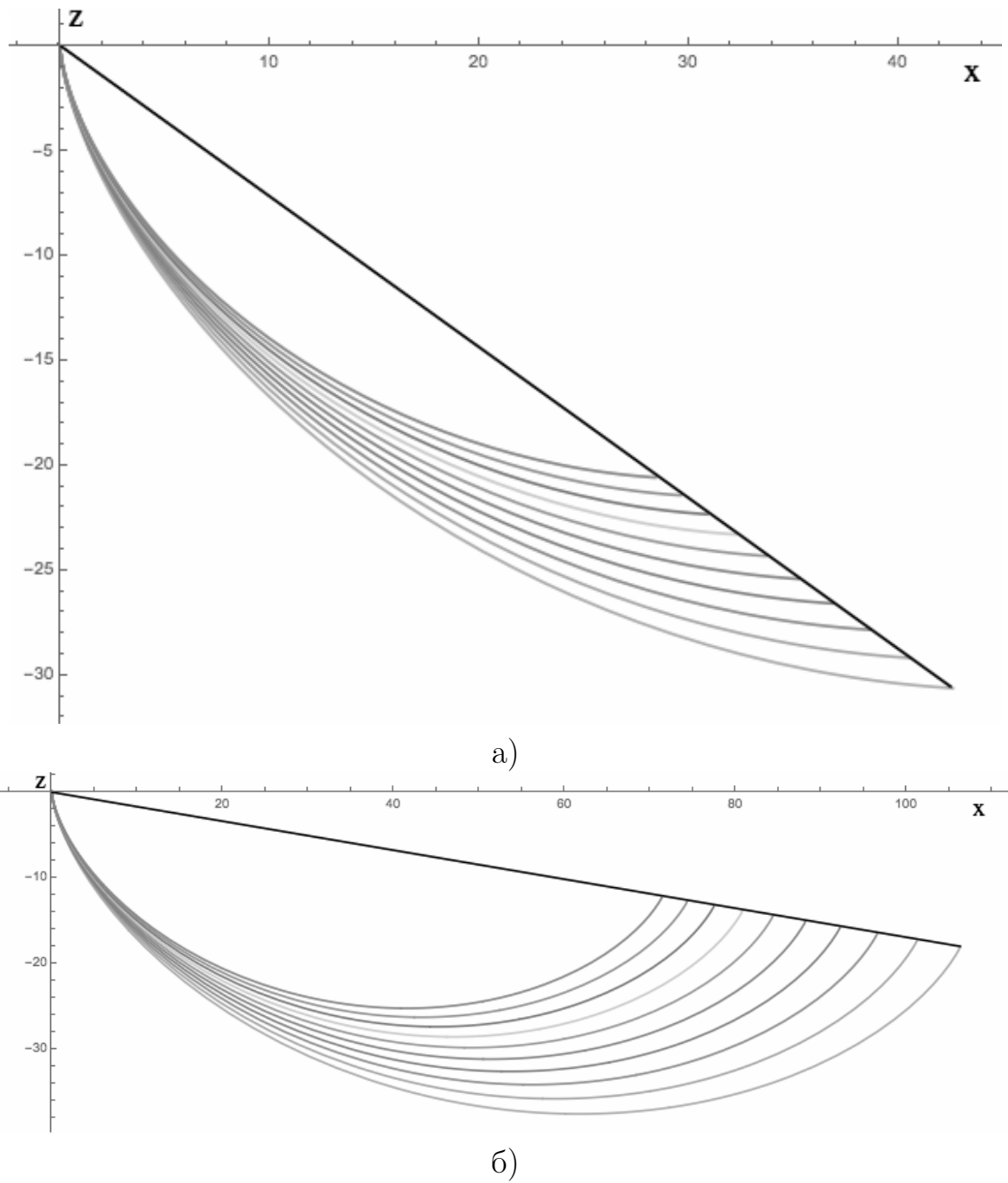


Рисунок 2.5 — Иллюстрация свойства автомодельности траекторий: а) — фиксированный параметр $\Psi = 0$, б) — фиксированный параметр $\Psi = 5$.

Глава 3. Оптимальные траектории в поле силы тяжести при действии на точку разгоняющей силы и вязкого трения

В третьей главе рассмотрен случай, когда сухое трение отсутствует, но на материальную точку помимо силы тяжести действуют разгоняющая сила и сила вязкого трения.

Примем, что сила тяги не возрастает при росте скорости, а сила вязкого трения не убывает при росте скорости, что значит:

$$\frac{dF_t}{d\gamma} \leq 0, \quad \frac{dF_v}{d\gamma} \geq 0.$$

Дополнительно примем, что коэффициент μ не возрастает при росте скорости, что значит:

$$\begin{cases} \mu'(\gamma) \leq 0, \\ 2\mu'(\gamma)\gamma + \mu(\gamma) \leq 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Без ограничения общности будем считать, что на точку действует постоянная разгоняющая сила, величина которой определяется константой c , и вязкое трение $F(v)$, которое равно нулю, когда точка не движется, и не убывает при росте скорости:

$$\mu = \mu_1 - \mu_2, \quad \mu_1 = c/v > 0, \quad F(v) = v\mu_2 \geq 0, \quad F(0) = 0, \quad \partial F/\partial v = F'_v \geq 0. \quad (3.2)$$

3.1 Оптимальное управление и система уравнений движения

В отсутствие сухого трения (когда $k \equiv 0$) выражение (1.30) можно записать в следующем упрощенном виде:

$$u = \frac{\sin \phi}{v} \left[2g + 2v(\cos \phi + \Psi \sin \phi)(\mu + \mu'\gamma) \right], \quad (3.3)$$

где Ψ – параметр, который при $k = 0$ с учетом (1.21) выражается через компоненты скоростей в момент T следующим образом:

$$\Psi = \frac{q_4(T)}{q_2(T)} = -\operatorname{ctg} \phi(T). \quad (3.4)$$

Система уравнений движения запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \sin \phi, \\ \dot{z} = -v \cos \phi, \\ \dot{v} = \mu v + g \cos \phi, \\ \dot{\phi} = \frac{\sin \phi}{v} \left[g + 2v(\cos \phi + \Psi \sin \phi)(\mu + \mu' \gamma) \right]. \end{cases} \quad (3.5)$$

В силу симметричности постановки задачи относительно вертикальной оси, проходящей через точку старта, будем рассматривать только траектории, для которых $\sin \phi(t) \geq 0$ в начале движения. Скорость на оптимальной траектории не равна нулю нигде, кроме точки А начала и, возможно, точки В окончания движения.

Для того чтобы определить форму оптимальных траекторий, докажем некоторые их свойства.

3.2 Свойства оптимальных траекторий

С в о й с т в о 1. Оптимальная траектория в отсутствие сухого трения, но при действии разгоняющей силы и (или) вязкого трения, имеет вертикальную касательную в конечной точке тогда и только тогда, когда горизонтальная скорость тождественно равна нулю ($q_2 \equiv 0$), т.е. оптимальная траектория представляет собой вертикальный отрезок.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Касательная в конечной точке оптимальной траектории вертикальна, если $q_2(T) = 0$, что, согласно (1.21), при $k = 0$ равносильно $\psi_1 = 0$. В случае $\psi_1 = 0$ формулы (1.27) несправедливы.

Упростим выражение (1.26), учитывая отсутствие сухого трения:

$$A = -g\psi_4 + \psi_1 q_2 + \psi_3 q_4. \quad (3.6)$$

Так как $k = 0$, условия оптимальности и результат дифференцирования по времени примут вид

$$\begin{aligned} f &= -\psi_2 q_4 + \psi_4 q_2 \equiv 0, \\ \frac{df}{dt} &= g\psi_2 + \psi_1 q_4 - \psi_3 q_2 \equiv 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Равенства (3.6) и (3.7) позволяют получить зависимость между A , ψ_1 и компонентами скорости:

$$Aq_2 = \psi_1(q_2^2 + q_4^2). \quad (3.8)$$

Скорость не равна нулю тождественно, поэтому константа ψ_1 может быть равна нулю только либо при вертикальном движении $q_2 \equiv 0$, либо при $A \equiv 0$. Рассмотрим случай $A \equiv 0$.

Для выполнения условия оптимальности необходимо, чтобы $Au + B \equiv 0$, что при $A \equiv 0$ с учетом (3.6) и (3.7) принимает вид

$$B = 2\psi_3 q_2(\mu + \gamma\mu') \equiv 0. \quad (3.9)$$

Если $\psi_3 = 0$, то, используя (3.7), можно получить, что $\psi_2 \equiv \psi_4 \equiv 0$. Согласно методу Понтрягина сопряженные переменные не должны быть тождественно равны нулю одновременно, поэтому $\psi_3 \neq 0$. В некоторой окрестности начальной точки $2(\mu + \gamma\mu') = (c - F - F'_v)/v > 0$, значит, равенство (3.9) выполняется только при $q_2 \equiv 0$. Следовательно, $\psi_1 = 0$ тогда и только тогда, когда $q_2 \equiv 0$. Свойство доказано.

Свойство 1 оправдывает принятое в (1.27) предположение, что $\psi_1 \neq 0$.

С в о й с т в о 2. Оптимальные траектории при действии постоянной разгоняющей силы и вязкого трения, которое зависит от величины скорости, обеспечивающие достижение заданной точки В из фиксированной точки А с нулевой начальной скоростью за минимальное время, имеют в точке А вертикальную касательную.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В начальный момент времени скорость точки равна нулю, поэтому имеется только касательное ускорение. Проекция равнодействующей всех сил на прямую, перпендикулярную касательной, должна быть равна нулю: $N(0) - mg \sin \phi(0) = 0$, что с использованием (3.3), (3.5) и

обозначения $u = N/(mv)$ можно представить в виде $v\dot{\phi}\Big|_{t=0} = 0$ или

$$\sin \phi \left[g + 2v(\cos \phi + \Psi \sin \phi)(\mu + \mu' \gamma) \right] \Big|_{t=0} = 0. \quad (3.10)$$

Из (3.10) следует, что либо $\sin \phi(0) = 0$, и касательная к траектории вертикальна в точке А, либо $\sin \phi \neq 0$, и должно быть выполнено

$$\left[g + 2v(\cos \phi + \Psi \sin \phi)(\mu + \mu' \gamma) \right] \Big|_{t=0} = 0. \quad (3.11)$$

Покажем, что (3.11) не может быть выполнено при невертикальном старте. Предположим обратное, т.е. существует оптимальная траектория, для которой выполнено (3.11), а касательная к ней в точке А невертикальна. Запишем (3.11), учитывая, что в момент начала движения $v(0) = 0$, т.е. вязкое трение обнуляется:

$$\left[g + c(\cos \phi + \Psi \sin \phi) \right] \Big|_{t=0} = 0, \quad (3.12)$$

и выразим отсюда значение параметра Ψ :

$$-\Psi = \operatorname{ctg} \phi_0 + \frac{g}{c \sin \phi_0}. \quad (3.13)$$

В конечной точке оптимальной траектории, получаемой при движении с управлением, которое определяется параметром Ψ , должно быть выполнено условие (3.4). Поэтому можно выразить угол ϕ в момент времени $t = T$ достижения конечной точки траектории:

$$\phi(T) = \operatorname{arccctg}(-\Psi) + 2\pi n, \quad n \in Z. \quad (3.14)$$

Подставляя Ψ из (3.13) в (3.14) и находим зависимость между косинусами и синусами углов ϕ_0 и $\phi(T)$:

$$\begin{aligned} \cos \phi(T) &= \cos \left[\operatorname{arccctg} \left(\operatorname{ctg} \phi_0 + \frac{g}{c \sin \phi_0} \right) \right] = \frac{\cos \phi_0 + \frac{g}{c}}{\sqrt{1 + 2\frac{g}{c} \cos \phi_0 + \frac{g^2}{c^2}}}, \\ \sin \phi(T) &= \sin \left[\operatorname{arccctg} \left(\operatorname{ctg} \phi_0 + \frac{g}{c \sin \phi_0} \right) \right] = \frac{\sin \phi_0}{\sqrt{1 + 2\frac{g}{c} \cos \phi_0 + \frac{g^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что при любых значениях $g > 0$ и $c > 0$ выполнено неравенство $\cos \phi(T) > \cos \phi_0$, при этом $\sin \phi(T) > 0$.

Продифференцируем $\cos \phi(t)$ по времени в силу системы (3.5):

$$\frac{d}{dt}(\cos \phi) = -\dot{\phi} \sin \phi = -\frac{\sin^2 \phi}{v} \left[g + 2v(\cos \phi + \Psi \sin \phi)(\mu + \mu' \gamma) \right]. \quad (3.15)$$

В момент достижения конечной точки траектории, когда выполнено (3.4), выражение для производной косинуса угла ϕ принимает вид

$$\frac{d}{dt}(\cos \phi) \Big|_{t=T} = -\frac{g \sin^2 \phi(T)}{v(T)} < 0. \quad (3.16)$$

Из (3.16) следует, что в любой сколь угодно малой окрестности момента T косинус угла $\phi(t)$ будет больше, чем в конечной точке траектории. Возьмем момент времени t^* так, что определяемая им точка траектории будет достаточно близка к конечной точке В траектории, тогда $\cos \phi(t^*) > \cos \phi(T)$, и при этом $\sin \phi(t^*) > 0$.

В рассматриваемых траекториях $\sin \phi \geq 0$ в некоторой окрестности начальной точки, что не исключает возможности смены знака $\sin \phi$ в процессе движения. С учетом того, что $\cos \phi(t^*) > \cos \phi(T) > \cos \phi_0$, а $\sin \phi$ положителен при $t = [0; t^*; T]$, в силу непрерывности движения по оптимальной кривой достижение точки, определяемой моментом времени t^* , возможно только при выполнении одного из следующих условий:

1) в некоторый момент времени $\hat{t} < t^*$

$$\sin \phi(\hat{t}) = \sin \phi(T), \quad \cos \phi(\hat{t}) = \cos \phi(T), \quad \frac{d}{dt}(\cos \phi)(\hat{t}) > 0, \quad (3.17)$$

2) в некоторый момент времени $\hat{t} < t^*$

$$\sin \phi(\hat{t}) = -\sin \phi(T), \quad \cos \phi(\hat{t}) = -\cos \phi(T), \quad \frac{d}{dt}(\cos \phi)(\hat{t}) > 0. \quad (3.18)$$

В обоих случаях производная $\cos \phi$ по времени при $t = \hat{t}$, определяемая (3.15), с учетом (3.13), (3.17) и (3.18) принимает вид

$$\frac{d}{dt}(\cos \phi) \Big|_{t=\hat{t}} = -\frac{g \sin^2 \phi(\hat{t})}{v(\hat{t})} < 0. \quad (3.19)$$

Полученная в (3.19) производная отрицательна, что противоречит неравенствам (3.17) и (3.18). Точка оптимальной кривой, определяемая моментом времени t^* , недостижима, следовательно, предположение о существовании оптимальной траектории, удовлетворяющей условию (3.11), неверно. Остается только вариант $\sin \phi_0 = 0$. Свойство доказано.

Рассмотрим отдельно случай старта вертикально вверх, т.е. $\sin \phi_0 = 0$, $\cos \phi_0 = -1$. Согласно свойству 1, имеем $\phi(T) \neq \pi n$, $n \in Z$, поэтому $\cos \phi_0 < \cos \phi(T)$. Применяв рассуждения, аналогичные приведенным выше, можно показать, что таких оптимальных траекторий не существует, а значит, в случае отсутствия сухого трения движение по оптимальной траектории начнется вертикально вниз.

С в о й с т в о 3. Неравенство $\cos \phi + \Psi \sin \phi > 0$ выполняется на оптимальной траектории везде, кроме конечной ее точки.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассматривается движение, определенное системой дифференциальных уравнений (3.5). Пусть $\sin \phi^* > 0$, где $\phi = \phi^*$ – это угол, для которого выполнено

$$\cos \phi + \Psi \sin \phi = 0. \quad (3.20)$$

Отметим, что все углы, для которых также выполняется (3.20), определяются следующим образом: $\phi = \phi^* + \pi n$, где $n \in Z$. Старт возможен только вертикально вниз, значит, угол ϕ в начале движения лежит в интервале $(\phi^* - \pi; \phi^*)$. Несложно убедиться, что знак $\dot{\phi}$ совпадает со знаком $\sin \phi$ при $\phi = \phi^* + \pi n$, где $n \in Z$. Учитывая этот факт, можно сделать вывод, что если в процессе движения, определенного системой (3.5), величина угла ϕ выйдет за границы интервала $(\phi^* - \pi; \phi^*)$, то при дальнейшем движении она будет оставаться или в интервале $(\phi^* - 2\pi; \phi^* - \pi)$, или в интервале $(\phi^*; \phi^* + \pi)$. Таким образом, равенство $\phi(t) = \phi^* + \pi n$, где $n \in Z$, в процессе движения может быть выполнено лишь единожды. На оптимальной траектории (3.20) выполняется в конечной точке траектории, значит, указанное равенство неверно в остальных ее точках. Значит, $\cos \phi + \Psi \sin \phi$ сохраняет свой знак в процессе всего движения. В начале движения $\cos \phi(0) + \Psi \sin \phi(0) = 1 > 0$. Свойство доказано.

С л е д с т в и е. Выполнение условия (3.20) может быть использовано как индикатор достижения конечной точки оптимальной траектории.

Докажем свойство выпуклости оптимальных траекторий (аналогичное доказанному для случая действия только силы тяжести и сухого трения) при дей-

ствии на точку силы тяжести, постоянной разгоняющей силы, сонаправленной скорости, а также вязкого трения, для которого зависимость от скорости определяется степенной функцией.

С в о й с т в о 4. Оптимальные траектории в поле силы тяжести при действии на точку постоянной разгоняющей силы и вязкого трения, величины которых определяются функцией

$$\mu = \frac{c}{v} - dv^n, \quad (3.21)$$

где $n \geq 0$ – некоторое фиксированное целое число и $d = \text{const} > 0$, являются выпуклыми вниз кривыми, т.е. $\dot{\phi} \geq 0$ на протяжении всей оптимальной траектории.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что согласно четвертому уравнению системы (3.5), а также с учетом (3.4), в момент достижения конечной точки оптимальной траектории $\dot{\phi} > 0$. Так как рассматриваются только оптимальные траектории, для которых $\sin \phi > 0$ в некоторой проколотой окрестности начальной точки, то можно сделать вывод, что $\dot{\phi} > 0$ в некоторой проколотой окрестности начальной точки.

Будем доказывать свойство от противного. Доказательство состоит из следующих этапов:

1. Предполагаем, что в некоторый момент времени t_- движения по оптимальной траектории угол ϕ начинает убывать. Показываем, что убывание обязательно закончится и угол снова начнет возрастать в момент времени t_+ .
2. Доказываем, что в любой малой окрестности t_+ существует период убывания скорости движения. Аналогично, в любой малой окрестности t_- существует период возрастания скорости движения. Таким образом, на промежутке от t_- до t_+ обязательно найдется момент времени t^* , когда $\dot{v}$ меняет знак с положительного на отрицательный.
3. Показываем, что в течение некоторого времени после t^* угол будет возрастать. Таким образом приходим к выводу, что $t^* = t_+$.
4. В случае $t^* = t_+$ приходим к противоречию, доказав тем самым свойство.

Этап 1. Пусть в некоторый момент времени $t = t_-$ движения по оптимальной траектории верны следующие равенства и неравенства:

$$\begin{cases} 0 < t_- < T, \\ \dot{\phi}(t_-) = 0, \\ \dot{\phi}(t) \geq 0, \text{ при } 0 < t < t_-, \\ \dot{\phi}(t_- + \delta t) < 0, \end{cases} \quad (3.22)$$

где δt – некоторая малая величина. Таким образом, мы предполагаем, что в некоторый момент времени $t = t_-$ угол ϕ начинает убывать.

Так как в момент времени T достижения конечной точки оптимальной траектории угол ϕ возрастает, то период убывания угла ϕ , который начался в момент времени t_- , обязательно закончится, т.е. существует момент времени $t = t_+$, такой что выполняются следующие равенства и неравенства:

$$\begin{cases} t_- < t_+ < T, \\ \dot{\phi}(t_+) = 0, \\ \dot{\phi}(t) \leq 0, \text{ при } t_- < t < t_+, \\ \dot{\phi}(t_+ + \delta t) > 0, \end{cases} \quad (3.23)$$

где δt – некоторая малая величина.

Этап 2. Используя четвертое уравнение системы (3.5), записанное с учетом (3.21):

$$\dot{\phi} = \frac{\sin \phi}{v} \left[g + (\cos \phi + \Psi \sin \phi)(c - d(n+2)v^{n+1}) \right], \quad (3.24)$$

покажем, как изменяется величина скорости в окрестности момента времени t_+ .

Так как в момент времени $t = t_+$ меняется знак $\dot{\phi}$, в некоторой окрестности t_+ можно выбрать t_+^1 и t_+^2 , удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{cases} t_+^1 < t_+ < t_+^2, \\ \phi(t_+^1) = \phi(t_+^2). \end{cases} \quad (3.25)$$

Учитывая (3.24) при положительной скорости и $\sin \phi > 0$ можно сделать вывод, что

$$\left[g + (\cos \phi + \Psi \sin \phi)(c - d(n+2)v^{n+1}) \right] \Big|_{t=t_+^1} < 0,$$

$$0 < \left[g + (\cos \phi + \Psi \sin \phi)(c - d(n+2)v^{n+1}) \right] \Big|_{t=t_+^2}.$$

Известно, что $(\cos \phi + \Psi \sin \phi) > 0$ во всех точках оптимальной траектории, кроме конечной. Получаем $v(t_+^1) > v(t_+^2)$, следовательно, в любой малой окрестности момента времени t_+ существует промежуток, на котором скорость убывает. Аналогично показывается существование промежутка возрастания скорости в малой окрестности точки t_- . Нетрудно убедиться, что в этом случае существует момент времени $t = t^*$, в который $\dot{v}$ меняет знак с положительного на отрицательный, при этом $t_- \leq t^* \leq t_+$. Третье уравнение системы (3.5) с учетом (3.21) принимает следующий вид:

$$\dot{v} = c - dv^{n+1} + g \cos \phi, \quad (3.26)$$

что позволяет выразить скорость в момент времени t^* через угол ϕ :

$$v(t^*) = \sqrt[n+1]{\frac{c + g \cos \phi(t^*)}{d}}$$

Этап 3. Докажем, что в течение некоторого времени после момента $t = t^*$ угол ϕ возрастает. Предположим обратное: пусть $\dot{\phi}(t) \leq 0$ при $t^* < t < t^{***}$. Так как t^* – это момент перемены знака $\dot{v}$, значит найдется момент времени t^{**} такой, что $t^* < t^{**} < t^{***}$ и выполнены неравенства:

$$\begin{cases} v(t^*) > v(t^{**}), \\ \phi(t^*) \geq \phi(t^{**}), \\ \dot{v}(t^{**}) = c - dv^{n+1}(t^{**}) + g \cos \phi(t^{**}) < 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Третье неравенство (3.27) запишем в виде

$$v(t^{**}) > \sqrt[n+1]{\frac{c + g \cos \phi(t^{**})}{d}}.$$

Используем второе неравенство (3.27) и учитываем, что при движении по оптимальной траектории $\sin \phi > 0$. Получаем, что $\cos \phi(t^*) \leq \cos \phi(t^{**})$ и, следовательно, верно:

$$v(t^{**}) > \sqrt[n+1]{\frac{c + g \cos \phi(t^{**})}{d}} \geq \sqrt[n+1]{\frac{c + g \cos \phi(t^*)}{d}} = v(t^*),$$

что противоречит первому неравенству (3.27).

Таким образом, доказано, что в течение некоторого времени после момента $t = t^*$ угол ϕ возрастает. Принимая во внимание тот факт, что угол ϕ убывает на промежутке от t_- до t_+ , можно сделать вывод, что $t^* = t_+$.

Этап 4. В рамках предположения, что существует момент времени t_- , после которого угол ϕ начинает убывать, доказано, что $t^* = t_+$. В некоторой малой окрестности момента t^* такой, что в ней функция $v(t)$ выпукла вверх, а $\phi(t)$ выпукла вниз, выберем t_1^* и t_2^* так, что $t_1^* < t^* < t_2^*$ и $v(t_1^*) = v(t_2^*)$. Принимая во внимание, что $\dot{v}(t_1^*) > 0 > \dot{v}(t_2^*)$, согласно (3.26) получаем, что $\phi(t_1^*) < \phi(t_2^*)$.

Выберем t_3^* так, что $t_1^* < t^* < t_3^* < t_2^*$ и $\phi(t_1^*) = \phi(t_3^*)$, это возможно с учетом выпуклости вниз функции $\phi(t)$ в окрестности t^* . Принимая во внимание, что $\dot{\phi}(t_1^*) < 0 < \dot{\phi}(t_3^*)$, согласно (3.24) при $\sin \phi > 0$ получаем, что $v(t_1^*) > v(t_3^*)$. Неравенство $v(t_1^*) > v(t_3^*) < v(t_2^*)$ противоречит выпуклости вверх функции $v(t)$ в окрестности t^* , значит, t^* не может совпадать с t_+ , следовательно, изначальное предположение неверно. Свойство доказано.

3.3 Дополнительная переменная

Доказав, что касательная к оптимальной траектории вертикальна, мы получили возможность ввести дополнительную переменную R , аналогично секции 2.3:

$$R = \frac{\sin \phi}{v}, \quad (3.28)$$

и найдем ее производную в силу системы (3.5):

$$\dot{R} = R \left[-\mu + 2 \cos \phi (\cos \phi + \Psi \sin \phi) (\mu + \mu' \gamma) \right]. \quad (3.29)$$

Будем предполагать [20], что в начальный момент существует конечный предел

$$R_0 = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\sin \phi}{v}.$$

Равенство (3.28) совместно с (1.29) и (3.5) образует систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = v \sin \phi, \\ \dot{z} = -v \cos \phi, \\ \dot{v} = \mu v + g \cos \phi, \\ \dot{\phi} = R[g + 2v(\cos \phi + \Psi \sin \phi)(\mu + \mu' \gamma)], \\ \dot{R} = R[-\mu + 2 \cos \phi(\cos \phi + \Psi \sin \phi)(\mu + \mu' \gamma)], \end{cases} \quad (3.30)$$

решение которой с начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad R(0) = R_0 \quad (3.31)$$

позволяет получить оптимальную траекторию, определенную значениями параметров R_0 , Ψ и зависимостью $\mu(\gamma)$, если $\mu(\gamma)$ не содержит особенности при $\gamma = 0$. Любой полиномиальный закон, определяющий величину вязкого трения, не будет содержать особенности в начальной точке. К таким законам относятся наиболее часто применяемые: линейное вязкое трение и вязкое трение, квадратично зависящее от величины скорости.

Постоянная разгоняющая сила задается функцией $\mu = c/v$ и, очевидно, содержит особенность в начальной точке. Сначала рассмотрим влияние этой особенности в случае отсутствия трения, а затем предложим способ ее избежания для случая одновременного действия разгоняющей силы и вязкого трения.

При этом момент достижения конечной точки определяется условием (3.14).

3.4 Оптимальные траектории в поле силы тяжести при действии на точку разгоняющей силы в отсутствие трения

Когда трение отсутствует, и на точку действует только постоянная разгоняющая сила ($\mu = c/v$), оптимальное управление с учетом дополнительной

переменной (3.28) принимает упрощенный вид:

$$u = R \left[2g + (\cos \phi + \Psi \sin \phi) \right]. \quad (3.32)$$

Система уравнений движения (3.30) преобразуется следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \sin \phi, \\ \dot{z} = -v \cos \phi, \\ \dot{v} = c + g \cos \phi, \\ \dot{\phi} = R [g + c(\cos \phi + \Psi \sin \phi)], \\ \dot{R} = \frac{cR}{v} [-1 + \cos \phi (\cos \phi + \Psi \sin \phi)], \end{cases} \quad (3.33)$$

а начальные условия запишутся в виде

$$x(0) = 0, z(0) = 0, v(0) = 0, \phi(0) = 0, R(0) = R_0. \quad (3.34)$$

Покажем, что в этом случае выполняется свойство автомодельности, аналогичное доказанному выше для случая действия только сухого трения.

3.4.1 Свойство автомодельности

Предположим, что при некотором фиксированном Ψ функции $(q_1(t), q_3(t), v(t), \phi(t), R(t))$ являются решением системы (3.33) с начальными условиями

$$q_1(0) = 0, \quad q_3(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad R(0) = 1. \quad (3.35)$$

Нетрудно убедиться, что функции

$$\left(\frac{q_1(\tilde{t})}{R_0^2}, \frac{q_3(\tilde{t})}{R_0^2}, \frac{v(\tilde{t})}{R_0}, \phi(\tilde{t}), R_0 R(\tilde{t}), \tilde{t} = \frac{t}{R_0} \right)$$

являются решением системы (3.33) с начальными условиями (3.34). Таким образом, любая оптимальная траектория, заданная параметрами (Ψ, R_0) , может быть получена из оптимальной траектории, заданной параметрами $(\Psi, 1)$, мас-

штабированием в $1/R_0^2$ раз относительно точки A старта. При этом общее время движения по брахистохроне изменится в соответствии с отношением $\tilde{T} = T/R_0$, и скорость в конечной точке оптимальной траектории изменится аналогично.

3.4.2 Свойство выпуклости

Отметим свойство выпуклости оптимальных траекторий в отсутствие трения. Тогда при одновременно выполненных условиях $\sin \phi(t) > 0$ и $(\cos \phi + \Psi \sin \phi) \geq 0$ производная угла ϕ будет положительной, а значит, угол ϕ будет возрастать, и это возрастание будет продолжаться, пока выполняется $(\cos \phi + \Psi \sin \phi) > 0$. Условие окончания движения (3.14) представим в виде $(\cos \phi + \Psi \sin \phi) = 0$, эквивалентном (3.4). Другими словами, в отсутствие трения угол ϕ возрастает во время всего движения, а оптимальные траектории выпуклы вниз. С учетом доказанных свойств касательных в начальной и конечной точках оптимальной траектории мы получили представления о виде оптимальной траектории при действии помимо силы тяжести только постоянной разгоняющей силы (рис. 3.1).



Рисунок 3.1 — Вид оптимальной траектории при действии постоянной разгоняющей силы на основе доказанных свойств.

3.4.3 Построение оптимальных траекторий

Используя третье и четвертое уравнения системы (3.33), интегрированием получим выражение для величины скорости через угол ϕ :

$$v = \frac{(g + c) \sin \phi}{R_0 [g + c(\cos \phi + \Psi \sin \phi)]}. \quad (3.36)$$

Выражение (3.36) с учетом условия (3.14) в конечной точке позволяет сделать вывод, что среди оптимальных траекторий, определенных фиксированным параметром R_0 , максимальная скорость достигается на той, для которой $\Psi = 0$, т.е. на траектории, касательная к которой в конечной точке горизонтальна.

Запишем выражение для производной угла ϕ :

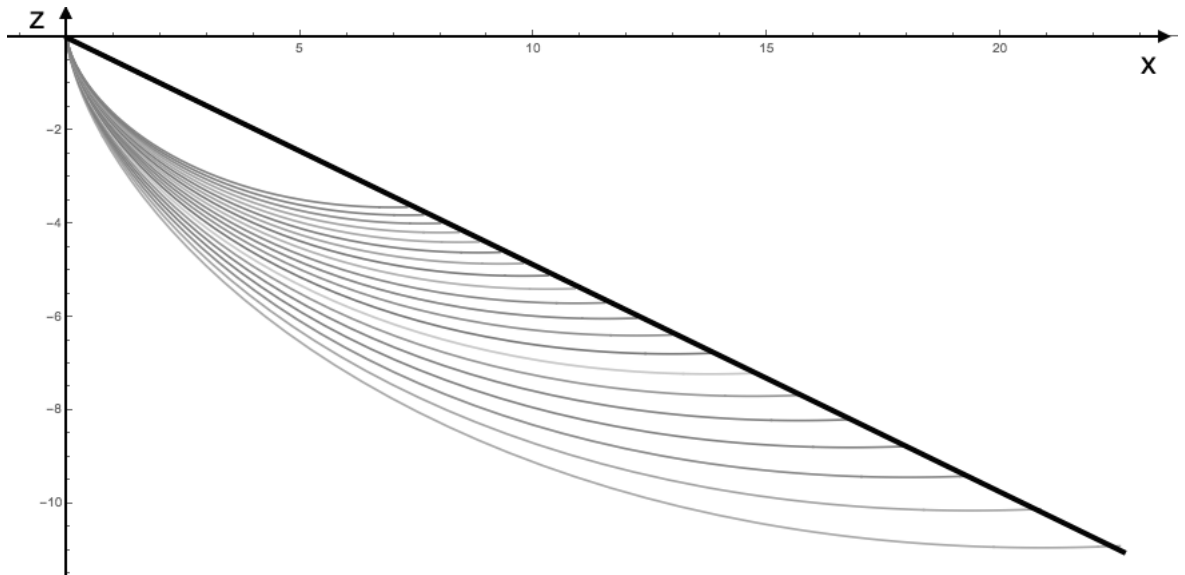
$$\dot{\phi} = \frac{R_0 [g + c(\cos \phi + \Psi \sin \phi)]^2}{(g + c)}. \quad (3.37)$$

С его помощью, а также учитывая (3.36) и свойство монотонного возрастания угла ϕ , перейдем в первом и втором уравнениях системы (3.33) к дифференцированию по ϕ :

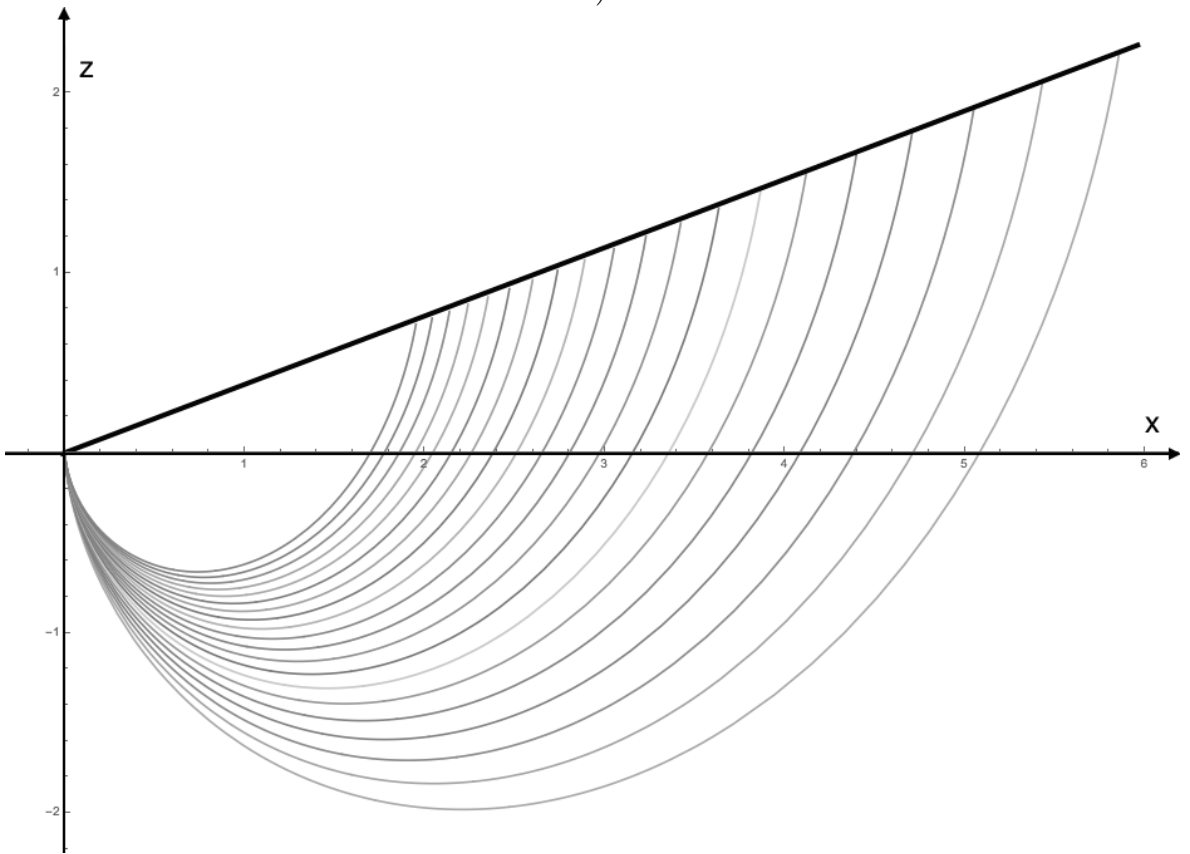
$$\begin{cases} \frac{dq_1}{d\phi} = \frac{1}{R_0^2} \frac{(g + c)^2 \sin^2 \phi}{[g + c(\cos \phi + \Psi \sin \phi)]^3}, \\ \frac{dq_3}{d\phi} = -\frac{1}{R_0^2} \frac{(g + c)^2 \sin \phi \cos \phi}{[g + c(\cos \phi + \Psi \sin \phi)]^3}. \end{cases} \quad (3.38)$$

Можно убедиться, что уравнения (3.38) при $c = 0$ (классическая брахистохрона), как и ожидалось, задают циклоиду.

Полученные выражения подтверждают свойство автомодельности, доказанное выше. Для фиксированных $\Psi = 0$ (рис. 3.2, а) и $\Psi = 5$ (рис. 3.2, б) в качестве иллюстрации этого свойства построим семейства оптимальных траекторий в зависимости от параметра R_0 , взятого из промежутка $[0.05; 0.09]$. Оптимальные траектории получаются друг из друга масштабированием, а конечные точки этих траекторий лежат на одной прямой, проходящей через начало координат. Таким образом, дальнейшее исследование можно проводить для одного фиксированного параметра, например $R_0 = 0.05$.



а)



б)

Рисунок 3.2 — Иллюстрация свойства автомодельности траекторий: а) — фиксированный параметр $\Psi = 0$, б) — фиксированный параметр $\Psi = 5$.

Оптимальные траектории получены путем решения задачи Коши для системы (3.38) с начальными условиями $q_1(0) = q_3(0) = 0$. При этом конечная точка траектории определяется условием (3.14).

В случае когда величина разгоняющей силы тяги задается константой $c = 3$, построим семейство оптимальных траекторий (рис. 3.3), для которых Ψ служит параметром. Множество конечных точек оптимальных траекторий при фиксированном R_0 образует финишную кривую (рис. 3.3).

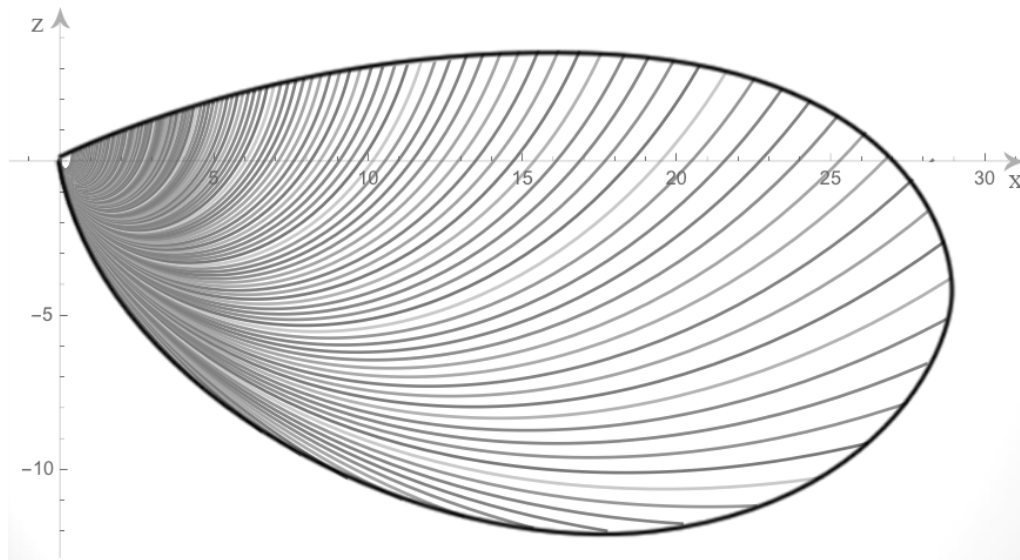


Рисунок 3.3 — Семейство оптимальных траекторий при $c = 3$, фиксированном R_0 и различных значениях Ψ .

Финишные кривые, построенные для различных R_0 , не пересекаются и покрывают (рис. 3.4) некоторую область на плоскости.

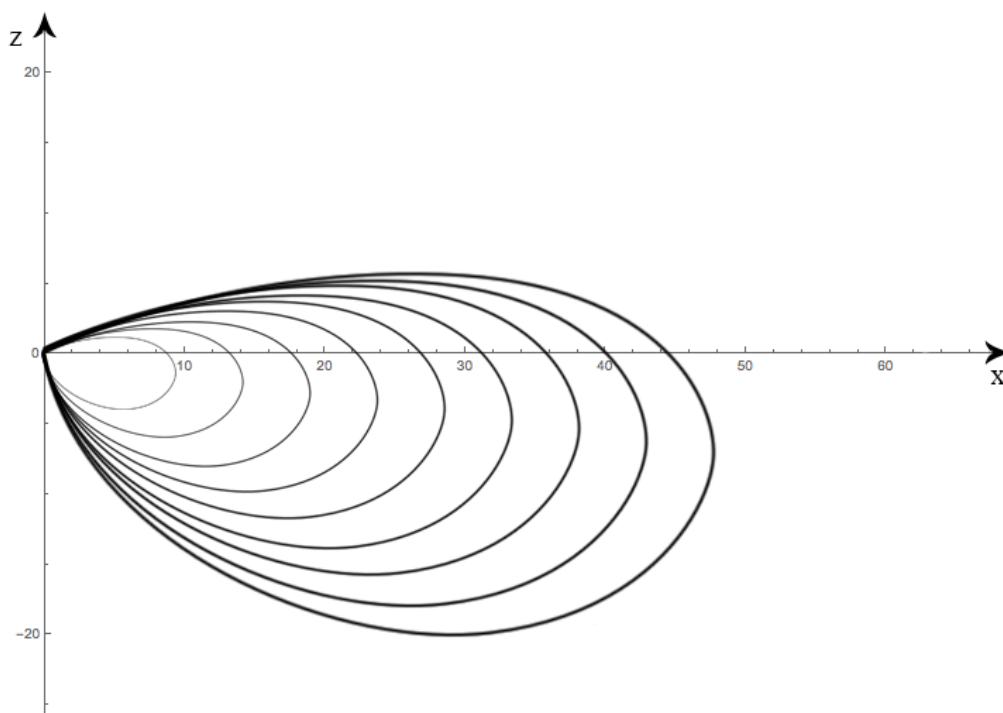


Рисунок 3.4 — Финишные кривые при $c = 3$, для различных R_0 .

Учитывая свойство автомодельности, можно сделать вывод, что если для некоторой конечной точки при заданной начальной существует соединяющая их траектория, полученная как решение системы (3.33), то такая траектория единственна для этой пары.

Для оценки влияния величины разгоняющей силы на форму финишных кривых построены финишные кривые для различных значений параметра c (рис. 3.5). При уменьшении параметра c наблюдается приближение верхнего участка финишной кривой к горизонтальной оси Ax . При $c = 0$ получается кусок циклоиды как решение классической задачи о брахистохроне.

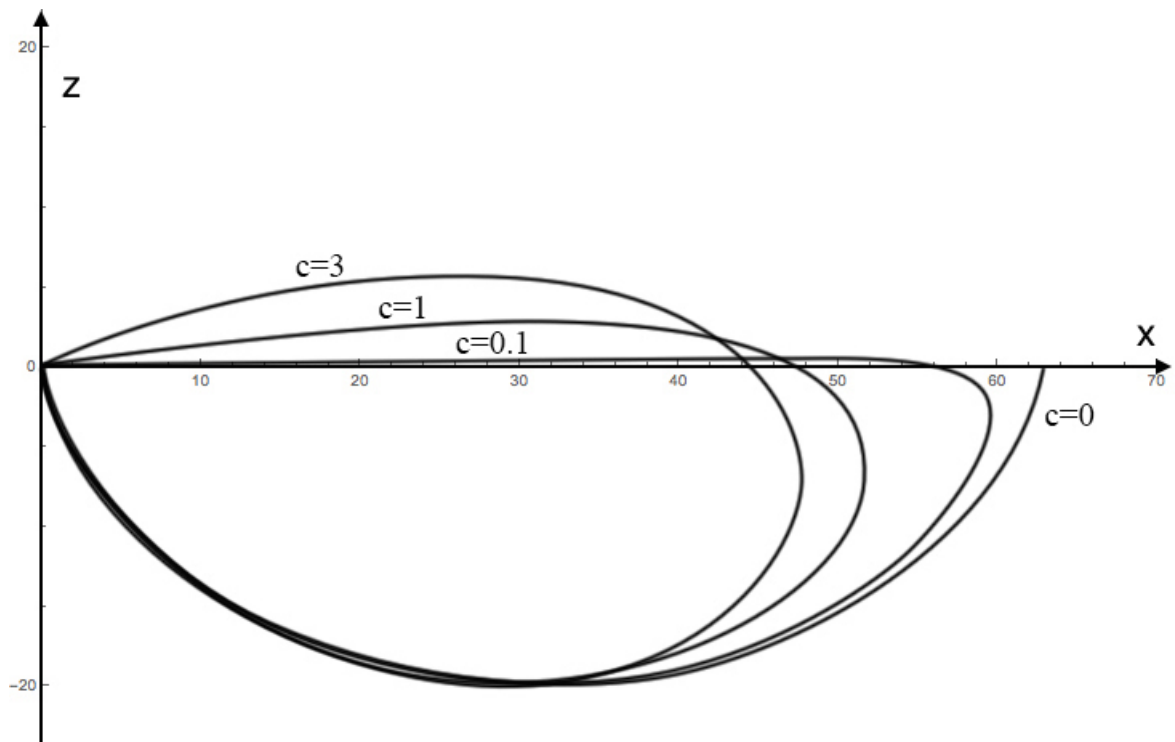


Рисунок 3.5 — Финишные кривые при $c = 3$, $c = 1$, $c = 0.1$ и $c = 0$.

3.5 Оптимальные траектории в поле силы тяжести при действии на точку одновременно разгоняющей силы и вязкого трения

Для получения оптимальных траекторий при действии вязкого трения и постоянной разгоняющей силы воспользуемся системой (3.30). Для устранения особенности в начальной точке предлагается использование квазипостоянной разгоняющей силы.

3.5.1 Квазипостоянная разгоняющая сила

Следуя [30], зададим квазипостоянную разгоняющую силу следующим коэффициентом:

$$\mu_1 = \frac{c}{\theta + \sqrt{\gamma}}, \quad (3.39)$$

где c – константа, определяющая значение силы тяги, а $\theta > 0$ – некоторая малая постоянная величина. Соответствующая сила тяги равна нулю при нулевой скорости и стремится к постоянному значению c при росте скорости. Модуль разности между используемым приближенным значением разгоняющей силы и постоянным значением $F_t = c$ будет равен $\theta c / (\theta + v)$. При достаточно малых значениях θ эта разница будет наблюдаться лишь в малой окрестности начальной точки. При расчетах константа θ выбиралась так, чтобы уменьшение ее в 10 раз не влияло на получаемые результаты расчетов (с точностью до шести знаков после запятой).

По сути, использование квазипостоянной разгоняющей силы оказывает влияние только тогда, когда движение происходит почти вертикально вниз (некоторое время после старта). Именно этот нюанс является причиной столь малого искажения результатов расчета.

Кроме того, существует возможность проверки выполненных расчетов. Достаточно после построения оптимальной траектории из заданной точки А при действии квазипостоянной разгоняющей силы и вязкого трения для некоторых параметров Ψ и R_0 произвести интегрирование системы (3.5) в обратном времени из полученной конечной точки, но уже используя постоянную разгоняющую силу. Моделирование подобных ситуаций показывает, что расстояние между заданной точкой А и точкой А', полученной в результате интегрирования в обратном времени, пренебрежимо мало в сравнении с расстоянием, пройденным материальной точкой по оптимальной траектории от т. А до т. В.

3.5.2 Построение оптимальных траекторий

Оптимальные траектории (рис. 3.6) между двумя фиксированными точками А и В для случая квазипостоянной разгоняющей силы построены отдельно в отсутствие вязкого трения и при наличии вязкого трения, пропорционального скорости с коэффициентом, равным 1. При расчетах параметр c , определяющий предельную величину силы тяги, принимался равным 20, а параметры R_0 и Ψ выбирались таким образом, чтобы в каждом случае полученная оптимальная траектория имела концы в точках А и В.

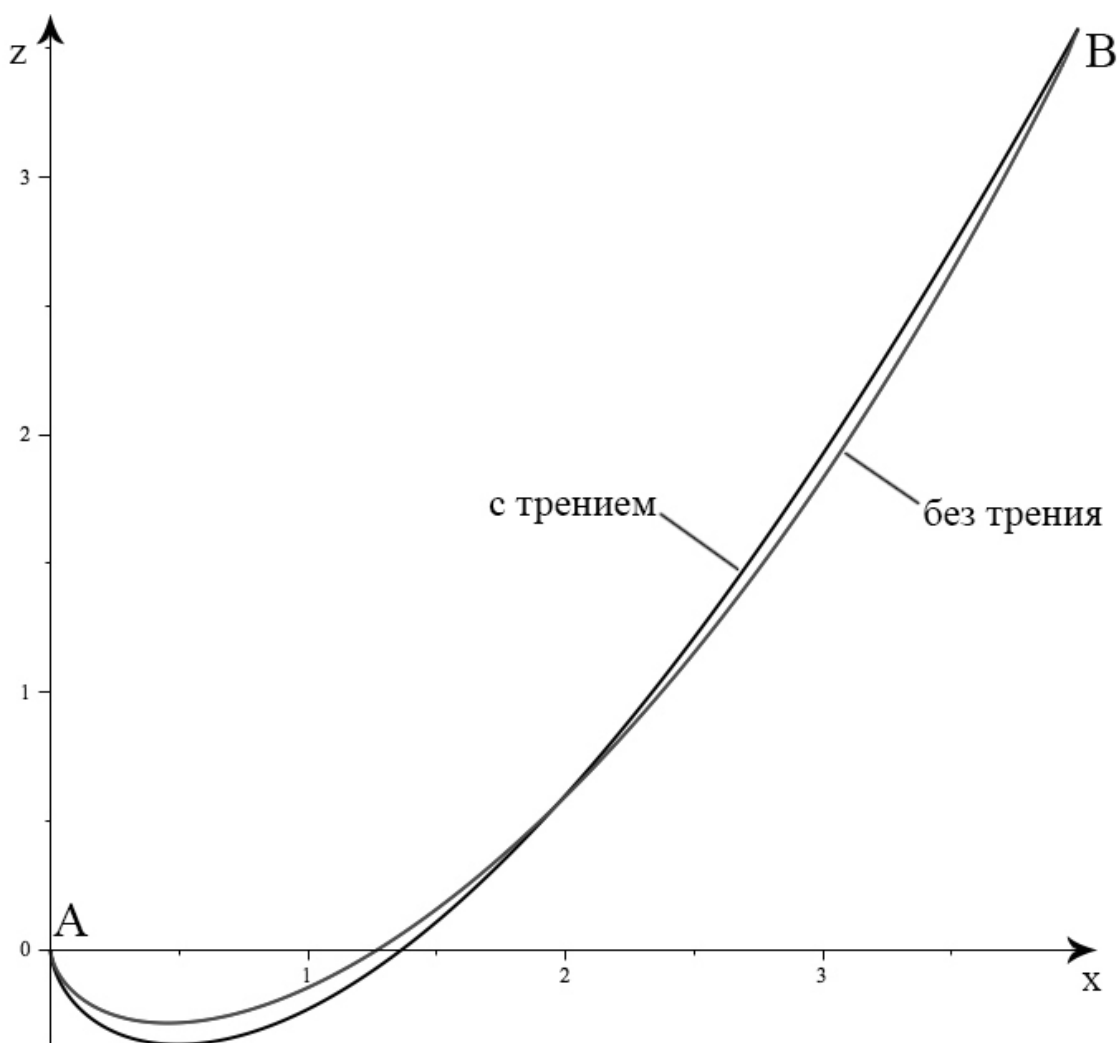


Рисунок 3.6 — Сравнение оптимальных траекторий: при действии вязкого трения и в отсутствие трения.

Обе оптимальные траектории выпуклы вниз. Время движения по траектории с трением ожидаемо оказалось больше, чем в случае отсутствия трения. Отметим, что при действии вязкого трения свойство автономности не выпол-

няется. Например, при вязком трении, пропорциональном скорости ($\mu_2 \equiv 1$), при изменении параметра R_0 конечные точки получаемых оптимальных траекторий (рис. 3.7) не ложатся на одну прямую. На рисунке 3.7 показано, что прямая, проходящая через конечные точки двух траекторий, не проходит через конечные точки остальных траекторий и начало координат.

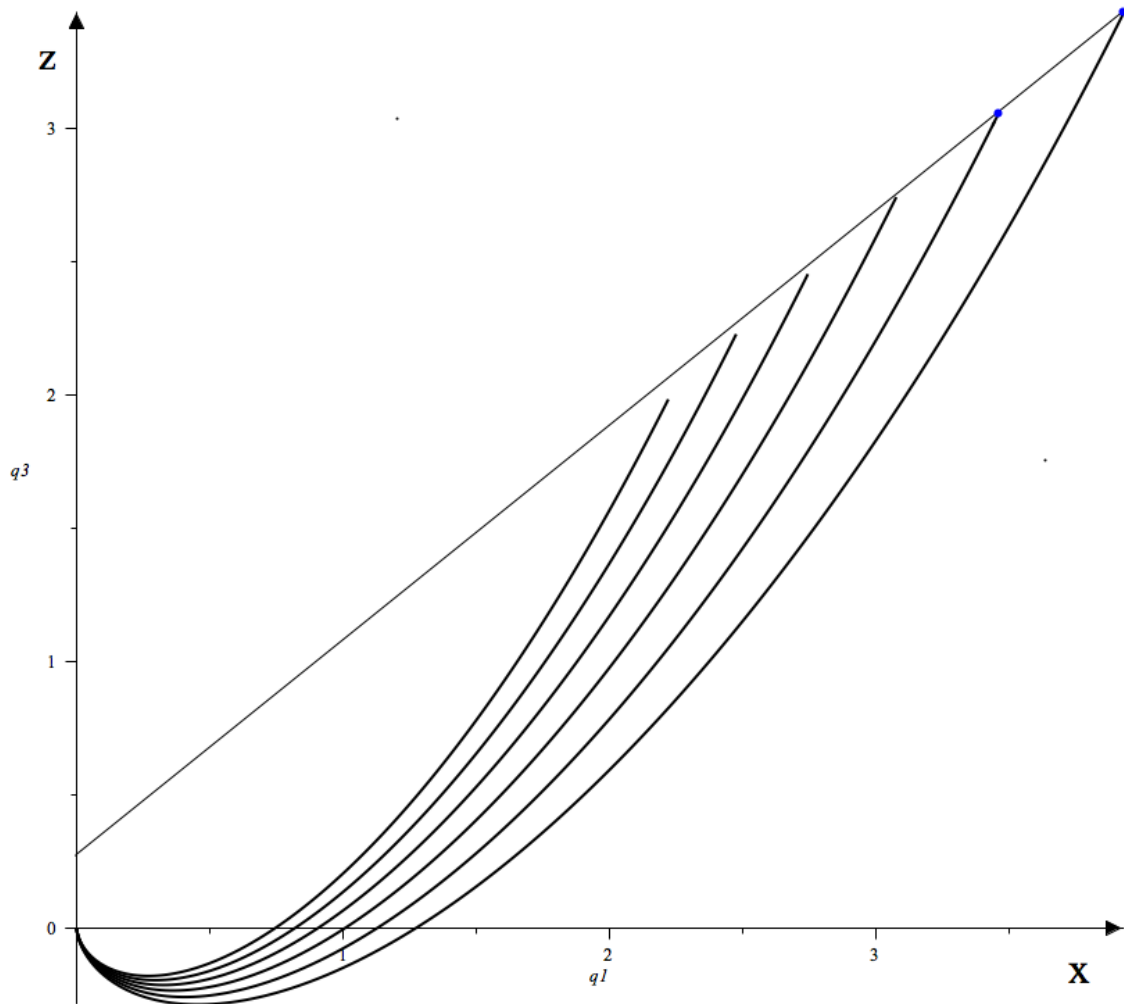


Рисунок 3.7 — Нарушение свойства автомодельности при действии вязкого трения, пропорционального скорости.

Заключение

Основным результатом работы является возможность построения полного семейства оптимальных траекторий с общим началом с помощью решения задачи Коши, при этом начальная скорость может быть как нулевой, так и ненулевой. Выявлена зависимость оптимальных траекторий от двух параметров, один из которых определяет угол наклона касательной в конечной точке, а второй - кривизну кривой в начальной точке. Такой подход позволяет сформировать представление о форме и свойствах оптимальных траекторий и подготовить основу для их нахождения. Кроме того, можно выделить следующие ключевые результаты:

1. Получена формула, обеспечивающая синтез оптимального управления, и система уравнений движения, для которой решение задачи Коши позволяет получать траектории, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности, в общем случае действия на точку одновременно вязкого трения, сухого трения и разгоняющей силы при старте с некоторой заданной скоростью.
2. На основе анализа уравнений движения доказаны некоторые свойства оптимальных траекторий отдельно для случая действия на точку сухого трения, а также для случая действия на точку вязкого трения и постоянной разгоняющей силы при старте с нулевой начальной скоростью. На основе доказанных свойств предложен способ избежания особенности в начальной точке при численных расчетах.
3. Для случая действия на точку сухого трения, а также для постоянной разгоняющей силы доказано свойство автомодельности, благодаря которому для построения полного двухпараметрического семейства оптимальных траекторий достаточно построить множество траекторий при фиксированном одном параметре и масштабировать это множество относительно точки A старта.
4. Проведено исследование влияния различных параметров, используемых при расчете, на форму оптимальных траекторий и их свойства.

5. Разработан метод, позволяющий получать не отдельную оптимальную траекторию, а множество всех оптимальных траекторий для фиксированной начальной точки.
6. Численные исследования подтверждают полученные выводы. Представлены графики оптимальных траекторий, иллюстрирующие основные результаты работы.

Список литературы

1. *Hayen J. C.* Brachistochrone with Coulomb Friction // International Journal of Non-Linear Mechanics. — 2005. — Т. 40, № 8. — С. 1057—1075.
2. *Lipp S. C.* Brachistochrone with Coulomb Friction // SIAM Journal on Control and Optimization. — 1997. — С. 562—584.
3. Brachistochrone with Coulomb Friction / N. Ashby [и др.] // Amer. J. Phys. — 1975. — Т. 43. — С. 902—905.
4. *Сумбатов А. С.* Задача о брахистохроне с сухим трением как изопериметрическая вариационная задача // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Сборник трудов, Казань, 20 – 24 августа 2015 г. — Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета Казань, 2015. — С. 3641—3643.
5. *Negron-Marrero P. V., Santiago-Figueroa B. L.* The Nonlinear Brachistochrone Problem with Friction // Department of Mathematics University of Puerto Rico Humacao. — 2005. — С. 23.
6. *Зароднюк А. В., Черкасов О. Ю.* К задаче о брахистохроне с линейным вязким трением // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. — 2015. — № 3. — С. 65—69.
7. *Зароднюк А. В., Черкасов О. Ю.* Качественный анализ оптимальных траекторий движения материальной точки в сопротивляющейся среде и задача о брахистохроне // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2015. — № 1. — С. 41—49.
8. *Зароднюк А. В., Черкасов О. Ю.* К задаче быстрогодействия с сухим и вязким трением // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Сборник трудов, Казань, 20 – 24 августа 2015 г. — Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета Казань, 2015.
9. *Акуленко Л. Д.* Аналог классической брахистохроны для диска // ДАН. — 2008. — Т. 419, № 2. — С. 193—196.

10. *Легеза В. П.* Брахистохрона для катящегося цилиндра // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2010. — № 1. — С. 34—41.
11. *Covic V. M., Lukacevic M. M.* Extension of the Bernoulli's case of a brachistochronic motion to the multibody system in the form of a closed kinematic chain // Facta Univ. Ser. Mech., Autom. Contr. and Rob. — 1999. — Т. 2, № 9. — С. 973—982.
12. *Шатохин В. М., Шатохина Н. В.* Оптимальные траектории движения точки, перемещающейся в поле центробежной силы инерции // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. — 2012. — Т. 4, № 7. — С. 14—18.
13. *Čović V., Vesković M.* Brachistochrone on a surface with Coulomb friction // International Journal of Non-Linear Mechanics. — 2008. — Т. 43, № 5. — С. 437—450.
14. *Сумбатов А. С.* К задаче о брахистохроне с сухим трением // XIII Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого), Материалы XIII Международной конференции, Москва, 1 – 3 июня 2016 г. — Издательство ИПУ РАН, 2016. — С. 356—359.
15. *Бобровский В. И., Колесник А. И.* Определение рациональной конструкции продольного профиля сортировочной горки // Транспортные системы и технологии перевозок. — 2012. — № 4. — С. 19—24.
16. *Шмаль С.* Попытка заново рассчитать брахистохрону // Мир транспорта. — 2011. — № 3. — С. 34—38.
17. *Легеза В. П.* Эффективность виброзащитной системы с изохронным роликовым гасителем // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2013. — № 2. — С. 65—76.
18. *Wensrich C. M.* Evolutionary solutions to the brachistochrone problem with Coulomb friction // Mech. Res. Commun. — 2004. — Т. 31, № 2. — С. 151—159.
19. *Иванов А. А., Лукьянов А. А.* Еще о брахистохроне и таутохроне // Физ. образ. в вузах. — 1999. — Т. 5, № 3. — С. 54—61.

20. *Голубев Ю. Ф.* Брахистохрона с трением // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2010. — № 5. — С. 41–52.
21. *Голубев Ю. Ф.* Брахистохрона с сухим и произвольным вязким трением // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2012. — № 1. — С. 24–39.
22. *Голубев Ю. Ф.* Брахистохрона для твердого тела, скользящего по кривой // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2013. — № 4. — С. 71–87.
23. *Голубев Ю. Ф.* Метод Охоцимского-Понтрягина в теории управления и аналитической механике. Часть 1: Метод Охоцимского-Понтрягина в теории управления // Вестник Московского университета. Математика. Механика. — 2008. — № 6. — С. 50–56.
24. *Голубев Ю. Ф.* Метод Охоцимского-Понтрягина в теории управления и аналитической механике. Часть 2: Метод Охоцимского-Понтрягина в аналитической механике // Вестник Московского университета. Математика. Механика. — 2009. — № 1. — С. 38–44.
25. *Охоцимский Д. Е., Энеев Т. М.* Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // Успехи физ. наук. — 1957. — Т. 63, № 1. — С. 5–32.
26. *Иванов А. Г.* Задачи о брахистохроне в центральном поле тяготения // Алгоритмы и прогр. средства парал. вычислений. — 1998. — С. 95–109.
27. *Tee G. J.* Isochrones and brachistochrones // Neural, Parall. and Sci. Comput. — 1998. — Т. 7, № 3. — С. 311–342.
28. *Авдеев Н. Е., Некрасов А. В.* Алгоритм решения задачи о брахистохроне с учетом сил сухого трения // Материалы 39 Отчетной научной конференции Воронежской государственной технологической академии за 2000 год. — 2001. — С. 119.
29. *Авдеев Н. Е., Некрасов А. В.* Основы теории гравитационных сепараторов с рабочими органами брахистохронного свойства // Вестн. Воронеж. гос. технол. акад. — 2001. — № 6. — С. 49–57.

30. *Вондрухов А. С., Голубев Ю. Ф.* Брахистохрона с разгоняющей силой // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2014. — № 6. — С. 50—64.
31. *Вондрухов А. С., Голубев Ю. Ф.* Оптимальные траектории в задаче о брахистохроне с разгоняющей силой // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2015. — № 4. — С. 37—47.
32. *Вондрухов А. С., Голубев Ю. Ф.* Оптимальные траектории в задаче о брахистохроне с сухим трением // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2016. — № 3. — С. 11—18.
33. *Вондрухов А. С.* Оптимальные траектории в задаче о брахистохроне с сухим трением // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Сборник трудов, Казань, 20 – 24 августа 2015 г. — Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета Казань, 2015.
34. *Вондрухов А. С., Голубев Ю. Ф.* Брахистохрона с разгоняющей силой // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 14–23 апреля 2014 г., Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова. — Издательство Московского университета Москва, 2014. — С. 47—48.
35. *Вондрухов А. С., Голубев Ю. Ф.* Брахистохроны с разгоняющей силой и трением // XIII Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого), Материалы XIII Международной конференции, Москва, 1 – 3 июня 2016 г. — Издательство ИПУ РАН, 2016. — С. 109—111.

Список рисунков

1.1	Силы, действующие на материальную точку.	10
2.1	Кривые, определяющие выполнение условия обнуления знаменателя выражения (2.1) и равенства (2.5) в конце движения при $k = 0.5$	26
2.2	Кривые, определяющие выполнение условия обнуления знаменателя выражения (2.1) и равенства (2.5) в конце движения при $k = 3$	27
2.3	Оптимальные траектории для $R_0 = 0.05$, $K = 0.1$ и различных значений параметра Ψ	29
2.4	Финишные кривые для различных значений коэффициента трения при фиксированном $R_0 = 0.05$	29
2.5	Иллюстрация свойства автомодельности траекторий: а) – фиксированный параметр $\Psi = 0$, б) – фиксированный параметр $\Psi = 5$	31
3.1	Вид оптимальной траектории при действии постоянной разгоняющей силы на основе доказанных свойств.	44
3.2	Иллюстрация свойства автомодельности траекторий: а) – фиксированный параметр $\Psi = 0$, б) – фиксированный параметр $\Psi = 5$	46
3.3	Семейство оптимальных траекторий при $c = 3$, фиксированном R_0 и различных значениях Ψ	47
3.4	Финишные кривые при $c = 3$, для различных R_0	47
3.5	Финишные кривые при $c = 3$, $c = 1$, $c = 0.1$ и $c = 0$	48
3.6	Сравнение оптимальных траекторий: при действии вязкого трения и в отсутствие трения.	50
3.7	Нарушение свойства автомодельности при действии вязкого трения, пропорционального скорости.	51