

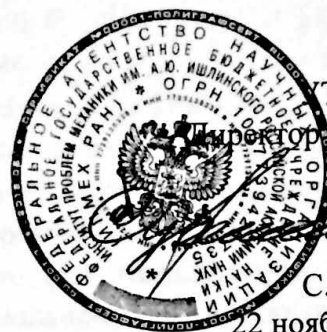
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ
им. А.Ю. ИШЛИНСКОГО
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
(ИПМех РАН)**

пр. Вернадского, д. 101, к.1,
г. Москва, 119526

Тел. (495) 434-00-17 Факс 8-499-739-95-31
ОКПО 02699323, ОГРН 1037739426735
ИНН/КПП 7729138338/772901001

22.11.2016 № 11024/01-21712-
644

На № _____



С.Т. Суржиков
Директор ИПМех РАН
академик

22 ноября 2016 года

В Диссертационный совет Д 501.001.22 при
Московском государственном университете им.
М.В. Ломоносова

119991, Москва, Ленинские горы, Главное
здание МГУ, механико-математический
факультет.

ОТЗЫВ

ведущей организации о диссертации А.С. Вондрухова
«Брахистохрона при действии разгоняющей силы, а также сухого и вязкого трения»,
представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.02.01 – теоретическая механика

В диссертации А.С. Вондрухова решается обобщенная задача о брахистохроне. Обобщение состоит в том, что на материальную точку, движущуюся вдоль искомой кривой в вертикальной плоскости, кроме силы тяжести и нормальной реакции кривой, действуют «разгоняющая» сила и силы трения. Разгоняющая сила сонаправлена скорости материальной точки, а силы трения направлены против скорости в каждый текущий момент времени. В общем случае в системе действует сухое трение, подчиняющееся закону Кулона, и «вязкое» трение. Под силой вязкого трения понимается сила, которая всегда направлена против скорости материальной точки, а ее модуль задается дважды дифференцируемой функцией модуля скорости. Модуль разгоняющей силы также задается дважды дифференцируемой функцией модуля скорости. Как и в классической постановке задачи о брахистохроне, требуется найти кривую, вдоль которой материальная точка перемещается из заданного начального положения в заданное конечное положение за минимальное время. Начальная скорость точки предполагается нулевой. Значение скорости в конечном положении не фиксируется. Тема диссертации представляется актуальной в связи с тем, что математическая модель механической системы, принятая в классической задаче о брахистохроне, не учитывает ряда существенных физических особенностей системы, которая служит прототипом модели в задаче о брахистохроне. К таким особенностям относятся, прежде всего, наличие у реальных тел ненулевых моментов инерции и трение между криволинейной направляющей, форма которой отыскивается в задаче о брахистохроне, и движущимся по ней материальным телом. Учет этих особенностей осложняет методику исследования и может привести к новым качественным эффектам поведения системы, не проявляющимся в решении классической задачи. В диссертации А.С. Вондрухова рассматривается модель, учитывающая силы, действующие вдоль касательной к направляющей кривой, а именно силы трения и разгоняющую силу с заданным законом зависимости ее величины от модуля скорости.

Автор сводит обобщенную задачу о брахистохроне к задаче оптимального управления. За управляющую переменную принята нормальная реакция кривой, отнесенная к модулю импульса материальной точки. Применяя принцип максимума Л.С. Понтрягина, он получает краевую задачу, решение которой позволяет найти оптимальное движение материальной точки, а, значит, и оптимальную форму ее траектории. Поскольку управляющая переменная входит в уравнения движения линейно и на нее не наложено никаких ограничений, оптимальное управление, если оно существует, оказывается особым, то есть гамильтониан системы при фазовых и сопряженных переменных, отвечающих оптимальному движению, не зависит от управляющей переменной. Данное обстоятельство определяет связь между фазовыми и сопряженными переменными на оптимальном движении, что позволяет понизить порядок системы дифференциальных уравнений краевой задачи принципа максимума, упростив тем самым решение задачи. Несмотря на это, решение задачи в общем случае аналитически получить не удастся, а численное решение требует большого объема вычислений. Поэтому автор ограничивается двумя частными случаями, когда, кроме силы тяжести и нормальной реакции направляющей кривой, на материальную точку действует только сухое трение или только вязкое трение и разгоняющая сила.

Построение брахистохроны, проходящей через заданную терминальную точку на плоскости, требует решения двухточечной краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений, что представляет определенные технические трудности. Более простой задачей оказывается построение множества брахистохрон, исходящих из заданной точки (и оканчивающихся в различных точках). Множество таких брахистохрон представляется двухпараметрическим семейством кривых. Естественные параметры семейства – координаты терминальной точки брахистохроны. Автор замечает, что в качестве параметров можно взять также два других параметра, один из которых входит в выражение для оптимального управления, а другой характеризует кривизну брахистохроны в начальной точке. Эти параметры оказываются более удобными. Каждой паре таких параметров отвечает определенная брахистохрона, которая строится интегрированием задачи Коши для уравнений движения при оптимальном управлении до тех пор, пока не выполнится некоторое равенство, определяемое условиями трансверсальности для задачи оптимального управления. Значения координат материальной точки в этот момент времени определяют ее терминальное положение на брахистохроне. Перебирая все допустимые значения параметров можно в принципе построить множество всех брахистохрон, исходящих из заданной точки, и одновременно множество всех возможных концов таких брахистохрон. В диссертации такие множества построены численно и проанализированы их свойства.

Диссертация А.С. Вондрухова представляет собой завершенную научно-квалификационную работу, посвященную обобщению классической задачи о брахистохроне на случай, когда кроме силы тяжести на точечное тело действуют разгоняющая сила и силы трения. Диссертация содержит введение, в котором обосновывается новизна и научная актуальность работы, три главы, в которых излагается основной материал, заключение, резюмирующее полученные результаты, и библиографический список, насчитывающий 35 наименований. Автором предложена схема решения поставленной задачи, использующая аппарат математической теории оптимального управления. На основе этой схемы сочетанием аналитических и численных методов построено полное решение поставленной задачи для частных случаев, когда кроме силы тяжести на тело действует только сухое трение и когда действуют разгоняющая сила и сила вязкого трения, а сухое трение отсутствует. Построено множество возможных конечных точек брахистохрон, исходящих из заданной начальной точки, при

условии, что в начальный момент времени скорость точечного тела равна нулю. Все результаты, которые выносятся на защиту, – новые. Они в достаточной мере обоснованы математическими доказательствами общих утверждений о свойствах искомых брахистохрон, а также расчетами. Диссертация А.С. Вондрухова вносит вклад в методику решения вариационных задач механики и управления и свидетельствует о высокой квалификации ее автора как специалиста в области теоретической механики, вариационного исчисления и теории управления. Он достаточно хорошо владеет как теоретическими, так и численными методами анализа. С диссертацией А.С. Вондрухова целесообразно ознакомиться научным работникам, занимающимся проблемами теоретической механики, вариационного исчисления и теории оптимального управления, а также преподавателям этих дисциплин. Полученные диссертантом результаты могут быть использованы в научно-исследовательских институтах и вузах, в которых ведутся исследования, требующие знания теоретической механики и теории оптимального управления, или преподаются эти дисциплины, в частности в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Московском физико-техническом институте, Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана, Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. По результатам диссертации опубликованы 3 статьи в журнале «Известия РАН. Теория и системы управления». Этот журнал входит в список ВАК и индексируется российской и международными системами научного цитирования. Полученные А.С. Вондруховым научные результаты докладывались на научных конференциях и семинарах. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

По диссертации имеются замечания.

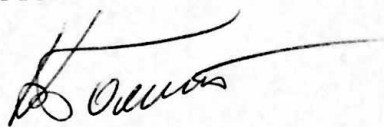
1. Доказательство Свойства 1, сформулированного на стр. 22 диссертации, проведено недостаточно строго. Свойство утверждает, что при «старте с положительным управлением» функция $\phi(t)$ монотонно возрастает «в течение некоторого времени после начала движения». Это означает, что существует момент времени t_* > 0 такой, что для любых значений t_1 и t_2 переменной t , которые принадлежат интервалу $(0, t_*)$ и удовлетворяют неравенству $t_1 < t_2$, выполняется неравенство $\phi(t_1) \leq \phi(t_2)$. Если функция $\phi(t)$ дифференцируемая, то Свойство 1 можно сформулировать так: существует момент времени $t_* > 0$ такой, что на интервале $(0, t_*)$ выполнено неравенство $\dot{\phi}(t) \geq 0$. Доказательство этого утверждения автор проводит методом от противного, формулируя отрицание следующим образом: существует момент времени t^* такой, что $\dot{\phi}(t) < 0$ при $0 < t < t^*$. Отрицание, сформулированное так, неверно. Правильное отрицание: для любого момента времени $t^* > 0$ существует момент времени t' , такой что $\dot{\phi}(t') < 0$.
2. На стр. 12 написано, что поиск экстремума функционала Φ будет осуществляться с использованием принципа максимума Понтрягина. В выражении (1.7) для гамильтониана множитель, с которым в гамильтониан входит подинтегральная функция минимизируемого функционала, равен 1, в то время как принцип максимума утверждает неположительность этого множителя. Если этот множитель взять неотрицательным, то принцип максимума становится принципом минимума. Эта оплошность не делает полученные в диссертации результаты неверными, поскольку автор пользуется лишь условием стационарности гамильтониана по управляющей переменной и не интересуется, максимуму или минимуму соответствует стационарная точка.
3. В выражениях (2.3) и (2.4), по-видимому, пропущено слагаемое 1 перед $-K^2$.

Приведенные замечания не снижают в целом высокой оценки диссертации А.С. Вондрухова как научно-квалификационной работы.

Диссертация «Брахистохрона при действии разгоняющей силы, а также сухого и вязкого трения» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК Российской Федерации к кандидатским диссертациям, а ее автор, Вондрухов Андрей Сергеевич, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.01 – теоретическая механика.

Отзыв о диссертации А.С. Вондрухова обсужден и одобрен на заседании семинара «Теория управления и динамика систем» ИПМех РАН 3 ноября 2016 года. Руководитель семинара – академик Ф.Л. Черноусько.

Главный научный сотрудник ИПМех РАН
д.ф.-м.н., член-корреспондент РАН



Н.Н. Болотник

Тел.: 8(495) 434-35-01

E-mail: bolotnik@ipmnet.ru

Адрес: 119526, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1