

О Т З Ы В

официального оппонента

на диссертационную работу Андрея Сергеевича ВОНДРУХОВА
«Брахистохрона при действии разгоняющей силы, а также сухого и вязкого трения»,
представленной на соискание ученой степени кандидата физико-
математических наук по специальности 01.02.01 «Теоретическая механика»

Работа посвящена изучению задачи о нахождении плоской кривой наибо́льшего спуска (брахистохроны) между двумя заданными точками для скатывающейся по ней тяжелой материальной частицы, на которую дополнительно действуют силы сухого и вязкого трения, а также разгоняющая (ускоряющая) сила. Исследование проводится методами теории оптимального управления. Диссертационное исследование представляет теоретический интерес.

Работа состоит из введения, трёх глав, заключения, списков литературы и иллюстративных рисунков. Библиография насчитывает 35 названий и включает ссылки на три статьи соискателя в ВАКовском журнале РАН «Известия Российской академии наук. Теория и системы управления», выполненные в соавторстве с научным руководителем, и тезисные публикации докладов соискателя на XI Всероссийском съезде по механике и двух конференциях.

Введение содержит описание структуры работы, перечень выносимых на защиту новых результатов и сведения об апробации работы.

В 1-ой главе дана постановка задачи, составлены уравнения движения в общем случае действия всех указанных сил на частицу, получены условия оптимальности и найдено выражение для оптимального управления. Отдельно исследован случай движения частицы по вертикали, доказана оптимальность нулевого управления. Уравнения движения частицы преобразованы к виду, более удобному для изучения задачи с ненулевым управлением.

Во 2-ой главе задача о брахистохроне решается для частицы, движущейся под действием силы тяжести, нормальной реакции и сухого трения. Доказаны свойства оптимальных траекторий (т.е. траекторий, отвечающих оптимальному управлению). Для отдельных значений параметров построены численно семейства таких траекторий и границы достижимости (финишные кривые), причём, с особенностью (неопределённостью) в уравнениях при $t = 0$ удалось справиться путём введения дополнительной фазовой переменной.

3-я глава посвящена задаче о нахождении брахистохроны для частицы, на которую действуют сила тяжести, реакция опоры, вязкого трения и разгоняющая сила. По нашему мнению, это наиболее содержательная часть работы. Качественными рассуждениями строго доказаны следующие свойства оптимальной траектории: в общем случае траектория не имеет вертикальной касательной в конечной точке, в стартовой точке касательная к траектории вертикальна, оптимальная траектория – выпуклая вниз кривая при условии, что сила вязкого трения – степенная по скорости частицы функция. Предъявлено аналитическое условие в качестве индикатора достижения частицей конечной точки. В отсутствие трения при действии на частицу постоянной разгоняющей силы доказано свойство автомодельности траекторий, численно построены финишные кривые, включая дугу циклоиды (когда разгоняющая сила равна нулю). Для построения оптимальных траекторий при одновременном действии вязкого трения и постоянной разгоняющей силы предложено использование квазипостоянной разгоняющей силы для устранения особенности в стартовой точке. Численно продемонстрировано, что свойство автомодельности при наличии вязкого трения не сохраняется.

В заключении перечислены основные результаты работы.

Необходимо отметить некоторые недостатки диссертационного исследования.

Первое. Фактически отсутствует обзор предшествующих работ и полученных в них результатов, относящихся к рассматриваемой хорошо известной задаче о брахистохроне. Большинство из немногочисленных библиографических сведений, приведенных во Введении, неточны. Например, утверждается, что «способ решения, предложенный Исааком Ньютоном, лег в основу вариационного исчисления». На самом деле, Ньютон ограничился ответом в виде рисунка на поставленную И. Бернулли задачу без комментариев.

Второе. Задачу о нахождении брахистохроны сегодня можно решать двумя путями: с помощью методов вариационного исчисления или методов оптимального управления. В работе выбран второй путь, для чего в уравнение движения частицы искусственно вводится управление. В пионерской работе С. Липпа (SIAM J. Control and Optim. 35 (2), 1997, 562-584) в качестве управления выбрана угловая скорость поворота касательной к траектории движущейся частицы, и в результате в более общей постановке задачи, когда стартовая скорость частицы имеет произвольное значение, удалось проинтегрировать уравнения экстремали и получить решение в аналитическом виде, когда учитываются только вес и сила сухого трения. В настоящей работе управление выбрано в виде отношения силы нормального давления к величине количества движения частицы. Такой выбор управления не вполне удачен, он приводит к более громоздким формулам, а в выражении оптимального управления появляется неопределенность в стартовой точке траектории типа $0/0$.

Третье. Соискатель не записывает исходные уравнения задачи в безразмерной форме, что усугубило громоздкость формул, придало неестественный вид условиям автономности оптимальных траекторий на с.29 и 43, послужило причиной неточного утверждения на с.28 о том, что параметр $R_0 = \sin \phi / v$, «по существу, задает кривизну траектории в начальный момент времени» (но эта величина имеет размерность, обратную размерности линейной скорости).

Несмотря на высказанные замечания, следует безусловно отметить проявленное соискателем аналитическое мастерство в исследовании и решении поставленной непростой задачи, способность находить пути решения возникающих математических проблем.

Считаю, что рецензируемая работа соответствует требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» (утверждено Постановлением Правительства РФ №842 от 24.09.2013), предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор, *Андрей Сергеевич Вондрухов*, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.01 «Теоретическая механика». Автореферат верно отражает содержание диссертации.

Официальный оппонент
старший научный сотрудник
Федерального государственного
учреждения «Федеральный
исследовательский центр
«Информатика и управление»
Российской академии наук»,
кандидат физико-математических наук

А.С.Сумбатов / А.С.Сумбатов/



тел.: 8 (499) 135-35-90

E-mail: sumbatow@ccas.ru

Адрес: 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, кор. 2