

## ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертационной работе Вондрухова Андрея Сергеевича  
«Брахистохрона при действии разгоняющей силы, а также сухого и вязкого трения»,  
представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических  
наук по специальности 01.02.01 – «Теоретическая механика».

Диссертация А.С.Вондрухова посвящена решению задачи поиска кривой, обеспечивающей наискорейшее достижение материальной точкой, помещенной в заданное силовое поле, нужного места. Как известно, подобная задача была впервые строго математически сформулирована Иоганном Бернулли в 1696 году для поля сил тяжести при полном отсутствии сил трения точки о кривую. С тех пор были предложены различные подходы к решению этой задачи в предположении, что кроме силы тяжести на точку действуют силы сухого и вязкого трения. Одной из особенностей представленной диссертации является то, что помимо силы тяжести и силы трения на движущуюся точку может действовать разгоняющая сила, сонаправленная скорости.

Тема диссертации А.С.Вондрухова **актуальна**. Научная актуальность, в частности, связана с тем, что эта работа, завершая построение возможного силового поля, действующего на материальную точку, соответствует современному этапу развития данной задачи – этапу перехода к анализу задачи о брахистохроне для абсолютно твердого тела конечных размеров. Такие работы уже появились. Отметим, например, работы Л.Д.Акуленко, Ю.Ф.Голубева, В.П.Легозы. Практическая актуальность диссертации связана с интересом к задаче о брахистохроне при действии разгоняющей силы и сил сопротивления движению, проявляющемся в различных отраслях промышленности и в военном деле.

**Обоснованность научных положений, выводов и рекомендаций** диссертации обеспечивается применением принципов теоретической механики, принципа максимума Понтрягина, методов дифференциальной геометрии и математического анализа, использованием понятия автомодельности, а также использованием в качестве теоретической и методической основы диссертации фундаментальных исследований ведущих ученых в области теоретической механики и управления.

**Достоверность и новизна исследования, полученных результатов, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации**, обеспечивается строгим обоснованием утверждений диссертации. Результаты диссертации снабжены полными доказательствами. Они получены автором самостоятельно и являются новыми. Утверждения, выносимые на защиту, прошли серьезную апробацию. Основные результаты работы докладывались на Ломоносовских чтениях (2014 год) и семинарах в МГУ им. М.В. Ломоносова (2015 год), на XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (2015 год), на XIII Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (2016 год). Результаты диссертации своевременно опубликованы в шести печатных изданиях, в том числе в трех изданиях, рекомендованных ВАК. Автореферат работы соответствует содержанию диссертации.

**Научная значимость полученных А.С.Вондруховым результатов** заключается в том, что доказана возможность построения полного двухпараметрического семейства оптимальных траекторий для фиксированного начального положения точки с помощью решения задачи Коши. Исследована зависимость оптимальных

траекторий от параметров, один из которых определяет угол наклона касательной к кривой в конечной точке, а второй – угловую скорость касательной к кривой в начальной точке. Сформировано представление о форме и свойствах оптимальных траекторий типа выпуклости и автономности. **Практическая значимость полученных А.С.Вондруховым результатов** состоит в разработке метода, позволяющего получать при фиксированной начальной точке не отдельную оптимальную траекторию, а множество всех брахистохрон при действии разгоняющей силы, а также сухого и вязкого трения. Этот результат создает основу для создания инженерного алгоритма поиска кривой, обеспечивающей наискорейшее достижение материальной точкой, помещенной в заданное силовое поле, нужного места.

**Конкретные рекомендации по использованию результатов и выводов диссертации** определяются практическим интересом в различных отраслях народного хозяйства к «брахистохронному эффекту». Так, например, брахистохрона при действии разгоняющей силы интересна как элемент алгоритма навигации летательного аппарата, реализующего полет в вертикальной плоскости. При наличии сопротивления она интересна в пищевой промышленности при применении гравитационных сепараторов с брахистохронным разделяющим элементом, интересна в железнодорожной отрасли при разработке горочных сортировочных устройств и т.д. Продвижение в исследовании задачи о брахистохроне, будет изучено и использовано специалистами в области теоретической механики и оптимального управления.

#### **Содержание диссертации, ее завершенность.**

Основным инструментом исследования структуры экстремали является анализ нелинейной системы дифференциальных уравнений движения материальной точки, определяющейся выбором воздействий на движущуюся точку. В работе считается, что сила сухого трения пропорциональна величине нормальной реакции, а равнодействующая сил тяги и вязкого трения пропорциональна количеству движения точки с коэффициентом пропорциональности, зависящим от квадрата скорости точки. Задача поиска траектории, обеспечивающей минимальное время достижения указанного места, сводится в диссертации к поиску управления, минимизирующего соответствующий функционал. В качестве управления выбрана перпендикулярная скорости реакция опоры, нормированная количеством движения точки. Поиск минимума критериального функционала осуществлен с использованием принципа максимума Понтрягина. Следует отметить, что при старте движения покоящейся точки в предложенном управлении возникает особенность, для устранения которой автором предложен оригинальный метод введения дополнительной переменной.

Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 58 страниц, включая 13 рисунков. Список литературы содержит 35 наименований.

Во введении к диссертации обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках диссертационной работы, приводится обзор научной литературы, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена постановке задачи и выводу уравнений динамики в случае действия на точку одновременно силы тяжести, разгоняющей силы, а также сухого и вязкого трения. Построено оптимальное управление и введен существенный параметр, характеризующий брахистохрону, – угол наклона касательной к кривой в конечной точке. При этом движению с тождественно нулевым управлением соответствуют оптимальные траектории, представляющие собой вертикальное падение или вертикальный взлет (при достаточной величине разгоняющей силы в начале движения). При старте с ненулевой скоростью путем решения задачи Коши удастся получать траектории, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности при любых законах изменения силы тяги и вязкого трения. При старте с нулевой скоростью в управлении может возникнуть особенность, однако, можно получить оптимальные траектории с вертикальной касательной в начальной точке.

Во второй главе рассмотрен случай, когда на точку действуют сила тяжести и сухое трение. Для этого случая получена упрощенная формула для оптимального управления и система уравнений движения, не содержащая сопряженных переменных, которая служит основой предложенного в работе способа получения оптимальных траекторий. Установлено свойство выпуклости оптимальных траекторий. Показано, что при действии на движущуюся точку сухого трения и постоянной разгоняющей силы брахистохрона автомодельна. Ее характеристики при разных значениях начальной угловой скорости получаются одна из другой преобразованием подобия – масштабированием. Установлены и некоторые другие свойства оптимальных траекторий. Так при старте с положительным управлением угол между вектором скорости и направлением силы тяжести в начале движения возрастает, угловая скорость вектора касательной к траектории может менять знак только в точках, где касательная вертикальна. Выше упоминалось, что для того, чтобы устранить возникновение особенности в момент старта, когда скорость движущейся точки равна нулю, диссертант вводит дополнительную переменную. Предполагается, что у введенной переменной в начальный момент существует конечный предел. Это предположение естественно и реализуется в брахистохронах. Полученная автором система уравнений в избыточном наборе переменных не имеет особенностей и позволяет получить полное семейство оптимальных траекторий, касательные к которым в начальной точке вертикальны.

В третьей главе рассмотрен случай, когда сухое трение отсутствует, но на материальную точку помимо силы тяжести действуют разгоняющая сила и сила вязкого трения. Принимается, что сила вязкого трения не убывает при росте скорости, а сила тяги и коэффициент в выражении для их разности не возрастают при росте скорости. Показано, что оптимальные траектории при старте из состояния покоя имеют в начальной точке вертикальную касательную; оптимальные траектории в поле сил тяжести при действии на точку постоянной разгоняющей силы и вязкого трения, полиномиально зависящего от трения, являются кривыми, выпуклыми вниз.

В Заключении автор формулирует ключевые результаты работы.

**Замечания по тексту работы.** На стр. 19 работы в системе уравнений (1.34) пропущен размерный множитель, отражающий ускорение свободного падения в поле сил тяжести. (Та же опечатка допущена в автореферате в системе (1) на стр. 8).

На стр.43 в формуле (3.32) пропущен размерный множитель, с помощью которого в формулу вводится разгоняющая сила.

Чтобы устранить возникновение особенности в момент старта, когда скорость движущейся точки равна нулю, диссертант вводит дополнительную переменную (стр.27,41). Физический смысл этой переменной становится ясным, если умножить ее на ускорение силы тяжести. Тогда размерность ее (размерность угловой скорости) совпадет с размерностью введенного управления. Скорость изменения угла между вектором скорости движущейся точки и направлением силы тяжести равна их разности.

Хотелось бы видеть в тексте работы конкретный пример применения разработанного алгоритма поиска брахистохроны при действии тяги и наличии трения, сочетающий использование задания параметров, решение соответствующей задачи Коши и выход в конечную точку. Тем более, что при отсутствии трения и действии постоянной тяги проявляется эффект автомодельности и алгоритм может быть упрощен.

Сделанные замечания не снижают ценности полученных в диссертации результатов и не влияют на положительную в целом оценку работы.

Считаю, что диссертационная работа А.С.Вондрухова «Брахистохрона при действии разгоняющей силы, а также сухого и вязкого трения» является законченной научно-исследовательской работой. Она удовлетворяет паспорту специальности 01.02.01 – «теоретическая механика» и требованиям ВАК к работам, представленным на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор А.С.Вондрухов заслуживает присуждения искомой степени.

Доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет МЭИ»  
Адрес: 111250, Россия, г. Москва, Красноказарменная улица, дом 14  
Телефон +7 495 362-77-19. E-mail [KobrinAI@mpei.ru](mailto:KobrinAI@mpei.ru)

*А. Кобрин*

Кобрин Александр Исаакович  
15.11.2016

Подпись профессора Александра Исааковича Кобрин заверяю  
ученый секретарь Ученого совета НИУ «МЭИ»

Кузовлев Игорь Валентинович

