МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.518.23 + 517.983.28 + 517.984.5

Беляев Алексей Александрович

Мультипликаторы в пространствах бесселевых потенциалов и сингулярные возмущения эллиптических операторов

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Шкаликов Андрей Андреевич**,
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Буренков Виктор Иванович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математического анализа
и теории функций ФГАОУ ВО
"Российский университет дружбы народов"

Владимиров Антон Алексеевич,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник ФГБУН
"Вычислительный центр имени А. А. Дородницына
Российской академии наук"

Ведущая организация: ФГАОУ ВО
"Южный федеральный университет"

Защита диссертации состоится 2 декабря 2016 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе ФГБОУ ВО "Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова", по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО "МГУ им. М. В. Ломоносова" по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А и на сайте механико-математического факультета http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi

Автореферат разослан   октября 2016 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 на базе МГУ
доктор физико-математических
наук, профессор **В. В. Власов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Диссертация посвящена изучению пространств мультипликаторов в пространствах бесселевых потенциалов и применению теории мультипликаторов для исследования сингулярных возмущений эллиптических дифференциальных операторов. В теории возмущений дифференциальных операторов, наряду с классической ситуацией возмущения регулярным потенциалом, большой интерес представляет случай, когда потенциал не является даже локально интегрируемым. Впервые вопросы, связанные с математически строгим рассмотрением возмущений оператора Лапласа сингулярными потенциалами типа дельта-функции Дирака, были исследованы в цикле статей Ф. А. Березина, Л. Д. Фаддеева и Р. А. Минлоса, из которых особо стоит отметить работы[1,2]. Отметим, что случаи потенциалов типа дельта-функции и её обобщённой производной, являющиеся модельными в теории сингулярных возмущений дифференциальных операторов, имеют многочисленные приложения в математической физике и до сих пор привлекают внимание исследователей[3,4]. Детальному расмотрению возмущений оператора Лапласа сингулярными потенциалами с дискретным носителем и приложениям полученных в данной области результатов к квантовой физике и электродинамике посвящена монография[5]. Наряду с изучением возмущений оператора Лапласа сингулярными потенциалами с дискретными носителями, активно развивалась и абстрактная теория сингулярных возмущений для операторов общего вида. Изложение этой теории для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве в случае, когда потенциал возмущения является конечномерным оператором, и подробную библиографию по данной теме можно найти в обзорной монографии[6].

Рассмотрение сингулярных возмущений конкретных дифференциальных операторов естественным образом приводит к задаче исследования мультипликаторов в функциональных пространствах соболевского типа. Уже в простейшем случае классического оператора Лапласа с областью определения $W_2^2(\mathbb{R}^n)$ изучение его возмущений сингулярными потенциалами оказывается тесно связанным с исследованием мультипликаторов из пространства Соболева с положительным индексом гладкости в пространство Соболева с отрицательным индексом гладкости. Действительно, классический оператор Лапласа допускает продолжение до оператора, действующего из пространства $W_2^1(\mathbb{R}^n)$ в пространство $W_2^{-1}(\mathbb{R}^n)$, и поэтому даже сама проблема корректной определённости оператора $-\Delta + M_\mu$, где под $\Delta\colon W_2^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow W_2^{-1}(\mathbb{R}^n)$ мы

[1] Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, “Замечание об уравнении Шрёдингера с сингулярным потенциалом”, *Докл. АН СССР,* **137** : 5 (1961), 1011 – 1014

[2] Р. А. Минлос, Л. Д. Фаддеев, “О точечном взаимодействии для системы из трёх частиц в квантовой механике”, *Докл. АН СССР,* **141** : 6 (1961), 1335 – 1338

[3] M. Gadella, M. L. Glasser, L. M. Nieto, “One dimensional models with a singular potential of the type $-\alpha\delta(x)+\beta\delta'(x)$”, *Int. J. Theor. Phys.,* **50** : 7 (2011), 2144 – 2152

[4] S. Albeverio, S. Fassari, F. Rinaldi, “A remarkable spectral feature of the Schroedinger Hamiltonian of the harmonic oscillator perturbed by an attractive δ'-interaction centred at the origin: double degeneracy and level crossing”, *J. Phys. A: Math. Theor.,* **46** : 38 (2013), 16 pp.

[5] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden (with an appendix by P. Exner), *Solvable models in quantum mechanics,* Second Edition, Providence, RI : AMS Chelsea Publishing, 2005, 488 pp.

[6] S. Albeverio, P. Kurasov, *Singular perturbations of differential operators. Solvable Schroedinger type operators,* Cambridge : Cambridge University Press, 2000, 429 pp.

понимаем продолжение оператора Лапласа на $W_2^1(\mathbb{R}^n)$, а под M_μ — оператор умножения на распределение μ, сводится к изучению вопроса о том, когда μ является мультипликатором из $W_2^1(\mathbb{R}^n)$ в $W_2^{-1}(\mathbb{R}^n)$. Более того, рассмотрение пространства мультипликаторов $M[W_2^1(\mathbb{R}^n) \to W_2^{-1}(\mathbb{R}^n)]$ оказывается полезным и для исследования спектральных свойств возмущённого оператора $-\Delta + M_\mu$, таких, например, как классическая проблема аппроксимации в смысле резольвентной сходимости этого оператора возмущениями оператора Лапласа с гладким потенциалом, изучавшаяся ранее многими авторами (см., например, работы[7,8]).

По-видимому, первой работой, где методы теории мультипликаторов были применены к изучению сингулярных возмущений дифференциальных операторов эллиптического типа в случае потенциалов с недискретным носителем, была статья[9]. Методы исследования, предложенные в этой работе, были существенным образом развиты в цикле статей М. И. Нейман-Заде, А. А. Шкаликова, Дж.-Г. Бака, А. М. Савчука[10,11,12]. Другой подход к рассмотрению сингулярных возмущений операторов типа Лапласа, также основанный на применении теории мультипликаторов, восходит к статье В. Г. Мазьи и И. Э. Вербицкого[13]. Этот подход, опирающийся на получение достаточных условий принадлежности потенциала пространству мультипликаторов в терминах ёмкостей, получил развитие в работах[14,15].

Заметим, что применение теории мультипликаторов для изучения сингулярных возмущений эллиптических дифференциальных операторов не ограничивается только лишь случаем классического оператора Лапласа, породившим интерес к этой тематике. Так, ещё в работе[9] методы теории мультипликаторов применялись для исследования сингулярных возмущений как оператора Лапласа, так и полигармонического оператора $(-\Delta)^m$, где $m \in \mathbb{N}$. В статье[14] рассматривались сингулярные возмущения оператора $\sqrt{-\Delta}\colon W_2^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow W_2^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$, а в работе[12] с помощью теории мультипликаторов изучались заданные на $\mathbb{R}^n$ сильно эллиптические дифференциальные операторы с равномерно сильно эллиптической главной частью и младшими коэффициентами из пространств бесселевых потенциалов с отрицательными показателями гладкости. Для исследования спектральных свойств возмущений заданного на окружности опе-

[7] В. В. Борисов, “О равномерной резольвентной сходимости линейных операторов при возмущении”, *Матем. заметки,* **48** : 2 (1990), 19 – 25

[8] D. Mugnolo, R. Nittka, O. Post, “Norm convergence of sectorial operators on varying Hilbert spaces”, *Oper. Matrices,* **7** : 4 (2013), 955 – 995

[9] М. И. Нейман-Заде, А. А. Шкаликов, “Операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов”, *Матем. заметки,* **66** : 5 (1999), 723 – 733

[10] Дж.-Г. Бак, А. А. Шкаликов, “Мультипликаторы в дуальных соболевских пространствах и операторы Шрёдингера с потенциалами-распределениями“, *Матем. заметки,* **71** : 5 (2002), 643 – 651

[11] М. И. Нейман-Заде, А. М. Савчук, “Операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами”, *Тр. МИАН,* **236** (2002), 262 – 271

[12] M. I. Neiman-Zade, A. A. Shkalikov, “Strongly elliptic operators with singular coefficients”, *Russ. J. Math. Phys.,* **13** : 1 (2006), 70 – 78

[13] V. G. Maz’ya, I. E. Verbitsky, “The Shroedinger operator on the energy space: Boundedness and compactness criteria”, *Acta Math.,* **188** : 2 (2002), 263 – 302

[14] V. G. Maz’ya, I. E. Verbitsky, “The form boundedness criterion for the relativistic Schroedinger operator”, *Ann. Inst. Fourier,* **54** : 2 (2004), 317 – 339

[15] V. G. Maz’ya, I. E. Verbitsky, “Form boundedness of the general second-order differential operator”, *Comm. Pure Appl. Math.,* **59** : 9 (2006), 1286 – 1329

ратора $(-\frac{d^2}{dx^2})^s$, $s > 0$, в случае, когда потенциал принадлежит обобщённому периодическому пространству Соболева с отрицательным индексом гладкости, в статье[16] также была применена техника теории мультипликаторов. Применение этой техники позволило внести существенный вклад в ставшее особенно актуальным в последнее время исследование возмущений операторов типа Шрёдингера сингулярными периодическими и антипериодическими потенциалами[17,18,19,20,21,22,23,24,25].

Отметим, что, сфера приложений теории мультипликаторов не ограничивается только задачами спектрального анализа возмущений конкретных эллиптических дифференциальных операторов. Хотя зарождение и развитие теории мультипликаторов как самостоятельного раздела на стыке функционального анализа и теории функций действительного переменного было тесно связано с проблемами собственно теории функциональных пространств соболевского типа (такими, например, как исследование интерполяционных свойств этих пространств и поиск классов соболевских пространств дробной гладкости, для которых справедлив принцип равномерной локализации), уже в первых работах, где объектом систематического исследования выступили мультипликаторы из некоторого пространства соболевского типа в себя, рассматривались и приложения теории мультипликаторов к различным задачам из других разделов анализа. Среди пионерских работ, в которых методы теории мультипликаторов активно применялись для исследования важных проблем, связанных с конкретными дифференциальными и интегральными операторами, особо надо выделить[26,27,28].

Последующее развитие теории мультипликаторов для пространств соболевского типа позволило успешно применить методы и результаты этой теории для изучения широкого круга проблем теории функций, функционального анализа и теории урав-

---

[16] В. А. Михайлец, В. Н. Молибога, "О спектре сингулярных возмущений операторов на окружности", *Матем. заметки,* **91** : 4 (2012), 629 – 632

[17] P. Djakov, B. Mityagin, "Spectral gaps of Schroedinger operators with periodic singular potentials", *Dyn. Partial. Diff. Eq.,* **6** : 2 (2009), 95 – 165

[18] P. Djakov, B. Mityagin, "Criteria for existence of Riesz bases consisting of root functions of Hill and 1D Dirac operator", *J. Funct. Anal.,* **263** : 8 (2012), 2300 – 2332

[19] B. Mityagin, P. Siegl, "Root system of singular perturbations of the harmonic oscillator type operators", *Lett. Math. Phys.,* **106** : 2 (2016), 147 – 167

[20] T. Kappeler, C. Mohr, "Estimates for periodic and Dirichlet eigenvalues of the Schroedinger operator with singular potentials", *J. Funct. Anal.,* **186** : 1 (2001), 62 – 91

[21] T. Kappeler, P. Topalov, "Riccati map on $L^2_0(\mathbb{T})$ and its applications", *J. Math. Anal. Appl.,* **309** : 2 (2005), 544 – 566

[22] R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk, "1D Schroedinger operators with periodic singular potentials", *Methods Funct. Anal. Topol.,* **7** : 4 (2001), 31 – 42

[23] V. A. Mikhailets, V. N. Molyboga, "One-dimensional Schroedinger operator with singular periodic potentials", *Methods Funct. Anal. Topol.,* **14** : 2 (2008), 184 – 200

[24] E. Korotyaev, "A priori estimates for the Hill and Dirac operators", *Russ. J. Math. Phys.,* **15** : 3 (2008), 320 – 331

[25] А. О. Щербаков, "Спектральный анализ несамосопряжённого оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом", *Научн. ведомости БелГУ, Серия: математика, физика,* **31** : 11 (2013), 102 – 108

[26] J. Peetre, "On the differentiability of the solutions of quasilinear partial differential equations", *Trans. Am. Math. Soc.,* **104** (1962), 476 – 482

[27] R. S. Strichartz, "Multipliers on fractional Sobolev spaces", *J. Math. Mech.,* **16** (1967), 1031 – 1060

[28] J. C. Polking, "A Leibniz formula for some differentiation operators of fractional order", *Math. J., Indiana Univ.,* **21** (1972), 1019 – 1029

нений в частных производных. Особенно продуктивным такое применение оказалось для различных задач теории операторов, таких, как проблема ограниченности в шкале пространств типа Соболева сингулярных интегральных операторов, в частности, операторов Кальдерона–Зигмунда[29,30,31], нахождение асимптотики собственных значений некоторых вырожденных эллиптических дифференциальных и псевдодифференциальных операторов[32,33,34], получение теорем слабо-сильной единственности (weak-strong uniqueness) задачи Коши для уравнения Навье–Стокса[35,36,37,38], исследование псевдодифференциальных операторов с символами, удовлетворяющими условиям ослабленной регулярности[39,40,41,42,43].

Различные аспекты теории мультипликаторов для пространств соболевского типа, безусловно, представляют и самостоятельный интерес в рамках теории функциональных пространств. Детальное изучение мультипликаторов в пространствах бесселевых потенциалов было инициировано основополагающей работой Роберта С. Стрихартца[27], где, в частности, было показано, что при выполнении условия $s > \frac{n}{p}$ на пространстве $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ может быть корректно определена операция поточечного умножения, причём пространство $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ является алгеброй относительно этой операции. В дальнейшем изучение мультипликаторов как в пространствах бесселевых потенциалов, так и в более общем случае пространств типа Бесова–Лизоркина–Трибеля, было активно продолжено в ситуации, когда индексы гладкости обоих пространств положительны, причём в большинстве работ рассматривалось пространство мульти-

---

[29] S. Gala, P. G. Lemarie-Rieusset, “Multipliers between Sobolev spaces and fractional differentiation”, *J. Math. Anal. Appl.,* **322** : 2 (2006), 1030 – 1054

[30] A. Youssfi, “Regularity properties of singular integral operators”, *Stud. Math.,* **119** : 3 (1996), 199 – 217

[31] L. D. Ky, “Bilinear decompositions and commutators of singular integral operators”, *Trans. Am. Math. Soc.,* **365** : 6 (2013), 2931 – 2958

[32] D. E. Edmunds, H. Triebel, “Eigenvalue distributions of some degenerate elliptic operators: an approach via entropy numbers”, *Math. Ann.,* **299** : 2 (1994), 311 – 340

[33] D. E. Edmunds, H. Triebel, *Function spaces, entropy numbers, differential operators,* Cambridge : Cambridge University Press, 1996, 252 pp.

[34] D. D. Haroske, L. Skrzypczak, “Spectral theory of some degenerate elliptic operators with local singularities”, *J. Math. Anal. Appl.,* **371** : 1 (2010), 282 – 299

[35] P. G. Lemarie-Rieusset, *Recent developments in the Navier-Stokes problem,* Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC, 2002, 395 pp.

[36] P. Germain, “Multipliers, paramultipliers and weak-strong uniqueness for the Navier-Stokes equations”, *J. Differ. Equations,* **226** : 2 (2006), 373 – 428

[37] P. G. Lemarie-Rieusset, R. May, “Uniqueness for the Navier-Stokes equations and multipliers between Sobolev spaces”, *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.,* **66** : 4 (2007), 819 – 838

[38] P. G. Lemarie-Rieusset, *The Navier-Stokes Problem in the 21st Century,* Boca Raton, FL : CRC Press, 2016, 718 pp.

[39] M. Yamazaki, “A quasi-homogeneous version of paradifferential operators, Part I: Boundedness on spaces of Besov type”, *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. 1A,* **33** (1986), 131 – 174

[40] J. Marschall, “Pseudo-differential operators with coefficients in Sobolev spaces”, *Trans. Am. Math. Soc.,* **307** : 1(1988), 335 – 361

[41] J. Marschall, “On the boundedness and compactness of nonregular pseudo-differential operators”, *Math. Nachr.,* **175** : 1 (1995), 231 – 262

[42] S. Gala, “Multipliers spaces, Muckenhoupt weights and pseudo-differential operators”, *J. Math. Anal. Appl.,* **324** : 2 (2006), 1262 – 1273

[43] D. Lannes, “Sharp estimates for pseudo-differential operators with symbols of limited smoothness and commutators”, *J. Funct. Anal.,* **232** : 2 (2006), 495 – 539

пликаторов $M[A^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \to A^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)]$, где $A^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ есть некоторое пространство типа Бесова–Лизоркина–Трибеля. В рамках этой проблематики были развиты различные методы исследования пространств мультипликаторов и обнаружены многочисленные приложения полученных в этом направлении результатов.

Так, для изучения мультипликаторов в пространствах соболевского типа в конце 1970ых - начале 1980ых годов в цикле работ В. Г. Мазьи, Т. О. Шапошниковой, И. Э. Вербицкого и их соавторов использовался подход, основанный на описании пространств мультипликаторов в терминах ёмкостей компактных множеств, детальное изложение которого можно найти в монографии[44]. Другой подход, основанный на представлении произведения двух функций в виде суммы трёх парапроизведений, то есть слабо сходящихся рядов, построенных по гладкому диадическому разбиению единицы с помощью прямого и обратного преобразования Фурье в $S'(\mathbb{R}^n)$, получил развитие в работах[45,46,47,48,49,50]. Необходимо отметить, что особенно важной для развития техники парапроизведений в контексте её применения для исследования проблематики теории мультипликаторов оказалась работа[51]. Систематическое же изложение этого метода, оказавшегося особенно плодотворным для изучения мультипликаторов в пространствах типа Бесова–Лизоркина–Трибеля, и подробную библиографию по этой теме можно найти в монографии[52]. Этими двумя подходами далеко не исчерпывается всё содержание теории мультипликаторов: так, мультипликаторы в пространствах соболевского типа изучались другими методами в статьях[53,54,55,56,57,58].

---

[44] V. G. Maz'ya, T. O. Shaposhnikova, *Theory of Sobolev multipliers, with applications to differential and integral operators,* Berlin - Heidelberg: Springer Verlag, 2009, 609 pp.

[45] J. Marschall, "Some remarks on Triebel spaces", *Stud. Math.,* **87** (1987), 79 – 92

[46] J. Johnsen, "Pointwise multiplication of Besov and Triebel-Lizorkin spaces", *Math. Nachr.,* **175** (1995), 85 – 133

[47] W. Sickel, H. Triebel, "Hoelder inequalities and sharp embeddings in function spaces of $B^s_{p,q}$ and $F^s_{p,q}$ type", *Z. Anal. Anwend.,* **14** : 1 (1995), 105 – 140

[48] W. Sickel, "On pointwise multipliers for $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ in case $\sigma_{p,q} < s < \frac{n}{p}$", *Ann. Mat. Pura Appl., IV Ser.,* **176** (1999), 209 – 250

[49] H. Koch, W. Sickel, "Pointwise multipliers of Besov spaces of smoothness zero and spaces of continuous functions", *Rev. Mat. Iberoam.,* **18** : 3 (2002), 587 – 626

[50] D. Drihem, M. Moussai, "Some embeddings into the multiplier spaces associated to Besov and Lizorkin-Triebel spaces", *Z. Anal. Anwend.,* **21** : 1 (2002), 179 – 184

[51] M. Frazier, B. Jawerth, "A discrete transform and decompositions of distribution spaces", *J. Funct. Anal.,* **93** : 1 (1990), 34 – 170

[52] T. Runst, W. Sickel, *Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators and nonlinear partial differential equations,* Berlin : De Gruyter, 1996, 547 pp.

[53] Г. А. Калябин, "Критерии мультипликативности и вложения в C пространств типа Бесова–Лизоркина–Трибеля", *Матем. заметки,* **30** : 4 (1981), 517 – 526

[54] Г. А. Калябин, "Поточечные мультипликаторы в некоторых пространствах Соболева, содержащих неограниченные функции", *Тр. МИАН,* **204** (1993), 160 – 165

[55] А. Б. Гулисашвили, "О мультипликаторах в пространствах Бесова", *Зап. научн. сем. ЛОМИ,* **135** (1984), 36 – 50

[56] T. Valent, "A property of multiplication in Sobolev spaces. Some applications", *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova,* **74** (1985), 63 – 73

[57] E. Nakai, "A characterization of pointwise multipliers on the Morrey spaces", *Sci. Math.,* **3** : 3 (2000), 445 – 454

[58] А. И. Парфёнов, "Характеризация мультипликаторов в пространствах Хедберга–Нетрусова", *Матем. тр.,* **14** : 1 (2011), 158 – 194

К работе Стрихартца[27] восходит и основанный на использовании шкалы равномерно локализованных пространств метод получения наиболее конструктивного описания пространств мультипликаторов. А именно, в этой статье было показано, что при выполнении условия $s > \frac{n}{p}$ пространство мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_p^s(\mathbb{R}^n)]$ совпадает с равномерно локализованным пространством бесселевых потенциалов $H^s_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n)$. Предложенный Стрихартцем подход оказался продуктивным и в ситуации, когда для описания мультипликаторов из функционального пространства типа Бесова–Лизоркина–Трибеля $A^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ в себя используется шкала равномерно локализованных пространств $A^s_{p,\,q,\,unif}(\mathbb{R}^n)$, определяемых по аналогии с $H^s_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n)$. Так, в работе[59] рассматривалось пространство Лизоркина–Трибеля $F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ и для мультипликаторов в этом пространстве было получено описание

$$M[F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n) \to F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)] = F^s_{p,\,q,\,unif}(\mathbb{R}^n)$$

при $p,\ q \geqslant 1,\ s > \frac{n}{p}$.

В ситуации, когда в роли $A^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ выступает пространство Бесова $B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$, получение аналогичного описания оказывается существенно более сложной задачей, поскольку установленное для пространств бесселевых потенциалов в работе[27] свойство равномерной локализации допускает обобщение для пространств $F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$, но для $B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ это свойство справедливо лишь в случае $p = q$, когда пространства $B^s_{p,\,p}(\mathbb{R}^n)$ и $F^s_{p,\,p}(\mathbb{R}^n)$ совпадают. Исходя из отсутствия у пространств Бесова $B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ свойства равномерной локализации при $p \neq q$, в статье[60] было показано, что в случае $p > q$ даже при выполнении условия $s > \frac{n}{p}$ пространство мультипликаторов $M[B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n) \to B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)]$ строго вложено в пространство $B^s_{p,\,q,\,unif}(\mathbb{R}^n)$. Тем не менее, в случае выполнения условия $1 \leqslant p \leqslant q$ при $s > \frac{n}{p}$ позднее в[61] было установлено, что

$$M[B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n) \to B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)] = B^s_{p,\,q,\,unif}(\mathbb{R}^n).$$

Для пространства мультипликаторов из $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ в $H^t_p(\mathbb{R}^n)$ при $s \geqslant t > \frac{n}{p},\ p > 1$ аналогичное описание в терминах шкалы пространств $H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ было получено в начале 1980ых в цикле работ В. Г. Мазьи и Т. О. Шапошниковой и нашло своё отражение в монографии[62]. Однако, в случае, когда индексы p и q необязательно совпадают, пространство мультипликаторов $M[H^s_p(\mathbb{T}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$ оставалось неисследованным в литературе даже при $s,\ t \geqslant 0$.

Изучение же мультипликаторов из пространства бесселевых потенциалов с положительным индексом гладкости в пространство бесселевых потенциалов с отрицательным индексом гладкости было инициировано значительно позднее работой[9]. Впоследствии задача описания мультипликаторов в пространствах бесселевых потенциалов с индексами гладкости разного знака, исследовалась также в работах[13,14,29,36], но шкала пространств $H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$, описание в терминах которой даёт конструктивный критерий принадлежности распределения пространству мультипликаторов, применялась

[59] J. Franke, “On the spaces $F^s_{p,\,q}$ of Triebel-Lizorkin type: pointwise multipliers and spaces on domains”, *Math. Nachr.*, **125** (1986), 29 – 68

[60] G. Bourdaud, “Localisations des espaces de Besov”, *Stud. Math.*, **90** : 2 (1988), 153 – 163

[61] W. Sickel, S. Smirnov, “Localization properties of Besov spaces and of its associated multiplier spaces”, *Jenaer Schriften Math. Inf.*, Jena, 1999

[62] В. Г. Мазья, Т. О. Шапошникова, *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций,* Л., Изд-во Ленинградского университета, 1986, 402 сс.

для решения этой задачи только в работах[10,12]. А именно, при выполнении условий, обобщающих восходящее к [27] условие $s > \frac{n}{p}$, в статьях[10,12] были получены характеризации пространств мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)]$, $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_p^{-s}(\mathbb{R}^n)]$ и $M[H_2^s(\mathbb{R}^n) \to H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)]$ в терминах равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов при $s,\ t \geqslant 0$. Также отметим работу[63], где в стрихартцевском случае для классических пространств Соболева (являющихся частным случаем пространств бесселевых потенциалов, когда коэффициент гладкости является целым числом) было получено описание пространства $M[W_p^k(\mathbb{R}^n) \to W_p^{-l}(\mathbb{R}^n)]$, $k,\ l \in \mathbb{N}$, в терминах равномерно локализованных классических пространств Соболева $W^m_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$.

Цель работы

Целью работы является изучение проблемы описания пространства мультипликаторов из пространства бесселевых потенциалов с положительным индексом гладкости в пространство бесселевых потенциалов с индексом гладкости произвольного знака в терминах конкретных функциональных пространств и получение такого описания в максимально общем случае, а также применение этих результатов для исследования спектральных свойств сингулярных возмущений степеней оператора Лапласа на $n-$мерном торе.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

1. При $s,t \geqslant 0$ и выполнении условия стрихартцевского типа $0 < \max(s,t) < \frac{n}{2}$ для $m = \min(s,t)$ и $p = \frac{n}{\max(s,t)}$ доказана точность непрерывного вложения пространства $H^{-m}_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ в пространство мультипликаторов из $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)$ в смысле невозможности уменьшения показателя $p = \frac{n}{\max(s,t)}$. Отсюда, в частности, следует, что в нестрихартцевском случае невозможно получить описание пространства мультипликаторов $M[H_2^s(\mathbb{R}^n) \to H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)]$ в терминах равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов $H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$.

2. Показано, что при $s,\ t \in \mathbb{R}$, $p,\ q > 1$ условие $p \leqslant q$ является необходимым и достаточным для того, чтобы равномерная мультипликаторная норма была эквивалентна стандартной норме пространства мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$.

3. Для $s,\ t \geqslant 0$, $p,\ q > 1$ в случае выполнения условий, обобщающих классическое условие Стрихартца, в наиболее общей ситуации получены описания в терминах равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов $H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ для пространств мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ при $p \leqslant q$ и $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]$ при $p \leqslant q'$. При этом показано, что условия $p \leqslant q$ и $p \leqslant q'$ соответственно являются необходимыми для получения таких описаний.

4. В том случае, когда условия стрихартцевского типа не выполняются, получены двусторонние непрерывные вложения пространств типа $H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ в пространство мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-s}(\mathbb{R}^n)]$, $s \geqslant 0$, $p,\ q > 1$.

[63] V. G. Maz'ya, T. O. Shaposhnikova, "Characterization of multipliers in pairs of Besov spaces", *Oper. Theory, Adv. Appl.*, **147** (2004), 365 – 386

5. Доказано, что если потенциал является компактным мультипликатором из $H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)$ в $H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$, то соответствующее сингулярное возмущение степени оператора Лапласа на многомерном торе $\mathbb{T}^n$ имеет компактную резольвенту, а система его корневых векторов полна в $L_2(\mathbb{T}^n)$. Также в этой ситуации получена асимптотика считающей функции собственных значений этого возмущения.

Основные методы исследования

В диссертации используются методы теории мультипликаторов, теории интерполяции функциональных пространств соболевского типа, гармонического анализа, спектральной теории операторов в гильбертовом пространстве, теории возмущений, теории полуторалинейных форм и ассоциированных с ними операторов в гильбертовом пространстве.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты представляют интерес для специалистов в области теории функциональных пространств, теории интерполяции, спектральной теории эллиптических дифференциальных операторов и смежных вопросов теории уравнений с частными производными.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались автором на следующих научно - исследовательских семинарах и международных научных конференциях:

- научно-исследовательский семинар лаборатории операторных моделей и спектрального анализа кафедры теории функций и функционального анализа механико - математического факультета Московского Государственного Университета имени М. В. Ломоносова “Операторные модели в математической физике” под руководством д.ф.-м.н. профессора А. А. Шкаликова (2009 – 2015 гг., многократно)

- научно-исследовательский семинар кафедры математического анализа и теории функций факультета физико-математических и естественных наук Российского Университета Дружбы Народов “Функциональный анализ и его приложения” под руководством д.ф.-м.н. профессора В. И. Буренкова (2016 г.)

- международная конференция “Современные проблемы математики, механики и их приложений”, посвящённая 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего (Москва, Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова, 2009 г.)

- международная конференция “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвящённая 110-летию со дня рождения академика И. Г. Петровского (Москва, Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова, 2011 г.)

- международная конференция “Спектральная теория и дифференциальные уравнения”, посвящённая 100-летию со дня рождения Б. М. Левитана (Москва, Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова и Математический институт имени В. А. Стеклова Российской Академии Наук, 2014 г.)

- международная конференция "Функциональные пространства и теория приближений функций", посвящённая 110-летию со дня рождения академика С. М. Никольского (Москва, Математический институт имени В. А. Стеклова Российской Академии Наук, 2015 г.)

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах автора, 2 из которых опубликованы в журналах из перечня ВАК. Список работ приведён в конце автореферата. Работ, опубликованных в соавторстве, нет.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Библиография содержит 76 наименований. Общий объём диссертации составляет 149 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Опишем кратко содержание диссертации.

В первой главе мы рассматриваем пространство

$$M[s,-t] \overset{def}{=} M[H_2^s(\mathbb{R}^n) \to H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)]$$

мультипликаторов из $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)$ в случае, когда $s,\ t \geqslant 0$ и $\max(s,t) > 0$. Для удобства изложения далее будем использовать обозначения

$$m = \min(s,t),\ p_1 = \frac{n}{\max(s,t)}\,.$$

Основной целью этой главы является доказательство точности непрерывного вложения пространств

$$H^{-m}_{p_1,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[s,-t]$$

при условии $\max(s,t) < \frac{n}{2}$. А именно, показано, что для любого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такое распределение $v_\varepsilon \in S'(\mathbb{R}^n)$, что

$$v_\varepsilon \in H^{-m}_{p_1-\varepsilon,\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

но

$$v_\varepsilon \notin M[s,-t].$$

Значение этого результата состоит в том, что из него следует невозможность точного описания пространства мультипликаторов $M[s,-t]$ в терминах равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов $H^{\gamma}_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ в случае, когда $\max(s,t) < \frac{n}{2}$.

Отметим, что в случае $\max(s,t) > \frac{n}{2}$ из результатов М.-И. Нейман-Заде и А. А. Шкаликова тривиально следует, что

$$M[s,-t] = H^{-m}_{2,\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

причём нормы этих пространств эквивалентны. Также в совместной работе М.-И. Нейман-Заде и А. А. Шкаликова была установлена справедливость двусторонних непрерывных вложений

$$H^{-m}_{p_1,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[s,-t] \subset H^{-m}_{2,\,unif}(\mathbb{R}^n)$$

при $0 < \max(s,t) < \frac{n}{2}$.

Сформулированный выше результат главы 1 означает, что в ситуации, когда $0 < \max(s,t) < \frac{n}{2}$, показатель $p_1 = \frac{n}{\max(s,t)}$ является неулучшаемым в том смысле, что при его уменьшении соответствующее равномерно локализованное пространство бесселевых потенциалов уже не будет содержаться в пространстве $M[s,-t]$.

В первом параграфе мы приводим необходимые определения и классические результаты теории пространств бесселевых потенциалов и теории мультипликаторов для пространств этого типа. Они будут использоваться нами не только в этой главе, но и в последующих. Центральными для первой главы из этих результатов являются теорема вложения для пространств типа $H^{\gamma}_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n)$, теорема о замкнутости пространств типа $H^{\gamma}_{p}(\mathbb{R}^n)$ относительно комплексной интерполяции и полученное в статье[12] непрерывное вложение

$$H^{-t}_{\frac{n}{s},\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[s,-t],$$

справедливое при выполнении условий $0 \leqslant t \leqslant s < \frac{n}{2},\ s > 0$.

Во втором параграфе при $\alpha \in (0,n)$ мы рассматриваем регулярный функционал $\mathbf{f}_\alpha$, порождённый функцией

$$f_\alpha \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; x \longmapsto |x|^{-\alpha}.$$

В этом параграфе мы получаем равномерную по $z \in \mathbb{R}^n$ степенную оценку для преобразования Фурье от функции $\psi_{(z)} \cdot f_\alpha$, где $\psi_{(z)}$ – сдвиг на z функции $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$. С помощью этой оценки устанавливается, что в случае $t > -\frac{n}{2}$ выполнение условия $0 < \alpha < \min\bigl(n, t+\frac{n}{2}\bigr)$ является достаточным для принадлежности функционала $\mathbf{f}_\alpha$ пространству $H^{-t}_{2,\,unif}(\mathbb{R}^n)$.

В третьем параграфе мы получаем, что выполнение неравенства $\alpha \leqslant s+t$ является необходимым, а выполнение неравенства $\alpha < s+t$ – достаточным условием принадежности функционала $\mathbf{f}_\alpha$ пространству мультипликаторов $M[s,-t]$. Используя этот факт, а также результаты двух предыдущих параграфов, мы доказываем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $s,\ t \geqslant 0$, $0 < \max(s,t) < \frac{n}{2}$, $m = \min(s,t)$, $p_1 = \frac{n}{\max(s,t)}$. Тогда для произвольного числа ε, удовлетворяющего условию $0 < \varepsilon < p_1 - 2$, найдётся такое число*

$$\delta(\varepsilon) \in \Bigl(0; \frac{n}{2} - \max(s,t)\Bigr),$$

что для $\alpha = s+t+\delta(\varepsilon)$ имеем

$$\mathbf{f}_\alpha \in H^{-m}_{p_1-\varepsilon,\,unif}(\mathbb{R}^n) \setminus\, M[s,-t].$$

Вторая глава посвящена проблеме характеризации мультипликаторов из $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^t(\mathbb{R}^n)$ в терминах конкретных функциональных пространств при некоторых естественных ограничениях на индексы $s,\ t \in \mathbb{R},\ p,\ q > 1$.

Впервые шкала равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов $H^{\gamma}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n),\ \gamma \in \mathbb{R},\ r > 1$, была использована для описания пространства мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_p^s(\mathbb{R}^n)]$ в пионерской работе Роберта С. Стрихартца[27]. В этой работе такое описание было дано в случае выполнения неравенства $s > \frac{n}{p}$, гарантирующего, что пространство $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ является алгеброй относительно операции поточечного умножения. Впоследствии целый ряд аналогичных результатов был получен для мультипликаторов из одного пространства бесселевых потенциалов в другое в ситуации, когда индексы гладкости обоих пространств положительны, но наиболее общий случай пространства мультипликаторов из $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^t(\mathbb{R}^n)$, где $s,\ t \geqslant 0,\ p,\ q > 1$, оставался неисследованным, даже если выполнены условия стрихартцевского типа.

Случай же, когда одно из пространств имеет отрицательный индекс гладкости, долгое время практически не рассматривался в исследованиях по теории мультипликаторов в функциональных пространствах соболевского типа. Начало его систематическому изучению было положено циклом работ А. А. Шкаликова, М. И. Нейман-Заде и Дж. - Г. Бака, где был развит метод исследования мультипликаторов из пространства бесселевых потенциалов с положительным индексом гладкости в пространство бесселевых потенциалов с отрицательным индексом гладкости, основанный на критериях справедливости вложений типа

$$H^{\gamma}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_{p'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]$$

в терминах выполнения мультипликативных функциональных оценок. С помощью этого подхода в работах[10,12] были получены следующие результаты:

$$1)\ M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)] = H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n) \ \text{ при } \ 1 < p \leqslant 2,\ s > \frac{n}{p}\,;$$

$$2)\ M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_p^{-s}(\mathbb{R}^n)] = H^{-s}_{\max(p,p'),\,unif}(\mathbb{R}^n) \ \text{ при } \ p > 1,\ s > \frac{n}{\max(p,p')}\,;$$

$$3)\ M[H_2^s(\mathbb{R}^n) \to H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)] = H^{-t}_{2,\,unif}(\mathbb{R}^n) \ \text{ при } \ s \geqslant t \geqslant 0,\ s > \frac{n}{2}\,.$$

Кроме того, в ситуации, когда показатели гладкости являются целыми и соответствующие пространства бесселевых потенциалов совпадают с классическими пространствами Соболева, в работе[63] было установлено, что

$$4)\ M[W_p^k(\mathbb{R}^n) \to W_p^{-l}(\mathbb{R}^n)] = W^{-l}_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap W^{-k}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n)$$

при $k, l \in \mathbb{N}$ и выполнении одного из условий

$$a)\ k \geqslant l,\ k > \frac{n}{p}\,;\ \ b)\ l \geqslant k,\ l > \frac{n}{p'}\,.$$

Основным результатом этой главы является описание пространства мультипликаторов из $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^t(\mathbb{R}^n)$ при $s \geqslant 0,\ t \in \mathbb{R},\ p,\ q > 1$ в наиболее общей постановке. Нами также показано, что накладываемые при этом на индексы $s,\ t,\ p,\ q$ дополнительные ограничения являются естественными в том смысле, что если хотя бы одно из них не выполняется, то характеризация пространства мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ в терминах шкалы пространств $H^{\gamma}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ невозможна. Если индекс гладкости t второго пространства неположителен, то полученное описание обобщает приведённые выше результаты из[10,12,63].

В первом параграфе даётся общее определение мультипликатора из банахова пространства функций $S_1(\mathbb{R}^n)$ в пространство обобщённых функций $S_2(\mathbb{R}^n) \subset D'(\mathbb{R}^n)$ в том случае, когда $D(\mathbb{R}^n)$ плотно вложено в $S_1(\mathbb{R}^n)$. В том случае, когда $S_2(\mathbb{R}^n)$ изометрически изоморфно некоторому банахову пространству функций $T_1(\mathbb{R}^n)$, которое содержит $D(\mathbb{R}^n)$ в качестве плотного подмножества, показывается, что можно дать эквивалентное определение мультипликатора $\mu \in M[S_1(\mathbb{R}^n) \to S_2(\mathbb{R}^n)]$ в терминах непрерывности на $S_1(\mathbb{R}^n) \times T_1(\mathbb{R}^n)$ полуторалинейной формы, порождённой распределением μ. Этот подход обобщает данное в работе[12] определение пространства мультипликаторов $M[H_2^s(\mathbb{R}^n) \to H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)]$ при $s,\ t \geqslant 0$.

Далее, исходя из общего определения, вводится пространство мультипликаторов из $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^t(\mathbb{R}^n)$ при $s,\ t \in \mathbb{R},\ p,\ q > 1$. Также в первом параграфе излагаются простейшие свойства пространства мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ и доказывается непрерывное вложение

$$M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)] \subset H^t_{q,\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n), \tag{1}$$

справедливое для произвольных чисел $s,\ t \in \mathbb{R},\ p,\ q > 1$.

Основная цель второго параграфа состоит в том, чтобы получить критерий справедливости непрерывного вложения

$$H^{\gamma}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$$

в терминах выполнения некоторой мультипликативной функциональной оценки. Метод получения подобных критериев, развитый в работе[10] для частного случая, когда $t = s$ и $q = p'$, существенно использует тот факт, что непрерывные вложения

$$H^{\gamma}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)] \ \text{ и } \ H^{\gamma}_{r}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)]$$

должны выполняться одновременно. В общем случае одновременность выполнения непрерывных вложений

$$H^{\gamma}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)] \ \text{ и } \ H^{\gamma}_{r}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$$

имеет место для произвольных чисел $\gamma \in \mathbb{R}$ и $r > 1$, если на пространстве мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ можно ввести эквивалентную стандартной норме равномерную мультипликаторную норму

$$|||\mu|||_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} \stackrel{def}{=} \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \{ \, \|\eta_{(z)} \cdot \mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} \},$$

где $\eta_{(z)}$ – сдвиг на $z \in \mathbb{R}^n$ финитной гладкой функции η, удовлетворяющей некоторым дополнительным условиям. Поэтому проблема описания пространства мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ в шкале пространств $H^{\gamma}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ оказывается тесно связанной с нахождением необходимых и достаточных условий на индексы p и q, при которых указанные выше нормы эквивалентны на $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$.

В начале второго параграфа, используя обобщение классической теоремы Стрихартца о равномерной локализации, мы доказываем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $1 < p \leqslant q$, $s, t \in \mathbb{R}$ *и функция* $\eta \in D(\mathbb{R}^n)$ *удовлетворяет условиям теоремы Стрихартца о равномерной локализации, то есть*
$a)$ $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$,
$b)$ $\eta(x) = 1 \quad \forall\, x \in Q_1 \overset{def}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leqslant 1 \; \forall\, i = \overline{1, n}\,\}$,
$c)$ $\eta(x) = 0 \quad \forall\, x \notin Q_2 \overset{def}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leqslant 2 \; \forall\, i = \overline{1, n}\,\}$.
Тогда пространство мультипликаторов $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$ *совпадает с множеством*

$$M_{unif}[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)] \overset{def}{=} \{u \in D'(\mathbb{R}^n) |\, \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \; \|\eta_{(z)} \cdot u\|_{M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]} < +\infty\},$$

причём равномерная мультипликаторная норма $|||\cdot|||_{M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]}$ *эквивалентна стандартной норме пространства* $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$.

Далее показывается, что для регулярного функционала $\mathbf{I}$, порождённого функцией, тождественно равной единице на $\mathbb{R}^n$, норма $\|\mathbf{I}\|_{M_{unif}[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]}$ конечна, откуда следует, что ограничение $p \leqslant q$ в условиях леммы 1 является необходимым для случая $s \geqslant t$, который и будет преимущественно рассматриваться далее.

В завершение параграфа в случае $s \geqslant 0$ устанавливается следующий критерий справедливости непрерывных вложений типа

$$H^\gamma_{r,\, unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$$

в терминах выполнения мультипликативной функциональной оценки.

Утверждение 1. *Пусть* $\gamma,\ s,\ t \geqslant 0,\ p,\ q,\ r > 1$. *Тогда*
1) при $p \leqslant q$ *непрерывное вложение*

$$H^\gamma_{r,\, unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$$

имеет место в том и только в том случае, когда найдётся такая константа $C > 0$, *что выполняется мультипликативная оценка*

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\, \|\mathbf{f}\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\, \|\mathbf{g}\|_{H^\gamma_r(\mathbb{R}^n)} \;\; \forall\, f,\ g \in D(\mathbb{R}^n);$$

2) при $p \leqslant q'$ *непрерывное вложение*

$$H^{-\gamma}_{r',\, unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]$$

имеет место в том и только в том случае, когда найдётся такая константа $C > 0$, *что выполняется мультипликативная оценка*

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H^\gamma_r(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\, \|\mathbf{f}\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\, \|\mathbf{g}\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)} \;\; \forall\, f,\ g \in D(\mathbb{R}^n).$$

В третьем параграфе в случае $s \geqslant t \geqslant 0$ при выполнении одного из условий

$$a)\; 1 < p < q,\;\; s - \frac{n}{p} \geqslant t - \frac{n}{q} \quad \text{или} \quad b)\; p \geqslant q > 1$$

мы доказываем общую мультипликативную оценку

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\, \|\mathbf{f}\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\, \|\mathbf{g}\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)} \;\; \forall\, f,\ g \in D(\mathbb{R}^n),$$

где константа $C > 0$ не зависит от выбора функций $f,\ g \in D(\mathbb{R}^n)$.

Непосредственно из этой оценки, непрерывного вложения (1) и части 1) утверждения 1 следует теорема, дающая в случае выполнения условий типа Стрихартца описание пространства мультипликаторов из одного пространства бесселевых потенциалов в другое в ситуации, когда индексы гладкости обоих пространств положительны.

Теорема 2. *Пусть $p,\ q > 1,\ p \leqslant q,\ s > \frac{n}{p},\ t \geqslant 0$ и $s - \frac{n}{p} \geqslant t - \frac{n}{q}$. Тогда имеет место совпадение пространств*

$$M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)] = H_{q,\,unif}^t(\mathbb{R}^n),$$

причём нормы этих пространств эквивалентны.

Стоит отметить, что накладываемые в теореме 2 в дополнение к классическому условию Стрихартца $s > \frac{n}{p}$ ограничения $p \leqslant q$ и $s - \frac{n}{p} \geqslant t - \frac{n}{q}$ являются необходимыми для характеризации пространства $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ в терминах шкалы пространств $H_{r,\,unif}^{\gamma}(\mathbb{R}^n)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $r > 1$. Действительно, в условиях теоремы 2 из справедливости непрерывного вложения

$$H_{r,\,unif}^{\gamma}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_q^t(\mathbb{R}^n)]$$

для каких-либо показателей $\gamma \in \mathbb{R}$ и $r > 1$ следует справедливость непрерывного вложения

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) \subset H_q^t(\mathbb{R}^n).$$

Последнее же непрерывное вложение, как известно, не имеет места в случае невыполнения хотя бы одного из неравенств $p \leqslant q$ и $s - \frac{n}{p} \geqslant t - \frac{n}{q}$.

Из установленной выше мультипликативной оценки и результатов предыдущего параграфа нетрудно получить описание пространства мультипликаторов в терминах шкалы равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов в следующих частных случаях:

$$a)\ M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_{q'}^{-s}(\mathbb{R}^n)] = H_{\max(p',\,q'),\,unif}^{-s}(\mathbb{R}^n) \quad \text{при } 1 < p \leqslant q',\ s > \frac{n}{\max(p,q)}\ ;$$

$$b)\ M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_{p'}^{-t}(\mathbb{R}^n)] = H_{p',\,unif}^{-\min(s,t)}(\mathbb{R}^n) \quad \text{при } 1 < p \leqslant 2,\ s,\ t \geqslant 0,\ \max(s,t) > \frac{n}{p}\ .$$

В наиболее общей ситуации нахождение для пространства $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]$ при $s,\ t \geqslant 0,\ p,\ q > 1$ аналогичного описания оказывается значительно более сложной задачей. Для её решения нам потребуются следующие два утверждения, также доказываемые в третьем параграфе: лемма о дифференцировании мультипликаторов и лемма о представлении произвольного распределения из $S'(\mathbb{R}^n)$ в виде суммы элементов специального вида.

Лемма 2. *Пусть $s,\ t \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{Z}_+,\ p,\ q > 1$ и*

$$\mu \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_q^t(\mathbb{R}^n)] \cap M[H_p^{s-m}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_q^{t-m}(\mathbb{R}^n)].$$

Тогда $D^\alpha \mu \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_q^{t-m}(\mathbb{R}^n)]$ для произвольного мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, такого, что $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j = m$, и

$$\|D^\alpha \mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-m}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant C\, \|\mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)] \cap M[H_p^{s-m}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-m}(\mathbb{R}^n)]},$$

где C – некоторая положительная константа, зависящая только от s, t, p, q, m и n.

Лемма 3. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда существуют непрерывные линейные операторы A_0, A_β, $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\beta|_1 \stackrel{def}{=} \sum\limits_{j=1}^n \beta_j = k$, действующие из $S'(\mathbb{R}^n)$ в $S'(\mathbb{R}^n)$, такие, что для произвольного $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ имеем*

$$u = A_0(u) + \sum_{|\beta|_1 = k} D^\beta(A_\beta(u)),$$

причём $\forall\ s \in \mathbb{R}$, $\forall\, p > 1$ ограничения операторов A_0, A_β на пространство $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ являются ограниченными операторами из $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_p^{s+k}(\mathbb{R}^n)$.

Эти две леммы используются в доказательстве следующей ключевой теоремы, которая даёт описание пространства мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]$ при $s,\ t \geqslant 0,\ p,\ q > 1$ в ситуации, когда выполняются условия, обобщающие классическое условие Стрихартца.

Теорема 3. *Пусть $p,\ q > 1,\ p \leqslant q'$ и выполнено одно из следующих двух условий:*

$$1)\ s \geqslant t \geqslant 0,\ s > \frac{n}{p} \quad \text{или} \quad 2)\ t \geqslant s \geqslant 0,\ t > \frac{n}{q}\,.$$

Тогда имеет место совпадение пространств

$$M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)] = H_{q',\,unif}^{-t}(\mathbb{R}^n) \cap H_{p',\,unif}^{-s}(\mathbb{R}^n),$$

причём нормы этих пространств эквивалентны.

Отметим, что ограничения, накладываемые на индексы пространств в теореме 3, являются необходимыми для того, чтобы получить при $s, t \geqslant 0$, $p,\ q > 1$ описание пространства мультипликаторов из $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)$ в терминах равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов $H_{r,\,unif}^{\gamma}(\mathbb{R}^n)$. Действительно, поскольку в условиях теоремы 3 справедливо непрерывное вложение

$$H_{r_1,\,unif}^{-\gamma_1}(\mathbb{R}^n)\ \subset\ H_{q',\,unif}^{-t}(\mathbb{R}^n) \cap H_{p',\,unif}^{-s}(\mathbb{R}^n),$$

где $\gamma_1 = \min(s,t)$, $r_1 = \max(p', q')$, то, рассуждая так же, как и в случае теоремы 2, легко видеть, что в формулировке теоремы 3 нельзя отказаться от ограничения $p \leqslant q'$. Условия же стрихартцевского типа в теореме 3 являются необходимыми даже в простейшей ситуации, когда $p = q = 2$, поскольку, как отмечается в главе 1, при выполнении неравенства $\max(s,t) < \frac{n}{2}$ невозможно дать описание пространства мультипликаторов $M[H_2^s(\mathbb{R}^n) \to H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)]$ в шкале пространств $H_{r,\,unif}^{\gamma}(\mathbb{R}^n)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $r > 1$.

Завершает вторую главу следующий результат, устанавливающий в нестрихартцевском случае одностороннее вложение типа

$$H_{r,\,unif}^{\gamma}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-s}(\mathbb{R}^n)].$$

Теорема 4. *Пусть $p,\ q > 1,\ p \leqslant q'$ и выполнено условие*

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q'}\right) \cdot n\ <\ s\ <\ \frac{n}{\max(p,q)}.$$

Тогда имеет место непрерывное вложение

$$H^{-s}_{r_0,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-s}_{q'}(\mathbb{R}^n)],$$

где

$$r_0 \;=\; \frac{n}{s - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q'}\right) n}\,.$$

Третья глава диссертации посвящена применению теории мультипликаторов для исследования сингулярных возмущений положительных степеней оператора Лапласа на $n-$мерном торе. Не только лишь задача описания класса потенциалов, для которых может быть корректно определён возмущённый оператор, естественным образом приводит к требованию принадлежности потенциала конкретному пространству мультипликаторов, но и различные спектральные свойства этих возмущений также оказываются связанными со свойствами потенциалов, формулируемыми в терминах теории мультипликаторов.

В первом параграфе для полуограниченного снизу самосопряжённого оператора T, действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, определяется шкала гильбертовых пространств $\mathcal{H}_\theta \stackrel{def}{=} D(T^{\frac{\theta}{2}}),\ \theta \geqslant 0$, а также выводятся свойства этой шкалы и действующих в ней степеней оператора T в том виде, в котором они нам понадобятся. Эти свойства будут использоваться в дальнейшем в ситуации, когда в качестве $\mathcal{H}$ берётся пространство $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) = H^0_2(\mathbb{T}^n)$, а в качестве $T-$ оператор $Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} + (-\Delta)^\alpha$, где $\alpha \geqslant 0$.

Также в первом параграфе вводится пространство $\mathcal{H}_{-1}$ как пополнение пространства $\mathcal{H}$ по норме

$$\|x\|_{\mathcal{H}_{-1}} \stackrel{def}{=} \|T^{-\frac{1}{2}}(x)\|_{\mathcal{H}},\ \ x \in \mathcal{H},$$

и строится продолжение оператора $T\colon \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}$ до оператора $\mathcal{T}$, действующего из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$. Продолжая оператор $T^{-\frac{1}{2}}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$ до оператора, действующего из $\mathcal{H}_{-1}$ в $\mathcal{H}$, и пользуясь тем, что существует естественный изометрический изоморфизм между пространствами $\mathcal{H}_{-1}$ и $(\mathcal{H}_1)^*$, мы вводим дуальное скалярное произведение

$$< \cdot, \cdot >_D \colon \mathcal{H}_{-1} \times \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Определив с помощью дуального скалярного произведения понятия симметричности и самосопряжённости для операторов, действующих из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$, мы устанавливаем самосопряжённость оператора $\mathcal{T}\colon \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_{-1}$. Для оператора $Q\colon \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_{-1}$, определённого на всём пространстве $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{T}-$подчинённого в смысле форм с $\mathcal{T}-$гранью, меньшей 1, доказывается секториальность и замкнутость относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ квадратичной формы

$$t + q\colon \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathbb{C},\ \ (t+q)(v) = <(\mathcal{T} + Q)(v), v>_D\ \ \forall\, v \in \mathcal{H}_1.$$

Это даёт возможность применить классическую первую теорему о представлении и получить следующий результат.

Теорема 5. *Пусть линейный оператор $Q\colon \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_{-1}$ подчинён в смысле форм оператору $\mathcal{T}$ с $\mathcal{T}-$гранью $\alpha_Q < 1$ и его область определения совпадает со всем $\mathcal{H}_1$. Тогда сужение*

$$\mathcal{T} \,\widetilde{+}\, Q\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

оператора $\mathcal{T}+Q$ на множество

$$D(\mathcal{T}\mathbin{\widetilde{+}}Q)=\{x\in\mathcal{H}_1 \mid (\mathcal{T}+Q)(x)\in\mathcal{H}\}$$

является секториальным оператором.

Если, кроме того, оператор Q является симметрическим относительно дуального скалярного произведения, то оператор $\mathcal{T}\mathbin{\widetilde{+}}Q$ является самосопряжённым относительно $<\cdot,\cdot>_{\mathcal{H}}$ и полуограниченным снизу относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

Параграф завершает доказательство утверждения, гласящего, что если оператор $Q_0\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_{-1})$ является $\mathcal{T}-$подчинённым с $\mathcal{T}-$гранью $\alpha<1$ и

$$Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_{-1})} Q_0,$$

то имеет место равномерная резольвентная сходимость последовательности операторов $\mathcal{T}\mathbin{\widetilde{+}}Q_n$ к оператору $\mathcal{T}\mathbin{\widetilde{+}}Q_0$ в пространстве $\mathcal{H}$.

Во втором параграфе вводятся пространства бесселевых потенциалов, заданные на $n-$мерном торе $\mathbb{T}^n$, излагаются их свойства и устанавливается связь этих пространств со шкалой пространств $\mathcal{H}_s \overset{def}{=} D(T^{\frac{s}{2}})$, порождённой оператором

$$T \overset{def}{=} Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}+(-\Delta)^{\alpha}\colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)\to\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n),\ \ \alpha\geqslant 0,$$

в соответствии с конструкцией, изложенной в предыдущем параграфе.

Для определения пространств бесселевых потенциалов на $\mathbb{T}^n$ мы вводим оператор

$$J_{s,\pi}\colon D'(\mathbb{T}^n)\longrightarrow D'(\mathbb{T}^n)$$

с помощью соотношения

$$J_{s,\pi}(u) \overset{D'(\mathbb{T}^n)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(u)(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}\,\mathbf{f}_k\ \ \forall\, u\in D'(\mathbb{T}^n),$$

где $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ есть ортонормированная система функций в $L_2(\mathbb{T}^n)$, определённая как

$$f_k(z)=(2\,\pi)^{-\frac{n}{2}}\cdot\prod_{m=1}^{n} z_m^{k_m}\quad \forall\, z=(z_1,\ldots,z_m)\in\mathbb{T}^n,$$

а коэффициенты Фурье $c_k(u)$ распределения $u\in D'(\mathbb{T}^n)$ задаются равенством

$$c_k(u)=u(f_{-k})\ \ \forall\, k\in\mathbb{Z}^n.$$

Корректность этого определения следует из того, что для произвольной бесконечно гладкой $2\pi-$периодической функции $f\colon\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{C}$ распределение $J_s(\mathbf{f})\in S'(\mathbb{R}^n)$ является регулярным функционалом и его плотность $g\colon\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{C}$ также есть бесконечно гладкая $2\pi-$периодическая функция, причём коэффициенты Фурье функций f и g связаны соотношением

$$c_k(g)=(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}\cdot c_k(f)\ \ \forall\, k\in\mathbb{Z}^n.$$

Пространство $H_p^0(\mathbb{T}^n)$ определяется аналогично пространству $H_p^0(\mathbb{R}^n)$ и для произвольных $s \in \mathbb{R}$ и $p > 1$ вводится пространство бесселевых потенциалов на $n-$мерном торе

$$H_p^s(\mathbb{T}^n) = \{u \in D'(\mathbb{T}^n) \mid J_{s,\pi}(u) \in H_p^0(\mathbb{T}^n)\},$$

с нормой

$$\|u\|_{H_p^s(\mathbb{T}^n)} = \|J_{s,\pi}(u)\|_{H_p^0(\mathbb{T}^n)}.$$

Во втором параграфе также кратко излагаются свойства пространств $H_p^s(\mathbb{T}^n)$, аналогичные свойствам пространств $H_p^s(\mathbb{R}^n)$, приведённым в первом параграфе главы 1.

Далее в этом параграфе рассматривается оператор

$$-\Delta_0 \colon L_2(\mathbb{T}^n) \longrightarrow L_2(\mathbb{T}^n)$$

с областью определения $D(-\Delta_0) = W_2^2(\mathbb{T}^n)$, являющийся самосопряжённым замыканием оператора $L = -\Delta_{cl}$, где под Δ_{cl} мы понимаем классический оператор Лапласа с областью определения $C^2(\mathbb{T}^n)$. В терминах коэффициентов Фурье для произвольного $\alpha \geqslant 0$ задаётся оператор

$$(-\Delta_0)^\alpha \colon L_2(\mathbb{T}^n) \longrightarrow L_2(\mathbb{T}^n)$$

с областью определения $\mathbb{H}_2^{2\alpha}(\mathbb{T}^n) \overset{def}{=} \{f \in L_2(\mathbb{T}^n) \,|\, \mathbf{f} \in H_2^{2\alpha}(\mathbb{T}^n)\}$.

Поскольку существует естественный изометрический изоморфизм между пространствами $\mathbb{H}_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$ и $H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$, то оператор

$$(-\Delta_0)^\alpha + Id_{L_2(\mathbb{T}^n)} \colon L_2(\mathbb{T}^n) \to L_2(\mathbb{T}^n)$$

однозначным образом порождает оператор $T \colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$. Так как введённый таким образом оператор T является самосопряжённым и полуограниченным снизу в $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$, то можно, следуя развитому в первом параграфе методу, построить шкалу пространств

$$\mathcal{H}_s \overset{def}{=} D(T^{\frac{s}{2}}),$$

где норма на пространстве $\mathcal{H}_s$ определяется равенством

$$\|u\|_{\mathcal{H}_s} = \|T^{\frac{s}{2}}(u)\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} \;\; \forall\, u \in \mathcal{H}_s.$$

Основным результатом этого параграфа является следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть $\alpha \geqslant 0$, $s \geqslant 0$. Тогда имеет место совпадение пространств*

$$\mathcal{H}_s = H_2^{\alpha s}(\mathbb{T}^n),$$

причём нормы этих пространств эквивалентны.

Отметим также, что с помощью абстрактной конструкции, изложенной в первом параграфе главы 1, оператор $T \colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ с областью определения $H_2^{2\alpha}(\mathbb{T}^n)$ можно продолжить до оператора $\mathcal{T}$, действующего из $H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$ в $H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$.

Третий параграф посвящен определению пространств мультипликаторов для пространств бесселевых потенциалов на $n-$мерном торе $\mathbb{T}^n$ и доказательству для них теорем вложения, аналогичных теоремам из[12], установленным для пространства мультипликаторов $M[H_2^s(\mathbb{R}^n) \to H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)]$, $s,\, t \geqslant 0$.

В начале параграфа мы даём альтернативное определение пространства $H_p^s(\mathbb{T}^n)$, основанное на введении нормы этого пространства с помощью гладкого разбиения единицы на торе, и отмечаем эквивалентность этого определения данному выше классическому определению $H_p^s(\mathbb{T}^n)$. После этого в случае $s,\ t \geqslant 0$ даётся определение пространства мультипликаторов

$$M_\pi[s,-t] \stackrel{def}{=} M[H_2^s(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)],$$

основанное на продолжении порождённой мультипликатором полуторалинейной формы с $D(\mathbb{T}^n)\times D(\mathbb{T}^n)$ на $H_2^s(\mathbb{T}^n)\times H_2^t(\mathbb{T}^n)$, а также отмечаются некоторые стандартные свойства этих пространств.

Далее для $s,\ t \geqslant 0$ в ситуации $\max(s,t) > 0$ будем обозначать

$$m = \min(s,t), \ \ p_1 = \frac{n}{\max(s,t)}\,.$$

Тогда в случае выполнения неравенства $\max(s,t) > \frac{n}{2}$ доказывается совпадение пространств

$$M_\pi[s,-t] = H_2^{-m}(\mathbb{T}^n),$$

а в случае, когда $\max(s,t) \leqslant \frac{n}{2}$, для произвольного $\varepsilon > 0$ устанавливается справедливость непрерывного вложения

$$H_{p_1}^{-m+\varepsilon}(\mathbb{T}^n) \subset M_\pi[s,-t].$$

Также в этом параграфе мы показываем, что если $\max(s,t) > 0$ и для некоторых чисел $\gamma \in \mathbb{R}$, $r > 1$ имеет место непрерывное вложение $H_r^\gamma(\mathbb{T}^n) \subset M_\pi[s,-t]$, то произвольный элемент v пространства $H_r^\gamma(\mathbb{T}^n)$ является компактным мультипликатором из $H_2^s(\mathbb{T}^n)$ в $H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)$. Отсюда, в частности, получаем, что при $\max(s,t) > \frac{n}{2}$ пространство $M_\pi[s,-t]$ состоит только из компактных мультипликаторов.

Четвёртый параграф содержит основные теоремы этой главы. В этом параграфе через M_μ обозначается порождённый мультипликатором $\mu \in M_\pi[s,-t]$ ограниченный линейный оператор из $H_2^s(\mathbb{T}^n)$ в $H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)$, такой, что

$$M_\mu(\mathbf{f}) = f\cdot\mu \quad \forall\, f \in D(\mathbb{T}^n).$$

По аналогии с абстрактной ситуацией, рассматривавшейся в первом параграфе, для операторов $A_1\colon H_2^\alpha(\mathbb{R}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$ и $A_2\colon H_2^\alpha(\mathbb{R}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$ через $A_1\widetilde{+}A_2$ будем обозначать ограничение оператора $A_1+A_2\colon H_2^\alpha(\mathbb{R}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$ на множество

$$D(A_1\widetilde{+}A_2) = \{x \in H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \mid (A_1+A_2)(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)\}.$$

В следующем утверждении устанавливается связь между сходимостью потенциалов в пространстве мультипликаторов и равномерной резольвентной сходимостью соответствующих возмущений степени оператора $-\Delta$ в пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$.

Теорема 7. *Пусть* $\alpha \geqslant 0$, $\ q \in M_\pi[\alpha,-\alpha]$ *и оператор*

$$Q \stackrel{def}{=} M_q\colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \longrightarrow H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$$

подчинён оператору $\mathcal{T}$ в смысле форм с $\mathcal{T}-$гранью $a < 1$. Пусть также последовательность мультипликаторов $\{q_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset M_\pi[\alpha,-\alpha]$ сходится к q по норме $\|\cdot\|_{M_\pi[\alpha,-\alpha]}$. Тогда имеет место равномерная резольвентная сходимость действующих в пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ операторов

$$(-\Delta)^\alpha \widetilde{+} Q_m \stackrel{R}{\Longrightarrow} (-\Delta)^\alpha \widetilde{+} Q,$$

где $Q_m \stackrel{def}{=} M_{q_m}\colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \longrightarrow H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ – ограниченные операторы, порождённые мультипликаторами q_m.

Из этой теоремы, в частности, следует, что сингулярное возмущение степени оператора Лапласа на торе может быть аппроксимировано последовательностью возмущений с бесконечно гладкими потенциалами. А именно, верен следующий факт:

Следствие 1. *Пусть имеет место один из двух случаев:*
1) $\alpha > \frac{n}{2}$, $q \in H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$;
или
2) $0 < \alpha \leqslant \frac{n}{2}$, $q \in H_{n/\alpha}^{-\alpha+\varepsilon}(\mathbb{T}^n)$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$.
Тогда существует последовательность гладких функций $f_m \in D(\mathbb{T}^n)$, $m \in \mathbb{N}$, такая, что

$$(-\Delta)^\alpha \widetilde{+} M_{\mathbf{f}_m} \stackrel{R}{\Longrightarrow} (-\Delta)^\alpha \widetilde{+} M_q.$$

В силу справедливости непрерывного вложения $H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \subset H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ и всюду плотности множества $H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$ в пространстве $H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ по норме $\|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)}$ можно определить понятия резольвенты, спектра, собственных и корневых подпространств для операторов, действующих из $H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$ в $H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$.

В доказательстве основной теоремы этой главы центральную роль играет лемма, гласящая, что если оператор $A\colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \longrightarrow H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ компактен относительно норм этих пространств, то у оператора

$$\mathcal{T} + A\colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \longrightarrow H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$$

и его сужения $\mathcal{T} \widetilde{+} A$, рассматриваемого как оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$, совпадают спектры, а также собственные и корневые подпространства.

Теперь сформулируем основную теорему этой главы.

Теорема 8. *Пусть $\alpha > 0$, $q \in M_\pi[\alpha,-\alpha]$ и оператор*

$$Q = M_q\colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$$

является компактным. Тогда оператор

$$(-\Delta)^\alpha \widetilde{+} Q\colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$$

имеет компактную резольвенту, система его корневых векторов полна в $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ и для считающей функции собственных значений оператора $(-\Delta)^\alpha \widetilde{+} Q$ справедливо асимптотическое соотношение

$$N_{(-\Delta)^\alpha \widetilde{+} Q}(r) \sim N_{(-\Delta)^\alpha}(r) \sim C_\alpha \cdot r^{\frac{n}{2\alpha}} \quad \text{при } r \to +\infty,$$

где C_α – некоторая положительная константа, зависящая только от α и n.

Учитывая установленные в предыдущем параграфе теоремы вложения для пространств мультипликаторов $M_\pi[k, -l]$, отсюда получаем следующий результат.

Следствие 2. *Пусть имеет место один из двух случаев:*
1) $\alpha > \frac{n}{2}$, $q \in H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$;
или
2) $0 < \alpha \leqslant \frac{n}{2}$, $q \in H_{n/\alpha}^{-\alpha+\varepsilon}(\mathbb{T}^n)$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$.
Тогда оператор

$$Q = M_q \colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$$

является компактным и справедливо утверждение теоремы 8.

В заключении диссертации кратко излагаются основные результаты работы и отмечаются возможные направления дальнейших исследований по избранной теме, из которых особо можно отметить использование шкалы равномерно локализованных пространств для описания мультипликаторов в пространствах типа Бесова–Лизоркина–Трибеля, исследование вопроса компактности мультипликаторов в периодических пространствах бесселевых потенциалов и обобщение результатов диссертации, полученных для сингулярных возмущений степеней оператора Лапласа на торе, как на случай эллиптических операторов более общего вида, так и в ситуации, когда операторы заданы на отличных от $n-$мерного тора компактных гладких многообразиях.

В заключение выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Андрею Андреевичу Шкаликову за постановку задач, поддержку и многочисленные полезные советы и обсуждения, а также всему коллективу кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова за создание творческой атмосферы и внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

Из них публикации в журналах из официального перечня ВАК

[1] А. А. Беляев, “Сингулярные возмущения степеней оператора Лапласа на торе”, *Матем. заметки*, **94 : 4** (2013), 632 – 636.

[2] A. A. Belyaev, “Characterization of spaces of multipliers for Bessel potential spaces”, *Math. Notes*, **96 : 6** (2014), 634 – 646.

Прочие публикации

[3] А. А. Беляев, “О точности вложения пространств бесселевых потенциалов в пространства мультипликаторов”, *Международная конференция “Современные проблемы математики, механики и их приложений”, посвящённая 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего,* Материалы конференции, М.: Университетская книга, 2009.

[4] А. А. Беляев, “Сингулярные возмущения степеней оператора Лапласа на торе”, *Международная конференция “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвящённая 110-ой годовщине со дня рождения И.Г. Петровского, XXIII совместное заседание Московского математического общества и семинара им. И. Г. Петровского,* Сборник тезисов, М.: Изд. МГУ, 2011.

[5] А. А. Беляев, “Теоремы вложения для пространств мультипликаторов”, *Международная конференция “Спектральная теория и дифференциальные уравнения”, посвящённая 100-летию со дня рождения Б. М. Левитана,* Сборник тезисов, М.: Изд. МГУ, 2014.

[6] А. А. Беляев, “Пространства мультипликаторов для пространств бесселевых потенциалов: эквивалентные нормы и характеризация в шкале пространств $H^s_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n)$”, *Международная конференция “Функциональные пространства и теория приближения функций”, посвящённая 110-летию со дня рождения академика С. М. Никольского,* Тезисы докладов, М.: Изд. МИАН, 2015.