МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.518.23 + 517.983.28 + 517.984.5

Беляев Алексей Александрович

Мультипликаторы в пространствах бесселевых потенциалов и сингулярные возмущения эллиптических операторов

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук
профессор А. А. Шкаликов

Москва
2016

Оглавление

Введение

Диссертация посвящена изучению пространств мультипликаторов в пространствах бесселевых потенциалов и применению теории мультипликаторов для исследования сингулярных возмущений эллиптических дифференциальных операторов. В теории возмущений дифференциальных операторов, наряду с классической ситуацией возмущения регулярным потенциалом, большой интерес представляет случай, когда потенциал не является даже локально интегрируемым. Впервые вопросы, посвящённые математически строгому рассмотрению возмущений оператора Лапласа сингулярными потенциалами типа дельта-функции Дирака, были исследованы в цикле статей Ф. А. Березина, Р. А. Минлоса и Л. Д. Фаддеева (см. [3, 13]). Отметим, что случаи потенциалов типа дельта-функции и её обобщённой производной, являющиеся модельными в теории сингулярных возмущений дифференциальных операторов, имеют многочисленные приложения в математической физике и до сих пор привлекают внимание исследователей (см., например, [22, 33]). Наряду с модельной ситуацией возмущения оператора Лапласа сингулярными потенциалами с дискретным носителем интенсивно развивалась и абстрактная теория сингулярных возмущений для операторов общего вида. Изложение этой теории для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве в случае, когда потенциал возмущения является конечномерным оператором, и подробную библиографию по данной теме можно найти в обзорной монографии [24]. Также в [24] рассматриваются приложения этой теории к изучению сингулярных возмущений эллиптических дифференциальных операторов в случае потенциалов, порождённых точечным взаимодействием. Детальному же рассмотрению возмущений оператора Лапласа сингулярными потенциалами с дискретным носителем и приложениям полученных в данной области результатов к квантовой физике и электродинамике посвящена монография [23].

Рассмотрение сингулярных возмущений конкретных дифференциальных операторов естественным образом приводит к задаче исследования мультипликаторов в функциональных пространствах соболевского типа. Уже в простейшем случае классического оператора Лапласа с областью определения $W_2^2(\mathbb{R}^n)$ изучение его возмущений сингулярными потенциалами оказывается тесно связанным с исследованием мультипликаторов из пространства Соболева с положительным индексом гладкости в пространство Соболева с отрицательным индексом гладкости. Действительно, классический оператор Лапласа допускает продолжение до оператора, действующего из пространства $W_2^1(\mathbb{R}^n)$ в пространство $W_2^{-1}(\mathbb{R}^n)$, и поэтому даже сама проблема корректной определённости оператора $-\Delta + M_\mu$, где под $\Delta\colon W_2^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow W_2^{-1}(\mathbb{R}^n)$ мы понимаем продолжение оператора Лапласа на $W_2^1(\mathbb{R}^n)$, а под M_μ — оператор умножения на распределение μ, сводится к изучению вопроса о том, когда μ является мультипликатором из $W_2^1(\mathbb{R}^n)$ в $W_2^{-1}(\mathbb{R}^n)$. Более того, рассмотрение пространства мультипликаторов $M[W_2^1(\mathbb{R}^n) \to W_2^{-1}(\mathbb{R}^n)]$ оказывается полезным и для исследования спектральных свойств возмущённого оператора $-\Delta + M_\mu$, таких, например, как классическая проблема аппроксимации в смысле резольвентной сходимости этого оператора возмущениями оператора Лапласа с гладким потенциалом, изучавшаяся ранее многими авторами (см., например, [4, 58]).

Одной из первых работ, где методы теории мультипликаторов были применены к изучению сингулярных возмущений дифференциальных операторов эллиптического типа в случае потенциалов с недискретным носителем, была статья М. И. Нейман-Заде и А. А. Шкаликова [17]. Это направление исследований было продолжено в цикле статей Дж.-Г. Бака, М. И. Нейман-Заде, А .М. Савчука, А. А. Шкаликова (см. [1, 16, 60]). Другой подход к рассмотрению сингулярных возмущений операторов типа Лапласа, также основанный на применении теории мультипликаторов, восходит к статье В. Г. Мазьи и И. Э. Вербицкого [54]. Этот подход, опирающийся на получение достаточных условий принадлежности потенциала пространству мультипликаторов в терминах ёмкостей, получил развитие в статьях [55, 56]. Отметим, что применение теории мультипликаторов для изучения сингулярных возмущений эллиптических дифференциальных операторов не ограничивается только лишь случаем классического оператора Лапласа, породившим интерес к этой тематике. Так, ещё в работе [17] методы теории мультипликаторов применялись для исследования сингулярных возмущений как оператора Лапласа, так и полигармонического оператора $(-\Delta)^m$, где $m \in \mathbb{N}$. В статье же [55] рассматривались сингулярные возмущения оператора $\sqrt{-\Delta}\colon W_2^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow W_2^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$, а в работе [60] с помощью теории мультипликаторов изучались заданные на $\mathbb{R}^n$ сильно эллиптические дифференциальные операторы с равномерно сильно эллиптической главной частью и младшими коэффициентами из пространств бесселевых потенциалов с отрицательными показателями гладкости. Для исследования спектральных свойств возмущений заданного на окружности оператора $(-\frac{d^2}{dx^2})^s$, $s > 0$, в случае, когда потенциал принадлежит обобщённому периодическому пространству Соболева с отрицательным индексом гладкости, в статье [14] также была применена техника теории мультипликаторов. Это позволило внести существенный вклад в ставшее особенно актуальным в последнее время исследование возмущений операторов типа Шрёдингера сингулярными периодическими и антипериодическими потенциалами (см., например, работы [26, 39, 41, 42, 44, 57]).

Отметим, что, помимо применения к теории сингулярных возмущений дифференциальных операторов, теория мультипликаторов также оказывается полезной при изучении различных задач теории операторов, таких, как проблема ограниченности в шкале пространств типа Соболева сингулярных интегральных операторов, в частности, операторов Кальдерона–Зигмунда (см. [35, 45, 70]), нахождение асимптотики собственных значений некоторых вырожденных эллиптических дифференциальных и псевдодифференциальных операторов (см. [28, 29, 38]), получение теорем слабо-сильной единственности (weak-strong uniqueness) задачи Коши для уравнения Навье–Стокса (см. [36, 48], а также монографию [47], где приведена и подробная библиография по этой тематике), исследование псевдодифференциальных операторов с символами, удовлетворяющими условиям ослабленной регулярности (см. [34, 46, 50, 51, 69]).

Различные аспекты теории мультипликаторов для пространств соболевского типа представляют и самостоятельный интерес в рамках теории функциональных пространств. Для пространств бесселевых потенциалов детальное изучение мультипликаторов было инициировано пионерской работой Роберта С. Стрихартца [66], где, в частности, было показано, что при выполнении условия $s > \frac{n}{p}$ на пространстве $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ может быть корректно определена операция поточечного умножения, причём пространство $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ является алгеброй относительно этой операции. В дальнейшем изучение мультипликаторов как в пространствах бесселевых потенциалов, так и в более общем случае пространств типа Бесова–Лизоркина–Трибеля, было продолжено в ситуации, когда индексы гладкости обоих пространств положительны, причём в большинстве работ рассматривались пространство мультипликаторов $M[A_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \to A_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)]$, где $A_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ есть некоторое пространство типа Бесова–Лизоркина–Трибеля. В рамках этой проблематики были развиты различные методы исследования пространств мультипликаторов и обнаружены приложения полученных в этом направлении результатов к исследованию многих актуальных проблем анализа. Так, для изучения мультипликаторов в пространствах соболевского типа в конце 1970-ых - начале 1980-ых годов в цикле работ В. Г. Мазьи, Т. О. Шапошниковой, И. Э. Вербицкого и их соавторов использовался подход, основанный на описании пространств мультипликаторов в терминах ёмкостей компактных множеств, детальное изложение которого можно найти в монографиях [11, 53]. Другой подход, основанный на представлении произведения двух функций в виде суммы трёх парапроизведений, то есть слабо сходящихся рядов, построенных по гладкому диадическому разбиению единицы с помощью прямого и обратного преобразования Фурье в $S'(\mathbb{R}^n)$, получил развитие в работах [27, 40, 43, 49, 63, 65]. Систематическое изложение этого метода, оказавшегося особенно плодотворным при изучении проблематики теории мультипликаторов, и подробную библиографию можно найти в монографии Т. Рунста и В. Зикеля [62]. Также отметим, что мультипликаторы в пространствах соболевского типа изучались другими методами в статьях [5, 7, 8, 18, 32, 59, 68].

К работе Стрихартца [66] восходит основанный на использовании шкалы равномерно локализованных пространств способ получения наиболее конструктивного описания пространств мультипликаторов. А именно, в [66] было доказано, что при выполнении условия $s > \frac{n}{p}$ пространство мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_p^s(\mathbb{R}^n)]$ совпадает с равномерно локализованным пространством бесселевых потенциалов $H^s_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n)$. Предложенный в этой работе подход оказался продуктивным и в более общей ситуации, когда для описания мультипликаторов из функционального пространства типа Бесова–Лизоркина–Трибеля $A^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ в себя используется шкала равномерно локализованных пространств $A^s_{p,\,q,\,unif}(\mathbb{R}^n)$, определяемых по аналогии с $H^s_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n)$. Так, в работе [31] рассматривалось пространство Лизоркина–Трибеля $F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ и для мультипликаторов в этом пространстве было получено описание

$$M[F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n) \to F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)] = F^s_{p,\,q,\,unif}(\mathbb{R}^n)$$

при $p,\ q \geqslant 1,\ s > \frac{n}{p}$. В ситуации, когда в роли $A^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ выступает пространство Бесова $B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$, получение аналогичного описания оказывается существенно более сложной задачей, поскольку установленное для пространств бесселевых потенциалов в работе [66] свойство равномерной локализации допускает обобщение для $F^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$, но для $B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ это свойство справедливо лишь в случае $p = q$, когда пространства $B^s_{p,\,p}(\mathbb{R}^n)$ и $F^s_{p,\,p}(\mathbb{R}^n)$ совпадают. Исходя из отсутствия у пространств Бесова $B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)$ свойства равномерной локализации при $p \neq q$, в статье [25] было показано, что в случае $p > q$ даже при выполнении условия $s > \frac{n}{p}$ пространство мультипликаторов $M[B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n) \to B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)]$ строго вложено в пространство $B^s_{p,\,q,\,unif}(\mathbb{R}^n)$. Тем не менее, в случае выполнения условия $1 \leqslant p \leqslant q$ при $s > \frac{n}{p}$ позднее в [64] было установлено совпадение пространства мультипликаторов $M[B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n) \to B^s_{p,\,q}(\mathbb{R}^n)]$ с $B^s_{p,\,q,\,unif}(\mathbb{R}^n)$.

Для пространства мультипликаторов из $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ в $H^t_p(\mathbb{R}^n)$ при $p > 1,\ s \geqslant t \geqslant 0$, $s > \frac{n}{p}$ аналогичное описание в терминах шкалы пространств $H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ было получено в начале 1980-ых в цикле работ В. Г. Мазьи и Т. О. Шапошниковой и нашло своё отражение в монографии [11]. Однако, в случае, когда индексы p и q необязательно совпадают, пространство мультипликаторов $M[H^s_p(\mathbb{T}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$ оставалось неисследованным в литературе даже при $s,\ t \geqslant 0$.

Изучение же мультипликаторов из пространства бесселевых потенциалов с положительным индексом гладкости в пространство бесселевых потенциалов с отрицательным индексом гладкости было инициировано значительно позднее работой [17]. Впоследствии задача описания мультипликаторов в пространствах бесселевых потенциалов с индексами гладкости разного знака исследовалась также в [35, 36, 54, 55], но шкала пространств $H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$, описание в терминах которой даёт конструктивный критерий принадлежности распределения пространству мультипликаторов, применялась для решения этой задачи только в работах [1, 60]. А именно, в случае выполнения условий, обобщающих восходящее к [66] ограничение $s > \frac{n}{p}$, в статьях [1, 60] были получены характеризации пространств мультипликаторов $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-s}_{p'}(\mathbb{R}^n)]$, $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-s}_p(\mathbb{R}^n)]$ и $M[H^s_2(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_2(\mathbb{R}^n)]$ в терминах равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов при $s,\ t \geqslant 0$. Также отметим работу [52], где в стрихартцевском случае для классических пространств Соболева (являющихся частным случаем пространств бесселевых потенциалов, когда индекс гладкости является целым числом) было получено описание пространства мультипликаторов $M[W_p^k(\mathbb{R}^n) \to W_p^{-l}(\mathbb{R}^n)]$, $k,\ l \in \mathbb{N}$, в терминах равномерно локализованных классических пространств Соболева $W^m_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$.

Проблеме описания пространства мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ в терминах равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов и посвящена основная часть данной работы. А именно, в первой главе в случае невыполнения условий типа Стрихартца устанавливается, что невозможно получить описание пространства $M[H_2^s(\mathbb{R}^n) \to H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)]$, $s,\ t > 0$, в шкале $H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$, и демонстрируется оптимальность показателя $r_0 = \frac{n}{\max(s,t)}$ в одностороннем непрерывном вложении

$$H^{-\min(s,t)}_{r_0,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_2^s(\mathbb{R}^n) \to H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)].$$

Во второй главе в случае выполнения условий, обобщающих классическое условие Стрихартца, при $s,\ t \geqslant 0$, $p,\ q > 1$ получена характеризация пространств мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ и $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^{-t}(\mathbb{R}^n)]$ в терминах пространств $H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ и показано, что все накладываемые при этом дополнительные ограничения, связывающие индексы s, t, p, q и размерность пространства n, являются необходимыми для получения такой характеризации. Отметим, что случай различных индексов p и q с точки зрения описания соответствующего пространства мультипликаторов в шкале $H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ ранее не исследовался. В нестрихартцевском же случае, когда подобное описание невозможно даже в простейшей ситуации $p = q = 2$, устанавливается справедливость непрерывного вложения типа

$$H^{-s}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^{-s}(\mathbb{R}^n)].$$

Третья глава диссертации посвящена изучению мультипликаторов, рассматриваемых на $n-$мерном торе $\mathbb{T}^n$, и применению полученных результатов, характеризующих пространство $M[H_2^s(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-s}(\mathbb{T}^n)]$, для исследования заданных на $\mathbb{T}^n$ возмущений степени оператора Лапласа $(-\Delta)^s$, $s \geqslant 0$, потенциалом из соответствующего пространства мультипликаторов.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы из 76 наименований. Общий объём диссертации составляет 149 страниц. Работа носит теоретический характер и представляет интерес для специалистов в области теории функциональных пространств, теории интерполяции, спектральной теории эллиптических дифференциальных операторов и смежных вопросов теории уравнений с частными производными. Результаты диссертации докладывались на ряде научно-исследовательских семинаров и на четырёх международных научных конференциях в МГУ имени М. В. Ломоносова, МИ РАН имени В. А. Стеклова и РУДН.

Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах автора, 2 из которых опубликованы в журналах из списка ВАК. Работ, опубликованных в соавторстве, нет.

Опишем теперь содержание диссертации более подробно.

В первой главе мы рассматриваем пространство

$$M[s,-t] \stackrel{def}{=} M[H_2^s(\mathbb{R}^n) \to H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)]$$

мультипликаторов из $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)$ в случае, когда $s,\ t \geqslant 0$ и $\max(s,t) > 0$. Для удобства изложения далее будем использовать обозначения

$$m = \min(s,t),\ p_1 = \frac{n}{\max(s,t)}\ .$$

Основной целью этой главы является доказательство точности непрерывного вложения пространств

$$H^{-m}_{p_1,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[s,-t]$$

при условии $\max(s,t) < \frac{n}{2}$. А именно, будет показано, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует такое распределение $v_\varepsilon \in S'(\mathbb{R}^n)$, что

$$v_\varepsilon \in H^{-m}_{p_1-\varepsilon,\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

но

$$v_\varepsilon \notin M[s,-t].$$

Актуальность этого результата состоит в том, что из него следует невозможность точного описания пространства мультипликаторов $M[s,-t]$ в терминах равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов $H^{\gamma}_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ в случае, когда $\max(s,t) < \frac{n}{2}$.

Отметим, что в случае $\max(s,t) > \frac{n}{2}$ из результатов работы [60] тривиально следует, что

$$M[s,-t] = H^{-m}_{2,\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

причём нормы этих пространств эквивалентны. Заметим, что дополнительное условие $s \geqslant t$, накладываемое в [60], не ограничивает общности в силу справедливости соотношения

$$M[s,-t] = M[t,-s].$$

Также из результатов этой работы непосредственно следует справедливость двусторонних непрерывных вложений

$$H^{-m}_{p_1,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[s,-t] \subset H^{-m}_{2,\,unif}(\mathbb{R}^n)$$

при $\max(s,t) < \frac{n}{2}$. Сформулированный выше основной результат главы 1 означает, что в ситуации, когда $0 < \max(s,t) < \frac{n}{2}$, показатель $p_1 = \frac{n}{\max(s,t)}$ является неулучшаемым в том смысле, что при его уменьшении соответствующее равномерно локализованное пространство бесселевых потенциалов уже не будет содержаться в пространстве $M[s,-t]$.

В первом параграфе мы приводим необходимые определения и классические результаты теории пространств бесселевых потенциалов и теории мультипликаторов для пространств этого типа. Они будут использоваться нами не только в этой главе, но и в последующих. Центральными для первой главы из этих результатов являются теорема вложения для пространств типа $H^{\gamma}_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n)$, теорема о замкнутости пространств типа $H^{\gamma}_{p}(\mathbb{R}^n)$ относительно комплексной интерполяции и полученное в статье [60] непрерывное вложение

$$H^{-t}_{\frac{n}{s},\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[s,-t],$$

справедливое при выполнении условий $0 \leqslant t \leqslant s < \frac{n}{2}$, $s > 0$.

Во втором параграфе мы сначала отмечаем, что для положительных чисел α выполнение неравенства $\alpha < n$ является критерием корректной определённости (в смысле принадлежности дуальному пространству Шварца $S'(\mathbb{R}^n)$) регулярного функционала $\mathbf{f}_\alpha$, порождённого функцией

$$f_\alpha\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; x \longmapsto |x|^{-\alpha}.$$

Также в этом параграфе мы получаем равномерную по $z \in \mathbb{R}^n$ степенную оценку для преобразования Фурье от функции $\psi_{(z)} \cdot f_\alpha$, где $\psi_{(z)}$ – сдвиг на z функции $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$. С помощью этой оценки устанавливается, что в случае $t > -\frac{n}{2}$ выполнение условия $0 < \alpha < \min\bigl(n, t + \frac{n}{2}\bigr)$ является достаточным для принадлежности функционала $\mathbf{f}_\alpha$ пространству $H^{-t}_{2,\,unif}(\mathbb{R}^n)$.

В третьем параграфе мы получаем, что выполнение неравенства $\alpha \leqslant s + t$ является необходимым, а выполнение неравенства $\alpha < s + t$ – достаточным условием принадежности функционала $\mathbf{f}_\alpha$ пространству мультипликаторов $M[s,-t]$. Используя этот факт, а также результаты двух предыдущих параграфов, в завершение мы доказываем основную теорему этой главы.

Теорема 1. *Пусть s, $t \geqslant 0$, $0 < \max(s,t) < \frac{n}{2}$, $m = \min(s,t)$, $p_1 = \frac{n}{\max(s,t)}$. Тогда для произвольного числа ε, удовлетворяющего условию $0 < \varepsilon < p_1 - 2$, найдётся такое число*

$$\delta(\varepsilon) \in \Bigl(0; \frac{n}{2} - \max(s,t)\Bigr),$$

что для $\alpha = s + t + \delta(\varepsilon)$ имеем

$$\mathbf{f}_\alpha \in H^{-m}_{p_1-\varepsilon,\,unif}(\mathbb{R}^n) \setminus \, M[s,-t].$$

Вторая глава посвящена проблеме характеризации мультипликаторов из $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ в $H^t_q(\mathbb{R}^n)$ в терминах конкретных функциональных пространств при некоторых естественных ограничениях на индексы s, $t \in \mathbb{R}$, p, $q > 1$.

Впервые шкала равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов $H^{\gamma}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $r > 1$, была использована для описания пространства мультипликаторов $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^s_p(\mathbb{R}^n)]$ в пионерской работе Роберта С. Стрихартца [66]. В этой работе такое описание было дано в случае выполнения неравенства $s > \frac{n}{p}$, гарантирующего, что пространство $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ является алгеброй относительно операции поточечного умножения. Впоследствии целый ряд аналогичных результатов был получен для мультипликаторов из одного пространства бесселевых потенциалов в другое в ситуации, когда индексы гладкости обоих пространств положительны (см. монографии [53; Chapter 3] и [62; Chapter 4], а также содержащуюся там библиографию), но наиболее общий случай пространства мультипликаторов из $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ в $H^t_q(\mathbb{R}^n)$, где $s,\ t \geqslant 0,\ p,\ q > 1$, оставался неисследованным, даже если выполнены условия стрихартцевского типа.

Случай же, когда одно из пространств имеет отрицательный индекс гладкости, долгое время практически не рассматривался в исследованиях по теории мультипликаторов в функциональных пространствах соболевского типа. Начало его систематическому изучению было положено циклом работ А. А. Шкаликова, М. И. Нейман-Заде и Дж.-Г. Бака [1, 17, 60], где был развит метод исследования мультипликаторов из пространства бесселевых потенциалов с положительным индексом гладкости в пространство бесселевых потенциалов с отрицательным индексом гладкости, основанный на критериях справедливости вложений типа

$$H^{\gamma}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{-t}_{p'}(\mathbb{R}^n)]$$

в терминах выполнения мультипликативных функциональных оценок. С помощью этого подхода в работах [1, 60] были получены следующие результаты:

$$1)\ M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-s}_{p'}(\mathbb{R}^n)] = H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n) \ \text{ при } \ 1 < p \leqslant 2,\ s > \frac{n}{p}\ ;$$

$$2)\ M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-s}_{p}(\mathbb{R}^n)] = H^{-s}_{\max(p,p'),\,unif}(\mathbb{R}^n) \ \text{ при } \ p > 1,\ s > \frac{n}{\max(p,p')}\ ;$$

$$3)\ M[H^s_2(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{2}(\mathbb{R}^n)] = H^{-t}_{2,\,unif}(\mathbb{R}^n) \ \text{ при } \ s \geqslant t \geqslant 0,\ s > \frac{n}{2}\ .$$

Кроме того, в ситуации, когда показатели гладкости являются целыми и соответствующие пространства бесселевых потенциалов совпадают с классическими пространствами Соболева, в работе [52] было установлено, что

$$4)\ M[W^k_p(\mathbb{R}^n) \to W^{-l}_p(\mathbb{R}^n)] = W^{-l}_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap W^{-k}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n)$$

при $k, l \in \mathbb{N}$ и выполнении одного из условий

$$a)\ k \geqslant l,\ k > \frac{n}{p}\ ;\ \ b)\ l \geqslant k,\ l > \frac{n}{p'}\ .$$

Основным результатом этой главы является описание пространства мультипликаторов из $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^t(\mathbb{R}^n)$ при $s \geqslant 0$, $t \in \mathbb{R}$, p, $q > 1$ в наиболее общей постановке. Нами также будет показано, что накладываемые при этом на индексы s, t, p, q дополнительные ограничения являются естественными в том смысле, что если хотя бы одно из них не выполняется, то характеризация пространства мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ в терминах шкалы пространств $H_{r,\,unif}^{\gamma}(\mathbb{R}^n)$ невозможна. Если индекс гладкости t второго пространства неположителен, то полученное описание обобщает приведённые выше результаты из [1, 52, 60].

В первом параграфе даётся общее определение мультипликатора из банахова пространства функций $S_1(\mathbb{R}^n)$ в пространство обобщённых функций $S_2(\mathbb{R}^n) \subset D'(\mathbb{R}^n)$ в том случае, когда $D(\mathbb{R}^n)$ плотно вложено в $S_1(\mathbb{R}^n)$. В том случае, когда $S_2(\mathbb{R}^n)$ изометрически изоморфно некоторому банахову пространству функций $T_1(\mathbb{R}^n)$, которое содержит $D(\mathbb{R}^n)$ в качестве плотного подмножества, показывается, что можно дать эквивалентное определение мультипликатора $\mu \in M[S_1(\mathbb{R}^n) \to S_2(\mathbb{R}^n)]$ в терминах непрерывности на $S_1(\mathbb{R}^n) \times T_1(\mathbb{R}^n)$ полуторалинейной формы, порождённой распределением μ. Этот подход обобщает данное в работе [60] определение пространства мультипликаторов $M[H_2^s(\mathbb{R}^n) \to H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)]$ при s, $t \geqslant 0$.

Далее, исходя из общего определения, вводится пространство мультипликаторов из $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^t(\mathbb{R}^n)$ при s, $t \in \mathbb{R}$, p, $q > 1$. Также в первом параграфе излагаются простейшие свойства пространства мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ и доказывается непрерывное вложение

$$M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)] \subset H_{q,\,unif}^t(\mathbb{R}^n) \cap H_{p',\,unif}^{-s}(\mathbb{R}^n), \tag{1}$$

справедливое для произвольных чисел s, $t \in \mathbb{R}$, p, $q > 1$.

Основная цель второго параграфа состоит в том, чтобы получить критерий справедливости непрерывного вложения

$$H_{r,\,unif}^{\gamma}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$$

в терминах выполнения некоторой мультипликативной функциональной оценки. Метод получения подобных критериев, развитый в работе [1] для частного случая, когда $t = s$ и $q = p'$, существенно использует тот факт, что непрерывные вложения

$$H_{r,\,unif}^{\gamma}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)] \ \text{ и } \ H_r^{\gamma}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)]$$

должны выполняться одновременно. В общем случае одновременность выполнения непрерывных вложений

$$H_{r,\,unif}^{\gamma}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)] \ \text{ и } \ H_r^{\gamma}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$$

имеет место для произвольных чисел $\gamma \in \mathbb{R}$ и $r > 1$, если на пространстве мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ можно ввести эквивалентную стандартной норме равномерную мультипликаторную норму

$$|||\mu|||_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} \overset{def}{=} \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \{ \, \|\eta_{(z)} \cdot \mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} \},$$

где $\eta_{(z)}$ – сдвиг на $z \in \mathbb{R}^n$ финитной гладкой функции η, удовлетворяющей некоторым дополнительным условиям. Поэтому проблема описания пространства мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ в шкале пространств $H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ оказывается тесно связанной с нахождением необходимых и достаточных условий на индексы p и q, при которых указанные выше нормы эквивалентны на $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$.

В начале второго параграфа, используя обобщение классической теоремы Стрихартца о равномерной локализации, мы доказываем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $1 < p \leqslant q$, $s,\ t \in \mathbb{R}$ и функция $\eta \in D(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям теоремы Стрихартца о равномерной локализации, то есть*
a) $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$,
b) $\eta(x) = 1 \quad \forall\, x \in Q_1 \overset{def}{=} \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leqslant 1 \;\forall\, i = \overline{1,n}\,\}$,
c) $\eta(x) = 0 \quad \forall\, x \notin Q_2 \overset{def}{=} \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leqslant 2 \;\forall\, i = \overline{1,n}\,\}$.
Тогда пространство мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ совпадает с множеством

$$M_{unif}[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)] \overset{def}{=} \{u \in D'(\mathbb{R}^n)| \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \|\eta_{(z)} \cdot u\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} < +\infty\},$$

причём равномерная мультипликаторная норма $|||\cdot|||_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]}$ эквивалентна стандартной норме пространства $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$.

Далее показывается, что для регулярного функционала $\mathbf{I}$, порождённого функцией, тождественно равной единице на $\mathbb{R}^n$, норма $\|\mathbf{I}\|_{M_{unif}[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]}$ конечна, откуда следует, что ограничение $p \leqslant q$ в условиях леммы 1 является необходимым для случая $s \geqslant t$, который и будет преимущественно рассматриваться далее.

В завершение параграфа в случае $s \geqslant 0$ устанавливается следующий критерий справедливости непрерывных вложений типа

$$H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$$

в терминах выполнения мультипликативной функциональной оценки.

Утверждение 1. *Пусть $\gamma,\ s,\ t \geqslant 0,\ p,\ q,\ r > 1$. Тогда*

1) при $p \leqslant q$ непрерывное вложение

$$H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$$

имеет место в том и только в том случае, когда найдётся такая константа $C > 0$, что выполняется мультипликативная оценка

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\, \|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}\, \|\mathbf{g}\|_{H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)} \;\; \forall\, f,\ g \in D(\mathbb{R}^n);$$

2) при $p \leqslant q'$ непрерывное вложение

$$H^{-\gamma}_{r',\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]$$

имеет место в том и только в том случае, когда найдётся такая константа $C > 0$, что выполняется мультипликативная оценка

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H^{\gamma}_r(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\,\|\mathbf{f}\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\,\|\mathbf{g}\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)}\ \ \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{R}^n).$$

В третьем параграфе в случае $s \geqslant t \geqslant 0$ при выполнении одного из условий

$$a)\, 1 < p < q,\ \ s - \frac{n}{p} \geqslant t - \frac{n}{q} \quad \text{или} \quad b)\, p \geqslant q > 1$$

мы доказываем общую мультипликативную оценку

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H^{t}_q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\,\|\mathbf{f}\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\,\|\mathbf{g}\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)}\ \ \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{R}^n),$$

где константа $C > 0$ не зависит от выбора функций $f,\, g \in D(\mathbb{R}^n)$.

Непосредственно из этой оценки, непрерывного вложения (1) и части 1) утверждения 1 следует теорема, дающая в случае выполнения условий типа Стрихартца описание пространства мультипликаторов из одного пространства бесселевых потенциалов в другое в ситуации, когда индексы гладкости обоих пространств положительны.

Теорема 2. *Пусть $p,\ q > 1,\ p \leqslant q,\ s > \frac{n}{p},\ t \geqslant 0$ и $s - \frac{n}{p} \geqslant t - \frac{n}{q}$. Тогда имеет место совпадение пространств*

$$M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)] = H^t_{q,\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

причём нормы этих пространств эквивалентны.

Стоит отметить, что накладываемые в теореме 2 в дополнение к классическому условию Стрихартца $s > \frac{n}{p}$ ограничения $p \leqslant q$ и $s - \frac{n}{p} \geqslant t - \frac{n}{q}$ являются необходимыми для характеризации пространства $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$ в терминах шкалы пространств $H^{\gamma}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $r > 1$. Действительно, в условиях теоремы 2 из справедливости непрерывного вложения

$$H^{\gamma}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^t_q(\mathbb{R}^n)]$$

для каких-либо показателей $\gamma \in \mathbb{R}$ и $r > 1$ следует справедливость непрерывного вложения

$$H^s_p(\mathbb{R}^n) \subset H^t_q(\mathbb{R}^n).$$

Последнее же непрерывное вложение, как известно, не имеет места в случае невыполнения хотя бы одного из неравенств $p \leqslant q$ и $s - \frac{n}{p} \geqslant t - \frac{n}{q}$.

Из установленной выше мультипликативной оценки и результатов предыдущего параграфа нетрудно получить описание пространства мультипликаторов в терминах шкалы равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов в следующих частных случаях:

$$a)\ M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_{q'}^{-s}(\mathbb{R}^n)] = H^{-s}_{\max(p',\,q'),\,unif}(\mathbb{R}^n) \quad \text{при } 1 < p \leqslant q',\ s > \frac{n}{\max(p,q)}\ ;$$

$$b)\ M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_{p'}^{-t}(\mathbb{R}^n)] = H^{-\min(s,t)}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n) \quad \text{при } 1 < p \leqslant 2,\ s,\ t \geqslant 0,\ \max(s,t) > \frac{n}{p}\ .$$

В наиболее общей ситуации нахождение для пространства $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]$ при $s,\ t \geqslant 0,\ p,\ q > 1$ аналогичного описания оказывается значительно более сложной задачей. Для её решения нам потребуются следующие два утверждения, также доказываемые в третьем параграфе: лемма о дифференцировании мультипликаторов и лемма о представлении произвольного распределения из $S'(\mathbb{R}^n)$ в виде суммы элементов специального вида.

Лемма 2. *Пусть $s,\ t \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{Z}_+,\ p,\ q > 1$ и*

$$\mu \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_q^t(\mathbb{R}^n)] \cap M[H_p^{s-m}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_q^{t-m}(\mathbb{R}^n)].$$

Тогда $D^\alpha \mu \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_q^{t-m}(\mathbb{R}^n)]\ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n : \sum\limits_{j=1}^n \alpha_j = m$ и

$$\|D^\alpha \mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-m}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant C\, \|\mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)] \cap M[H_p^{s-m}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-m}(\mathbb{R}^n)]},$$

где C – некоторая положительная константа, зависящая только от $s,\ t,\ p,\ q,\ m$ и n.

Лемма 3. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда существуют непрерывные линейные операторы $A_0,\ A_\beta,\ \beta \in \mathbb{Z}_+^n,\ |\beta|_1 \overset{def}{=} \sum\limits_{j=1}^n \beta_j = k$, действующие из $S'(\mathbb{R}^n)$ в $S'(\mathbb{R}^n)$, такие, что для произвольного $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ имеем*

$$u = A_0(u) + \sum_{|\beta|_1 = k} D^\beta(A_\beta(u)),$$

причём $\forall\ s \in \mathbb{R},\ \forall\, p > 1$ ограничения операторов A_0, A_β на пространство $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ являются ограниченными операторами из $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_p^{s+k}(\mathbb{R}^n)$.

Эти две леммы используются в доказательстве следующей ключевой теоремы, которая даёт описание пространства мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]$ при $s,\ t \geqslant 0,\ p,\ q > 1$ в ситуации, когда выполняются условия, обобщающие классическое условие Стрихартца.

Теорема 3. *Пусть $p,\ q > 1,\ p \leqslant q'$ и выполнено одно из следующих двух условий:*

$$1)\ s \geqslant t \geqslant 0,\ s > \frac{n}{p} \quad \text{или} \quad 2)\ t \geqslant s \geqslant 0,\ t > \frac{n}{q}\ .$$

Тогда имеет место совпадение пространств

$$M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)] = H^{-t}_{q',\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

причём нормы этих пространств эквивалентны.

Отметим, что ограничения, накладываемые на индексы пространств в теореме 3, являются необходимыми для того, чтобы получить при $s, t \geqslant 0$, $p,\ q > 1$ описание пространства мультипликаторов из $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ в $H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)$ в терминах равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов $H^{\gamma}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$. Действительно, поскольку в условиях теоремы 3 справедливо непрерывное вложение

$$H^{-\gamma_1}_{r_1,\,unif}(\mathbb{R}^n) \ \subset\ H^{-t}_{q',\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

где $\gamma_1 = \min(s,t)$, $r_1 = \max(p', q')$, то, рассуждая так же, как и в случае теоремы 2, легко видеть, что в формулировке теоремы 3 нельзя отказаться от ограничения $p \leqslant q'$. Условия же стрихартцевского типа в теореме 3 являются необходимыми даже в простейшей ситуации, когда $p = q = 2$, поскольку, как отмечается в главе 1, при выполнении неравенства $\max(s,t) < \frac{n}{2}$ невозможно дать описание пространства мультипликаторов $M[H^s_2(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_2(\mathbb{R}^n)]$ в шкале пространств $H^{\gamma}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $r > 1$.

Завершает вторую главу следующий результат, устанавливающий в нестрихартцевском случае одностороннее вложение типа

$$H^{\gamma}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-s}_{q'}(\mathbb{R}^n)].$$

Теорема 4. *Пусть $p,\ q > 1$, $p \leqslant q'$ и выполнено условие*

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q'}\right) \cdot n \ <\ s\ <\ \frac{n}{\max(p,q)}.$$

Тогда имеет место непрерывное вложение

$$H^{-s}_{r_0,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-s}_{q'}(\mathbb{R}^n)],$$

где

$$r_0 \ =\ \frac{n}{s - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q'}\right) n}\,.$$

Доказательство теоремы 4 использует мультипликативные оценки, установленные в статье [65], а сам этот результат обобщает полученное в [1; Теорема 6] достаточное условие справедливости непрерывного вложения типа

$$H^{-s}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{-s}_{p'}(\mathbb{R}^n)].$$

Третья глава диссертации посвящена применению теории мультипликаторов для исследования сингулярных возмущений положительных степеней оператора Лапласа на $n-$мерном торе. Описание класса потенциалов, для которых может быть корректно определён возмущённый оператор, естественным образом приводит к требованию принадлежности потенциала конкретному пространству мультипликаторов. Различные спектральные свойства этих возмущений также оказываются связанными со свойствами потенциалов, формулируемыми в терминах теории мультипликаторов. Так, например, сходимость последовательности потенциалов q_m к потенциалу q в пространстве мультипликаторов $M[H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)]$ влечёт равномерную резольвентную сходимость последовательности операторов $(-\Delta)^{\alpha} + Q_m$ к оператору $(-\Delta)^{\alpha} + Q$ в пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) = H_2^0(\mathbb{T}^n)$.

В первом параграфе для полуограниченного снизу самосопряжённого оператора T, действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, определяется шкала гильбертовых пространств $\mathcal{H}_\theta \stackrel{def}{=} D(T^{\frac{\theta}{2}})$, $\theta \geqslant 0$, а также выводятся свойства этой шкалы и действующих в ней степеней оператора T в том виде, в котором они нам понадобятся. Эти свойства будут использоваться в дальнейшем в ситуации, когда в качестве $\mathcal{H}$ берётся пространство $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$, а в качестве T – оператор $Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} + (-\Delta)^{\alpha}$, где $\alpha \geqslant 0$. Заметим, что многие конструкции этого параграфа восходят к работам [24, 17, 60], где рассматривалась схожая ситуация.

Также в первом параграфе вводится пространство $\mathcal{H}_{-1}$ как пополнение пространства $\mathcal{H}$ по норме

$$\|x\|_{\mathcal{H}_{-1}} \stackrel{def}{=} \|T^{-\frac{1}{2}}(x)\|_{\mathcal{H}}, \;\; x \in \mathcal{H},$$

и строится продолжение оператора $T\colon \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}$ до оператора $\mathcal{T}$, действующего из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$. Продолжая оператор $T^{-\frac{1}{2}}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$ до оператора, действующего из $\mathcal{H}_{-1}$ в $\mathcal{H}$, и пользуясь тем, что существует естественный изометрический изоморфизм между пространствами $\mathcal{H}_{-1}$ и $(\mathcal{H}_1)^{\overline{*}}$, мы вводим дуальное скалярное произведение

$$< \cdot, \cdot >_D\colon \mathcal{H}_{-1} \times \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Определив с помощью дуального скалярного произведения понятия симметричности и самосопряжённости для операторов, действующих из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$, мы устанавливаем самосопряжённость оператора $\mathcal{T}\colon \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_{-1}$. Для оператора $Q\colon \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_{-1}$, определённого на всём пространстве $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{T}-$подчинённого в смысле форм с $\mathcal{T}-$гранью, меньшей 1, доказывается секториальность и замкнутость относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ квадратичной формы

$$t + q\colon \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathbb{C}, \;\; (t+q)(v) = < (\mathcal{T} + Q)(v), v >_D \;\; \forall\, v \in \mathcal{H}_1.$$

Это даёт возможность применить классическую первую теорему о представлении [9; Теорема VI.2.1] и получить следующий результат.

Теорема 5. *Пусть линейный оператор $Q\colon \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_{-1}$ подчинён в смысле форм оператору $\mathcal{T}$ с $\mathcal{T}-$гранью $\alpha_Q < 1$ и его область определения совпадает со всем $\mathcal{H}_1$.*

Тогда сужение

$$\mathcal{T}\,\widetilde{+}\,Q\colon \mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$$

оператора $\mathcal{T}+Q$ на множество

$$D(\mathcal{T}\,\widetilde{+}\,Q)=\{x\in\mathcal{H}_1\mid(\mathcal{T}+Q)(x)\in\mathcal{H}\}$$

является секториальным оператором.

Если, кроме того, оператор Q является симметрическим относительно дуального скалярного произведения, то оператор $\mathcal{T}\,\widetilde{+}\,Q$ является самосопряжённым относительно $<\cdot,\cdot>_{\mathcal{H}}$ и полуограниченным снизу относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

Параграф завершает доказательство утверждения, гласящего, что если оператор $Q_0\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_{-1})$ является $\mathcal{T}-$подчинённым с $\mathcal{T}-$гранью $\alpha<1$ и

$$Q_n\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_{-1})}Q_0,$$

то имеет место равномерная резольвентная сходимость последовательности операторов $\mathcal{T}\,\widetilde{+}\,Q_n$ к оператору $\mathcal{T}\,\widetilde{+}\,Q_0$ в пространстве $\mathcal{H}$.

Во втором параграфе вводятся пространства бесселевых потенциалов, заданные на $n-$мерном торе $\mathbb{T}^n$, излагаются их свойства и устанавливается связь этих пространств со шкалой пространств $\mathcal{H}_s\overset{def}{=}D(T^{\frac{s}{2}})$, порождённой оператором

$$T\overset{def}{=}Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}+(-\Delta)^{\alpha}\colon\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)\to\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n),\;\;\alpha\geqslant 0,$$

в соответствии с конструкцией, изложенной в предыдущем параграфе.

Для определения пространств бесселевых потенциалов на $\mathbb{T}^n$ мы вводим оператор

$$J_{s,\pi}\colon D'(\mathbb{T}^n)\longrightarrow D'(\mathbb{T}^n)$$

с помощью соотношения

$$J_{s,\pi}(u)\overset{D'(\mathbb{T}^n)}{=}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}c_k(u)(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}\,\mathbf{f}_k\;\;\forall\,u\in D'(\mathbb{T}^n),$$

где $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ есть ортонормированная система функций в $L_2(\mathbb{T}^n)$, определённая как

$$f_k(z)=(2\,\pi)^{-\frac{n}{2}}\cdot\prod_{m=1}^{n}z_m^{k_m}\quad\forall\,z=(z_1,\dots,z_m)\in\mathbb{T}^n,$$

а коэффициенты Фурье $c_k(u)$ распределения $u\in D'(\mathbb{T}^n)$ задаются равенством

$$c_k(u)=u(f_{-k})\;\;\forall\,k\in\mathbb{Z}^n.$$

Корректность этого определения следует из того, что для произвольной бесконечно гладкой $2\pi-$периодической функции $f\colon\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{C}$ распределение $J_s(\mathbf{f})\in S'(\mathbb{R}^n)$ является регулярным функционалом и его плотность $g\colon\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{C}$ также есть бесконечно гладкая $2\pi-$периодическая функция, причём коэффициенты Фурье функций f и g связаны соотношением

$$c_k(g) = (1+|k|^2)^{\frac{s}{2}} \cdot c_k(f) \ \ \forall\, k \in \mathbb{Z}^n.$$

Пространство $H_p^0(\mathbb{T}^n)$ определяется аналогично пространству $H_p^0(\mathbb{R}^n)$ и для произвольных $s \in \mathbb{R}$ и $p > 1$ вводится пространство бесселевых потенциалов на $n-$мерном торе

$$H_p^s(\mathbb{T}^n) = \{u \in D'(\mathbb{T}^n) \mid J_{s,\pi}(u) \in H_p^0(\mathbb{T}^n)\},$$

с нормой

$$\|u\|_{H_p^s(\mathbb{T}^n)} = \|J_{s,\pi}(u)\|_{H_p^0(\mathbb{T}^n)}.$$

Во втором параграфе также кратко излагаются свойства пространств $H_p^s(\mathbb{T}^n)$, аналогичные свойствам пространств $H_p^s(\mathbb{R}^n)$, приведённым в первом параграфе главы 1.

Далее в этом параграфе рассматривается оператор

$$-\Delta_0\colon L_2(\mathbb{T}^n) \longrightarrow L_2(\mathbb{T}^n)$$

с областью определения $D(-\Delta_0) = W_2^2(\mathbb{T}^n)$, являющийся самосопряжённым замыканием оператора $L = -\Delta_{cl}$, где под Δ_{cl} мы понимаем классический оператор Лапласа с областью определения $C^2(\mathbb{T}^n)$. В терминах коэффициентов Фурье для произвольного $\alpha \geqslant 0$ задаётся оператор

$$(-\Delta_0)^\alpha\colon L_2(\mathbb{T}^n) \longrightarrow L_2(\mathbb{T}^n)$$

с областью определения $\mathbb{H}_2^{2\alpha}(\mathbb{T}^n) \overset{def}{=} \{f \in L_2(\mathbb{T}^n) \,|\, \mathbf{f} \in H_2^{2\alpha}(\mathbb{T}^n)\}$.

Поскольку существует естественный изометрический изоморфизм между пространствами $\mathbb{H}_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$ и $H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$, то оператор

$$(-\Delta_0)^\alpha + Id_{L_2(\mathbb{T}^n)}\colon L_2(\mathbb{T}^n) \to L_2(\mathbb{T}^n)$$

однозначным образом порождает оператор $T\colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$. Так как введённый таким образом оператор T является самосопряжённым и полуограниченным снизу в $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$, то можно, следуя развитому в первом параграфе методу, построить шкалу пространств

$$\mathcal{H}_s \overset{def}{=} D(T^{\frac{s}{2}}),$$

где норма на пространстве $\mathcal{H}_s$ определяется равенством

$$\|u\|_{\mathcal{H}_s} = \|T^{\frac{s}{2}}(u)\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} \ \ \forall\, u \in \mathcal{H}_s.$$

Основным результатом этого параграфа является следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть $\alpha \geqslant 0$, $s \geqslant 0$. Тогда имеет место совпадение пространств*

$$\mathcal{H}_s = H_2^{\alpha s}(\mathbb{T}^n),$$

причём нормы этих пространств эквивалентны.

Отметим также, что с помощью абстрактной конструкции, изложенной в первом параграфе главы 1, оператор $T\colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ с областью определения $H_2^{2\alpha}(\mathbb{T}^n)$ можно продолжить до оператора $\mathcal{T}$, действующего из $H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)$ в $H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$.

Третий параграф посвящен определению пространств мультипликаторов для пространств бесселевых потенциалов на $n-$мерном торе $\mathbb{T}^n$ и доказательству для них теорем вложения, аналогичных теоремам из [60], установленным для пространства мультипликаторов $M[H_2^s(\mathbb{R}^n) \to H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)],\ s,\ t \geqslant 0$.

В начале параграфа мы даём альтернативное определение пространства $H_p^s(\mathbb{T}^n)$, основанное на введении нормы этого пространства с помощью гладкого разбиения единицы на торе, и отмечаем эквивалентность этого определения данному выше классическому определению $H_p^s(\mathbb{T}^n)$. После этого в случае $s,\ t \geqslant 0$ даётся определение пространства мультипликаторов

$$M_\pi[s, -t] \overset{def}{=} M[H_2^s(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)],$$

основанное на продолжении порождённой мультипликатором полуторалинейной формы с $D(\mathbb{T}^n) \times D(\mathbb{T}^n)$ на $H_2^s(\mathbb{T}^n) \times H_2^t(\mathbb{T}^n)$, а также отмечаются некоторые стандартные свойства этих пространств.

Далее для $s,\ t \geqslant 0$ в ситуации $\max(s,t) > 0$ будем обозначать

$$m = \min(s,t), \ \ p_1 = \frac{n}{\max(s,t)}\ .$$

Тогда в случае выполнения неравенства $\max(s,t) > \frac{n}{2}$ доказывается совпадение пространств

$$M_\pi[s, -t] = H_2^{-m}(\mathbb{T}^n),$$

а в случае, когда $\max(s,t) \leqslant \frac{n}{2}$, для произвольного $\varepsilon > 0$ устанавливается справедливость непрерывного вложения

$$H_{p_1}^{-m+\varepsilon}(\mathbb{T}^n) \subset M_\pi[s, -t].$$

Также в этом параграфе мы показываем, что если $\max(s,t) > 0$ и для некоторых чисел $\gamma \in \mathbb{R},\ r > 1$ имеет место непрерывное вложение $H_r^\gamma(\mathbb{T}^n) \subset M_\pi[s, -t]$, то произвольный элемент v пространства $H_r^\gamma(\mathbb{T}^n)$ является компактным мультипликатором из $H_2^s(\mathbb{T}^n)$ в $H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)$. Отсюда, в частности, получаем, что при $\max(s,t) > \frac{n}{2}$ пространство $M_\pi[s, -t]$ состоит только из компактных мультипликаторов.

Четвёртый параграф содержит основные теоремы этой главы. В этом параграфе через M_μ обозначается порождённый мультипликатором $\mu \in M_\pi[s, -t]$ ограниченный линейный оператор из $H_2^s(\mathbb{T}^n)$ в $H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)$, такой, что

$$M_\mu(\mathbf{f}) = f \cdot \mu \quad \forall\, f \in D(\mathbb{T}^n).$$

По аналогии с абстрактной ситуацией, рассматривавшейся в первом параграфе, для операторов $A_1\colon H_2^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\to H_2^{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$ и $A_2\colon H_2^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\to H_2^{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$ через $A_1\widetilde{+}A_2$ будем обозначать ограничение оператора $A_1+A_2\colon H_2^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\to H_2^{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$ на множество

$$D(A_1\widetilde{+}A_2)=\{x\in H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)\mid (A_1+A_2)(x)\in \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)\}.$$

В следующем утверждении устанавливается связь между сходимостью потенциалов в пространстве мультипликаторов и равномерной резольвентной сходимостью соответствующих возмущений степени оператора $-\Delta$ в пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$.

Теорема 7. *Пусть* $\alpha\geqslant 0$, $q\in M_\pi[\alpha,-\alpha]$ *и оператор*

$$Q\overset{def}{=}M_q\colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)\longrightarrow H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$$

подчинён оператору $\mathcal{T}$ *в смысле форм с* $\mathcal{T}-$*гранью* $a<1$. *Пусть также последовательность мультипликаторов* $\{q_m\}_{m\in\mathbb{N}}\subset M_\pi[\alpha,-\alpha]$ *сходится к* q *по норме* $\|\cdot\|_{M_\pi[\alpha,-\alpha]}$. *Тогда имеет место равномерная резольвентная сходимость действующих в пространстве* $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ *операторов*

$$(-\Delta)^{\alpha}\,\widetilde{+}\,Q_m\overset{R}{\Longrightarrow}(-\Delta)^{\alpha}\,\widetilde{+}\,Q,$$

где $Q_m\overset{def}{=}M_{q_m}\colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)\longrightarrow H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ – *ограниченные операторы, порождённые мультипликаторами* q_m.

Из этой теоремы, в частности, следует, что сингулярное возмущение степени оператора Лапласа на торе может быть аппроксимировано последовательностью возмущений с бесконечно гладкими потенциалами. А именно, верен следующий факт:

Следствие 1. *Пусть имеет место один из двух случаев:*
1) $\alpha>\frac{n}{2}$, $q\in H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$;
или
2) $0<\alpha\leqslant\frac{n}{2}$, $q\in H_{n/\alpha}^{-\alpha+\varepsilon}(\mathbb{T}^n)$ *для некоторого* $\varepsilon>0$.
Тогда существует последовательность гладких функций $f_m\in D(\mathbb{T}^n)$, $m\in\mathbb{N}$, *такая, что*

$$(-\Delta)^{\alpha}\,\widetilde{+}\,M_{\mathbf{f}_m}\overset{R}{\Longrightarrow}(-\Delta)^{\alpha}\,\widetilde{+}\,M_q.$$

В силу справедливости непрерывного вложения $H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)\subset H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ и всюду плотности множества $H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)$ в пространстве $H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ по норме $\|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)}$ можно определить понятия резольвенты, спектра, собственных и корневых подпространств для операторов, действующих из $H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)$ в $H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$.

В доказательстве основной теоремы этой главы центральную роль играет лемма, гласящая, что если оператор $A\colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)\longrightarrow H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ компактен относительно норм этих пространств, то у оператора

$$\mathcal{T}+A\colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)\longrightarrow H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$$

и его сужения $\mathcal{T} \widetilde{+} A$, рассматриваемого как оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$, совпадают спектры, а также собственные и корневые подпространства.

Теперь сформулируем основную теорему этой главы.

Теорема 8. *Пусть* $\alpha > 0$, $q \in M_\pi[\alpha, -\alpha]$ *и оператор*

$$Q = M_q \colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$$

является компактным. Тогда оператор

$$(-\Delta)^\alpha \widetilde{+} Q \colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$$

имеет компактную резольвенту, система его корневых векторов полна в $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ *и для считающей функции собственных значений оператора* $(-\Delta)^\alpha \widetilde{+} Q$ *справедливо асимптотическое соотношение*

$$N_{(-\Delta)^\alpha \widetilde{+} Q}(r) \sim N_{(-\Delta)^\alpha}(r) \sim C_\alpha \cdot r^{\frac{n}{2\alpha}} \quad \text{при } r \to +\infty,$$

где C_α *— некоторая положительная константа, зависящая только от* α *и* n.

Учитывая установленные в предыдущем параграфе теоремы вложения для пространств мультипликаторов $M_\pi[k, -l]$, отсюда получаем следующий результат.

Следствие 2. *Пусть имеет место один из двух случаев:*
1) $\alpha > \frac{n}{2}$, $q \in H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$;
или
2) $0 < \alpha \leqslant \frac{n}{2}$, $q \in H_{n/\alpha}^{-\alpha+\varepsilon}(\mathbb{T}^n)$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$.
Тогда оператор

$$Q = M_q \colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$$

является компактным и справедливо утверждение теоремы 8.

В тексте диссертации будут использоваться следующие стандартные обозначения.

$L_p(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$ — классическое пространство Лебега, элементами которого являются классы эквивалентности, состоящие из всех отличающихся на множестве меры ноль измеримых относительно классической меры Лебега функций $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, таких, что функция $|f|^p$ является интегрируемой относительно классической меры Лебега

$C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ — множество всех ограниченных на $\mathbb{R}^n$ бесконечно гладких функций $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, таких, что все их частные производные также являются ограниченными на $\mathbb{R}^n$ функциями

$D(\mathbb{R}^n)$ — пространство бесконечно гладких финитных функций со стандартным образом вводимой на нём топологической структурой

$S(\mathbb{R}^n)$ — пространство Шварца (быстро убывающих функций) со стандартным образом вводимой на нём топологической структурой

$\mathbb{Z}_+ \stackrel{def}{=} \mathbb{N} \cup \{0\}$

Id_X — тождественное отображение множества X на себя, то есть отображение, определённое на некотором множестве X соотношением

$$Id_X(x) = x \ \ \forall\, x \in X$$

$cl(M)$ — замыкание множества M в нормированном пространстве X

$X + Y \stackrel{def}{=} \{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\}$ — сумма двух нормированных пространств X и Y, являющихся подпространствами некоторого линейного топологического пространства, наделённая нормой

$$\|z\|_{X+Y} = \inf\{\|z_1\|_X + \|z_2\|_Y \mid z_1 \in X,\ z_2 \in Y,\ z_1 + z_2 = z\}$$

$X \cap Y$ — пересечение двух нормированных пространств X и Y, само являющееся нормированным пространством относительно нормы

$$\|z\|_{X\cap Y} = \max(\|z\|_X, \|z\|_Y)$$

X^* — пространство всех комплекснозначных линейных непрерывных функционалов на нормированном пространстве X

$X^{\overline{*}}$ — пространство всех комплекснозначных антилинейных непрерывных функционалов на нормированном пространстве X

$\mathcal{B}(X, Y)$ — пространство всех ограниченных линейных операторов из нормированного пространства X в нормированное пространство Y, определённых на всём X, с введённой на нём равномерной операторной нормой

$\mathcal{B}(X) \stackrel{def}{=} \mathcal{B}(X, X)$

$Cl_d(X)$ — множество всех действующих в нормированном пространстве X замкнутых относительно $\|\cdot\|_X$ линейных операторов с плотной в $(X, \|\cdot\|_X)$ областью определения

$\rho(A)$ — резольвентное множество линейного оператора A, действующего в нормированном пространстве X и определённого на множестве $D(A)$, плотном в $(X, \|\cdot\|_X)$, то есть множество всех таких чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, что корректно определён линейный оператор $R_\lambda(A) \in \mathcal{B}(X)$ (называемый резольвентой оператора A, соответствующей числу λ), такой, что

$$R_\lambda(A) \circ (A - \lambda \cdot Id_X) = Id_{D(A)}, \ \ (A - \lambda \cdot Id_X) \circ R_\lambda(A) = Id_X,$$

то есть $R_\lambda(A) = (A - \lambda \cdot Id_X)^{-1}$

$\sigma(A) \stackrel{def}{=} \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ — спектр линейного оператора A, действующего в нормированном пространстве X и определённого на множестве $D(A)$, плотном в $(X, \|\cdot\|_X)$

$\sigma_p(A)$ — точечный спектр линейного оператора A, действующего в нормированном пространстве X и определённого на множестве $D(A)$, плотном в $(X, \|\cdot\|_X)$, то есть множество всех собственных значений этого оператора

$K_\lambda(A) \stackrel{def}{=} \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} Ker(A - \lambda \cdot Id_X)^k$ — корневое подпространство линейного оператора A, действующего в нормированном пространстве X и имеющего плотную в пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$ область определения $D(A)$, отвечающее собственному значению $\lambda \in \sigma_p(A)$; при этом $dim(K_\lambda(A))$ называется (алгебраической) кратностью собственного значения λ оператора A

$f_{(z)}$ — сдвиг произвольной функции $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ на $z \in \mathbb{R}^n$, то есть определённая на $\mathbb{R}^n$ комплекснозначная функция, определяемая следующим образом:

$$f_{(z)}(x) \stackrel{def}{=} f(x - z) \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

$\overline{f}$ — функция, комплексно сопряжённая к произвольной функции $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, опеределённая равенством

$$\overline{f}(x) \stackrel{def}{=} \overline{f(x)} \ \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Γ — гамма-функция Эйлера, определённая как

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx \ \ \forall\, z \in \mathbb{C} \colon Re(z) > 0$$

Δ — классический оператор Лапласа, определённый для произвольной функции $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ соотношением

$$(\Delta(f))(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x) \ \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Для произвольного линейного топологического пространства X комплекснозначных функций, заданных на $\mathbb{R}^n$, будем обозначать через X' пространство всех комплекснозначных линейных секвенциально непрерывных функционалов на X. В частности, через $D'(\mathbb{R}^n)$ и $S'(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать пространства обобщённых функций, состоящие из всех секвенциально непрерывных линейных функционалов на пространствах $D(\mathbb{R}^n)$ и $S(\mathbb{R}^n)$ соответственно. При этом сдвиг функционала $u \in X'$ на $z \in \mathbb{R}^n$ определяется равенством

$$u_{(z)}(\varphi) \stackrel{def}{=} u(\varphi_{(-z)}) \ \ \forall\, \varphi \in X.$$

Для произвольного множества распределений $E \subset D'(\mathbb{R}^n)$ введём обозначение

$$E_{loc} \stackrel{def}{=} \{u \in D'(\mathbb{R}^n) \mid f \cdot u \in E \ \ \forall\, f \in D(\mathbb{R}^n)\}.$$

Также для действительного числа $\gamma > 1$ через γ' обозначается число, удовлетворяющее соотношению

$$\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma'} = 1.$$

Для произвольного элемента $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ определим $|\cdot|_1$ и $|\cdot|$ следующими равенствами:

$$|x|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \quad \text{и} \quad |x| = \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

На $L_1(\mathbb{R}^n)$ преобразование Фурье $\mathcal{F}\colon L_1(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$ определим соотношением

$$(\mathcal{F}(f))(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\cdot <x,y>} \cdot f(y)\, dy \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Как известно, преобразование Фурье единственным образом продолжается на пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$ с всюду плотного в этом пространстве множества $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$, и результат этого продолжения является изометрическим изоморфизмом пространства $L_2(\mathbb{R}^n)$ на себя.

Поскольку ограничение преобразования Фурье $\mathcal{F}$ является гомеоморфизмом пространства $S(\mathbb{R}^n)$ на себя, то это даёт возможность определить преобразование Фурье на дуальном пространстве Шварца $S'(\mathbb{R}^n)$ следующим образом:

$$\mathcal{F}(u)(\varphi) = u(\mathcal{F}(\varphi)) \;\; \forall\, u \in S'(\mathbb{R}^n),\; \forall\, \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

В заключение выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Андрею Андреевичу Шкаликову за постановку задач, поддержку и многочисленные советы на всех этапах написания работы. Также выражаю благодарность доктору физико-математических наук, профессору Игорю Анатольевичу Шейпаку, кандидату физико-математических наук, доценту Артёму Марковичу Савчуку, кандидату физико-математических наук Антону Алексеевичу Владимирову, кандидату физико-математических наук Сергею Николаевичу Туманову, Валерию Леонидовичу Гейнцу и всем участникам семинара “Операторные модели в математической физике” за полезные обсуждения. Автор глубоко признателен всему коллективу кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова за создание творческой атмосферы и внимание к работе.

Глава I. Мультипликаторы в пространствах бесселевых потенциалов в нестрихартцевском случае

В этой главе в случае $s, t \geqslant 0$ устанавливается точность вложения пространств

$$H^{-\min(s,t)}_{\frac{n}{\max(s,t)},\, unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_2(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_2(\mathbb{R}^n)] \tag{1.1}$$

при выполнении условия $0 < \max(s,t) < \frac{n}{2}$. А именно, доказывается, что для произвольного числа ε, удовлетворяющего условию

$$0 < \varepsilon < \frac{n}{\max(s,t)} - 2,$$

существует такое распределение $v_\varepsilon \in S'(\mathbb{R}^n)$, что

$$v_\varepsilon \in H^{-\min(s,t)}_{\frac{n}{\max(s,t)} - \varepsilon,\, unif}(\mathbb{R}^n),$$

но

$$v_\varepsilon \notin M[H^s_2(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_2(\mathbb{R}^n)].$$

Это фактически означает, что показатель $\frac{n}{\max(s,t)}$ во вложении (1.1) является неулучшаемым в том смысле, что при его уменьшении соответствующее равномерно локализованное пространство бесселевых потенциалов уже не будет содержаться в пространстве мультипликаторов $M[H^s_2(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_2(\mathbb{R}^n)]$.

Актуальность этого результата состоит в том, что из него следует невозможность точного описания пространства мультипликаторов $M[H^s_2(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_2(\mathbb{R}^n)]$ в шкале равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов $H^{\gamma}_{p,\, unif}(\mathbb{R}^n)$ в случае $0 < \max(s,t) < \frac{n}{2}$.

1.1. Пространства бесселевых потенциалов и мультипликаторы в этих пространствах: основные определения и классические факты

В этом параграфе мы, в основном следуя в изложении работам [1] и [60], приведем некоторые определения и те известные факты из теории обобщённых соболевских пространств и теории мультипликаторов для пространств этого типа, которые будем использовать в этой и последующих главах.

Регулярный функционал $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ $\big($или $u \in S'(\mathbb{R}^n)\big)$ с плотностью $f \in L_{1,\, loc}(\mathbb{R}^n)$, определяемый соотношением

$$u(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \varphi(x)\, dx \qquad \forall\, \varphi \in D(\mathbb{R}^n)\ \big(\forall\, \varphi \in S(\mathbb{R}^n)\big),$$

в дальнейшем будем обозначать как $\mathbf{f}$.

Заметим, что для всех $f,\ g \in D(\mathbb{R}^n)$ распределение $f \cdot \mathbf{g} = g \cdot \mathbf{f} \in D'(\mathbb{R}^n)$ является регулярным функционалом с плотностью $f \cdot g$.

Определение 1.1.1. *Пусть $p > 1$. Будем говорить, что распределение $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству $H_p^0(\mathbb{R}^n)$, если для некоторого $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ имеем*

$$u(\varphi) = \mathbf{f}(\varphi) \ \ \forall\, \varphi \in S(\mathbb{R}^n),$$

причём норма распределения u в пространстве $H_p^0(\mathbb{R}^n)$ полагается равной

$$\|u\|_{H_p^0(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Определение 1.1.2. *Пусть $s \in \mathbb{R}$. Определим оператор $J_s\colon S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ равенством*

$$J_s(u) \stackrel{def}{=} \mathcal{F}^{-1}(\varphi_s \cdot \mathcal{F}(u)) \quad \forall\, u \in S'(\mathbb{R}^n),$$

где $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ – соответственно прямое и обратное преобразование Фурье в $S'(\mathbb{R}^n)$, а функция $\varphi_s\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ определяется соотношением

$$\varphi_s(x) = (1 + |x|^2)^{\frac{s}{2}} \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Аналогичным образом оператор J_s определяется и на $S(\mathbb{R}^n)$, причём, как несложно видеть, J_s является гомеоморфизмом пространства $S(\mathbb{R}^n)$ на себя.

Непосредственно из определения 1.1.2 следует, что семейство операторов

$$\{J_s\colon S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)\}_{s \in \mathbb{R}},$$

обладает полугрупповым свойством, то есть

$$J_{s_1} \circ J_{s_2} = J_{s_1 + s_2} \quad \forall\, s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}.$$

В частности, для произвольного $s \in \mathbb{R}$ имеем

$$J_s \circ J_{-s} = J_{-s} \circ J_s = J_0 = Id_{S'(\mathbb{R}^n)},$$

что означает взаимную обратность операторов J_s и J_{-s}.

Поскольку функции $\varphi_s,\ s \in \mathbb{R}$, являются чётными, то

$$\mathcal{F}(\varphi_s \cdot \mathcal{F}^{-1}(\psi)) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_s \cdot \mathcal{F}(\psi)) \quad \forall\, \psi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Отсюда, учитывая, что для произвольной функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ справедливы соотношения

$$\mathcal{F}(\overline{f}) = \overline{\mathcal{F}^{-1}(f)} \quad \text{и} \quad \mathcal{F}^{-1}(\overline{f}) = \overline{\mathcal{F}(f)},$$

вытекает, что

$$J_s(\overline{f}) = \overline{J_s(f)} \ \ \forall\, f \in S(\mathbb{R}^n)$$

и

$$(J_s(u))(\psi) = u(J_s(\psi)) \ \ \forall\, u \in S'(\mathbb{R}^n), \forall\, \psi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Используя равенство Парсеваля, также несложно получить, что

$$< J_s(f), g >_{L_2(\mathbb{R}^n)} = < f, J_s(g) >_{L_2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, f, g \in S(\mathbb{R}^n).$$

В свою очередь, из последнего соотношения следует, что для произвольной функции $f \in S(\mathbb{R}^n)$ распределение $J_s(\mathbf{f}) \in S'(\mathbb{R}^n)$ является регулярным функционалом с плотностью $J_s(f)$.

Отметим также, что при $s = 2\,k,\ k \in \mathbb{N}$, справедливо представление

$$J_s = (Id - \Delta)^{\frac{s}{2}} = (Id - \Delta)^k$$

и, следовательно, оператор $J_s \colon S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$ является дифференциальным оператором порядка $s = 2\,k$.

Определение 1.1.3. *Пусть $s \in \mathbb{R}$, $p > 1$. Тогда пространством бесселевых потенциалов $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ называется линейное пространство*

$$\{u \in S'(\mathbb{R}^n) \mid J_s(u) \in H_p^0(\mathbb{R}^n)\}$$

с введённой на нём нормой

$$\|u\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} = \|J_s(u)\|_{H_p^0(\mathbb{R}^n)}.$$

Несложно установить, что норма пространства $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ инвариантна относительно сдвига, то есть для произвольного $u \in H_p^s(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\|u_{(z)}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} \ \ \forall\, z \in \mathbb{R}^n,$$

где $u_{(z)}$ – сдвиг функционала $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ на $z \in \mathbb{R}^n$, определённый выше.

Учитывая полугрупповое свойство семейства операторов $\{J_s\}_{s \in \mathbb{R}}$, легко показать, что для произвольных $s \in \mathbb{R}$ и $p > 1$ ограничение отображения J_s на пространство $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ изометрически отображает это пространство на всё $H_p^0(\mathbb{R}^n)$. Отсюда тривиально следует, что нормированное пространство $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ является полным. Пространство же $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ является гильбертовым относительно скалярного произведения

$$< u, v >_{H_2^s(\mathbb{R}^n)} = < J_s(u), J_s(v) >_{H_2^0(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, u,\ v \in H_2^s(\mathbb{R}^n),$$

где скалярное произведение в пространстве $H_2^0(\mathbb{R}^n)$ определяется следующим образом:

$$< \mathbf{f}, \mathbf{g} >_{H_2^0(\mathbb{R}^n)} \overset{def}{=} < f, g >_{L_2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, f, g \in L_2(\mathbb{R}^n).$$

Также можно показать, что, сопоставляя функции $f \in S(\mathbb{R}^n)$ порождённый ею регулярный функционал $\mathbf{f}$, мы получаем инъективное непрерывное отображение пространства $S(\mathbb{R}^n)$ в пространство $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ для произвольных $s \in \mathbb{R}$ и $p > 1$. Нетрудно видеть, что множество $\mathbf{D}(\mathbb{R}^n)$, определённое как образ множества $D(\mathbb{R}^n)$ при этом отображении, является всюду плотным в пространстве $H_p^s(\mathbb{R}^n)$.

Хорошо известным фактом является существование при $k \in \mathbb{N}$ и $p > 1$ естественного линейного гомеоморфизма между пространством $H_p^k(\mathbb{R}^n)$ и классическим пространством Соболева $W_p^k(\mathbb{R}^n)$.

Из полугруппового свойства семейства операторов $\{J_t \colon S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)\}_{t \in \mathbb{R}}$ непосредственно вытекает, что для произвольных $s, t \in \mathbb{R}$ и $p > 1$ оператор

$$J_t \mid_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} : H_p^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_p^{s-t}(\mathbb{R}^n)$$

является изометрическим изоморфизмом пространств $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ и $H_p^{s-t}(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 1.1.1. *Несложно показать, что для произвольных $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $s \in \mathbb{R}$ и $p > 1$ сужение дифференциального оператора $D^\alpha \colon S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$ на пространство $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ является ограниченным оператором из $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_p^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$.*

При $s \in \mathbb{R}$ и $p > 1$ можно ввести дуальное скалярное произведение относительно пары пространств $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ и $H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)$

$$< \cdot, \cdot >_s \colon H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n) \times H_p^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C},$$

определённое как

$$< u, v >_s = < J_{-s}(u), J_s(v) >_0 \quad \forall\, u \in H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n),\ \forall\, v \in H_p^s(\mathbb{R}^n),$$

где

$$< \mathbf{f}, \mathbf{g} >_0 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \overline{g(x)}\, dx \quad \forall\, f \in L_{p'}(\mathbb{R}^n),\ \forall\, g \in L_p(\mathbb{R}^n).$$

С помощью неравенства Гёльдера легко получить следующую оценку:

$$|< u, v >_s| \ \leqslant\ \|u\|_{H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)}\, \|v\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, u \in H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n),\ \forall\, v \in H_p^s(\mathbb{R}^n).$$

Используя отмеченные выше свойства оператора J_s, также можно установить, что для произвольного $u \in H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)$ справедливо соотношение

$$< u, \mathbf{f} >_s =\ u(\overline{f}) \quad \forall\, f \in S(\mathbb{R}^n).$$

Замечание 1.1.2. *Пусть $s \in \mathbb{R}$, $p > 1$. Тогда из отмеченной выше оценки непосредственно следует, что для произвольного $u \in H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство*

$$|u(f)| \leqslant \|u\|_{H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)}\, \|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, f \in S(\mathbb{R}^n).$$

С другой стороны, можно показать, что если $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ *и* $\exists\, C > 0:$

$$|u(f)| \leqslant C \, \|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} \ \ \forall\, f \in D(\mathbb{R}^n),$$

то $u \in H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)$, *причём*

$$\|u\|_{H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C.$$

Пусть $s \in \mathbb{R}$ и $p > 1$. Тогда, учитывая замечание 1.1.2, несложно показать, что линейное отображение

$$F\colon H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \left(H_p^s(\mathbb{R}^n)\right)^{\overline{*}}, \ \ u \longrightarrow F_u,$$

где

$$F_u(v) = < u, v >_s \ \ \forall\, v \in H_p^s(\mathbb{R}^n),$$

является изометрическим изоморфизмом пространств $H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)$ и $\left(H_p^s(\mathbb{R}^n)\right)^{\overline{*}}$.

Замечание 1.1.3. *Пусть* $s \in \mathbb{R}$, $p > 1$. *Тогда из замечания 1.1.2 следует, что сходимость*

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{H_p^s(\mathbb{R}^n)} u$$

влечёт слабую сходимость

$$u_n(\varphi) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(\varphi) \ \ \forall\, \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

Далее будем использовать следующий классический результат.

Утверждение 1.1.1. ([21; лемма 4.6.2]) *Пусть* $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, $p \geqslant q > 1$. *Тогда корректно определён оператор* $A_\varphi\colon H_p^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_q^s(\mathbb{R}^n)$ *умножения на функцию* φ, *причём он является ограниченным относительно стандартных норм соответствующих пространств.*

Замечание 1.1.4. *Из утверждения 1.1.1 при* $p = q$ *следует, что оператор* A_φ *умножения на функцию* $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ *корректно определён как ограниченный оператор из* $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ *в* $H_p^s(\mathbb{R}^n)$, *причём можно показать, что*

$$\|A_{\varphi_{(z)}}\|_{\mathcal{B}(H_p^s(\mathbb{R}^n))} = \|A_\varphi\|_{\mathcal{B}(H_p^s(\mathbb{R}^n))} \ \ \forall\, z \in \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

где $\varphi_{(z)}$ – *определённый выше сдвиг функции* φ *на* $z \in \mathbb{R}^n$. *Более того, при* $p = q$ *утверждение 1.1.1 и соотношение (1.2) остаются справедливыми и для* $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, *где* $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ – *пространство бесконечно дифференцируемых функций, ограниченных вместе со всеми своими производными на* $\mathbb{R}^n$.

Также нам понадобится следующий аналог теоремы вложения Соболева для пространств бесселевых потенциалов.

Утверждение 1.1.2. (см., например, [21; §2.8.1, замечание 2]) *Пусть* $s,\ t \in \mathbb{R}$, $p,\ q > 1$. *Тогда если* $p \leqslant q$ *и* $s - \frac{n}{p} \geqslant t - \frac{n}{q}$, *то имеет место непрерывное вложение*

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) \subset H_q^t(\mathbb{R}^n).$$

Замечание 1.1.5. *Можно показать, что если* $p > q$ *или* $s - \frac{n}{p} < t - \frac{n}{q}$, *то непрерывное вложение* $H_p^s(\mathbb{R}^n) \subset H_q^t(\mathbb{R}^n)$ *не имеет места. Таким образом, выполнение неравенств* $p \leqslant q$ *и* $s - \frac{n}{p} \geqslant t - \frac{n}{q}$, *на самом деле, является критерием справедливости этого непрерывного вложения.*

Шкала пространств бесселевых потенциалов $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ замкнута относительно комплексной интерполяции, а именно, верен следующий классический факт.

Утверждение 1.1.3. (см., например, [21; §2.4.2, замечание 2d]) *Пусть* $s_0,\ s_1 \in \mathbb{R}$, $p_0,\ p_1 > 1,\ \theta \in (0,1)$. *Тогда*

$$[H_{p_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n), H_{p_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n)]_\theta = H_{p_\theta}^{s_\theta}(\mathbb{R}^n),$$

где

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},\ \ s_\theta = (1-\theta)s_0 + \theta s_1,$$

то есть для интерполяционной пары пространств $(H_{p_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n), H_{p_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n))$ *результатом применения комплексного интерполяционного метода с показателем* θ *является пространство* $H_{p_\theta}^{s_\theta}(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 1.1.6. *Пусть* $s_0,\ s_1,\ t_0,\ t_1 \in \mathbb{R},\ p_0,\ p_1,\ q_0,\ q_1 > 1,\ \theta \in (0,1)$,

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},\ \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1},\ s_\theta = (1-\theta)s_0 + \theta s_1,\ t_\theta = (1-\theta)t_0 + \theta t_1.$$

Рассмотрим произвольный линейный оператор $T\colon S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$, *такой, что его ограничения на пространства* $H_{p_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n)$ *и* $H_{p_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ *являются ограниченными операторами из* $H_{p_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n)$ *в* $H_{q_0}^{t_0}(\mathbb{R}^n)$ *и из* $H_{p_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ *в* $H_{q_1}^{t_1}(\mathbb{R}^n)$ *соответственно. Тогда поскольку соответствующий интерполяционный функтор является точным типа* θ *(см.* [21; теорема 1.9.3]*), то ограничение оператора* T *на пространство* $H_{p_\theta}^{s_\theta}(\mathbb{R}^n)$ *является ограниченным оператором из* $H_{p_\theta}^{s_\theta}(\mathbb{R}^n)$ *в* $H_{q_\theta}^{t_\theta}(\mathbb{R}^n)$, *причём*

$$\|T\|_{\mathcal{B}(H_{p_\theta}^{s_\theta}(\mathbb{R}^n), H_{q_\theta}^{t_\theta}(\mathbb{R}^n))} \leqslant \|T\|^{1-\theta}_{\mathcal{B}(H_{p_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n), H_{q_0}^{t_0}(\mathbb{R}^n))} \|T\|^{\theta}_{\mathcal{B}(H_{p_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n), H_{q_1}^{t_1}(\mathbb{R}^n))}.$$

Определение 1.1.4. *Пусть* $s \in \mathbb{R},\ p > 1$. *Тогда определим*

$$H^s_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n) \stackrel{def}{=} \{u \in H^s_{p,\,loc}(\mathbb{R}^n) |\ \|u\|_{H^s_{p,\,unif,\,\eta}(\mathbb{R}^n)} \stackrel{def}{=} \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \ \|\eta_{(z)} \cdot u\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} \ < +\infty\},$$

где функция $\eta \in D(\mathbb{R}^n)$ *удовлетворяет условиям*

$$0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \ \ и \ \ \eta(x) = 1 \ \ \forall\, x\colon |x| \leqslant 1.$$

Поскольку можно показать, что при различных $\eta \in D(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условиям определения 1.1.4, нормы $\|\cdot\|_{H^s_{p,\,unif,\,\eta}(\mathbb{R}^n)}$ эквивалентны между собой, то определение $H^s_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ корректно в смысле независимости от выбора функции η. Поэтому в дальнейшем мы будем опускать индекс η у нормы $\|\cdot\|_{H^s_{p,\,unif,\,\eta}(\mathbb{R}^n)}$ и писать просто $\|\cdot\|_{H^s_{p,\,unif}\,(\mathbb{R}^n)}$ там, где это не приводит к недоразумениям.

Замечание 1.1.7. *Непосредствено из замечания 1.1.4 следует справедливость непрерывного вложения*

$$H^s_p(\mathbb{R}^n) \subset H^s_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n) \ \ \forall\, s \in \mathbb{R},\, \forall\, p > 1.$$

Замечание 1.1.8. *Пусть $s, t \in \mathbb{R}$, $p, q > 1$ и пусть также имеет место один из следующих двух случаев:*

$$a)\, p \leqslant q,\ s - \frac{n}{p} \geqslant t - \frac{n}{q},\ \ \text{или}\ \ b)\, p \geqslant q,\ s \geqslant t.$$

Тогда справедливо непрерывное вложение

$$H^s_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset H^t_{q,\,unif}(\mathbb{R}^n).$$

Теперь, следуя в изложении работе [17], дадим определение мультипликатора из пространства $H^s_2(\mathbb{R}^n)$ в пространство $H^{-t}_2(\mathbb{R}^n)$.

Определение 1.1.5. *Пусть $s, t \geqslant 0$. Будем говорить, что $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ является мультипликатором из $H^s_2(\mathbb{R}^n)$ в $H^{-t}_2(\mathbb{R}^n)$, если существует константа $C > 0$, такая, что*

$$|u(f \cdot \overline{g})| \ \leqslant\ C\,\|\mathbf{f}\|_{H^s_2(\mathbb{R}^n)}\,\|\mathbf{g}\|_{H^t_2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{R}^n).$$

Заметим, что множество $M[s,-t]$ всех мультипликаторов из $H^s_2(\mathbb{R}^n)$ в $H^{-t}_2(\mathbb{R}^n)$ является линейным пространством, причем функция

$$\|u\|_{M[s,-t]} \overset{def}{=} \inf\{C \in \mathbb{R}_+ |\ |u(f \cdot \overline{g})| \ \leqslant\ C\,\|\mathbf{f}\|_{H^s_2(\mathbb{R}^n)}\,\|\mathbf{g}\|_{H^t_2(\mathbb{R}^n)}\ \forall\, f, g \in D(\mathbb{R}^n)\}$$

является нормой на нём.

Замечание 1.1.9. *Для произвольных $s,\ t \geqslant 0$ пространства $M[s,-t]$ и $M[t,-s]$ совпадают и их нормы равны, поскольку неравенство из определения 1.1.5 симметрично относительно f и g.*

Теперь приведём формулировку результата, фактически устанавливающего справедливость непрерывного вложения, вопрос о точности которого мы и будем исследовать.

Утверждение 1.1.4. (М.И. Нейман-Заде, А.А. Шкаликов, [60; Lemma 6]) *Пусть $0 \leqslant t \leqslant s < \frac{n}{2}$. Тогда имеет место непрерывное вложение*

$$H^{-t}_{\frac{n}{s},\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[s,-t].$$

1.2. Условия принадлежности одного класса регулярных функционалов равномерно локализованному пространству бесселевых потенциалов

В этом параграфе мы установим, при каких значениях $\alpha > 0$ регулярный функционал $\mathbf{f}_\alpha$, порождённый действительнозначной функцией

$$f_\alpha(x) \overset{def}{=} \begin{cases} |x|^{-\alpha}, & x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

корректно определён на $S(\mathbb{R}^n)$ и принадлежит пространству $H^{-t}_{2,\,unif}(\mathbb{R}^n)$.

Далее будем использовать обозначения $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r\}$, $B_r = B_r(0)$ и $B(r, R) = \overline{B_R} \setminus B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid r \leqslant |x| \leqslant R\}$.

Для произвольных r_1, $r_2 > 0$ с помощью перехода к обобщённым сферическим координатам легко получить соотношение

$$\int\limits_{B(r_1, r_2)} f_\alpha(x)dx = C(n) \cdot \int\limits_{[r_1, r_2]} r^{-\alpha} \cdot r^{n-1} dr = C(n) \cdot \int\limits_{[r_1, r_2]} r^{-(\alpha - n + 1)} dr,$$

где константа

$$C(n) = \frac{2 \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

есть площадь поверхности $(n-1)-$мерной гиперсферы единичного радиуса в $\mathbb{R}^n$. Из этого соотношения непосредственно вытекают следующие условия интегрируемости функции f_α:

$$\int\limits_{B_1} f_\alpha(x)dx < +\infty \Longleftrightarrow \alpha < n$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} f_\alpha(x)dx < +\infty \Longleftrightarrow \alpha > n,$$

то есть функция f_α интегрируема на единичном шаре B_1 только при $\alpha < n$, а вне единичного шара B_1 – только при $\alpha > n$.

Более того, несложно показать, что справедлив следующий критерий корректной определённости регулярного функицонала $\mathbf{f}_\alpha$ как элемента дуального пространства Шварца $S'(\mathbb{R}^n)$.

Утверждение 1.2.1. *Пусть $\alpha > 0$. Тогда функционал $\mathbf{f}_\alpha \colon S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, определяемый как*

$$\varphi \overset{\mathbf{f}_\alpha}{\longmapsto} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_\alpha(x)\varphi(x)dx,$$

корректно определен и непрерывен тогда и только тогда, когда $\alpha < n$.

Для доказательства основного результата этого параграфа нам понадобятся вспомогательные факты. В частности, в теории риссовских потенциалов хорошо известен следующий факт.

Утверждение 1.2.2. ([20; §5.1, лемма 1]) *Пусть* $0 < \alpha < n$. *Тогда справедливо соотношение*

$$\mathcal{F}(\mathbf{f}_\alpha) \overset{S'(\mathbb{R}^n)}{=} C(\alpha, n)\, \mathbf{f}_{n-\alpha},$$

где

$$C(\alpha, n) = \frac{2^{\frac{n}{2}-\alpha} \cdot \Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}.$$

Отметим, что другое значение константы в [20; §5.1, лемма 1] обусловлено отличным от нашего способом определения преобразования Фурье.

Следующий результат нетрудно получить, используя утверждение 1.2.2 и справедливое для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ соотношение

$$(\mathcal{F}(\varphi))(x - t) = (\mathcal{F}^{-1}(j_x \cdot \varphi))(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^n,$$

где функция $j_x \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ определена равенством

$$j_x(y) = e^{-i <x,y>} \;\; \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 1.2.1. *Пусть* $0 < \alpha < n$, $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. *Тогда* $\varphi \cdot f_\alpha \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *и имеет место равенство*

$$\big(\mathcal{F}(\varphi \cdot f_\alpha)\big)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\, C(\alpha, n)\, \big(\mathcal{F}(\varphi) * f_{n-\alpha}\big)(x) \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

где под $\varphi * \psi$ *понимается свёртка функций* φ *и* ψ.

Далее для преобразования Фурье от функции $\psi_{(z)} \cdot f_\alpha$ мы установим равномерную по $z \in \mathbb{R}^n$ оценку, которая является ключевой для доказательства основного результата этого параграфа.

Лемма 1.2.2. *Пусть* $0 < \alpha < n$, $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$, $z \in \mathbb{R}^n$. *Тогда существует такая константа* $M(\alpha, n, \psi) > 0$, *что*

$$|(\mathcal{F}(\psi_{(z)} \cdot f_\alpha))(x)| \leqslant M(\alpha, n, \psi) \cdot (1 + |x|^2)^{\frac{\alpha-n}{2}} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

Доказательство. Заметим, что для доказательства леммы достаточно показать, что существуют константы $M_1 = M_1(\alpha, n, \psi) > 0$ и $M_2 = M_2(\alpha, n, \psi) > 0$, такие, что

$$|(\mathcal{F}(\psi_{(z)} \cdot f_\alpha))(x)| \leqslant M_1 \quad \forall\, x : |x| \leqslant 1 \tag{1.4}$$

и

$$|(\mathcal{F}(\psi_{(z)} \cdot f_\alpha))(x)| \leqslant M_2\, |x|^{\alpha-n} \quad \forall\, x : |x| \geqslant 1. \tag{1.5}$$

Действительно, из (1.4) и (1.5) следует (1.3) с константой $M = 2^{\frac{n-\alpha}{2}}(M_1 + M_2)$, поскольку $\forall\, x\colon |x| \leqslant 1$ имеем

$$M_1 \leqslant \frac{2^{\frac{n-\alpha}{2}}(M_1 + M_2)}{(1+|x|^2)^{\frac{n-\alpha}{2}}}$$

и $\forall\, x\colon |x| \geqslant 1$ имеем

$$\frac{M_2}{|x|^{n-\alpha}} \leqslant \frac{2^{\frac{n-\alpha}{2}}(M_1 + M_2)}{(1+|x|^2)^{\frac{n-\alpha}{2}}}\,.$$

Так как в силу леммы 1.2.1 справедливо соотношение

$$\mathcal{F}(\psi_{(z)} \cdot f_\alpha) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\, C(\alpha, n)\, \mathcal{F}(\psi_{(z)}) * f_{n-\alpha},$$

а $(\mathcal{F}(\psi_{(z)}))(x) = e^{-i <x,\, z>} \cdot (\mathcal{F}(\psi))(x) \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$, то имеет место неравенство

$$|(\mathcal{F}(\psi_{(z)} \cdot f_\alpha))(x)| \leqslant (2\pi)^{-\frac{n}{2}} C(\alpha, n) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|(\mathcal{F}(\psi))(x-y)|}{|y|^{n-\alpha}} dy.$$

Заметим, что так как для $\psi \in D(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$ имеем, что $\mathcal{F}(\psi) \in S(\mathbb{R}^n)$, то сходимость интеграла в правой части неравенства следует непосредственно из утверждения 1.2.1.

Поскольку $\mathcal{F}(\psi) \in S(\mathbb{R}^n)$, то

$$\|\mathcal{F}(\psi)\|_{0,N} \overset{def}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} ((1+|x|^2)^N |(\mathcal{F}(\psi))(x)|) < +\infty \ \ \forall\, N \in \mathbb{N},$$

где $\|\cdot\|_{0,N}$ есть одна из полунорм, определяющих топологию пространства $S(\mathbb{R}^n)$. Введём для произвольного $N \in \mathbb{N}$ обозначение $C_1(N, \varphi) = \|\mathcal{F}(\varphi)\|_{0,N}$.

В частности, для $N_1 = [\frac{n}{2}] + 1$ имеет место неравенство

$$|(\mathcal{F}(\psi))(x-y)| \leqslant \ C_1(N_1, \psi)(1+|x-y|^2)^{-N_1} \ \ \forall\, x,\ y \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда получаем неравенство

$$|(\mathcal{F}(\psi_{(z)} \cdot f_\alpha))(x)| \leqslant (2\pi)^{-\frac{n}{2}} C(\alpha, n)\, C_1(N_1, \psi) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dy}{|y|^{n-\alpha}\,(1+|x-y|^2)^{N_1}}\,, \tag{1.6}$$

где сходимость несобственного интеграла в правой части неравенства (1.6) следует из того, что $n - \alpha < n$, а $\ n - \alpha + 2 \cdot N_1 > 2 \cdot N_1 > n$.

Рассмотрим сначала случай $|x| \leqslant 1$, в котором установим равномерную по x оценку этого интеграла.

Представив интеграл по $\mathbb{R}^n$ в виде суммы интегралов по единичному шару и по внешности этого шара, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dy}{|y|^{n-\alpha}(1+|x-y|^2)^{N_1}} = \int\limits_{B_1} \frac{dy}{|y|^{n-\alpha}(1+|x-y|^2)^{N_1}} + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{dy}{|y|^{n-\alpha}(1+|x-y|^2)^{N_1}} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{B_1} \frac{dy}{|y|^{n-\alpha}} + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{dy}{|y|^{n-\alpha}(1+|x-y|^2)^{N_1}}.$$

Сходимость первого из этих интегралов следует из установленного выше критерия интегрируемости функции f_α на шаре B_1. Для оценки же второго интеграла отметим, что при $|y| \geqslant 1$ имеет место цепочка неравенств

$$|x-y| \geqslant |y| - |x| \geqslant |y| - 1 \geqslant 0$$

и следующее из неё неравенство

$$|x-y|^2 \geqslant (|y|-1)^2.$$

Отсюда получаем оценку

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{dy}{|y|^{n-\alpha}\,(1+|x-y|^2)^{N_1}} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{dy}{|y|^{n-\alpha}\,(1+(|y|-1)^2)^{N_1}} \ ,$$

где интеграл в правой части неравенства уже не зависит от x. Сходимость же этого интеграла легко извлечь из критерия интегрируемости функции f_α на $\mathbb{R}^n \setminus B_1$.

Таким образом, при $|x| \leqslant 1$ имеет место оценка

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dy}{|y|^{n-\alpha}(1+|x-y|^2)^{N_1}} \leqslant C_2(N_1, n, \alpha).$$

Теперь рассмотрим случай $|x| > 1$. В этом случае интеграл из неравенства (1.6) разобьём на два интеграла

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dy}{|y|^{n-\alpha}(1+|x-y|^2)^{N_1}} = \int\limits_{B_{|x|/2}} \frac{dy}{|y|^{n-\alpha}(1+|x-y|^2)^{N_1}} + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{|x|/2}} \frac{dy}{|y|^{n-\alpha}(1+|x-y|^2)^{N_1}}$$

и будем оценивать каждый из них по отдельности.

Учитывая, что при $|y| < \frac{|x|}{2}$ справедливо неравенство $|x-y| \geqslant |x| - |y| > \frac{|x|}{2}$, получаем цепочку неравенств

$$\int\limits_{B_{|x|/2}} \frac{dy}{|y|^{n-\alpha}(1+|x-y|^2)^{N_1}} \leqslant \frac{1}{\left(1+\frac{|x|^2}{4}\right)^{N_1}} \int\limits_{B_{|x|/2}} \frac{dy}{|y|^{n-\alpha}} = \frac{C(n,\alpha)\cdot 4^{N_1}}{(4+|x|^2)^{N_1}} \int\limits_0^{\frac{|x|}{2}} \frac{r^{n-1}}{r^{n-\alpha}} dr =$$

$$= \frac{C(n,\alpha)\cdot 2^{2N_1}}{\alpha\,(4+|x|^2)^{N_1}} \cdot \frac{|x|^\alpha}{2^\alpha} \leqslant \frac{C(n,\alpha)\cdot 2^{2N_1-\alpha}}{\alpha} \cdot \frac{1}{|x|^{2N_1-\alpha}} \leqslant D_1(N_1, n, \alpha)\,|x|^{\alpha-n},$$

причём последнее неравенство верно в силу того, что $|x| > 1$, а $N_1 > \frac{n}{2}$.

Для другого же интеграла получим оценку

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{|x|/2}} \frac{dy}{|y|^{n-\alpha}(1+|x-y|^2)^{N_1}} \leqslant \frac{2^{n-\alpha}}{|x|^{n-\alpha}} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{|x|/2}} \frac{dy}{(1+|x-y|^2)^{N_1}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{n-\alpha}|x|^{\alpha-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{dy}{(1+|x-y|^2)^{N_1}} = 2^{n-\alpha}|x|^{\alpha-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{du}{(1+|u|^2)^{N_1}} = D_2(N_1,n,\alpha)\,|x|^{\alpha-n},$$

где последнее равенство справедливо, поскольку соответствующий интеграл сходится при $2\cdot N_1 > n$.

Итак, для случая $|x|\leqslant 1$ доказана оценка

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{dy}{|y|^{n-\alpha}(1+|x-y|^2)^{-N_1}} \leqslant C_2(N_1,n,\alpha),$$

а для случая $|x|>1$ доказана оценка

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{dy}{|y|^{n-\alpha}(1+|x-y|^2)^{N_1}} \leqslant (D_1(N_1,n,\alpha)+D_2(N_1,n,\alpha))\,|x|^{\alpha-n}.$$

Из этих оценок, вместе с уже полученной оценкой (1.6), непосредственно следуют требуемые оценки (1.4) и (1.5).

Лемма 1.2.2 доказана.

Утверждение 1.2.3. *Пусть $t > -\frac{n}{2}$. Тогда для произвольного числа α, такого, что $0<\alpha<\min\big(n, t+\frac{n}{2}\big)$, имеем*

$$\mathbf{f}_\alpha \in H^{-t}_{2,\,unif}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Пусть $\eta\in D(\mathbb{R}^n)$, причём

$$0\leqslant \eta(x)\leqslant 1 \;\;\forall\, x\in\mathbb{R}^n,\;\; \eta(x)=1 \;\;\forall\, x: |x|\leqslant 1.$$

Докажем, что

$$\eta_{(z)}\cdot\mathbf{f}_\alpha \in H_2^{-t}(\mathbb{R}^n) \quad \forall\, z\in\mathbb{R}^n$$

и оценим сверху $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}^n}\|\eta_{(z)}\cdot\mathbf{f}_\alpha\|_{H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)}$.

Поскольку преобразование Фурье есть изометрический изоморфизм пространства $H_2^0(\mathbb{R}^n)$ на себя, то для этого достаточно доказать, что

$$\mathcal{F}(J_{-t}(\eta_{(z)}\cdot\mathbf{f}_\alpha))\in H_2^0(\mathbb{R}^n)\;\;\forall\, z\in\mathbb{R}^n$$

и

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^n}\|\mathcal{F}(J_{-t}(\eta_{(z)}\cdot\mathbf{f}_\alpha))\|_{H_2^0(\mathbb{R}^n)} = \sup_{z\in\mathbb{R}^n}\|\varphi_{-t}\cdot\mathcal{F}(\eta_{(z)}\cdot\mathbf{f}_\alpha)\|_{H_2^0(\mathbb{R}^n)} < +\infty,$$

где, как было определено выше,

$$\varphi_{-t}(x) = (1+|x|^2)^{-\frac{t}{2}}\;\;\forall\, x\in\mathbb{R}^n.$$

Поскольку для $\alpha<n$ выше было показано, что $\mathbf{f}_\alpha\in S'(\mathbb{R}^n)$, а из неравенства $t>-\frac{n}{2}$ следует, что функция $\varphi_{-t}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ растёт не быстрее модуля многочлена $P_n\colon x\to x^n$

при $|x| \to +\infty$, то распределение $\varphi_{-t} \cdot \mathcal{F}(\eta_{(z)} \cdot \mathbf{f}_\alpha)$ корректно определено как элемент $S'(\mathbb{R}^n)$. Исходя из этого, а также учитывая, что $\eta_{(z)} \cdot f_\alpha \in L_1(\mathbb{R}^n)$, нетрудно получить, что распределение $\varphi_{-t} \cdot \mathcal{F}(\eta_{(z)} \cdot \mathbf{f}_\alpha) \in S'(\mathbb{R}^n)$ является регулярным функционалом, порождённым функцией $\varphi_{-t} \cdot \mathcal{F}(\eta_{(z)} \cdot f_\alpha)$.

Так как $\alpha < n$, то в силу леммы 1.2.2 имеем

$$(1+|x|^2)^{-t}|(\mathcal{F}(\eta_{(z)} \cdot f_\alpha))(x)|^2 \leqslant \frac{(M(\alpha,n,\eta))^2}{(1+|x|^2)^{t+n-\alpha}} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда получаем равномерную по $z \in \mathbb{R}^n$ оценку

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-t}|(\mathcal{F}(\eta_{(z)} \cdot f_\alpha))(x)|^2\, dx \ \leqslant (M(\alpha,n,\eta))^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{t+n-\alpha}}\,, \tag{1.7}$$

где интеграл в правой части неравенства сходится, поскольку из условия $\alpha < t + \frac{n}{2}$ следует, что $2\,(t+n-\alpha) > n$.

Таким образом, для произвольного $z \in \mathbb{R}^n$ получаем, что

$$\varphi_{-t} \cdot \mathcal{F}(\eta_{(z)} \cdot f_\alpha) \in L_2(\mathbb{R}^n)$$

и, следовательно,

$$\eta_{(z)} \cdot \mathbf{f}_\alpha \in H_2^{-t}(\mathbb{R}^n).$$

При этом в силу (1.7) имеем, что

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^n} \|\eta_{(z)} \cdot \mathbf{f}_\alpha\|^2_{H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)} \ = \ \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-t}|(\mathcal{F}(\eta_{(z)} \cdot f_\alpha))(x)|^2\, dx < +\infty.$$

Последнее соотношение и означает, что $\mathbf{f}_\alpha \in H^{-t}_{2,\,unif}(\mathbb{R}^n)$.

Утверждение 1.2.3 доказано.

1.3. Точность вложения некоторого равномерно локализованного пространства бесселевых потенциалов в пространство мультипликаторов

В данном параграфе сначала устанавливаются необходимое (теорема 1.3.2) и достаточное (теорема 1.3.1) условия принадлежности регулярного функционала $\mathbf{f}_\alpha$ пространству мультипликаторов из $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)$. В завершающем этот параграф доказательстве точности вложения

$$H^{-\min(s,t)}_{\frac{n}{\max(s,t)},\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[s,-t]$$

используется лишь теорема 1.3.2, но поскольку задача описания того, при каких значениях α функционал $\mathbf{f}_\alpha$ принадлежит пространству мультипликаторов $M[s,-t]$, представляет и самостоятельный интерес, то приведём обе теоремы.

Теорема 1.3.1. *Пусть $s,\ t \geqslant 0$ и $\max(s,t) < \frac{n}{2}$. Тогда для произвольного числа α, такого, что $0 < \alpha < s+t$, имеем*

$$\mathbf{f}_\alpha \in M[s,-t].$$

Доказательство. Заметим, что поскольку $M[s,-t] = M[t,-s]$ согласно замечанию 1.1.9, то можно, без ограничения общности, считать, что $0 \leqslant t \leqslant s < \frac{n}{2}$.

Положим $s_1 = s + t - \frac{n}{2}$. Поскольку тогда

$$s_1 > -\frac{n}{2} \quad \text{и} \quad \alpha < s+t = s_1 + n/2,$$

а из неравенств $\max(s,t) < \frac{n}{2}$ и $\alpha < s+t$ следует выполнение условия $\alpha < n$, то применимо утверждение 1.2.3, согласно которому получаем, что

$$\mathbf{f}_\alpha \in H^{-s_1}_{2,\,unif}(\mathbb{R}^n).$$

Так как выполняются условия

$$2 \leqslant \frac{n}{s} \quad \text{и} \quad -s_1 - \frac{n}{2} = -s - t = -t - \frac{n}{\frac{n}{s}}\ ,$$

то, согласно замечанию 1.1.8, имеет место непрерывное вложение

$$H^{-s_1}_{2,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset H^{-t}_{\frac{n}{s},\,unif}(\mathbb{R}^n).$$

Поскольку согласно утверждению 1.1.4 справедливо непрерывное вложение

$$H^{-t}_{\frac{n}{s},\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[s,-t],$$

то в итоге получаем, что

$$\mathbf{f}_\alpha \in H^{-s_1}_{2,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset H^{-t}_{\frac{n}{s},\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[s,-t].$$

Теорема 1.3.1 доказана.

Теорема 1.3.2. *Пусть $s,t \geqslant 0,\ \max(s,t) < \frac{n}{2},\ 0 < \alpha < n$. Тогда если $\mathbf{f}_\alpha \in M[s,-t]$, то $\alpha \leqslant s+t$.*

Доказательство. Поскольку функционал $\mathbf{f}_\alpha$ принадлежит пространству мультипликаторов $M[s,-t]$, то найдётся такая константа $C > 0$, что

$$|\ \mathbf{f}_\alpha(g \cdot \overline{h})\ | \leqslant C\, \|\mathbf{g}\|_{H^s_2(\mathbb{R}^n)} \|\mathbf{h}\|_{H^t_2(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\ g,\ h \in D(\mathbb{R}^n). \tag{1.8}$$

Отметим, что для произвольных $\gamma \in \mathbb{R},\ p > 1$ множество $D(\mathbb{R}^n)$ плотно в пространстве $(S(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\mathbb{H}^\gamma_p(\mathbb{R}^n)})$, где $\|f\|_{\mathbb{H}^\gamma_p(\mathbb{R}^n)} \stackrel{def}{=} \|\mathbf{f}\|_{H^\gamma_p(\mathbb{R}^n)}$. Поэтому, учитывая, что функционал $\mathbf{f}_\alpha$ принадлежит пространству $S'(\mathbb{R}^n)$ при $0 < \alpha < n$, а пространство

Шварца $S(\mathbb{R}^n)$ является топологической алгеброй относительно операции поточечного умножения, неравенство (1.8) можно распространить на всё пространство $S(\mathbb{R}^n)$:

$$| \, \mathbf{f}_\alpha(g \cdot \overline{h}) \, | \leqslant C \, \|\mathbf{g}\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)} \|\mathbf{h}\|_{H_2^t(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall \, g, \, h \in S(\mathbb{R}^n). \tag{1.9}$$

Заметим, что так как $g \cdot f_\alpha \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то справедливо соотношение

$$\mathbf{f}_\alpha(g \cdot \overline{h}) = (\mathcal{F}(g \cdot \mathbf{f}_\alpha))(\mathcal{F}^{-1}(\overline{h})) = (\mathcal{F}(g \cdot \mathbf{f}_\alpha))(\overline{\mathcal{F}(h)}).$$

Поскольку, к тому же, для произвольного числа $\gamma \in \mathbb{R}$ имеет место цепочка равенств

$$\|\mathbf{f}\|_{H_2^\gamma(\mathbb{R}^n)} = \|J_\gamma(f)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}(J_\gamma(f))\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi_\gamma \cdot \mathcal{F}(f)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \;\; \forall \, f \in S(\mathbb{R}^n),$$

то неравенство (1.9) может быть переписано в виде

$$|(\mathcal{F}(g \cdot \mathbf{f}_\alpha))(\overline{\mathcal{F}(h)})| \leqslant \; C \, \|\varphi_s \cdot \mathcal{F}(g)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \, \|\varphi_t \cdot \mathcal{F}(h)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \;\; \forall \, g, \, h \in S(\mathbb{R}^n). \tag{1.10}$$

Напомним, что свёртка функции из пространства Шварца и распределения из дуального пространства Шварца определяется как

$$(\psi * u)(f) = u(\psi_- * f) \;\;\; \forall \, u \in S'(\mathbb{R}^n), \, \forall \, \psi, \, f \in S(\mathbb{R}^n),$$

где $\psi_- \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \psi(-x)$. Поскольку $g \in S(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{f}_\alpha \in S'(\mathbb{R}^n)$, и, как хорошо известно (см., например, [37; Theorem 5.18]),

$$\mathcal{F}(\psi \cdot u) = (2 \cdot \pi)^{\frac{n}{2}} \big(\mathcal{F}(\psi)\big) * \big(\mathcal{F}(u)\big) \;\;\; \forall \, \psi \in S(\mathbb{R}^n), \, \forall \, u \in S'(\mathbb{R}^n),$$

то

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(g \cdot \mathbf{f}_\alpha))(\overline{\mathcal{F}(h)}) &= (2 \cdot \pi)^{\frac{n}{2}} \, C(\alpha, n) \, \big(\mathcal{F}(g) * \mathbf{f}_{n-\alpha}\big)(\overline{\mathcal{F}(h)}) = \\ &= (2 \cdot \pi)^{\frac{n}{2}} \, C(\alpha, n) \cdot \mathbf{f}_{n-\alpha}\big((\mathcal{F}(g))_- * \overline{\mathcal{F}(h)}\big).\end{aligned}$$

Исходя из последнего соотношения, легко видеть, что неравенство (1.10) эквивалентно неравенству

$$\left|\mathbf{f}_{n-\alpha}\big((\mathcal{F}(g))_- * \overline{\mathcal{F}(h)}\big)\right| \;\leqslant\; K(\alpha, n) \, \|\varphi_s \cdot \mathcal{F}(g)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \, \|\varphi_t \cdot \mathcal{F}(h)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \;\;\; \forall \, g, \, h \in S(\mathbb{R}^n),$$

где

$$K(\alpha, n) = (2 \cdot \pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{C}{C(\alpha, n)} \, .$$

Для произвольных функций $g, \, h \in S(\mathbb{R}^n)$ определим на $\mathbb{R}^n$ функции

$$g_0 = \varphi_s \cdot (\mathcal{F}(g)), \;\; h_0 = \varphi_t \cdot (\mathcal{F}(h)).$$

Используя тот факт, что преобразование Фурье, так же, как и оператор умножения на функцию φ_γ для произвольного $\gamma \in \mathbb{R}$, является линейным гомеоморфизмом пространства $S(\mathbb{R}^n)$ на себя, получаем, что выполнение исходного неравенства (1.8) эквивалентно выполнению неравенства

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi_{-s}(y-x)\cdot g_0(y-x)\cdot\varphi_{-t}(y)\cdot\overline{h_0(y)}dy\Big)\cdot f_{n-\alpha}(x)dx\Big| \leqslant K(\alpha,n)\|g_0\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\|h_0\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$$

для произвольных функций $g_0, h_0 \in S(\mathbb{R}^n)$.

Применяя теорему Фубини о перестановке порядка интегрирования в повторном интеграле и учитывая, что

$$(\varphi_{-s}\cdot g_0) * f_{n-\alpha} = f_{n-\alpha} * (\varphi_{-s}\cdot g_0),$$

последнее неравенство можно переписать как

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}f_{n-\alpha}(y-x)\cdot\varphi_{-s}(x)\cdot g_0(x)dx\Big)\,\varphi_{-t}(y)\cdot\overline{h_0(y)}\,dy\Big| \leqslant K(\alpha,n)\,\|g_0\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\|h_0\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Определим для произвольного $m \in \mathbb{N}$ функцию ψ_m следующим образом:

$$\psi_m(x) = \eta\Big(\frac{x}{m}\Big)\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\eta \in D(\mathbb{R}^n)$ – действительнозначная функция, удовлетворяющая условиям

$$0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \eta(x) = 1\ \ \forall\, x\colon |x| \leqslant 1.$$

Взяв в неравенстве выше в качестве функций g_0 и h_0 функцию ψ_m, получаем, что для произвольного $m \in \mathbb{N}$ должно выполняться неравенство

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}f_{n-\alpha}(y-x)\cdot\varphi_{-s}(x)\cdot\eta\left(\frac{x}{m}\right)dz\Big)\,\varphi_{-t}(y)\cdot\eta\left(\frac{y}{m}\right)dy\Big| \leqslant K(\alpha,n)\,\|\psi_m\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

С одной стороны, в силу неотрицательности всех функций, фигурирующих в левой части последнего неравенства, справедлива оценка

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}f_{n-\alpha}(y-x)\cdot\varphi_{-s}(x)\cdot\eta\left(\frac{x}{m}\right)dx\Big)\,\varphi_{-t}(y)\cdot\eta\left(\frac{y}{m}\right)dy\Big| \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{B_m(0)}\Big(\int\limits_{B_m(0)}f_{n-\alpha}(y-x)\cdot\varphi_{-s}(x)\cdot\eta\left(\frac{x}{m}\right)dx\Big)\,\varphi_{-t}(y)\cdot\eta\left(\frac{y}{m}\right)dy =$$

$$= \int\limits_{B_m(0)}\Big(\int\limits_{B_m(0)}|y-x|^{-(n-\alpha)}(1+|x|^2)^{-\frac{s}{2}}dx\Big)\,(1+|y|^2)^{-\frac{t}{2}}dy,$$

а, с другой стороны, имеем

$$\|\psi_m\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n}(\eta(x/m))^2dx = m^n\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\eta(z))^2dz = C_1\cdot m^n,$$

где $C_1 = \|\eta\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}$.

Поскольку выполняется неравенство

$$\frac{1}{|y-x|^{n-\alpha}(1+|x|^2)^{\frac{s}{2}}} \geqslant \frac{1}{[2(1+|x|^2+|y|^2)]^{\frac{n-\alpha}{2}}(1+|x|^2)^{\frac{s}{2}}} \geqslant \frac{1}{2^{\frac{n-\alpha}{2}}(1+|x|^2+|y|^2)^{\frac{n-\alpha+s}{2}}} \ ,$$

то, переходя от повторного интерала к двойному, получаем, что должна выполняться оценка

$$\int\limits_{B_m(0)\times B_m(0)} \frac{(1+|y|^2)^{-\frac{t}{2}}}{(1+|x|^2+|y|^2)^{\frac{n-\alpha+s}{2}}}\, d(x\times y) \leqslant K(\alpha,n)\cdot C_1 \cdot 2^{\frac{n-\alpha}{2}}\cdot m^n,$$

из которой немедленно следует оценка

$$\int\limits_{B_m(0)\times B_m(0)} \frac{1}{(1+|x|^2+|y|^2)^{\frac{n-\alpha+s+t}{2}}}\, d(x\times y) \leqslant K_1 \cdot m^n$$

для константы

$$K_1 = K_1(\alpha,n,\eta) = K(\alpha,n)\cdot C_1\cdot 2^{\frac{n-\alpha}{2}}.$$

Поскольку шар $U_m(0) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \mid |x|^2+|y|^2 \leqslant m^2\}$ содержится внутри $B_m(0)\times B_m(0)$, а подынтегральная функция положительна, то, заменяя область интегрирования $B_m(0)\times B_m(0)$ на $U_m(0)$, получаем, что

$$K_1\cdot m^n \ \geqslant \int\limits_{U_m(0)} \frac{1}{(1+|x|^2+|y|^2)^{\frac{n-\alpha+s+t}{2}}}\, d(x\times y) = C(2\,n)\cdot \int\limits_{[0,m]} \frac{r^{2n-1}dr}{(1+r^2)^{\frac{n-\alpha+s+t}{2}}} \geqslant$$

$$\geqslant\ C(2\,n)\cdot \int\limits_{[1,m]} \frac{r^{2n-1}dr}{(1+r^2)^{\frac{n-\alpha+s+t}{2}}} \geqslant C(2\,n)\cdot \int\limits_{[1,m]} \frac{r^{2n-1}dr}{(2\,r^2)^{\frac{n-\alpha+s+t}{2}}} = C_1(n)\cdot \int\limits_{[1,m]} r^{n+\alpha-s-t-1}dr,$$

где

$$C(2n) = \frac{2\cdot\pi^n}{\Gamma(n)}\ , \ \text{ а } \ C_1(n) = C(2n)\cdot 2^{\frac{\alpha-n-s-t}{2}}.$$

Учитывая, что $\max(s,t) < \frac{n}{2}$ и, значит, $n+\alpha-s-t>0$, в итоге получаем выполнение неравенства

$$m^{n+\alpha-s-t} < \frac{K_1\cdot(n+\alpha-s-t)}{C_1(n)}\cdot m^n + 1.$$

Так как это неравенство справедливо для произвольного $m\in\mathbb{N}$, то $n+\alpha-s-t\leqslant n$, откуда непосредственно следует, что $\alpha\leqslant s+t$.

Теорема 1.3.2 доказана.

Теорема 1.3.3. *Пусть $s,t\geqslant 0$ и $0<\max(s,t)<\frac{n}{2}$. Тогда для произвольного числа ε, удовлетворяющего условию*

$$0<\varepsilon<\frac{n}{\max(s,t)}-2,$$

найдётся такое число

$$\delta(\varepsilon) \in \Big(0; \frac{n}{2} - \max(s,t)\Big),$$

что для $\alpha = s + t + \delta(\varepsilon)$ *имеем*

$$\mathbf{f}_\alpha \in H^{-\min(s,t)}_{\frac{n}{\max(s,t)} - \varepsilon,\, unif}(\mathbb{R}^n) \setminus \, M[s, -t].$$

Доказательство. В силу утверждения 1.1.9 и симметричности условий теоремы 1.3.3 можно, без ограничения общности, считать, что $0 \leqslant t \leqslant s < \frac{n}{2}$, причём $s > 0$.

Зафиксируем произвольное число ε, такое, что

$$0 < \varepsilon < \frac{n}{s} - 2 = \frac{n - 2\,s}{s}$$

и положим

$$\delta(\varepsilon) = \frac{s^2}{2(\frac{n}{\varepsilon} - s)}\;.$$

Отметим, что поскольку $0 < \varepsilon < n/s - 2$, то $n/\varepsilon - s > 0$ и, следовательно, $\delta(\varepsilon) > 0$.

Теперь проверим выполнение условия

$$\delta(\varepsilon) < \frac{n}{2} - s.$$

Действительно,

$$\frac{s^2}{2(\frac{n}{\varepsilon} - s)} < \frac{n}{2} - s \iff \frac{n}{\varepsilon} - s > \frac{s^2}{n - 2s} \iff \varepsilon < \frac{n}{n - s} \cdot \frac{n - 2\,s}{s},$$

а последнее из этих неравенств тривиально следует из условия

$$\varepsilon < \frac{n - 2\,s}{s}\;.$$

Тогда для $\alpha \overset{def}{=} s + t + \delta$ мы имеем, что

$$\alpha < s + t + \frac{n}{2} - s = t + \frac{n}{2} < n,$$

и поэтому функционал $\mathbf{f}_\alpha$ корректно определён как элемент $S'(\mathbb{R}^n)$.

Положив

$$t_1 \overset{def}{=} s + t + 2\,\delta - \frac{n}{2}\;,$$

получим, что

$$t_1 > -\frac{n}{2}\;.$$

Поскольку, к тому же,

$$\alpha = s + t + \delta < s + t + 2\,\delta = t_1 + \frac{n}{2}\;,$$

и, как показано выше, $\alpha < n$, то, согласно утверждению 1.2.3,

$$\mathbf{f}_\alpha \in H^{-t_1}_{2,\, unif}(\mathbb{R}^n).$$

Из цепочки равенств

$$t_1 + \frac{n}{2} = s + t + 2\,\delta = t + s + \frac{s^2}{\frac{n}{\varepsilon} - s} = t + \frac{n \cdot s}{n - s \cdot \varepsilon}$$

следует соотношение

$$-t_1 - \frac{n}{2} = -t - \frac{n}{\frac{n}{s} - \varepsilon}\,.$$

В силу этого соотношения и выполнения условия $2 < n/s - \varepsilon$ можно применить замечание 1.1.8, согласно которому справедливо непрерывное вложение

$$H^{-t_1}_{2,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset H^{-t}_{\frac{n}{s}-\varepsilon,\,unif}(\mathbb{R}^n)$$

Таким образом, мы получаем, что

$$\mathbf{f}_\alpha \in H^{-t_1}_{2,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset H^{-t}_{\frac{n}{s}-\varepsilon,\,unif}(\mathbb{R}^n).$$

С другой стороны, поскольку $\alpha = s + t + \delta > s + t$, то из теоремы 1.3.2 следует, что

$$\mathbf{f}_\alpha \notin M[s, -t].$$

Теорема 1.3.3 доказана.

Замечание 1.3.1. *Из теоремы 1.3.3 следует, что в случае, когда* $\max(s,t) < \frac{n}{2}$*, невозможно получить описание пространства мультипликаторов* $M[s,-t]$ *в шкале пространств типа* $H^{\gamma}_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n)$*. Таким образом, в этом случае не существует аналога установленного в* [1] *утверждения, гласящего, что при* $\max(s,t) > \frac{n}{2}$ *имеет место совпадение пространств* $M[s,-t] = H^{-\min(s,t)}_{2,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ *с эквивалентностью соответствующих норм.*

Глава II. Описание мультипликаторов для пространств бесселевых потенциалов в шкале равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов

В этой главе исследуется проблема описания мультипликаторов из пространства $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ в пространство $H_q^t(\mathbb{R}^n)$ в терминах конкретных функциональных пространств в ситуации, когда на индексы $s \geqslant 0$, $t \in \mathbb{R}$, p, $q > 1$ наложены некоторые дополнительные естественные ограничения.

Отметим, что ранее шкала равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов была использована для конструктивного описания пространства мультипликаторов, действующих в пространствах бесселевых потенциалов, в следующих важных частных случаях (см. [53; Theorem 3.2.5], [1; Теорема 4], [15; Теорема 2.5], [60; Lemma 5] соответственно):

$$a)\ M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_p^t(\mathbb{R}^n)] = H_{p,\,unif}^t(\mathbb{R}^n) \ \text{ при } \ p > 1,\ s \geqslant t \geqslant 0,\ s > \frac{n}{p}\ ;$$

$$b)\ M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)] = H_{p',\,unif}^{-s}(\mathbb{R}^n) \ \text{ при } \ 1 < p \leqslant 2,\ s > \frac{n}{p}\ ;$$

$$c)\ M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_p^{-s}(\mathbb{R}^n)] = H_{\max(p,p'),\,unif}^{-s}(\mathbb{R}^n) \ \text{ при } \ p > 1,\ s > \frac{n}{\max(p,p')}\ ;$$

$$d)\ M[H_2^s(\mathbb{R}^n) \to H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)] = H_{2,\,unif}^{-t}(\mathbb{R}^n) \ \text{ при } \ s \geqslant t \geqslant 0,\ s > \frac{n}{2}.$$

В данной главе получено обобщение всех этих результатов на наиболее общий случай мультипликаторов из $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^t(\mathbb{R}^n)$ и из $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)$ при s, $t \geqslant 0$, p, $q > 1$. Также показано, что если хотя бы одно из накладываемых при этом дополнительных ограничений не выполняется, то описание соответствующего пространства мультипликаторов в шкале пространств $H_{r,\,unif}^{\gamma}(\mathbb{R}^n)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $r > 1$, невозможно.

2.1. Мультипликаторы в абстрактном случае и в пространствах бесселевых потенциалов

Введём сначала понятие мультипликатора из банахова пространства функций в банахово пространство обобщённых функций, а затем применим этот общий подход для определения и изложения основных свойств пространств мультипликаторов из $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^t(\mathbb{R}^n)$ в случае произвольных индексов s, $t \in \mathbb{R}$, p, $q > 1$.

Определение 2.1.1. *Пусть S_1 — банахово пространство заданных на $\mathbb{R}^n$ комплекснозначных функций, такое, что $D(\mathbb{R}^n)$ плотно вложено в $(S_1, \|\cdot\|_{S_1})$, и пусть также $S_2 \subset D'(\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство обобщённых функций. Распределение*

$\mu \in D'(\mathbb{R}^n)$ назовём мультипликатором из S_1 в S_2, если $\mu \in S_{2,\,loc}$ и существует константа $C > 0$, такая, что

$$\|f \cdot \mu\|_{S_2} \leqslant C\, \|f\|_{S_1} \;\; \forall\, f \in D(\mathbb{R}^n).$$

Легко показать, что в условиях определения 2.1.1 множество всех мультипликаторов из S_1 в S_2, которое мы далее будем обозначать как $M[S_1 \longrightarrow S_2]$, является нормированным пространством относительно нормы

$$\|\mu\|_{M[S_1 \to S_2]} \stackrel{def}{=} \inf\{C > 0 \mid \|f \cdot \mu\|_{S_2} \leqslant C\, \|f\|_{S_1} \;\; \forall\, f \in D(\mathbb{R}^n)\}.$$

Утверждение 2.1.1. *Пусть $D(\mathbb{R}^n)$ плотно вложено в банахово пространство заданных на $\mathbb{R}^n$ комплекснозначных функций $(T_2, \|\cdot\|_{T_2})$. Тогда, если в условиях определения 2.1.1 существует изометрический изоморфизм*

$$F\colon S_2 \longrightarrow T_2^{\overline{*}}, \;\; \mu \longmapsto F_\mu,$$

удовлетворяющий условию

$$\mu(g) = F_\mu(\overline{g}) \quad \forall\, \mu \in S_2,\, \forall\, g \in D(\mathbb{R}^n),$$

то

$$M[S_1 \longrightarrow S_2] = \{\mu \in D'(\mathbb{R}^n) \mid \exists\, C_1 > 0\colon\; |\mu(f \cdot \overline{g})| \;\leqslant\; C_1\, \|f\|_{S_1} \|g\|_{T_2} \;\; \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{R}^n)\},$$

причём для произвольного $\mu \in M[S_1 \to S_2]$ имеем

$$\|\mu\|_{M[S_1 \to S_2]} = \inf\,\{C_1 > 0 \mid |\mu(f \cdot \overline{g})| \;\leqslant\; C_1\, \|f\|_{S_1} \|g\|_{T_2} \;\; \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{R}^n)\}.$$

Доказательство. Введём обозначение

$$M_1[S_1 \to S_2] = \{\mu \in D'(\mathbb{R}^n) \mid \exists\, C_1 > 0\colon\; |\mu(f \cdot \overline{g})| \;\leqslant\; C_1\, \|f\|_{S_1} \|g\|_{T_2} \;\; \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{R}^n)\}$$

и для произвольного $\mu \in M_1[S_1 \to S_2]$ положим

$$\|\mu\|_{M_1[S_1 \to S_2]} \stackrel{def}{=} \inf\,\{C_1 > 0 \mid |\mu(f \cdot \overline{g})| \;\leqslant\; C_1\, \|f\|_{S_1} \|g\|_{T_2} \;\; \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{R}^n)\}.$$

Пусть $\mu \in M[S_1 \to S_2]$.

Фиксируем произвольную функцию $f \in D(\mathbb{R}^n)$. Тогда имеем, что $f \cdot \mu \in S_2$, причём

$$\|f \cdot \mu\|_{S_2} \leqslant \|\mu\|_{M[S_1 \to S_2]}\, \|f\|_{S_1}.$$

Следовательно, для произвольной функции $g \in D(\mathbb{R}^n)$ получаем, что

$$|\mu(f \cdot \overline{g})| = |(f \cdot \mu)(\overline{g})| = |F_{f \cdot \mu}(g)| \;\leqslant \|F_{f \cdot \mu}\|_{T_2^{\overline{*}}}\, \|g\|_{T_2} =$$

$$= \|f\cdot\mu\|_{S_2}\|g\|_{T_2} \leqslant \|\mu\|_{M[S_1\to S_2]}\|f\|_{S_1}\|g\|_{T_2}.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$|\mu(f\cdot\overline{g})| \;\leqslant\; \|\mu\|_{M[S_1\to S_2]}\,\|f\|_{S_1}\|g\|_{T_2} \;\;\forall\, f,\, g\in D(\mathbb{R}^n),$$

которое и означает, что $\mu\in M_1[S_1\to S_2]$ и

$$\|\mu\|_{M_1[S_1\to S_2]} \leqslant \|\mu\|_{M[S_1\to S_2]}.$$

Наоборот, пусть $\mu\in M_1[S_1\to S_2]$. Тогда для произвольной функции $f\in D(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$|(f\cdot\mu)(\overline{g})| = |\mu(f\cdot\overline{g})| \;\leqslant\; \|\mu\|_{M_1[S_1\to S_2]}\,\|f\|_{S_1}\|g\|_{T_2} \;\;\forall\, g\in D(\mathbb{R}^n).$$

В силу плотности $D(\mathbb{R}^n)$ в пространстве T_2, отсюда следует, что распределение $f\cdot\mu$ порождает непрерывный антилинейный функционал $\Phi_{f\cdot\mu}$ на пространстве $(T_2, \|\cdot\|_{T_2})$, такой, что

$$\Phi_{f\cdot\mu}(g) = (f\cdot\mu)(\overline{g}) \;\;\forall\, g\in D(\mathbb{R}^n)$$

и

$$\|\Phi_{f\cdot\mu}\|_{T_2^{\overline{*}}} \;\leqslant\; \|\mu\|_{M_1[S_1\to S_2]}\cdot\|f\|_{S_1}.$$

Поскольку F осуществляет изометрию между S_2 и $T_2^{\overline{*}}$, то

$$\exists\, \nu_f\in S_2\colon\;\; \Phi_{f\cdot\mu} = F(\nu_f) = F_{\nu_f},$$

причём

$$(f\cdot\mu)(g) = \Phi_{f\cdot\mu}(\overline{g}) = F_{\nu_f}(\overline{g}) = \nu_f(g) \;\;\forall\, g\in D(\mathbb{R}^n).$$

Таким образом, для произвольной функции $f\in D(\mathbb{R}^n)$ имеем $f\cdot\mu \overset{D'(\mathbb{R}^n)}{=} \nu_f\in S_2$, причём

$$\|f\cdot\mu\|_{S_2} = \|F_{\nu_f}\|_{T_2^{\overline{*}}} = \|\Phi_{f\cdot\mu}\|_{T_2^{\overline{*}}} \;\leqslant\; \|\mu\|_{M_1[S_1\to S_2]}\cdot\|f\|_{S_1}.$$

А это и означает, что $\mu\in M[S_1\to S_2]$, причём

$$\|\mu\|_{M[S_1\to S_2]} \leqslant \|\mu\|_{M_1[S_1\to S_2]}.$$

Утверждение 2.1.1 доказано.

Теперь определим понятие мультипликатора, действующего в шкале пространств бесселевых потенциалов.

Определение 2.1.2. *Пусть $s,\, t\in\mathbb{R},\; p,\, q>1$. Тогда пространством мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ назовём линейное пространство*

$$\{\mu\in H^t_{q,\,loc}(\mathbb{R}^n) \mid \exists\, C>0\colon \|f\cdot\mu\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\,\|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}\;\forall\, f\in D(\mathbb{R}^n)\}$$

с определённой на нём нормой

$$\|\mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} = \inf\{C>0 \mid \|f\cdot\mu\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\,\|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}\;\forall\, f\in D(\mathbb{R}^n)\}.$$

Из инвариантности нормы пространства $H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $r > 1$, относительно сдвига на $z \in \mathbb{R}^n$ и легко проверяемого соотношения

$$f \cdot \mu_{(z)} = (f_{(-z)} \cdot \mu)_{(z)} \quad \forall\, f \in D(\mathbb{R}^n),\ \forall\, \mu \in D'(\mathbb{R}^n),\ \forall\, z \in \mathbb{R}^n$$

следует, что сдвиг произвольного мультипликатора $\mu \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ на $z \in \mathbb{R}^n$ также является мультипликатором из $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^t(\mathbb{R}^n)$, причём

$$\|\mu_{(z)}\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} = \|\mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} \ \ \forall\, z \in \mathbb{R}^n.$$

Заметим, что при $s \geqslant 0$ в силу справедливости вложения $H_p^s(\mathbb{R}^n) \subset H_p^0(\mathbb{R}^n)$ пространство $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ можно отождествлять с функциональным пространством

$$\mathbb{H}_p^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in L_p(\mathbb{R}^n) \mid \mathbf{f} \in H_p^s(\mathbb{R}^n\},$$

причём

$$\|f\|_{\mathbb{H}_p^s(\mathbb{R}^n)} \stackrel{def}{=} \|J_s(f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} \ \ \forall\, f \in \mathbb{H}_p^s(\mathbb{R}^n).$$

Тогда если в условиях определения 2.1.2 потребовать дополнительно, что $s \geqslant 0$, то пространство мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ будет совпадать с пространством $M[\mathbb{H}_p^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_q^t(\mathbb{R}^n)]$, определённым как

$$\{\mu \in H^t_{q,\,loc}(\mathbb{R}^n) \mid \exists\, C > 0\colon \|f \cdot \mu\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\,\|f\|_{\mathbb{H}_p^s(\mathbb{R}^n)}\ \forall\, f \in D(\mathbb{R}^n)\}.$$

Отметим, что так как $D(\mathbb{R}^n)$ плотно вложено в $\mathbb{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$, то это определение пространства $M[\mathbb{H}_p^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_q^t(\mathbb{R}^n)] = M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ является частным случаем определения 2.1.1, когда в роли функционального пространства S_1 выступает $\mathbb{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$, а в роли пространства распределений S_2 выступает $H_q^t(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 2.1.1. *Пусть $s,\ t \geqslant 0$, $p,\ q > 1$. Как было отмечено в главе 1, в этой ситуации пространство $H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)$ изометрически изоморфно пространству $(H_q^t(\mathbb{R}^n)^{\overline{*}} \cong (\mathbb{H}_q^t(\mathbb{R}^n))^{\overline{*}}$, причём изометрический изоморфизм*

$$G\colon H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow (\mathbb{H}_q^t(\mathbb{R}^n))^{\overline{*}},\ u \longmapsto G_u,$$

определённый как

$$G_u(f) = < u, \mathbf{f} >_t \ \ \forall\, f \in \mathbb{H}_q^t(\mathbb{R}^n),$$

удовлетворяет свойству

$$G_u(g) = u(\overline{g}) \ \ \forall\, g \in D(\mathbb{R}^n).$$

Поэтому, согласно утверждению 2.1.1, пространство $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]$ может быть также определено как

$$\{\mu \in D'(\mathbb{R}^n) | \ \exists\, C > 0\colon |\mu(f \cdot \overline{g})| \leqslant C\,\|f\|_{\mathbb{H}_p^s(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{\mathbb{H}_q^t(\mathbb{R}^n)} \ \ \forall\, f,\ g \in D(\mathbb{R}^n)\}.$$

При этом для произвольного $\mu \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]$ *имеем*

$$\|\mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]} = \inf\{C>0 \mid |\mu(f\cdot\overline{g})| \leqslant C\,\|f\|_{\mathbb{H}_p^s(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{\mathbb{H}_q^t(\mathbb{R}^n)} \ \ \forall\, f,\, g\in D(\mathbb{R}^n)\}.$$

Такой подход к определению мультипликаторов, использованный нами в главе 1, восходит к статьям [17, 60], *где он был развит в частном случае* $p=q=2$.

Отметим, что поскольку множество $\mathbf{D}(\mathbb{R}^n)$ регулярных функционалов с плотностями из $D(\mathbb{R}^n)$ плотно в пространстве $H_p^s(\mathbb{R}^n)$, то в условиях определения 2.1.2 мультипликатор $\mu \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ единственным образом определяет ограниченный линейный оператор M_μ из $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^t(\mathbb{R}^n)$, такой, что

$$M_\mu(\mathbf{f}) = f\cdot\mu \ \ \forall\, f\in D(\mathbb{R}^n).$$

Таким образом, M_μ является оператором умножения на распределение μ на регулярных функционалах $\mathbf{f}$, где $f\in D(\mathbb{R}^n)$, причём для мультипликатора

$$\mu \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$$

справедливо равенство

$$\|\mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} \ = \ \|M_\mu\|_{\mathcal{B}(H_p^s(\mathbb{R}^n),\, H_q^t(\mathbb{R}^n))}.$$

Более того, если имеет место непрерывное вложение $H_p^s(\mathbb{R}^n) \subset H_q^t(\mathbb{R}^n)$, то найдутся такие константы $C>0$, $C_f>0$, что

$$\|g\cdot\mathbf{f}\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\,\|f\cdot\mathbf{g}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\,C_f\,\|\mathbf{g}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} \ \ \forall\, f, g\in D(\mathbb{R}^n)$$

и, значит, для произвольной функции $f\in D(\mathbb{R}^n)$ имеем $\mathbf{f} \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$, причём можно показать, что справедливо равенство

$$M_{\mathbf{f}}(u) = f\cdot u \ \ \forall\, u\in H_p^s(\mathbb{R}^n).$$

Замечание 2.1.2. *Пусть* $p,\ q>1,\ \ s,\ s_1,\ t,\ t_1\in\mathbb{R}$, *причём* $s_1\geqslant s,\ t\geqslant t_1$. *Тогда из определения 2.1.2 и непрерывности вложений*

$$H_p^{s_1}(\mathbb{R}^n) \subset H_p^s(\mathbb{R}^n) \ \text{и} \ \ H_q^t(\mathbb{R}^n) \subset H_q^{t_1}(\mathbb{R}^n)$$

следует, что имеет место непрерывное вложение

$$M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)] \subset M[H_p^{s_1}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t_1}(\mathbb{R}^n)].$$

Утверждение 2.1.2. *Пусть* $s,\ t\in\mathbb{R},\ \ p,\ q>1$. *Тогда имеет место совпадение пространств*

$$M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)] = M[H_q^t(\mathbb{R}^n) \to H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)],$$

причём нормы этих пространств равны.

Доказательство. Пусть $\mu \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]$. Тогда для произвольной функции $f \in D(\mathbb{R}^n)$ имеем $f \cdot \mu \in H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)$, причём

$$\|f \cdot \mu\|_{H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|\mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]} \|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} \ \forall\, f \in D(\mathbb{R}^n).$$

Фиксируем произвольную функцию $g \in D(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$|(g \cdot \mu)(f)| = |(f \cdot \mu)(g)| \leqslant \|f \cdot \mu\|_{H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)} \cdot \|\mathbf{g}\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)} \leqslant$$

$$\leqslant \|\mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]} \|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} \cdot \|\mathbf{g}\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)} \ \forall\, f \in D(\mathbb{R}^n).$$

Отсюда, согласно замечанию 1.1.2, следует, что $g \cdot \mu \in H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)$ и справедливо неравенство

$$\|g \cdot \mu\|_{H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|\mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]} \|\mathbf{g}\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)} \,.$$

В силу произвольности выбора функции $g \in D(\mathbb{R}^n)$ это неравенство и означает, что

$$\mu \in M[H_q^t(\mathbb{R}^n) \to H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)],$$

причём

$$\|\mu\|_{M[H_q^t(\mathbb{R}^n) \to H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant \|\mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]}.$$

Обратное вложение и соответствующее неравенство доказываются аналогично.

Утверждение 2.1.2 доказано.

Утверждение 2.1.3. *Пусть $s,\ t \in \mathbb{R},\ p,\ q > 1$. Тогда справедливо непрерывное вложение*

$$M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_q^t(\mathbb{R}^n)] \subset H_{q,\,unif}^t(\mathbb{R}^n) \cap H_{p',\,unif}^{-s}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Пусть $\mu \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_q^t(\mathbb{R}^n)]$, а функция $h \in D(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям

$$0 \leqslant h(x) \leqslant 1 \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad h(x) = 1 \ \forall\, x\colon |x| \leqslant 1.$$

Поскольку для произвольного $z \in \mathbb{R}^n$ имеем $h_{(z)} \in D(\mathbb{R}^n)$, то

$$h_{(z)} \cdot \mu \in H_q^t(\mathbb{R}^n),$$

причём

$$\|h_{(z)} \cdot \mu\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|\mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} \|\mathbf{h}_{(z)}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} = \|\mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} \|\mathbf{h}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Отсюда, переходя к супремуму по $z \in \mathbb{R}^n$, получаем, что $\mu \in H_{q,\,unif}^t(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|\mu\|_{H_{q,\,unif}^t(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1 \|\mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} \,,$$

где $C_1 = \|\mathbf{h}\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}$.

Таким образом, имеет место непрерывное вложение

$$M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)] \subset H^t_{q,\,unif}(\mathbb{R}^n). \tag{2.1}$$

Учитывая, что пространства $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$ и $M[H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n) \to H^{-s}_{p'}(\mathbb{R}^n)]$ совпадают в силу утверждения 2.1.2 и их нормы эквивалентны, а, с другой стороны, по вышедоказанному справедливо непрерывное вложение

$$M[H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n) \to H^{-s}_{p'}(\mathbb{R}^n)] \subset H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

то справедливо и непрерывное вложение

$$M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)] \subset H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n). \tag{2.2}$$

Для завершения доказательства остаётся заметить, что из непрерывных вложений (2.1) и (2.2) следует справедливость доказываемого вложения

$$M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)] \subset H^t_{q,\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n)$$

с соответствующей оценкой норм.

Утверждение 2.1.3 доказано.

Следствие 2.1.1. *Пусть $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $p > 1$. Тогда справедливы непрерывные вложения*

$$a)\ M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_{p'}(\mathbb{R}^n)] \subset H^t_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n);$$

$$b)\ M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{p'}(\mathbb{R}^n)] \subset H^{-\min\{s,t\}}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n).$$

Результат следствия 2.1.1 непосредственно вытекает из утверждения 2.1.3 и справедливого для произвольных чисел s, $\gamma \in \mathbb{R}$ соотношения

$$H^{\gamma}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n) = H^{\max\{-s,\gamma\}}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

которое легко получить из пункта b) замечания 1.1.8.

2.2. Эквивалентные нормы на пространстве мультипликаторов и критерий вложения в это пространство равномерно локализованного пространства бесселевых потенциалов

Для того, чтобы установить, когда имеет место обратное вложение

$$H^t_{q,\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)],$$

в этом параграфе мы будем исследовать более общую проблему справедливости непрерывного вложения

$$H^{\gamma}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$$

при $\gamma,\ s,\ t \in \mathbb{R},\ p,\ q,\ r > 1$. Отметим, что в ситуации, когда на пространстве мультипликаторов $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$ можно корректно определить равномерную мультипликаторную норму $|||\cdot|||_{M[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]}$ так, чтобы эта норма была эквивалентна стандартной норме этого пространства, непрерывные вложения

$$H^{\gamma}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^t_q(\mathbb{R}^n)] \text{ и } H^{\gamma}_{r}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^t_q(\mathbb{R}^n)]$$

имеют место одновременно. Поэтому для получения эффективно проверяемого условия справедливости первого из этих вложений мы устанавливаем в этом параграфе критерий справедливости непрерывного вложения

$$H^{\gamma}_{r}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$$

в терминах выполнения конкретной функциональной оценки и исследуем вопрос, когда на пространстве $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$ можно ввести равномерную мультипликаторную норму, эквивалентную стандартной норме этого пространства.

Для исследования вопроса эквивалентности этих норм на пространстве мультипликаторов нам понадобятся теорема Стрихартца о равномерной локализации и некоторая её модификация.

Теорема Стрихартца о равномерной локализации. *Пусть $s \in \mathbb{R}$, $p > 1$ и функция $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующим условиям:*
a) $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$,
b) $\varphi(x) = 1 \quad \forall\, x \in Q_1 \overset{def}{=} \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leqslant 1\ \forall\, i = \overline{1,n}\,\}$,
c) $\varphi(x) = 0 \quad \forall\, x \notin Q_2 \overset{def}{=} \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leqslant 2\ \forall\, i = \overline{1,n}\,\}$.
Тогда для произвольного распределения $v \in S'(\mathbb{R}^n)$ следующие условия эквивалентны:
1) $v \in H^s_p(\mathbb{R}^n)$;
2) $\forall\, m \in \mathbb{Z}^n\ \ \varphi_{(m)} \cdot v \in H^s_p(\mathbb{R}^n)$ *и*

$$\|v\|_{s,\,p,\,\varphi} \overset{def}{=} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \|\varphi_{(m)} \cdot v\|^p_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

При этом $\|\cdot\|_{s,\,p,\,\varphi}$ определяет на $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ норму, эквивалентную норме $\|\cdot\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}$.

В случае $s \geqslant 0$ этот результат был получен в [66; Ch. I, Theorem 3.1]. Для индекса гладкости произвольного знака аналогичный теореме Стрихартца результат содержится в [67; Theorem 2.4.7], только на функцию $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ вместо условий *a)* – *c)* накладывается единственное условие

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \varphi_{(m)}(x) = 1\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Определим по функции $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей условиям теоремы Стрихартца о равномерной локализации, функцию

$$\theta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \ \theta(x) \overset{def}{=} \frac{1}{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi_{(k)}(x)}\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда несложно видеть, что $\theta \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, где через $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ мы обозначаем пространство бесконечно дифференцируемых функций, ограниченных вместе со всеми своими производными на $\mathbb{R}^n$. Поскольку, к тому же, система функций $\{\theta \cdot \varphi_{(k)}\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ образует разбиение единицы, то из [67; Theorem 2.4.7] следует результат теоремы Стрихартца о равномерной локализации для $s < 0$ в силу следующей леммы.

Лемма 2.2.1. *Пусть $s \in \mathbb{R}$, $p > 1$ и функция $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующим условиям:*
a) $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$,
b) $\varphi(x) = 1 \ \ \forall\, x \in Q_1 \overset{def}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leqslant 1\ \forall\, i = \overline{1, n}\,\}$,
c) $\varphi(x) = 0 \ \ \forall\, x \notin Q_2 \overset{def}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leqslant 2\ \forall\, i = \overline{1, n}\}$.
Тогда для произвольного распределения $v \in S'(\mathbb{R}^n)$ условие 2) теоремы о равномерной локализации эквивалентно следующему условию:
3) для произвольной функции $g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, такой, что

$$g(x) \geqslant \delta_g > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

имеем, что

$$g \cdot \varphi_{(m)} \cdot v \in H_p^s \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}^n$$

и

$$\|v\|_{s,\,p,\,\varphi,\,g} \overset{def}{=} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \|g \cdot \varphi_{(m)} \cdot v\|^p_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Доказательство. 2) $\Rightarrow$ 3) Пусть для $v \in S'(\mathbb{R}^n)$ выполнено условие 2) теоремы о равномерной локализации и $g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ - произвольная функция, такая, что

$$g(x) \geqslant \delta_g > 0\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Поскольку оператор A_g умножения на функцию $g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ ограничен в пространстве $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ согласно замечанию 1.1.4, то для произвольного $m \in \mathbb{Z}^n$

$$g \cdot \varphi_{(m)} \cdot v \in H_p^s(\mathbb{R}^n),$$

причём существует константа $C_g > 0$, такая, что

$$\|g \cdot \varphi_{(m)} \cdot v\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_g\, \|\varphi_{(m)} \cdot v\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}\ \ \forall\, m \in \mathbb{Z}^n.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \|g\cdot\varphi_{(m)}\cdot v\|^p_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_g \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \|\varphi_{(m)}\cdot v\|^p_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

откуда и следует, что для произвольного $v \in S'(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющего условию 2), справедливо также и условие 3).

3) $\Rightarrow$ 2) Очевидно, что условие 2) получается из условия 3), если взять функцию g, тождественно равную единице.

Лемма 2.2.1 доказана.

Следствие 2.2.1. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$, $p > 1$ *и функция* $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ *удовлетворяет условиям* $a) - c)$ *из формулировки леммы 2.2.1. Тогда условия 1), 2) и 3) эквивалентны условию*
3') для произвольной функции $g \in C^\infty_b(\mathbb{R}^n)$, *такой, что*

$$g(x) \geqslant \delta_g > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

имеем, что

$$g\cdot\varphi^k_{(m)}\cdot v \in H^s_p \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}^n$$

и

$$\|v\|_{s,\,p,\,\varphi^k,\,g} \stackrel{def}{=} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \|g\cdot\varphi^k_{(m)}\cdot v\|^p_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

При этом все нормы

$$\|\cdot\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)},\ \ \|\cdot\|_{s,\,p,\,\varphi},\ \ \|\cdot\|_{s,\,p,\,\varphi,\,g},\ \ \|\cdot\|_{s,\,p,\,\varphi^k,\,g}$$

эквивалентны на пространстве $H^s_p(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Эквивалентность условий 1), 2) и 3) следует из теоремы Стрихартца о равномерной локализации и леммы 2.2.1. Поскольку же функция

$$\varphi^k\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto (\varphi(x))^k$$

удовлетворяет тем же условиям $a) - c)$, что и функция φ, то условие 3') также эквивалентно всем этим условиям.

Так как при наложенных на $g \in C^\infty_b(\mathbb{R}^n)$ ограничениях функция $h = 1/g$ также принадлежит пространству $C^\infty_b(\mathbb{R}^n)$, то оператор A_h умножения на функцию h ограничен в пространстве $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ и, значит, найдётся такая константа $C_h > 0$, что

$$\|\varphi_{(m)}\cdot v\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)} = \|A_h(g\cdot\varphi_{(m)}\cdot v)\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_h\,\|g\cdot\varphi_m\cdot v\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\ \ \forall\, m \in \mathbb{Z}^n.$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\|g\cdot\varphi_{(m)}\cdot v\|^p_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant C_g\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\|\varphi_{(m)}\cdot v\|^p_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\Big)^{\frac{1}{p}}$$

и

$$\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\|\varphi_{(m)}\cdot v\|^p_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant C_h\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\|g\cdot\varphi_{(m)}\cdot v\|^p_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\Big)^{\frac{1}{p}},$$

откуда, учитывая результат самой теоремы о равномерной локализации, мы получаем эквивалентность всех норм

$$\|\cdot\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)},\quad \|\cdot\|_{s,\,p,\,\varphi},\quad \|\cdot\|_{s,\,p,\,\varphi,\,g},\quad \|\cdot\|_{s,\,p,\,\varphi^k,\,g}$$

на линейном пространстве $H^s_p(\mathbb{R}^n)$.

Следствие 2.2.1 доказано.

Определение 2.2.1. *Пусть $s,\ t\in\mathbb{R},\ p,\ q>1$ и функция φ удовлетворяет условиям теоремы Стрихартца о равномерной локализации. Определим пространство $M_{unif}[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$ как множество тех распределений $u\in D'(\mathbb{R}^n)$, для которых корректно определена и конечна норма*

$$\|u\|_{M_{unif,\,\varphi}[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]}\overset{def}{=}\sup_{z\in\mathbb{R}^n}\{\,\|\varphi_{(z)}\cdot u\|_{M[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]}\}.$$

Нетрудно показать, что определение 2.2.1 не зависит от выбора функции φ, причём нормы $\|\cdot\|_{M_{unif,\,\varphi_1}[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]}$ и $\|\cdot\|_{M_{unif,\,\varphi_2}[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]}$ эквивалентны для любых двух функций φ_1 и φ_2, удовлетворяющих условиям теоремы о равномерной локализации. Поэтому в дальнейшем мы будем опускать индекс φ в обозначении $\|\cdot\|_{M_{unif,\,\varphi}[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]}$ и писать просто $\|\cdot\|_{M_{unif}[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]}$.

Лемма 2.2.2. *Пусть $s,\ t\in\mathbb{R},\ 1<p\leqslant q$. Тогда имеет место совпадение пространств*

$$M[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]=M_{unif}[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)],$$

причём нормы этих пространств эквивалентны.

Доказательство. I. Докажем сначала, что справедливо непрерывное вложение

$$M[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]\subset M_{unif}[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)].$$

Пусть $\mu\in M[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$ и функция φ удовлетворяет условиям теоремы Стрихартца о равномерной локализации.

Зафиксируем произвольное $z\in\mathbb{R}^n$. Тогда получаем, что

$$\varphi_{(z)}\cdot\mu\in H^t_q(\mathbb{R}^n)$$

и, в силу ограниченности в $H^t_q(\mathbb{R}^n)$ оператора умножения на функцию из $D(\mathbb{R}^n)$,

$$f\cdot(\varphi_{(z)}\cdot\mu)\in H^t_q(\mathbb{R}^n)\ \ \forall\, f\in D(\mathbb{R}^n),$$

причём

$$\|f\cdot(\varphi_{(z)}\cdot\mu)\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)}\ =\ \|(f\cdot\varphi_{(z)})\cdot\mu\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)}\ \leqslant\|\mu\|_{M[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]}\ \|\varphi_{(z)}\cdot\mathbf{f}\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\leqslant$$

$$\leqslant\|A_\varphi\|_{\mathcal{B}(H^s_p(\mathbb{R}^n))}\|\mu\|_{M[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]}\ \|\mathbf{f}\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\ \ \forall\, f\in D(\mathbb{R}^n),$$

где последнее неравенство справедливо в силу замечания 1.1.4.

Следовательно, согласно определению 2.1.2, $\varphi_{(z)}\cdot\mu$ является мультипликатором из $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ в $H^t_q(\mathbb{R}^n)$, причём

$$\|\varphi_{(z)}\cdot\mu\|_{M[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]}\leqslant K\ \|\mu\|_{M[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n))},$$

где $K=\|A_\varphi\|_{\mathcal{B}(H^s_p(\mathbb{R}^n))}$.

Переходя в последнем неравенстве к супремуму по $z\in\mathbb{R}^n$, в результате получаем, что $\mu\in M_{unif}[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$ и

$$\|\mu\|_{M_{unif}[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]}\leqslant K\ \|\mu\|_{M[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]}.$$

II. Теперь докажем обратное непрерывное вложение

$$M_{unif}[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]\subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)].$$

Пусть $\mu\in M_{unif}[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$, то есть $\mu\in D'(\mathbb{R}^n)$ и для функции φ, удовлетворяющей условиям теоремы о равномерной локализации, имеем, что

$$\varphi_{(z)}\cdot\mu\in M[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]\ \ \forall\, z\in\mathbb{R}^n,$$

причём

$$\|\mu\|_{M_{unif}[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]}=\sup_{z\in\mathbb{R}^n}\{\|\varphi_{(z)}\cdot\mu\|_{M[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]}\}<+\infty.$$

Докажем, что $\mu\in M[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$, причём для некоторой не зависящей от μ константы $C>0$ выполнена оценка

$$\|\mu\|_{M[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]}\leqslant C\ \|\mu\|_{M_{unif}[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]}\ .$$

Пусть $f\in D(\mathbb{R}^n)$. Для того, чтобы оценить норму $f\cdot\mu$ в пространстве $H^t_q(\mathbb{R}^n)$, рассмотрим распределения $\varphi^2_{(m)}\cdot f\cdot\mu$, где $m\in\mathbb{Z}^n$.

Фиксируем произвольное $m\in\mathbb{Z}^n$. Поскольку

$$\varphi_{(m)}\cdot f\in D(\mathbb{R}^n),\ \ \text{а}\ \ \varphi_{(m)}\cdot\mu\in M[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)],$$

то получаем, что

$$\varphi_{(m)}^2 \cdot f \cdot \mu = \varphi_{(m)} \cdot f \cdot (\varphi_{(m)} \cdot \mu) \in H_q^t(\mathbb{R}^n),$$

причём справедлива цепочка неравенств

$$\|\varphi_{(m)}^2 \cdot f \cdot \mu\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|\varphi_{(m)} \cdot \mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} \, \|\varphi_{(m)} \cdot \mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant$$

$$\leqslant \|\mu\|_{M_{unif}[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} \, \|\varphi_{(m)} \cdot \mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Для того, чтобы доказать сходимость ряда

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \|\varphi_{(m)} \cdot \mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}^q,$$

рассмотрим сначала ряд

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \|\varphi_{(m)} \cdot \mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}^p.$$

Из теоремы Стрихартца о равномерной локализации следует, что этот ряд сходится и для некоторой константы $C_1 > 0$, не зависящей от $f \in D(\mathbb{R}^n)$, справедливо неравенство

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \|\varphi_{(m)} \cdot \mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}^p \leqslant C_1 \, \|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}^p.$$

Поскольку при $p \leqslant q$ пространство l_p непрерывно вложено в l_q, причём справедлива оценка

$$\|a\|_{l_q} \leqslant \|a\|_{l_p} \ \ \forall\, a \in l_p,$$

то имеет место неравенство

$$\left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \|\varphi_{(m)} \cdot \mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \|\varphi_{(m)} \cdot \mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_1^{\frac{1}{p}} \, \|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Учитывая доказанную выше оценку нормы $\|\varphi_{(m)}^2 \cdot f \cdot \mu\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)}$, получаем следующую цепочку неравенств:

$$\left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \|\varphi_{(m)}^2 \cdot f \cdot \mu\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)}^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|\mu\|_{M_{unif}[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} \cdot \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \|\varphi_{(m)} \cdot \mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1^{\frac{1}{p}} \, \|\mu\|_{M_{unif}[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} \cdot \|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Применяя для $v = f \cdot \mu$ следствие 2.2.1 при $k = 2$ и функции g, тождественно равной единице, получаем, что $f \cdot \mu \in H_q^t(\mathbb{R}^n)$ и найдётся такая не зависящая от выбора f и μ константа $C_0 > 0$, что выполняется оценка

$$\|f \cdot \mu\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_0 \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \|\varphi_{(m)}^2 \cdot f \cdot \mu\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)}^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \, \|\mu\|_{M_{unif}[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} \|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)},$$

где $C \overset{def}{=} C_0 \cdot C_1^{\frac{1}{p}}$ – некоторая не зависящая ни от выбора f, ни от выбора μ положительная константа.

В силу произвольности выбора $f \in D(\mathbb{R}^n)$ эта оценка означает, что

$$\mu \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)],$$

причём

$$\|\mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} \leqslant C\, \|\mu\|_{M_{unif}[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]}.$$

Лемма 2.2.2 доказана.

Поскольку в силу леммы 2.2.2 при $p \leqslant q$ пространства $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ и $M_{unif}[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ совпадают и соответствующие нормы эквивалентны, то в этой ситуации на пространстве мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ можно ввести норму

$$|||\mu|||_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} \overset{def}{=} \|\mu\|_{M_{unif}[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} \ \ \forall\, \mu \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)],$$

эквивалентную стандартной норме этого пространства.

Обоснуем необходимость ограничения $p \leqslant q$ в условиях леммы 2.2.2 для случая $s \geqslant t$, который и будет в основном рассматриваться далее.

Для этого предположим, что в случае $p > q$ верен вывод леммы 2.2.2. Тогда в силу утверждения 1.1.1 корректно определён ограниченный оператор умножения на произвольную функцию из $D(\mathbb{R}^n)$, действующий из $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^s(\mathbb{R}^n)$. Отсюда, учитывая, что в случае $s \geqslant t$ согласно замечанию 2.1.2 справедливо непрерывное вложение

$$M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^s(\mathbb{R}^n)] \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)],$$

получаем, что

$$\mathbf{f} \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$$

для произвольной функции $f \in D(\mathbb{R}^n)$.

Тогда для регулярного функционала $\mathbf{I}$, порождённого тождественно равной единице функцией $I(\cdot)$, определённой на $\mathbb{R}^n$, получаем, что

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^n} \|h_{(z)} \cdot \mathbf{I}\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} = \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{h}_{(z)}\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} = \|\mathbf{h}\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]},$$

где функция h удовлетворяет условиям теоремы Стрихартца о равномерной локализации. Таким образом, корректно определена конечная норма

$$\|\mathbf{I}\|_{M_{unif}[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} = \|\mathbf{h}\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]}.$$

и, значит, $\mathbf{I} \in M_{unif}[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$. Следовательно, в силу нашего предположения о справедливости вывода леммы 2.2.2,

$$\mathbf{I} \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)],$$

откуда, в свою очередь, следует, что имеет место непрерывное вложение

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) \subset H_q^t(\mathbb{R}^n),$$

которое невозможно при $p > q$. Полученное противоречие и показывает, что в формулировке леммы 2.2.2 нельзя отказаться от условия $p \leqslant q$ в случае, когда $s \geqslant t$.

Лемма 2.2.3. *Пусть s, $t \in \mathbb{R}$, p, $q > 1$ и пусть также совпадают пространства $M_{unif}[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ и $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$, а их нормы эквивалентны. Тогда для произвольных чисел $\gamma \in \mathbb{R}$ и $r > 1$ непрерывные вложения*

$$H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$$

и

$$H^\gamma_r(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$$

справедливы одновременно.

Доказательство. Из справедливости первого непрерывного вложения следует справедливость второго, поскольку согласно замечанию 1.1.7 имеет место непрерывное вложение

$$H^\gamma_r(\mathbb{R}^n) \subset H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n).$$

Докажем обратное. Пусть справедливо непрерывное вложение

$$H^\gamma_r(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$$

и, значит, существует константа $C > 0$, такая, что

$$\|u\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} \;\leqslant\; C\,\|u\|_{H^\gamma_r(\mathbb{R}^n)} \;\;\forall\, u \in H^\gamma_r(\mathbb{R}^n).$$

Фиксируем произвольную функцию $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую условиям теоремы Стрихартца о равномерной локализации, то есть
$a)$ $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1 \;\;\forall\, x \in \mathbb{R}^n$,
$b)$ $\varphi(x) = 1 \;\;\forall\, x \in Q_1^n \overset{def}{=} \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leqslant 1 \;\forall\, i = \overline{1,n}\,\}$,
$c)$ $\varphi(x) = 0 \;\;\forall\, x \notin Q_2^n \overset{def}{=} \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leqslant 2 \;\forall\, i = \overline{1,n}\,\}$.
Заметим, что поскольку в пространстве $\mathbb{R}^n$ единичный шар $B_1(0)$ содержится в кубе Q_1^n, то φ удовлетворяет условиям, налагаемым на функцию η в определении 1.1.4 пространства $H^s_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $\mu \in H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$. Тогда для произвольного $z \in \mathbb{R}^n$ имеем, что

$$\varphi_{(z)} \cdot \mu \in H^\gamma_r(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$$

и

$$\|\varphi_{(z)} \cdot \mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} \leqslant C\,\|\varphi_{(z)} \cdot \mu\|_{H^\gamma_r(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\,\|\mu\|_{H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)}.$$

Переходя в этом неравенстве к супремуму по $z \in \mathbb{R}^n$, получаем, что

$$\|\mu\|_{M_{unif}[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]} \leqslant C\, \|\mu\|_{H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)}.$$

Согласно условиям леммы, отсюда следует, что $\mu \in M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$ и существует не зависящая от выбора μ константа $C_1 > 0$, такая, что

$$\|\mu\|_{M[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]} \leqslant C_1 \|\mu\|_{M_{unif}[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]} \leqslant C_1\, C\, \|\mu\|_{H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)}.$$

В силу произвольности выбора $\mu \in H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ это и означает выполнение непрерывного вложения

$$H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)].$$

Лемма 2.2.3 доказана.

Лемма 2.2.4. *Пусть $\gamma,\ s,\ t \geqslant 0$ и $p,\ q,\ r > 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) найдётся такая константа $C > 0$, что

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H^\gamma_r(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\, \|\mathbf{f}\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\, \|\mathbf{g}\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)} \ \ \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{R}^n); \qquad (2.3)$$

2) $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вложено в $M[H^t_q(\mathbb{R}^n) \to H^\gamma_r(\mathbb{R}^n)]$;

3) $H^t_q(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вложено в $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^\gamma_r(\mathbb{R}^n)]$;

4) $H^{-\gamma}_{r'}(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вложено в $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Пусть найдётся некоторая константа $C > 0$, такая, что выполнена оценка

$$\|g \cdot \mathbf{f}\|_{H^\gamma_r(\mathbb{R}^n)} \ =\ \|f \cdot \mathbf{g}\|_{H^\gamma_r(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\, \|\mathbf{f}\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\, \|\mathbf{g}\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)} \ \ \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{R}^n).$$

Эта оценка означает, что для произвольной функции $f \in D(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\mathbf{f} \in M[H^t_q(\mathbb{R}^n) \to H^\gamma_r(\mathbb{R}^n)],$$

причем для не зависящей от выбора f константы $C > 0$ справедливо неравенство

$$\|\mathbf{f}\|_{M[H^t_q(\mathbb{R}^n)\to H^\gamma_r(\mathbb{R}^n)]} \leqslant C\, \|\mathbf{f}\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Рассмотрим теперь произвольный элемент $v \in H^s_p(\mathbb{R}^n)$. Для него существует последовательность $f_m \in D(\mathbb{R}^n), m \in \mathbb{N}$, такая, что

$$\mathbf{f_m} \xrightarrow[m\to\infty]{H^s_p(\mathbb{R}^n)} v.$$

Зафиксируем произвольную функцию $g \in D(\mathbb{R}^n)$ и докажем, что имееет место сходимость

$$g \cdot \mathbf{f_m} \xrightarrow[m\to\infty]{H^\gamma_r(\mathbb{R}^n)} g \cdot v.$$

Действительно, фундаментальность последовательности $\{g\cdot\mathbf{f_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ в пространстве $H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)$ следует из фундаментальности последовательности $\{\mathbf{f_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ в пространстве $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ и оценки

$$\|g\cdot\mathbf{f_{m_1}}-g\cdot\mathbf{f_{m_2}}\|_{H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)}=\|(f_{m_1}-f_{m_2})\cdot\mathbf{g}\|_{H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\,\|\mathbf{f_{m_1}}-\mathbf{f_{m_2}}\|_{H_p^s(\mathbf{R}^n)}\|\mathbf{g}\|_{H_q^t(\mathbf{R}^n)}.$$

Поскольку пространство $H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)$ полно, то $\exists\, w\in H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)$:

$$g\cdot\mathbf{f_m}\xrightarrow[m\to\infty]{H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)}w.$$

Отсюда в силу замечания 1.1.3 следует, что

$$w(\varphi)=\lim_{m\to\infty}(g\cdot\mathbf{f_m})(\varphi)=\lim_{m\to\infty}\mathbf{f_m}(g\cdot\varphi)\ \ \forall\,\varphi\in D(\mathbb{R}^n).$$

Поскольку $\mathbf{f_m}\xrightarrow[m\to\infty]{H_p^s(\mathbb{R}^n)}v$, то, снова применяя замечание 1.1.3, получаем, что

$$w(\varphi)=\lim_{m\to\infty}\mathbf{f_m}(g\cdot\varphi)=v(g\cdot\varphi)=(g\cdot v)(\varphi)\ \ \forall\,\varphi\in D(\mathbb{R}^n).$$

Таким образом, имеет место сходимость

$$g\cdot\mathbf{f_m}\xrightarrow[m\to\infty]{H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)}w=g\cdot v.$$

Тогда, переходя к пределу при $m\to\infty$ в неравенстве

$$\|g\cdot\mathbf{f_m}\|_{H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)}=\|f_m\cdot\mathbf{g}\|_{H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\,\|\mathbf{f_m}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}\|\mathbf{g}\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)},$$

получаем, что

$$\|g\cdot v\|_{H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\,\|v\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}\,\|\mathbf{g}\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)}.$$

В силу произвольности выбора $g\in D(\mathbb{R}^n)$ из этого неравенства следует, что v является мультипликатором из $H_q^t(\mathbb{R}^n)$ в $H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|v\|_{M[H_q^t(\mathbb{R}^n)\to H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)]}\leqslant C\,\|v\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}.$$

А это, в свою очередь, и означает, что имеет место непрерывное вложение

$$H_p^s(\mathbb{R}^n)\subset M[H_q^t(\mathbb{R}^n)\to H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)].$$

2) $\Rightarrow$ 1) Выполнение мультипликативной оценки (2.3) непосредственно следует из справедливости непрерывного вложения

$$H_p^s(\mathbb{R}^n)\subset M[H_q^t(\mathbb{R}^n)\to H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)]$$

и оценки

$$\|f\cdot\mathbf{g}\|_{H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)}=\|g\cdot\mathbf{f}\|_{H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)}\leqslant\|\mathbf{f}\|_{M[H_q^t(\mathbb{R}^n)\to H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)]}\,\|\mathbf{g}\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)}\ \ \forall\,f,\,g\in D(\mathbb{R}^n).$$

Эквивалентность же условия 3) условию 1) может быть доказана полностью аналогично доказательству эквивалентности условий 1) и 2).

1) $\Rightarrow$ 4) Пусть найдётся некоторая константа $C > 0$, такая, что выполнена оценка

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\, \|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}\, \|\mathbf{g}\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)} \;\; \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{R}^n).$$

Фиксируем произвольное распределение $v \in H_{r'}^{-\gamma}(\mathbb{R}^n)$. Применяя замечание 1.1.2, получаем, что

$$|v(f \cdot \overline{g})| \leqslant \|v\|_{H_{r'}^{-\gamma}(\mathbb{R}^n)} \|f \cdot \mathbf{g}\|_{H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\, \|v\|_{H_{r'}^{-\gamma}(\mathbb{R}^n)} \|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}\, \|\mathbf{g}\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)} \;\; \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{R}^n).$$

Согласно замечанию 2.1.1, отсюда получаем, что $v \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]$ и справедлива оценка

$$\|v\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant C\, \|v\|_{H_{r'}^{-\gamma}(\mathbb{R}^n)}.$$

Таким образом, имеет место непрерывное вложение

$$H_{r'}^{-\gamma}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)].$$

4) $\Rightarrow$ 1) Пусть имеет место непрерывное вложение

$$H_{r'}^{-\gamma}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)].$$

Следовательно, существует константа $C > 0$, такая, что для произвольного распределения $v \in H_{r'}^{-\gamma}(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\|v\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant C\, \|v\|_{H_{r'}^{-\gamma}(\mathbb{R}^n)}.$$

Так как имеет место изометрический изоморфизм $H_r^\gamma(\mathbb{R}^n) \cong (H_{r'}^{-\gamma}(\mathbb{R}^n))^{\overline{*}}$, то пространства $H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)$ и $(H_{r'}^{-\gamma}(\mathbb{R}^n))^*$ также изометрически изоморфны, в силу чего для произвольных $f,\, g \in D(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)} \;=\; \sup \left\{\, |v(f \cdot g)| \;\mid\; v \in H_{r'}^{-\gamma}(\mathbb{R}^n),\; \|v\|_{H_{r'}^{-\gamma}(\mathbb{R}^n)} = 1 \,\right\}.$$

Поскольку согласно замечанию 2.1.1 справедлива цепочка неравенств

$$|v(f \cdot g)| \leqslant \|v\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]} \|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}\, \|\mathbf{g}\,\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)} \leqslant$$

$$\leqslant C\, \|v\|_{H_{r'}^{-\gamma}(\mathbb{R}^n)} \|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}\, \|\mathbf{g}\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)} \;\; \forall\, v \in H_{r'}^{-\gamma}(\mathbb{R}^n),\; \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{R}^n),$$

то получаем, что

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H_r^\gamma(\mathbb{R}^n)} \leqslant\; C\, \|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}\, \|\mathbf{g}\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)} \;\; \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{R}^n).$$

Таким образом, справедлива требуемая мультипликативная оценка.

Лемма 2.2.4 доказана.

Непосредственно из лемм 2.2.2, 2.2.3 и 2.2.4 вытекает

Следствие 2.2.2. *Пусть γ, s, $t \geqslant 0$, p, q, $r > 1$. Тогда*

1) при $p \leqslant q$ непрерывное вложение

$$H^{\gamma}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$$

имеет место в том и только в том случае, когда найдётся такая константа $C > 0$, что выполняется мультипликативная оценка

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\, \|\mathbf{f}\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\, \|\mathbf{g}\|_{H^{\gamma}_r(\mathbb{R}^n)} \ \ \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{R}^n);$$

2) при $p \leqslant q'$ непрерывное вложение

$$H^{-\gamma}_{r',\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]$$

имеет место в том и только в том случае, когда найдётся такая константа $C > 0$, что выполняется мультипликативная оценка

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H^{\gamma}_r(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\, \|\mathbf{f}\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\, \|\mathbf{g}\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)} \ \ \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{R}^n).$$

2.3. Описание пространств мультипликаторов в терминах шкалы равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов

В этом параграфе будут доказаны основные теоремы данной главы. Для этого нам потребуется ряд вспомогательных утверждений, некоторые из которых имеют и самостоятельный интерес.

Сначала докажем лемму, содержащую основную мультипликативную оценку, которая вместе с результатом следствия 2.2.2 и будет давать описание пространства мультипликаторов $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$ в некоторых важных частных случаях.

Лемма 2.3.1. *Пусть p, $q > 1$, $s \geqslant t \geqslant 0$, $s > \frac{n}{p}$ и выполняется одно из двух условий:*

$$a)\ p \leqslant q, \ \ s - \frac{n}{p} \geqslant t - \frac{n}{q} \quad \text{или} \quad b)\ p \geqslant q.$$

Тогда существует константа $C > 0$, такая, что справедлива мультипликативная оценка

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\, \|\mathbf{f}\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\, \|\mathbf{g}\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)} \ \ \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Вначале докажем эту оценку для $t \neq \frac{n}{q}$.

Из утверждения 1.1.1 следует, что если $f \in D(\mathbb{R}^n)$, то

$$\mathbf{f} \in M[H^t_q(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)].$$

Тогда имеем, что

$$\|f\cdot\mathbf{g}\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)} = \ \|g\cdot\mathbf{f}\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)} \leqslant \ \|\mathbf{f}\|_{M[H^t_q(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]}\,\|\mathbf{g}\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)}\ \forall\, f,\, g\in D(\mathbb{R}^n)$$

и для получения требуемой оценки достаточно доказать неравенство вида

$$\|\mathbf{f}\|_{M[H^t_q(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]}\ \leqslant C\,\|\mathbf{f}\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\quad \forall\, f\in D(\mathbb{R}^n).$$

Рассмотрим случай 1) $t>\frac{n}{q}$. Как хорошо известно (см. [66; Ch. II, Corollary 2.2]), в этом случае имеет место совпадение пространств

$$M[H^t_q(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)] = H^t_{q,\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

причем соответствующие нормы эквивалентны.

Заметим, что непрерывное вложение

$$H^s_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n)\subset H^t_{q,\,unif}(\mathbb{R}^n)$$

имеет место как при при $p\leqslant q,\ \ s-\frac{n}{p}\geqslant t-\frac{n}{q}$ (случай (a) замечания 1.1.8), так и при $p\geqslant q,\ s\geqslant t$ (случай (b) замечания 1.1.8). Поэтому, учитывая справедливость непрерывного вложения

$$H^s_p(\mathbb{R}^n)\subset H^s_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

получаем, что для произвольной функции $f\in D(\mathbb{R}^n)$ имеет место цепочка неравенств

$$\|\mathbf{f}\|_{M[H^t_q(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]}\leqslant C_0\,\|\mathbf{f}\|_{H^t_{q,\,unif}(\mathbb{R}^n)}\leqslant C_1\,\|\mathbf{f}\|_{H^s_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n)}\leqslant C_2\,\|\mathbf{f}\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)},$$

где C_0, C_1, C_2 – некоторые положительные константы, не зависящие от выбора функции f.

Теперь рассмотрим случай 2) $t<\frac{n}{q}$. В этом случае, как известно (см., например, [11; §2.3.1, предложение 1]),

$$\|\mathbf{f}\|_{M[H^t_q(\mathbb{R}^n)\to H^t_q(\mathbb{R}^n)]}\leqslant C_3\,(\|\mathbf{f}\|_{H^t_{\frac{n}{t},\,unif}(\mathbb{R}^n)}+\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)})\ \ \forall\, f\in D(\mathbb{R}^n),$$

где $C_3>0$ – некоторая константа, не зависящая от выбора функции f.

Покажем, что справедливость непрерывного вложения

$$H^s_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n)\subset H^t_{\frac{n}{t},\,unif}(\mathbb{R}^n)$$

будет следовать из замечания 1.1.8, в котором в качестве q берётся $\frac{n}{t}$. Действительно, при $p>\frac{n}{t}$ из неравенства $s\geqslant t$ следует выполнение условий пункта b) замечания 1.1.8, а при $p\leqslant\frac{n}{t}$ можно применить пункт a) замечания 1.1.8, так как имеет место неравенство

$$s-\frac{n}{p}>0=t-\frac{n}{\frac{n}{t}}.$$

Тогда из справедливости непрерывных вложений

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) \subset H_{p,\, unif}^s(\mathbb{R}^n) \;\text{ и }\; H_{p,\, unif}^s(\mathbb{R}^n) \subset H_{\frac{n}{t},\, unif}^t(\mathbb{R}^n)$$

следует, что существуют константы $C_4 > 0$, $C_5 > 0$, такие, что

$$\|\mathbf{f}\|_{H_{\frac{n}{t},\, unif}^t(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_4 \, \|\mathbf{f}\|_{H_{p,\, unif}^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_5 \, \|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} \;\; \forall\, f \in D(\mathbb{R}^n).$$

Поскольку при $s > \frac{n}{p}$ найдётся такая константа $C_6 > 0$, что верна оценка

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_6 \, \|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} \;\; \forall\, f \in D(\mathbb{R}^n)$$

(см. более общее утверждение в [21; §2.8.1, замечание 2]), то в итоге получаем

$$\|\mathbf{f}\|_{M[H_q^t(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]} \leqslant C_3 \left(\|\mathbf{f}\|_{H_{\frac{n}{t},\, unif}^t(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}\right) \leqslant C_7 \, \|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} \;\; \forall\, f \in D(\mathbb{R}^n),$$

где $C_7 = C_3 \, (C_5 + C_6)$.

Таким образом, требуемая мультипликативная оценка доказана при $t \neq \frac{n}{q}$.

Теперь докажем эту мультипликативную оценку для $t_0 = \frac{n}{q}$.

Фиксируем произвольное ε: $0 < \varepsilon < \min(s - \frac{n}{p}\,, t_0)$. Тогда, $t_0 - \varepsilon > 0$, $s - \varepsilon > \frac{n}{p}$ и, исходя из доказанного в случаях 1) и 2), имеем для произвольных $f,\, g \in D(\mathbb{R}^n)$

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H_q^{t_0 - \varepsilon}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_7 \, \|\mathbf{f}\|_{H_p^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)} \|\mathbf{g}\|_{H_q^{t_0 - \varepsilon}(\mathbb{R}^n)}$$

и

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H_q^{t_0 + \varepsilon}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_2 \, \|\mathbf{f}\|_{H_p^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)} \|\mathbf{g}\|_{H_q^{t_0 + \varepsilon}(\mathbb{R}^n)}.$$

Применив замечание 1.1.6 о комплексной интерполяции для пространств бесселевых потенциалов и теорему о полилинейной интерполяции [2; Теорема 4.4.1], из этих неравенств получаем, что для $C = \sqrt{C_2 \cdot C_7}$ выполняется мультипликативная оценка

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H_q^{t_0}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \, \|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} \|\mathbf{g}\|_{H_q^{t_0}(\mathbb{R}^n)} \;\; \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{R}^n).$$

Лемма 2.3.1 доказана.

В следующей теореме даётся описание пространства $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ для неотрицательных показателей гладкости $s,\, t \geqslant 0$ при выполнении некоторых естественных дополнительных условий.

Теорема 2.3.1. *Пусть $p,\, q > 1$, $p \leqslant q$, $s > \frac{n}{p}$, $t \geqslant 0$ и $s - \frac{n}{p} \geqslant t - \frac{n}{q}$. Тогда имеет место совпадение пространств*

$$M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)] = H_{q,\, unif}^t(\mathbb{R}^n),$$

причём нормы этих пространств эквивалентны.

Доказательство. Сначала покажем, что имеет место непрерывное вложение

$$H^t_{q,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n).$$

Действительно, в случае $q \geqslant p'$ это непрерывное вложение следует из пункта b) замечания 1.1.8, поскольку справедливо неравенство $t \geqslant -s$. В случае же $q < p'$ из соотношения

$$s - \frac{n}{p} > 0 \geqslant -t - \frac{n}{q'}\,,$$

вытекает выполнение неравенства

$$t - \frac{n}{q} \geqslant -s - \frac{n}{p'}\,,$$

в силу чего справедливость доказываемого непрерывного вложения следует из пункта a) замечания 1.1.8.

Применяя утверждение 2.1.3, тогда получаем, что имеет место непрерывное вложение

$$M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)] \subset H^t_{q,\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n) = H^t_{q,\,unif}(\mathbb{R}^n).$$

Теперь докажем обратное непрерывное вложение

$$H^t_{q,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)].$$

Согласно пункту 1) следствия 2.2.2, это непрерывное вложение имеет место тогда и только тогда, когда выполняется мультипликативная оценка

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\, \|\mathbf{f}\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)} \|\mathbf{g}\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)} \ \ \forall\, f, g \in D(\mathbb{R}^n).$$

Учитывая, что условие $s \geqslant t$ непосредственно следует из неравенств $s - \frac{n}{p} \geqslant t - \frac{n}{q}$ и $p \leqslant q$, мы получаем, что эта мультипликативная оценка справедлива в силу леммы 2.3.1.

Таким образом, нами доказано совпадение пространств

$$M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)] = H^t_{q,\,unif}(\mathbb{R}^n)$$

и эквивалентность соответствующих норм.

Теорема 2.3.1 доказана.

Замечание 2.3.1. *При $s,\ t \geqslant 0,\ p,\ q > 1$ ограничения $s > \frac{n}{p},\ p \leqslant q,\ s - \frac{n}{p} \geqslant t - \frac{n}{q}$ из условия теоремы 2.3.1 являются необходимыми для того, чтобы было возможно описание пространства $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$ в терминах шкалы равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов.*

В самом деле, как хорошо известно (см. [62; Remark 4.9.2]*), в случае невыполнения неравенства $s > \frac{n}{p}$ даже для пространства $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^s_p(\mathbb{R}^n)]$ невозможно дать описание в терминах этой шкалы.*

Покажем теперь, что ограничения $p \leqslant q$ и $s - \frac{n}{p} \geqslant t - \frac{n}{q}$ также являются необходимыми для описания $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$ в терминах пространств $H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$, $\gamma \in \mathbb{R}, r > 1$. Действительно, если найдутся такие числа $\gamma \in \mathbb{R}$ и $r > 1$, что

$$M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)] = H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

то, поскольку регулярный функционал $\mathbf{I}$*, порождённый тождественно равной единице на $\mathbb{R}^n$ функцией, принадлежит пространству $H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$, получаем, что должно иметь место непрерывное вложение*

$$H^s_p(\mathbb{R}^n) \subset H^t_q(\mathbb{R}^n).$$

В силу же замечания 1.1.5 необходимым и достаточным условием справедливости этого непрерывного вложения является одновременное выполнение неравенств $p \leqslant q$ и $s - \frac{n}{p} \geqslant t - \frac{n}{q}$.

Замечание 2.3.2. *Пусть $s,\, t \geqslant 0,\ p,\, q > 1$ и выполняются дополнительные условия*

$$\max(s,t) > \frac{n}{\max(p,q)}\ ,\ \ p \leqslant q'.$$

Тогда, используя доказанные выше факты, а именно, утверждение 2.1.3, следствие 2.2.2 и лемму 2.3.1, можно получить описание пространства $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]$ в важных частных случаях, когда либо $s = t$, либо $p = q$.

Действительно, в силу утверждения 2.1.3 имеет место непрерывное вложение

$$M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)] \subset H^{-t}_{q',\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n).$$

Для доказательства же обратного вложения нужно применить содержащийся в пункте 2) следствия 2.2.2 критерий справедливости непрерывного вложения

$$H^{-\gamma}_{r',\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]$$

в терминах выполнения мультипликативной функциональной оценки

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H^\gamma_r(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\, \|\mathbf{f}\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)} \|\mathbf{g}\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)}\ \ \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{R}^n)$$

и лемму 2.3.1.

Таким образом, в случае $s = t \geqslant 0$ для $p,\, q > 1$ при выполнении естественных ограничений $p \leqslant q'$ и $s > \frac{n}{max(p,\,q)}$ получаем, что имеет место совпадение пространств

$$M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-s}_{q'}(\mathbb{R}^n)] = H^{-s}_{q',\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n) = H^{-s}_{max(p',\,q'),\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

причем нормы этих пространств эквивалентны. Этот результат является обобщением полученного в [15; Теорема 2.5] *описания*

$$M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_p^{-s}(\mathbb{R}^n)] = H^{-s}_{max(p,\,p'),\,unif}(\mathbb{R}^n) \ \text{\textit{при}}\ p > 1,\ s > \frac{n}{\max(p,\,p')}\,.$$

В случае же, когда $p = q$, $s,\ t \geqslant 0$, *при выполнении естественных ограничений* $1 < p \leqslant 2$ *и* $\max(s,t) > \frac{n}{p}$ *получаем, что*

$$M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{p'}^{-t}(\mathbb{R}^n)] = H^{-t}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n) = H^{-\min(s,t)}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

причем нормы этих пространств эквивалентны. Отметим, что при $p = 2$ *этот результат был установлен в* [60; Lemma 4].

Полученные в замечании 2.3.2 описания пространств мультипликаторов являются частными случаями результата теоремы 2.3.2, которая будет доказана ниже. Однако её доказательство является существенно более сложным, чем рассуждения в замечании 2.3.2, и опирается на ряд вспомогательных утверждений, одним из которых является следующая лемма о дифференцировании мультипликаторов.

Напомним, что для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ мы будем использовать обозначение

$$|\alpha|_1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

Лемма 2.3.2. *Пусть* $s,\ t \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $p,\ q > 1$, *и*

$$\mu \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)] \cap M[H_p^{s-m}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-m}(\mathbb{R}^n)].$$

Тогда $D^\alpha(\mu) \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-m}(\mathbb{R}^n)]\ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n : |\alpha|_1 = m$ *и*

$$\|D^\alpha(\mu)\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-m}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant C\, \|\mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)] \cap M[H_p^{s-m}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-m}(\mathbb{R}^n)]}\,,$$

где C *– некоторая положительная константа, зависящая только от* s, t, p, q *и* m.

Доказательство. Доказательство леммы проведём индукцией по $m = |\alpha|_1$.

Пусть $m = |\alpha|_1 = 1$ и

$$\mu \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)] \cap M[H_p^{s-1}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-1}(\mathbb{R}^n)].$$

Тогда $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_i}$ для некоторого $i \in \{1, ..., n\}$ и

$$f \cdot D^\alpha(\mu) = D^\alpha(f \cdot \mu) - D^\alpha(f) \cdot \mu \quad \forall\, f \in D(\mathbb{R}^n).$$

Поскольку

$$\mu \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)] \cap M[H_p^{s-1}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-1}(\mathbb{R}^n)]$$

и, согласно замечанию 1.1.1, для произвольных чисел $\varkappa \in \mathbb{R}$ и $r > 1$ дифференциальный оператор $D^\alpha\colon H_r^\varkappa(\mathbb{R}^n) \to H_r^{\varkappa-1}(\mathbb{R}^n)$ является ограниченным, то

$$f \cdot D^\alpha(\mu) \;=\; D^\alpha(f\cdot\mu) - D^\alpha(f)\cdot\mu \in H_q^{t-1}(\mathbb{R}^n) \;\; \forall\, f \in D(\mathbb{R}^n),$$

причём для произвольной функции $f \in D(\mathbb{R}^n)$ справедлива оценка

$$\|f\cdot D^\alpha(\mu)\|_{H_q^{t-1}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|D^\alpha(f\cdot\mu)\|_{H_q^{t-1}(\mathbb{R}^n)} + \|D^\alpha(f)\cdot\mu\|_{H_q^{t-1}(\mathbb{R}^n)} \leqslant$$

$$\leqslant\; C_1\cdot\|f\cdot\mu\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)} + \|\mu\|_{M[H_p^{s-1}(\mathbb{R}^n)\to H_q^{t-1}(\mathbb{R}^n)]}\cdot\|D^\alpha(\mathbf{f})\|_{H_p^{s-1}(\mathbb{R}^n)} \leqslant$$

$$\leqslant\; C_1\cdot\|\mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]}\cdot\|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} + C_2\cdot\|\mu\|_{M[H_p^{s-1}(\mathbb{R}^n)\to H_q^{t-1}(\mathbb{R}^n)]}\cdot\|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant$$

$$\leqslant\; (C_1+C_2)\|\mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]\cap M[H_p^{s-1}(\mathbb{R}^n)\to H_q^{t-1}(\mathbb{R}^n)]}\cdot\|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{T}^n)},$$

где

$$C_1 = \|D^\alpha\|_{\mathcal{B}(H_q^t(\mathbb{R}^n)\to H_q^{t-1}(\mathbb{R}^n))},\;\; C_2 = \|D^\alpha\|_{\mathcal{B}(H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_p^{s-1}(\mathbb{R}^n))}.$$

В силу определения пространства мультипликаторов отсюда следует, что

$$D^\alpha(\mu) \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-1}(\mathbb{R}^n)]$$

и справедлива оценка

$$\|D^\alpha(\mu)\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^{t-1}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant (C_1+C_2)\,\|\mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]\cap M[H_p^{s-1}(\mathbb{R}^n)\to H_q^{t-1}(\mathbb{R}^n)]},$$

что и завершает доказательство леммы при $|\alpha|_1 = 1$.

Пусть, согласно предположению математической индукции, утверждение уже доказано для всех мультииндексов $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, таких, что $|\alpha|_1 \leqslant m-1$.

Рассмотрим произвольный мультииндекс $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, такой, что $|\alpha|_1 = m$, и произвольное распределение

$$\mu \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)] \cap M[H_p^{s-m}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-m}(\mathbb{R}^n)].$$

Тогда распределение $D^\alpha(\mu)$ можно представить в виде

$$D^\alpha(\mu) \;=\; D^{\alpha_2}(D^{\alpha_1}(\mu)),$$

где $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{Z}_+^n,\ \alpha_1+\alpha_2=\alpha,\ |\alpha_1|_1 = 1$ и $|\alpha_2|_1 = m-1$.

Из теоремы о комплексной интерполяции для пространств бесселевых потенциалов следует, что

$$\mu \in M[H_p^{s-m_1}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-m_1}(\mathbb{R}^n)] \quad \forall\, m_1 \in \mathbb{N}\colon\; m_1 \leqslant m,$$

причём

$$\|\mu\|_{M[H_p^{s-m_1}(\mathbb{R}^n)\to H_q^{t-m_1}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant \|\mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n)\to H_q^t(\mathbb{R}^n)]\cap M[H_p^{s-m}(\mathbb{R}^n)\to H_q^{t-m}(\mathbb{R}^n)]}.$$

В частности, полагая $m_1 = 1$, получаем, что

$$\mu \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)] \cap M[H_p^{s-1}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-1}(\mathbb{R}^n)].$$

Тогда, согласно утверждению базы индукции, имеем, что

$$D^{\alpha_1}(\mu) \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-1}(\mathbb{R}^n)],$$

причём существует не зависящая от выбора μ константа $C_3 > 0$, такая, что

$$\|D^{\alpha_1}(\mu)\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-1}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant C_3 \,\|\mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)] \cap M[H_p^{s-1}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-1}(\mathbb{R}^n)]}.$$

Полагая же $m_1 = m - 1$, получим, что

$$\mu \in M[H_p^{s-(m-1)}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-(m-1)}(\mathbb{R}^n)] \cap M[H_p^{s-m}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-m}(\mathbb{R}^n)]$$

и, следовательно, согласно утверждению базы индукции,

$$D^{\alpha_1}(\mu) \in M[H_p^{s-(m-1)}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-m}(\mathbb{R}^n)] = M[H_p^{s-(m-1)}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-1-(m-1)}(\mathbb{R}^n)],$$

причём существует не зависящая от выбора μ константа $C_4 > 0$, такая, что

$$\|D^{\alpha_1}(\mu)\|_{M[H_p^{s-(m-1)}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-1-(m-1)}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant$$
$$\leqslant C_4 \,\|\mu\|_{M[H_p^{s-(m-1)}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-(m-1)}(\mathbb{R}^n)] \cap M[H_p^{s-m}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-m}(\mathbb{R}^n)]}.$$

Таким образом, имеем, что

$$D^{\alpha_1}(\mu) \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-1}(\mathbb{R}^n)] \cap M[H_p^{s-(m-1)}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-1-(m-1)}(\mathbb{R}^n)],$$

причём справедлива оценка

$$\|D^{\alpha_1}(\mu)\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-1}(\mathbb{R}^n)] \cap M[H_p^{s-(m-1)}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-1-(m-1)}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant$$
$$\leqslant \; C_5 \cdot \|\mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)] \cap M[H_p^{s-m}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-m}(\mathbb{R}^n)]},$$

где $C_5 = \max(C_3, C_4)$.

По предположению индукции отсюда следует, что

$$D^{\alpha}(\mu) \;=\; D^{\alpha_2}(D^{\alpha_1}(\mu)) \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-m}(\mathbb{R}^n)],$$

причём существует не зависящая от выбора μ константа $C_6 > 0$, такая, что

$$\|D^{\alpha}(\mu)\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-m}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant$$
$$\leqslant C_6 \cdot \; \|D^{\alpha_1}(\mu)\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-1}(\mathbb{R}^n)] \cap M[H_p^{s-(m-1)}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-1-(m-1)}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant$$
$$\leqslant C_5 \cdot C_6 \cdot \; \|\mu\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^t(\mathbb{R}^n)] \cap M[H_p^{s-m}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{t-m}(\mathbb{R}^n)]}.$$

Лемма 2.3.2 доказана.

Также нам потребуется следующая лемма, которую можно рассматривать как обобщение известного факта о представлении элемента пространства $W_p^{-k}(\mathbb{R}^n)$, где $k \in \mathbb{N}$, $p > 1$, в виде дивергенции $k-$го порядка некоторого вектора, состоящего из элементов пространства $W_p^0(\mathbb{R}^n)$ (см., например, [11; §1.5]).

Лемма 2.3.3. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда существуют непрерывные линейные операторы A_0, A_β, $\beta \in \mathbb{Z}^n_+$, $|\beta|_1 = k$, действующие из $S'(\mathbb{R}^n)$ в $S'(\mathbb{R}^n)$, такие, что для произвольного $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ имеем*

$$u = A_0(u) + \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^n_+ \colon |\beta|_1 = k} D^\beta(A_\beta(u)),$$

причём $\forall\ s \in \mathbb{R}$, $\forall\, p > 1$ ограничения операторов A_0, A_β на пространство $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ являются ограниченными линейными операторами из $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ в $H^{s+k}_p(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Для произвольного $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ справедливо представление

$$u = J_{2k}(J_{-2k}(u)) = (Id - \Delta)^k(J_{-2k}(u)) = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant 2k} C_\alpha \cdot D^\alpha(J_{-2k}(u)) = u_1 + u_2,$$

где

$$u_1 \overset{def}{=} \sum_{|\alpha|_1 \leqslant k} C_\alpha \cdot D^\alpha(J_{-2k}(u)), \quad u_2 \overset{def}{=} \sum_{k < |\alpha|_1 \leqslant 2k} C_\alpha \cdot D^\alpha(J_{-2k}(u)).$$

Определим непрерывный линейный оператор $A_0 \colon S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ равенством

$$A_0(u) \overset{def}{=} u_1.$$

Рассмотрим теперь u_2. Очевидно, что произвольный мультииндекс $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, такой, что $k < |\alpha|_1 \leqslant 2k$, можно представить в виде

$$\alpha = \beta(\alpha) + \gamma(\alpha),$$

где $\beta(\alpha), \gamma(\alpha) \in \mathbb{Z}^n_+$, $|\beta(\alpha)|_1 = k$ и $|\gamma(\alpha)|_1 = |\alpha|_1 - k \leqslant k$. Поэтому u_2 можно записать в виде

$$u_2 = \sum_{|\beta|_1 = k} D^\beta \left(\sum_{|\gamma|_1 \leqslant k} C_{\beta,\gamma} \cdot D^\gamma(J_{-2k}(u)) \right).$$

Вообще говоря, такое представление не является единственным, но дальнейшее доказательство не зависит от того, какой конкретный набор констант $C_{\beta,\gamma}$ выбран из всех тех наборов констант, для которых справедливо это представление.

Для произвольного мультииндекса $\beta \in \mathbb{Z}^n_+$, такого, что $|\beta|_1 = k$, определим непрерывный линейный оператор $A_\beta \colon S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ следующим образом:

$$A_\beta(u) \overset{def}{=} \sum_{|\gamma|_1 \leqslant k} C_{\beta,\gamma} \cdot D^\gamma(J_{-2k}(u)).$$

Итак, получено представление

$$u = A_0(u) + \sum_{|\beta|_1 = k} D^\beta(A_\beta(u)) \quad \forall\, u \in S'(\mathbb{R}^n).$$

Теперь зафиксируем произвольные $s \in \mathbb{R}$ и $p > 1$. Рассмотрим произвольный элемент $u \in H_p^s(\mathbb{R}^n)$. Тогда $J_{-2k}(u) \in H_p^{s+2k}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|J_{-2k}(u)\|_{H_p^{s+2k}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Учитывая замечание 1.1.1 и аналог теоремы вложения Соболева для пространств бесселевых потенциалов, получаем, что

$$D^\alpha(J_{-2k}(u)) \in H_p^{s+2k-|\alpha|_1}(\mathbb{R}^n) \subset H_p^{s+k}(\mathbb{R}^n) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\colon\ |\alpha|_1 \leqslant k,$$

и, значит,

$$u_1 = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant k} C_\alpha \cdot D^\alpha(J_{-2k}(u)) \in H_p^{s+k}(\mathbb{R}^n).$$

Поскольку для произвольного мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ оператор

$$D^\alpha|_{H_p^{s+k+|\alpha|_1}(\mathbb{R}^n)} : H_p^{s+k+|\alpha|_1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_p^{s+k}(\mathbb{R}^n)$$

ограничен согласно замечанию 1.1.1, то существуют такие не зависящие от выбора $u \in H_p^s(\mathbb{R}^n)$ константы $K_\alpha > 0$, что справедлива цепочка неравенств

$$\|u_1\|_{H_p^{s+k}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \sum_{|\alpha|_1 \leqslant k} |C_\alpha| \cdot \|D^\alpha(J_{-2k}(u))\|_{H_p^{s+k}(\mathbb{R}^n)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\alpha|_1 \leqslant k} |C_\alpha|\, K_\alpha \cdot \|J_{-2k}(u)\|_{H_p^{s+k+|\alpha|_1}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant k} |C_\alpha|\, K_\alpha \cdot \|u\|_{H_p^{s+|\alpha|_1-k}(\mathbb{R}^n)}.$$

Учитывая, что для произвольного мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, удовлетворяющего условию $|\alpha|_1 \leqslant k$, имеет место непрерывное вложение

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) \subset H_p^{s+|\alpha|_1-k}(\mathbb{R}^n)$$

и, значит, существует не зависящая от выбора $v \in H_p^s(\mathbb{R}^n)$ константа $C_{1,\alpha} > 0$, такая, что

$$\|v\|_{H_p^{s+|\alpha|_1-k}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_{1,\alpha} \cdot \|v\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} \ \ \forall\, v \in H_p^s(\mathbb{R}^n),$$

в итоге получаем оценку

$$\|u_1\|_{H_p^{s+k}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \left(\sum_{|\alpha|_1 \leqslant k} |C_\alpha|\, K_\alpha\, C_{1,\alpha} \right) \|u\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Таким образом, оператор $A_0|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} : H_p^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_p^{s+k}(\mathbb{R}^n)$, определяемый соотношением

$$A_0(u) = u_1 \quad \forall\, u \in H_p^s(\mathbb{R}^n),$$

действительно является ограниченным.

Поскольку представления

$$A_\beta(u) = \sum_{|\gamma|_1 \leqslant k} C_{\beta,\gamma} \cdot D^\gamma(J_{-2k}(u)) \ \text{ и } \ A_0(u) = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant k} C_\alpha \cdot D^\alpha(J_{-2k}(u))$$

отличаются только константами $C_{\beta,\gamma}$ и C_α, то с помощью рассуждений, аналогичных проведённым выше, легко получить, что для произвольного $u \in H^s_p(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$A_\beta(u) = \sum_{|\gamma|_1 \leqslant k} C_{\beta,\gamma} \cdot D^\gamma(J_{-2k}(u)) \in H^{s+k}_p(\mathbb{R}^n),$$

причём

$$\|A_\beta(u)\|_{H^{s+k}_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \left(\sum_{|\gamma|_1 \leqslant k} |C_{\beta,\gamma}| \, K_\gamma \, C_{1,\gamma} \right) \|u\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Отсюда следует ограниченность операторов

$$A_\beta|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)} : H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{s+k}_p(\mathbb{R}^n) \quad \forall\, \beta \in \mathbb{Z}^n_+ \colon |\beta|_1 = k,$$

а, значит, и утверждение леммы.

Лемма 2.3.3 доказана.

Теперь сформулируем ключевую теорему, дающую описание пространства мультипликаторов $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]$ при $s,\ t \geqslant 0,\ p,\ q > 1$ в ситуации, когда выполняются условия, обобщающие классическое условие Стрихартца.

Теорема 2.3.2. *Пусть $p,\ q > 1,\ p \leqslant q'$ и выполнено одно из следующих двух условий:*

$$1)\ s \geqslant t \geqslant 0,\ s > \frac{n}{p} \quad \textit{или} \quad 2)\ t \geqslant s \geqslant 0,\ t > \frac{n}{q}\,.$$

Тогда имеет место совпадение пространств

$$M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)] = H^{-t}_{q',\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

причём нормы этих пространств эквивалентны.

Доказательство. В силу утверждения 2.1.3 имеет место непрерывное вложение

$$M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)] \subset H^{-t}_{q',\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n).$$

Поэтому остаётся доказать обратное непрерывное вложение

$$H^{-t}_{q',\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)].$$

Если выполнено условие 1) $s \geqslant t \geqslant 0,\ s > \frac{n}{p}$, то доказательство распадается на два случая.

Случай 1.1. Пусть либо а) $p < q$ и справедливо неравенство $s - \frac{n}{p} \geqslant t - \frac{n}{q}$, либо б) $p \geqslant q$.

Заметим, что в случае а) выполняются неравенства $q' < p'$ и $-t - \frac{n}{q'} \geqslant -s - \frac{n}{p'}$, а в случае б) - неравенства $q' \geqslant p'$ и $-t \geqslant -s$, и, следовательно, в силу замечания 1.1.8 справедливо непрерывное вложение

$$H^{-t}_{q',\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n).$$

Поэтому в случае 1.1 имеет место совпадение пространств

$$H^{-t}_{q',\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n) = H^{-t}_{q',\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

причём нормы этих пространств эквивалентны.

Так как $p \leqslant q'$, то можно применить пункт 2) следствия 2.2.2, откуда следует, что непрерывное вложение

$$H^{-t}_{q',\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]$$

имеет место тогда и только тогда, когда справедлива мультипликативная оценка

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\,\|\mathbf{f}\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\|\mathbf{g}\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)} \ \ \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{R}^n).$$

Легко видеть, что в случае 1.1 выполняются условия леммы 2.3.1, согласно которой и справедлива данная оценка.

Таким образом, получаем, что

$$M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)] = H^{-t}_{q',\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n) = H^{-t}_{q',\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

причём нормы соответствующих пространств эквивалентны. Это и завершает доказательство теоремы в случае 1.1.

Случай 1.2. Пусть теперь $p < q$ и $s - \frac{n}{p} < t - \frac{n}{q}$, то есть не выполняются условия случая 1.1.

Так как, согласно условиям теоремы, $s - \frac{n}{p} > 0$, то в этом случае имеем $t > \frac{n}{q}$. Отсюда легко получить, что

$$s + t > \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \ \geqslant \frac{n}{q'} + \frac{n}{q} = n.$$

Пусть теперь

$$\mu \in H^{-t}_{q',\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

а функция η выбрана таким образом, чтобы она одновременно уловлетворяла и условиям определения 1.1.4, и условиям теоремы Стрихартца о равномерной локализации.

Фиксируем произвольное $z \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, что тогда

$$\mu_z \overset{def}{=} \eta_{(z)} \cdot \mu \in H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p'}(\mathbb{R}^n).$$

Применив лемму 2.3.3 в случае, когда в качестве k берётся n, получаем, что имеет место представление

$$\mu_z = A_0(\mu_z) + \sum_{|\beta|_1=n} D^\beta(A_\beta(\mu_z)),$$

где для непрерывных линейных операторов A_0, A_β, $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\beta|_1 = n$, действующих в пространстве $S'(\mathbb{R}^n)$, справедливо, что

$$A_0|_{H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)}, A_\beta|_{H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)} \in \mathcal{B}(H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n), H_{p'}^{n-s}(\mathbb{R}^n)),$$

$$A_0|_{H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)}, A_\beta|_{H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)} \in \mathcal{B}(H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n), H_{q'}^{n-t}(\mathbb{R}^n)).$$

Введём также обозначения $\mu_{\beta,z} \stackrel{def}{=} D^\beta(A_\beta(\mu_z))$ и $\mu_{1,z} \stackrel{def}{=} \sum\limits_{|\beta|_1=n} \mu_{\beta,z}$.

Наша цель состоит в том, чтобы доказать, что распределение $A_0(\mu_z)$ и распределения $\mu_{\beta,z}$ для произвольного мультииндекса $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, такого, что $|\beta|_1 = n$, являются мультипликаторами из $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ в $H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)$.

Чтобы применить лемму 2.3.2 для доказательства принадлежности распределения $\mu_{\beta,z} = D^\beta(A_\beta(\mu_z))$ пространству $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]$, нам потребуется установить, что

$$A_\beta(\mu_z) \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{n-t}(\mathbb{R}^n)] \cap M[H_p^{s-n}(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)].$$

Поэтому сначала покажем, что справедливо непрерывное вложение

$$H_{q'}^{n-t}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{n-t}(\mathbb{R}^n)].$$

Действительно, если $n - t \geqslant 0$, то в силу эквивалентности условий 1) и 2) в лемме 2.2.4 доказываемое непрерывное вложение имеет место тогда и только тогда, когда выполняется мультипликативная оценка

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H_{q'}^{n-t}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\, \|\mathbf{f}\|_{H_{q'}^{n-t}(\mathbb{R}^n)} \|\mathbf{g}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} \ \ \forall\ f,\, g \in D(\mathbb{R}^n).$$

Сама же эта оценка справедлива согласно лемме 2.3.1, применимой в данной ситуации, поскольку $p \leqslant q',\ s > \frac{n}{p},\ s \geqslant n - t \geqslant 0$, а условие

$$s - \frac{n}{p} \geqslant n - t - \frac{n}{q'}$$

следует из выполнения неравенств $s > \frac{n}{p}$ и $t > \frac{n}{q}$.

Если же $n - t < 0$, то в силу эквивалентности условий 1) и 4) в лемме 2.2.4 доказываемое непрерывное вложение имеет место тогда и только тогда, когда выполняется мультипликативная оценка

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H_q^{t-n}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\, \|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} \|\mathbf{g}\|_{H_q^{t-n}(\mathbb{R}^n)} \ \ \forall\ f,\, g \in D(\mathbb{R}^n).$$

Справедливость же этой оценки также следует из леммы 2.3.1, которую можно применить, поскольку $s \geqslant t-n > 0$, $s > \frac{n}{p}$, $p < q$, а неравенство $s - \frac{n}{p} \geqslant t-n-\frac{n}{q}$ следует из того, что
$$s - t \geqslant 0 > -\Big(n - \frac{n}{p}\Big) - \frac{n}{q}.$$

Таким образом, вне зависимости от знака $n-t$ получаем, что справедлива цепочка непрерывных вложений

$$H^{n-t}_{q'}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{n-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)] \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)],$$

где последнее вложение следует непосредственно из замечания 2.1.2.

Следовательно,

$$A_0(\mu_z) \in H^{n-t}_{q'}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)],$$

причём существуют константы $C_0, C_1 > 0$, не зависящие от выбора μ и $z \in \mathbb{R}^n$, такие, что

$$\|A_0(\mu_z)\|_{M[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant\ C_1\,\|A_0(\mu_z)\|_{H^{n-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_0\,C_1\,\|\mu_z\|_{H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)}.$$

Также из доказанного выше непрерывного вложения следует, что

$$A_\beta(\mu_z) \in H^{n-t}_{q'}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{n-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]\ \ \forall\,\beta \in \mathbb{Z}^n_+ \colon |\beta|_1 = n,$$

причём существуют константы $C_\beta > 0$, не зависящие от выбора μ и $z \in \mathbb{R}^n$, такие, что

$$\|A_\beta(\mu_z)\|_{M[H^s_p(\mathbb{R}^n)\to H^{n-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant C_1\,\|A_\beta(\mu_z)\|_{H^{n-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1\,C_\beta\,\|\mu_z\|_{H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)}.$$

Для того, чтобы применить лемму 2.3.2 о дифференцировании мультипликаторов и доказать, что
$$\mu_{\beta,z} = D^\beta(A_\beta(\mu_z)) \in M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)],$$
рассмотрим также пространство

$$M[H^{s-n}_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)] = M[H^t_q(\mathbb{R}^n) \to H^{n-s}_{p'}(\mathbb{R}^n)].$$

Докажем, что имеет место непрерывное вложение

$$H^{n-s}_{p'}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^t_q(\mathbb{R}^n) \to H^{n-s}_{p'}(\mathbb{R}^n)].$$

В самом деле, если $n-s \geqslant 0$, то в силу эквивалентности условий 1) и 2) в лемме 2.2.4 критерием справедливости этого вложения является выполнение мультипликативной оценки
$$\|f\cdot\mathbf{g}\|_{H^{n-s}_{p'}(\mathbb{R}^n)} \leqslant\ C\,\|\mathbf{f}\|_{H^{n-s}_{p'}(\mathbb{R}^n)}\|\mathbf{g}\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)}\quad \forall\ f,\, g \in D(\mathbb{R}^n).$$

Сама же эта оценка следует из леммы 2.3.1, которую можно применить, поскольку $t \geqslant n - s \geqslant 0$, $t > \frac{n}{q}$, из условия $p \leqslant q'$ следует, что $q \leqslant p'$, а условие

$$t - \frac{n}{q} \geqslant n - s - \frac{n}{p'}$$

следует из того, что $s + t > \frac{n}{p} + \frac{n}{q}$.

Если же $n - s < 0$, то можно снова применить лемму 2.2.4 (а именно эквивалентность условий 1) и 4)), согласно которой непрерывное вложение

$$H_{p'}^{n-s}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_q^t(\mathbb{R}^n) \to H_{p'}^{n-s}(\mathbb{R}^n)]$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполняется мультипликативная оценка

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H_p^{s-n}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \, \|\mathbf{f}\|_{H_q^t(\mathbb{R}^n)} \|\mathbf{g}\|_{H_p^{s-n}(\mathbb{R}^n)} \quad \forall \ f, \, g \in D(\mathbb{R}^n).$$

Поскольку в случае 1.2 имеем $q > p$ и $t > \frac{n}{q}$, а из условия $s - \frac{n}{p} < t - \frac{n}{q}$ следует неравенство $t \geqslant s - n$, то справедливость этой мультипликативной оценки вытекает непосредственно из леммы 2.3.1.

Таким образом, независимо от знака $n - s$, получаем, что

$$A_\beta(\mu_z) \in H_{p'}^{n-s}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_q^t(\mathbb{R}^n) \to H_{p'}^{n-s}(\mathbb{R}^n)] \quad \forall \, \beta \in \mathbb{Z}_+^n \colon |\beta|_1 = n,$$

причём существуют не зависящие от выбора μ и $z \in \mathbb{R}^n$ константы $K_1 > 0$ и $K_\beta > 0$, такие, что

$$\|A_\beta(\mu_z)\|_{M[H_p^{s-n}(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]} = \|A_\beta(\mu_z)\|_{M[H_q^t(\mathbb{R}^n) \to H_{p'}^{n-s}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant$$

$$\leqslant \ K_1 \, \|A_\beta(\mu_z)\|_{H_{p'}^{n-s}(\mathbb{R}^n)} \leqslant K_1 K_\beta \, \|\mu_z\|_{H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)}.$$

Итак, для произвольного мультииндекса $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ порядка n мы получаем, что

$$A_\beta(\mu_z) \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{n-t}(\mathbb{R}^n)] \cap M[H_p^{s-n}(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)],$$

причём справедлива оценка

$$\|A_\beta(\mu_z)\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{n-t}(\mathbb{R}^n)] \cap M[H_p^{s-n}(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant R_\beta \cdot \|\mu_z\|_{H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n) \cap H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)},$$

где $R_\beta = \max(C_1 \, C_\beta, K_1 \, K_\beta)$.

Применяя теперь к $\mu_{\beta,z} = D^\beta(A_\beta(\mu_z))$ лемму 2.3.2, получим, что

$$\mu_{\beta,z} \in M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)] \quad \forall \, \beta \in \mathbb{Z}_+^n \colon |\beta|_1 = n,$$

причём существуют константы $C_{\beta,1} > 0$, не зависящие от выбора μ и $z \in \mathbb{R}^n$, такие, что

$$\|\mu_{\beta,z}\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant C_{\beta,1} \, \|A_\beta(\mu_z)\|_{M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{n-t}(\mathbb{R}^n)] \cap M[H_p^{s-n}(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant$$

$$\leqslant C_{\beta,1} \cdot R_\beta \cdot \|\mu_z\|_{H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

Следовательно, $\mu_{1,z} = \sum\limits_{|\beta|_1=n} \mu_{\beta,z} \in M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]$ и

$$\|\mu_{1,z}\|_{M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant \sum_{|\beta|_1=n} \|\mu_{\beta,z}\|_{M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant C_2 \, \|\mu_z\|_{H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p'}(\mathbb{R}^n)},$$

где $C_2 = \sum\limits_{|\beta|_1=n} C_{\beta,1} \cdot R_\beta$.

В итоге для произвольного $z \in \mathbb{R}^n$ имеем, что

$$\eta_{(z)} \cdot \mu = \mu_z = A_0(\mu_z) + \mu_{1,z} \in M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)],$$

причём справедлива оценка

$$\|\eta_{(z)} \cdot \mu\|_{M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant \ \|A_0(\mu_z)\|_{M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]} \ + \|\mu_{1,z}\|_{M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant$$

$$\leqslant \ (C_0 \, C_1 + C_2) \cdot \|\mu_z\|_{H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

Переходя к супремуму по $z \in \mathbb{R}^n$, получаем, что

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^n} \|\eta_{(z)} \cdot \mu\|_{M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant (C_0 \, C_1 + C_2) \cdot \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \|\mu_z\|_{H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p'}(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= (C_0 \, C_1 + C_2) \cdot \|\mu\|_{H^{-t}_{q',\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n)},$$

откуда следует, что $\mu \in M_{unif}[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]$. Тогда, так как $p \leqslant q'$, можно применить лемму 2.2.2, из которой следует, что

$$\mu \in M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]$$

и существует не зависящая от выбора μ константа $C_3 > 0$, такая, что

$$\|\mu\|_{M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant C_3 \, |||\mu|||_{M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]} \leqslant C_4 \, \|\mu\|_{H^{-t}_{q',\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n)},$$

где $C_4 = C_3 \, (C_0 \, C_1 + C_2)$.

В силу произвольности выбора $\mu \in H^{-t}_{q',\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n)$ это и означает, что в случае 1.2 также имеет место непрерывное вложение

$$H^{-t}_{q',\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)].$$

Учитывая, что выше было доказано обратное вложение, получаем утверждение теоремы в случае, когда выполнено условие 1) $s \geqslant t \geqslant 0, \ s > \frac{n}{p}$.

Пусть теперь выполнено условие 2) $t \geqslant s \geqslant 0, \ t > \frac{n}{q}$.

Поскольку согласно утверждению 2.1.2 имеем, что

$$M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)] = M[H_q^t(\mathbb{R}^n) \to H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)],$$

то для завершения доказательства теоремы нам достаточно установить совпадение пространств

$$M[H_q^t(\mathbb{R}^n) \to H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)] \;=\; H_{q',\,unif}^{-t}(\mathbb{R}^n) \cap H_{p',\,unif}^{-s}(\mathbb{R}^n)$$

и эквивалентность норм этих пространств.

Так как условие $q \leqslant p'$ выполняется, поскольку оно эквивалентно условию $p \leqslant q'$, то можно применить доказанное для случая 1) утверждение теоремы в ситуации, когда индексы s и t, а также p и q меняются местами. В результате получаем, что в случае 2) имет место совпадение пространств

$$M[H_q^t(\mathbb{R}^n) \to H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)] \;=\; H_{p',\,unif}^{-s}(\mathbb{R}^n) \cap H_{q',\,unif}^{-t}(\mathbb{R}^n),$$

причём нормы этих пространств эквивалентны.

Теорема 2.3.2 доказана.

Следствие 2.3.1. *Пусть $p > 1$ и либо $s \geqslant t \geqslant 0$, $s > \frac{n}{p}$, либо $t \geqslant s \geqslant 0$, $t > \frac{n}{p'}$. Тогда*

$$M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_p^{-t}(\mathbb{R}^n)] = H_{p,\,unif}^{-t}(\mathbb{R}^n) \cap H_{p',\,unif}^{-s}(\mathbb{R}^n),$$

причём соответствующие нормы эквивалентны.

Это утверждение является частным случаем теоремы 2.3.2 при $q = p'$.

Замечание 2.3.3. *Заметим также, что если индексы гладкости пространств бесселевых потенциалов взять целыми, то следствие 2.3.1 примет следующий вид. При $k, l \in \mathbb{N}$, $p > 1$ и выполнении одного из двух условий 1)$k \geqslant l$, $k > \frac{n}{p}$; 2)$l \geqslant k, l > \frac{n}{p'}$ имеет место совпадение пространств*

$$M[W_p^k(\mathbb{R}^n) \to W_p^{-l}(\mathbb{R}^n)] = W_{p,\,unif}^{-l}(\mathbb{R}^n) \cap W_{p',unif}^{-k}(\mathbb{R}^n)$$

и эквивалентность их норм. Этот результат был получен ранее другими методами в статье [52].

Замечание 2.3.4. *Покажем, что накладываемые в условии теоремы 2.3.2 ограничения являются необходимыми для того, чтобы получить при s, $t \geqslant 0$, p, $q > 1$ описание пространства $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]$ в терминах шкалы пространств $H_{r,\,unif}^{\gamma}(\mathbb{R}^n)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $r > 1$. Условия 1) и 2) стрихартцевского типа в теореме 2.3.2 являются необходимыми даже в простейшем случае $p = q = 2$, поскольку, как отмечается в главе 1 диссертации, при выполнении неравенства $\max(s,t) < \frac{n}{2}$ невозможно дать описание пространства мультипликаторов $M[H_2^s(\mathbb{R}^n) \to H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)]$ в* *шкале равномерно локализованных бесселевых пространств. Проводя же рассуждения, аналогичные содержащимся в замечании 2.3.1, легко видеть, что из совпадения пространства мультипликаторов $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]$ с пространством $H^{\gamma_1}_{r_1,\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{\gamma_2}_{r_2,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ при некоторых $\gamma_1,\ \gamma_2 \in \mathbb{R}$ и $r_1,\ r_2 > 1$ следует справедливость непрерывного вложения*

$$H^s_p(\mathbb{R}^n) \subset H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n).$$

Поскольку согласно замечанию 1.1.5 необходимым условием справедливости этого вложения является выполнение неравенства $p \leqslant q'$, то в случае $p > q'$ невозможно получить аналог результата теоремы 2.3.2.

Хотя в случае невыполнения условий типа Стрихартца невозможно получить описание пространства $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]$, где $s,\ t \geqslant 0,\ \ p,\ q > 1$, аналогичное результату теоремы 2.3.2, тем не менее, при совпадении показателей гладкости s и t удаётся установить следующее одностороннее непрерывное вложение пространства типа $H^{\gamma}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ в пространство $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-s}_{q'}(\mathbb{R}^n)]$.

Теорема 2.3.3. *Пусть $p,\ q > 1,\ p \leqslant q'$ и выполнено условие*

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q'}\right) \cdot n \ < \ s \ < \ \frac{n}{\max(p,q)}.$$

Тогда имеет место непрерывное вложение

$$H^{-s}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-s}_{q'}(\mathbb{R}^n)],$$

где

$$r \ = \ \frac{n}{s - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q'}\right) n}\,.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что и условия, и заключение теоремы не меняются при перестановке p и q. Действительно, это следует из справедливости равенства

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q'} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p'},$$

равносильности условия $p \leqslant q'$ условию $q \leqslant p'$ и совпадения пространств мультипликаторов

$$M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-s}_{q'}(\mathbb{R}^n)] \ \text{ и } \ M[H^s_q(\mathbb{R}^n) \to H^{-s}_{p'}(\mathbb{R}^n)].$$

Поэтому, без ограничения общности, далее будем считать, что $p \geqslant q$.

Заметим, что $r > 1$, поскольку в силу условий теоремы

$$r \ = \ \frac{n}{s - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q'}\right) n} \ \geqslant \ \frac{n}{s} \ > \ \max(p,q) \ > \ 1.$$

Так как $p \leqslant q'$, то можно применить пункт 2) следствия 2.2.2, согласно которому непрерывное вложение

$$H^{-s}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-s}_{q'}(\mathbb{R}^n)]$$

имеет место тогда и только тогда, когда справедлива мультипликативная оценка

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H^s_{r'}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\, \|\mathbf{f}\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\, \|\mathbf{g}\|_{H^s_q(\mathbb{R}^n)} \;\; \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{R}^n). \tag{2.4}$$

Отметим, что поскольку

$$\frac{n}{r} \;=\; s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q'},$$

то справедливо равенство

$$\frac{n}{r'} = \frac{n}{p} + \frac{n}{q} - s.$$

Согласно [65; Theorem 4.2.1], мультипликативная оценка

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H^s_{r_0}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\, \|\mathbf{f}\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\, \|\mathbf{g}\|_{H^s_q(\mathbb{R}^n)} \;\; \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{R}^n)$$

для r_0, определённого соотношением

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{s}{n}\,,$$

имеет место, если выполнены следующие условия:

$$\frac{1}{p} - \frac{s}{n} > 0, \;\; \frac{1}{q} - \frac{s}{n} > 0 \;\text{ и }\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{2 \cdot s}{n} < 1.$$

Проверим выполнение этих неравенств в условиях доказываемой теоремы. Очевидно, что $r_0 = r'$, первые два неравенства непосредственно следуют из условия

$$s \;<\; \frac{n}{max(p,q)}\,,$$

а третье эквивалентно неравенству

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q'} < \frac{2 \cdot s}{n}\,,$$

также очевидно следующему из условий теоремы 2.3.3. Таким образом, применима теорема [65; Theorem 4.2.1], согласно которой и выполняется мультипликативная оценка (2.4), являющаяся критерием справедливости доказываемого непрерывного вложения

$$H^{-s}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-s}_{q'}(\mathbb{R}^n)].$$

Теорема 2.3.3 доказана.

Глава III. Сингулярные возмущения степеней оператора Лапласа на торе

В данной главе с помощью методов теории мультипликаторов исследуются спектральные свойства сингулярных возмущений положительных степеней оператора Лапласа на n−мерном торе. Для того, чтобы корректно определить при $\alpha \geqslant 0$ возмущение степени оператора Лапласа $(-\Delta)^\alpha$ сингулярным потенциалом, мы применяем теорию сингулярных возмущений, развитую для общего случая самосопряжённого, полуограниченного снизу оператора, действующего в абстрактном гильбертовом пространстве. В результате мы получаем, что возмущение линейного оператора $(-\Delta)^\alpha\colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ сингулярным потенциалом q корректно определено в случае, когда потенциал является мультипликатором из пространства $H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$ в пространство $H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$. Более того, спектральные свойства возмущённого оператора оказываются тесно связанными с различными свойствами потенциалов, формулируемыми в терминах теории мультипликаторов. Так, например, мы показываем, что сходимость последовательности потенциалов q_m к потенциалу q в пространстве мультипликаторов $M[H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)]$ влечёт равномерную резольвентную сходимость последовательности операторов $(-\Delta)^\alpha + Q_m$ к оператору $(-\Delta)^\alpha + Q$ в пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$. Также в этой главе с помощью техники теории мультипликаторов для широкого класса сингулярных потенциалов устанавливаются такие свойства возмущённого оператора, как дискретность спектра, полнота системы корневых векторов, и находится асимптотика считающей функции собственных значений этого оператора.

3.1. Возмущения самосопряжённого полуограниченного оператора T и его степеней в шкале пространств, порождённой оператором T

Сначала изложим некоторые результаты абстрактной теории возмущений самсосопряжённых неограниченных операторов, действующих в шкале гильбертовых пространств, порождённой положительными степенями исходного оператора. Наш подход в своих общих чертах восходит к работе [60], но, учитывая различия как в формулировках результатов, так и в методах доказательства, мы приведём ниже цельное изложение тех результатов из абстрактной теории возмущений, которые будут использоваться для доказательства основных утверждений этой главы.

Пусть $\mathcal{H}$ − гильбертово пространство, $Id_\mathcal{H}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ − определённый всюду на $\mathcal{H}$ тождественный оператор, а $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ − самосопряженный линейный оператор, определённый на $D(T) \subset \mathcal{H}$ и такой, что оператор $T - Id_\mathcal{H}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ является неотрицательно определённым. Заметим, что множество $D(T)$ всюду плотно в $\mathcal{H}$ как область определения самосопряжённого оператора T. Из справедливости же неравенства

$$< T(x), x >_\mathcal{H} \;\geqslant\; < x, x >_\mathcal{H} \;>\; 0 \quad \forall\, x \in D(T),\ x \neq 0,$$

следует, что оператор T положительно определён и инъективен.

Поскольку, как хорошо известно, для произвольного самосопряжённого оператора A, действующего в гильбертовом пространстве X, оператор $A+c\cdot Id_X : X \to X$ также будет самосопряжённым для любого числа $c \in \mathbb{R}$ (см., например, [19; §VIII.2, с. 333]), то оператор $T - Id_{\mathcal{H}}$ является самосопряжённым в пространстве $\mathcal{H}$. В силу неотрицательной определённости самосопряжённого оператора $T - Id_{\mathcal{H}} \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ для спектра оператора T имеем $\sigma(T) \subset [1, +\infty)$. Тогда, поскольку для произвольного числа $\alpha \in \mathbb{R}$ функция

$$f_\alpha \colon [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ t \xmapsto{f_\alpha} t^\alpha,$$

является непрерывной на множестве $\sigma(T)$, то, согласно следствию из общей спектральной теоремы (см. [6; Теорема XII.2.6]), для произвольного числа $\alpha \in \mathbb{R}$ корректно определён самосопряжённый линейный оператор

$$T^\alpha \overset{def}{=} f_\alpha(T) \colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

с всюду плотной в $\mathcal{H}$ областью определения $D(T^\alpha)$, причём имеет место соотношение

$$< T^\alpha(x),\, y >_{\mathcal{H}} = \int\limits_{\sigma(T)} \lambda^\alpha \, d\,\Pi_{x,y}(\lambda) \quad \forall\, x \in D(T^\alpha),\, \forall\, y \in \mathcal{H}, \tag{3.1}$$

где $\Pi-$ проекторнозначная спектральная мера, отвечающая оператору T, а комплекснозначная мера $\Pi_{x,y}$ для произвольного борелевского множества $M \subset \mathbb{R}$ определена соотношением

$$\Pi_{x,y}(M) \ = < (\Pi(M))(x), y >_{\mathcal{H}} .$$

Отметим, что из равенства (3.1) и положительности функции f_α на множестве $\sigma(T)$ следует положительная определённость операторов T^α, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Поскольку согласно [6; Теорема XII.2.6] для произвольного числа $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$D(T^\alpha) = \{x \in \mathcal{H} \mid \int\limits_{\sigma(T)} \lambda^{2\alpha} \, d\,\Pi_{x,x}(\lambda) < +\infty\},$$

а для произвольных чисел β, $\gamma \in \mathbb{R}$, таких, что $\beta \leqslant \gamma$, имеет место неравенство

$$\lambda^\beta \leqslant \lambda^\gamma \ \ \forall\, \lambda \in \sigma(T) \subset [1, +\infty),$$

то

$$D(T^\gamma) \subset D(T^\beta) \quad \forall\, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \colon \beta \leqslant \gamma. \tag{3.2}$$

В частности, справедливо теоретико-множественное включение

$$D(T^0) \subset D(T^\alpha) \quad \forall\, \alpha \leqslant 0.$$

Учитывая, что $T^0 = Id_{\mathcal{H}}$, отсюда получаем, что операторы T^α, $\alpha \leqslant 0$, определены на всём пространстве $\mathcal{H}$. Более того, поскольку при $\alpha \leqslant 0$ справедливо неравенство

$$f_\alpha(x) = x^\alpha \leqslant 1 \quad \forall\, x \in \sigma(T) \subset [1, +\infty),$$

то согласно [6; Теорема XII.2.9] получаем, что при $\alpha \leqslant 0$ оператор T^α является ограниченным, причём

$$\|T^\alpha\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leqslant 1.$$

Также отметим, что семейство линейных операторов $\{T^\alpha | \alpha \in \mathbb{R}\}$ обладает аналогом полугруппового свойства в следующем смысле:

$$T^{s_1} \circ T^{s_2} = T^{s_1+s_2}\big|_{D(T^{s_1+s_2}) \cap D(T^{s_2})} = T^{s_1+s_2}\big|_{D(T^{s_3})} \;\; \forall\, s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

где $s_3 = \max(s_1 + s_2, s_2)$, первое равенство в (3.3) следует из [6; Следствие XII.2.7], а второе равенство – из соотношения (3.2). В частности, при $s_1 \geqslant 0$, $s_2 \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$T^{s_1} \circ T^{s_2} = T^{s_1+s_2}.$$

Отсюда следует, что для $s_1 = \alpha \geqslant 0$, $s_2 = -\alpha$ имеет место соотношение

$$T^\alpha \circ T^{-\alpha} = T^0 = Id_{\mathcal{H}}.$$

С другой стороны, из (3.3) следует, что

$$T^{-\alpha} \circ T^\alpha = T^0\big|_{D(T^{\max(0,\alpha)})} = Id_{D(T^\alpha)}.$$

Из последних двух соотношений нетрудно вывести, что для произвольного $\alpha \geqslant 0$ справедливы равенства

$$D(T^{-\alpha}) = Im(T^\alpha) = \mathcal{H}, \;\; D(T^\alpha) = Im(T^{-\alpha}).$$

Таким образом, для произвольного числа $\alpha \in \mathbb{R}$ операторы T^α и $T^{-\alpha}$ фактически являются взаимно обратными. В частности, отсюда следует, что определённый всюду на $\mathcal{H}$ ограниченный оператор $f_{-1}(T)$ является обратным к T.

Определим теперь шкалу пространств $\{\mathcal{H}_\theta\}_{\theta \geqslant 0}$.

Определение 3.1.1. *Пусть $\theta \geqslant 0$. Тогда определим $\mathcal{H}_\theta$ равенством*

$$\mathcal{H}_\theta \overset{def}{=} D(T^{\frac{\theta}{2}}).$$

Заметим, что для произвольного числа $\theta \geqslant 0$ множество $\mathcal{H}_\theta$ плотно в $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ как область определения самосопряжённого оператора $T^{\frac{\theta}{2}}$.

При $\theta \geqslant 0$ на линейном пространстве $\mathcal{H}_\theta$ можно ввести скалярное произведение

$$< \cdot\,, \cdot >_\theta \colon \mathcal{H}_\theta \times \mathcal{H}_\theta \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; < x, y >_\theta = < T^{\frac{\theta}{2}}(x), T^{\frac{\theta}{2}}(y) >_{\mathcal{H}} \;\; \forall\, x, y \in \mathcal{H}_\theta,$$

причём свойство

$$< x, x >_\theta = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

следует из инъективности положительно определённого оператора $T^{\frac{\theta}{2}}$.

Учитывая, что в случае $\theta \geqslant 0$ справедливы соотношения

$$\|x\|_{\mathcal{H}_\theta} = \sqrt{< x, x >_\theta} = \|T^{\frac{\theta}{2}}(x)\|_{\mathcal{H}} \ \ \forall\, x \in \mathcal{H}_\theta,$$

и

$$T^{\frac{\theta}{2}}(T^{-\frac{\theta}{2}}(y)) = y \ \ \forall\, y \in \mathcal{H},$$

несложно показать, что из полноты пространства $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ следует полнота пространства $(\mathcal{H}_\theta, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_\theta})$ при $\theta \geqslant 0$.

Таким образом, для произвольного числа $\theta \geqslant 0$ пространство $\mathcal{H}_\theta$ является гильбертовым относительно скалярного произведения $< \cdot, \cdot >_{\mathcal{H}_\theta}$.

Для $\theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant 0$ из (3.2) следует справедливость теоретико-множественного вложения

$$\mathcal{H}_{\theta_1} \subset \mathcal{H}_{\theta_2}.$$

Непрерывность же этого вложения вытекает из того, что оператор $T^{\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}$ ограничен и, значит,

$$\|x\|_{\mathcal{H}_{\theta_2}} = \|T^{\frac{\theta_2}{2}}(x)\|_{\mathcal{H}} = \|T^{\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}(T^{\frac{\theta_1}{2}}(x))\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|T^{\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}\, \|x\|_{\mathcal{H}_{\theta_1}} \ \ \forall\, x \in \mathcal{H}_{\theta_1}.$$

Таким образом, справедливо следующее

Замечание 3.1.1. *Пусть $\theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant 0$. Тогда имеет место непрерывное вложение*

$$(\mathcal{H}_{\theta_1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{\theta_1}}) \subset (\mathcal{H}_{\theta_2}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{\theta_2}}).$$

Если $\theta \geqslant 0$ и $\alpha \in \left(-\infty, \frac{\theta}{2}\right]$, то в силу (3.2) имеет место теоретико-множественное включение

$$\mathcal{H}_\theta = D(T^{\frac{\theta}{2}}) \subset D(T^\alpha)$$

и, следовательно, корректно определено подпространство $T^\alpha(\mathcal{H}_\theta)$. Тогда из соотношения

$$\mathcal{H}_\theta = D(T^{\frac{\theta}{2}}) = Im(T^{-\frac{\theta}{2}}) \ \ \forall\, \theta \geqslant 0$$

и аналога полугруппового свойства для семейства операторов $\{T^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ вытекает, что при $\theta \geqslant 0$ и $\alpha \in \left(-\infty, \frac{\theta}{2}\right]$ справедливо равенство

$$T^\alpha(\mathcal{H}_\theta) = \mathcal{H}_{\theta-2\alpha},$$

причём оператор

$$T^\alpha|_{\mathcal{H}_\theta} \colon (\mathcal{H}_\theta, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_\theta}) \to (\mathcal{H}_{\theta-2\alpha}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{\theta-2\alpha}})$$

является изометрическим изоморфизмом этих пространств. В частности, при $\theta \geqslant 0$ оператор

$$T^{\frac{\theta}{2}}\colon (\mathcal{H}_\theta, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_\theta}) \to (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$$

является изометрическим изоморфизмом пространств $\mathcal{H}_\theta$ и $\mathcal{H}$.

Заметим, что соотношение $T^\alpha(\mathcal{H}_\theta) = \mathcal{H}_{\theta-2\alpha}$ при $\alpha = -\frac{1}{2}$ и $\theta = 1$ принимает вид

$$T^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{H}_1) = \mathcal{H}_2.$$

Отсюда, учитывая плотность $\mathcal{H}_1$ в пространстве $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ и изометричность оператора

$$T^{-\frac{1}{2}}\colon (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}) \to (\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}),$$

следует плотность $\mathcal{H}_2$ в пространстве $(\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1})$.

Далее определим пространство $\mathcal{H}_{-1}$, дуальное к $\mathcal{H}_1$ относительно скалярного произведения $< \cdot, \cdot >_{\mathcal{H}}$. Для этого рассмотрим произвольный элемент $x \in \mathcal{H}$. Он порождает на $\mathcal{H}_1$ антилинейный функционал

$$\widetilde{x}\colon y \longmapsto < x, y >_{\mathcal{H}} .$$

Функционал $\widetilde{x}\colon (\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}) \longrightarrow \mathbb{C}$ является непрерывным, поскольку для произвольного элемента $y \in \mathcal{H}_1$ справедлива цепочка равенств

$$< T^{-\frac{1}{2}}(x), T^{\frac{1}{2}}(y) >_{\mathcal{H}} = < x, T^{-\frac{1}{2}}(T^{\frac{1}{2}}(y)) >_{\mathcal{H}} = < x, y >_{\mathcal{H}}$$

и, значит,

$$|\widetilde{x}(y)| = \ | < T^{-\frac{1}{2}}(x), T^{\frac{1}{2}}(y) >_{\mathcal{H}} | \ \leqslant \ \|T^{-\frac{1}{2}}(x)\|_{\mathcal{H}} \, \|y\|_{\mathcal{H}_1} \ \ \forall\, y \in \mathcal{H}_1.$$

Из последней оценки также следует, что

$$\|\widetilde{x}\|_{\mathcal{H}_1^*} \leqslant \|T^{-\frac{1}{2}}(x)\|_{\mathcal{H}}.$$

Заметим, что выше фактически доказана справедливость соотношения

$$< T^{-\frac{1}{2}}(x), T^{\frac{1}{2}}(y) >_{\mathcal{H}} = < x, y >_{\mathcal{H}} \quad \forall\, x \in \mathcal{H}, \ \forall\, y \in \mathcal{H}_1.$$

Для доказательства обратной оценки нормы функционала $\widetilde{x} \in \mathcal{H}_1^*$ рассмотрим действие функционала $\widetilde{x}$ на элементе $T^{-1}(x) \in \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_1$. Действительно,

$$\widetilde{x}(T^{-1}(x)) = < x, T^{-1}(x) >_{\mathcal{H}} = < T^{-\frac{1}{2}}(x), T^{\frac{1}{2}}(T^{-1}(x)) >_{\mathcal{H}} = < T^{-\frac{1}{2}}(x), T^{-\frac{1}{2}}(x) >_{\mathcal{H}} =$$

$$= \|T^{-\frac{1}{2}}(x)\|^2_{\mathcal{H}} = \|T^{-\frac{1}{2}}(x)\|_{\mathcal{H}} \|T^{\frac{1}{2}}(T^{-1}(x))\|_{\mathcal{H}} = \|T^{-\frac{1}{2}}(x)\|_{\mathcal{H}} \|T^{-1}(x)\|_{\mathcal{H}_1},$$

откуда и следует требуемая оценка

$$\|\widetilde{x}\|_{\mathcal{H}_1^*} \geqslant \|T^{-\frac{1}{2}}(x)\|_{\mathcal{H}}.$$

Таким образом, для произвольного элемента $x \in \mathcal{H}$ справедливо равенство

$$\|\widetilde{x}\|_{\mathcal{H}_1^{\overline{*}}} = \|T^{-\frac{1}{2}}(x)\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.4}$$

В силу инъективности положительно определённого оператора $T^{-\frac{1}{2}}$ функция

$$\|\cdot\|_{-1} \colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}; \ \ \|x\|_{-1} \stackrel{def}{=} \|T^{-\frac{1}{2}}(x)\|_{\mathcal{H}},$$

является нормой на пространстве $\mathcal{H}$.

Теперь определим пространство $\mathcal{H}_{-1}$ как пополнение пространства $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{-1})$ и будем обозначать его норму $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}}$.

Следующее из ограниченности оператора $T^{-\frac{1}{2}}$ в пространстве $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ неравенство

$$\|x\|_{\mathcal{H}_{-1}} = \|T^{-\frac{1}{2}}(x)\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|T^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \, \|x\|_{\mathcal{H}} \ \ \forall\, x \in \mathcal{H}$$

фактически означает непрерывность вложения

$$(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}) \subset (\mathcal{H}_{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}}).$$

Утверждение 3.1.1. *Пространства* $(\mathcal{H}_{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}})$ *и* $(\mathcal{H}_1^{\overline{*}}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^{\overline{*}}})$ *изометрически изоморфны.*

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$F \colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_1^{\overline{*}}, \ \ x \xrightarrow{F} \widetilde{x},$$

и обозначим его образ как $\widetilde{\mathcal{H}}$. Отметим, что соотношение (3.4) фактически означает, что

$$\|F(x)\|_{\mathcal{H}_1^{\overline{*}}} = \|T^{-\frac{1}{2}}(x)\|_{\mathcal{H}} = \|x\|_{\mathcal{H}_{-1}} \ \ \forall\, x \in \mathcal{H}.$$

Докажем сначала, что множество $\widetilde{\mathcal{H}}$ плотно в пространстве $(\mathcal{H}_1^{\overline{*}}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^{\overline{*}}})$.

Поскольку пространство $(\mathcal{H}_1, <\cdot,\cdot>_{\mathcal{H}_1})$ является гильбертовым и, следовательно, рефлексивным, то отображение

$$j \colon \mathcal{H}_1 \longrightarrow (\mathcal{H}_1^{\overline{*}})^*, \ \ j \colon h \longmapsto j_h, \text{ где } j_h(f) = f(h) \ \ \forall\, f \in \mathcal{H}_1^{\overline{*}},$$

есть изометрический изоморфизм пространств $(\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1})$ и ($((\mathcal{H}_1^{\overline{*}})^*, \|\cdot\|_{(\mathcal{H}_1^{\overline{*}})^*})$.

Пусть теперь для некоторого $h \in \mathcal{H}_1$ функционал $j_h \in (\mathcal{H}_1^{\overline{*}})^*$ принадлежит аннулятору множества $\widetilde{\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}_1^{\overline{*}}$, то есть $j_h(\widetilde{x}) = 0 \ \ \forall\, x \in \mathcal{H}$. Тогда имеем

$$< x, h >_{\mathcal{H}} = \widetilde{x}(h) = j_h(\widetilde{x}) = 0 \ \ \forall\, x \in \mathcal{H}.$$

Поскольку $h \in \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$, то отсюда следует, что $h = 0$. Следовательно, $j_h = \mathbf{0}$.

Таким образом, получаем, что

$$Ann_{(\mathcal{H}_1^{\overline{*}})^*}(\widetilde{H}) = \{\mathbf{0}\},$$

откуда, согласно следствию из теоремы Хана - Банаха о нетривиальности аннулятора для замкнутого подпространства банахова пространства, следует плотность $\widetilde{H}$ в пространстве $(\mathcal{H}_1^{\overline{*}}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^{\overline{*}}})$.

Итак, мы получили, что при изометрическом отображении

$$F\colon (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}}) \longrightarrow (\mathcal{H}_1^{\overline{*}}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^{\overline{*}}})$$

образ $\mathcal{H}$, равный $\widetilde{\mathcal{H}}$, плотен в $(\mathcal{H}_1^{\overline{*}}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^{\overline{*}}})$.

В силу определения пространства $\mathcal{H}_{-1}$ это отображение можно по непрерывности продолжить до изометрического отображения

$$F_1\colon (\mathcal{H}_{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}}) \longrightarrow (\mathcal{H}_1^{\overline{*}}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^{\overline{*}}}).$$

Заметим, что $F_1(\mathcal{H}_{-1})$ содержит всюду плотное в $(\mathcal{H}_1^{\overline{*}}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^{\overline{*}}})$ подмножество $\widetilde{\mathcal{H}}$. При этом $F_1(\mathcal{H}_{-1})$ как изометрический образ полного пространства является полным и, следовательно, замкнутым относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^{\overline{*}}}$. Отсюда непосредственно следует, что $F_1(\mathcal{H}_{-1}) = \mathcal{H}_1^{\overline{*}}$.

Таким образом, отображение F_1 осуществляет изометрический изоморфизм банаховых пространств $(\mathcal{H}_{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}})$ и $(\mathcal{H}_1^{\overline{*}}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^{\overline{*}}})$.

Утверждение 3.1.1 доказано.

Отметим, что построенный в доказательстве утверждения 3.1.1 изометрический изоморфизм пространств $(\mathcal{H}_{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}})$ и $(\mathcal{H}_1^{\overline{*}}, \|\cdot\|_{(\mathcal{H}_1)^{\overline{*}}})$ и даёт основания говорить о пространстве $(\mathcal{H}_{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}})$ как о дуальном к пространству $(\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1})$ относительно скалярного произведения $< \cdot, \cdot >_{\mathcal{H}}$.

Построим продолжение оператора $T^{-\frac{1}{2}}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$ до оператора, действующего из пространства $\mathcal{H}_{-1}$ в пространство $\mathcal{H}$. Поскольку

$$\|T^{-\frac{1}{2}}(x)\|_{\mathcal{H}} = \|x\|_{\mathcal{H}_{-1}} \ \ \forall\, x \in \mathcal{H} \quad \text{и} \quad T^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_1,$$

то

$$T^{-\frac{1}{2}}\colon (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}}) \longrightarrow (\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$$

является изометрическим изоморфизмом соответствующих пространств. В силу плотности $\mathcal{H}$ в пространстве $(\mathcal{H}_{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}})$ оператор $T^{-\frac{1}{2}}$ можно по непрерывности продолжить до оператора

$$\mathcal{T}^{-\frac{1}{2}}\colon \mathcal{H}_{-1} \longrightarrow \mathcal{H}.$$

Этот оператор является изометрическим изоморфизмом пространств $(\mathcal{H}_{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}})$ и $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$, поскольку замкнутое как изометрический образ полного пространства $(\mathcal{H}_{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}})$ пространство $\mathcal{T}^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{H}_{-1})$ содержит плотное в $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ подпространство $\mathcal{H}_1 = T^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{H})$, и, значит, $\mathcal{T}^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{H}_{-1})$ совпадает с $\mathcal{H}$.

Итак, мы построили изометрический изоморфизм

$$\mathcal{T}^{-\frac{1}{2}} \colon (\mathcal{H}_{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}}) \longrightarrow (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}).$$

Аналогичным образом строится продолжение изометрического оператора

$$T^{\frac{1}{2}} \colon (\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}) \longrightarrow (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}})$$

до оператора

$$\mathcal{T}^{\frac{1}{2}} \colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_{-1},$$

являющегося изометрическим изоморфизмом пространств $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ и $(\mathcal{H}_{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}})$.

Нетрудно показать, что операторы $\mathcal{T}^{\frac{1}{2}}$ и $\mathcal{T}^{-\frac{1}{2}}$ являются обратными друг к другу в следующем смысле:

$$\mathcal{T}^{\frac{1}{2}} \circ \mathcal{T}^{-\frac{1}{2}} = Id_{\mathcal{H}_{-1}} \text{ и } \mathcal{T}^{-\frac{1}{2}} \circ \mathcal{T}^{\frac{1}{2}} = Id_{\mathcal{H}} \,.$$

Поскольку множество $\mathcal{H}_2$ плотно в пространстве $(\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1})$, а множество $\mathcal{H}$ плотно в $(\mathcal{H}_{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}})$, то таким же образом можно построить продолжение изометрического оператора

$$T \colon (\mathcal{H}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}) \longrightarrow (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}})$$

до оператора

$$\mathcal{T} \colon \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_{-1},$$

являющегося изометрическим изоморфизмом пространств $(\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1})$ и $(\mathcal{H}_{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}})$.

Нетрудно проверить, что имеет место равенство определённых на всём $\mathcal{H}_1$ линейных операторов

$$\mathcal{T}^{-\frac{1}{2}} \circ \mathcal{T} = T^{\frac{1}{2}}.$$

Отметим, что норма пространства $\mathcal{H}_{-1}$ порождена скалярным произведением

$$< x, y >_{\mathcal{H}_{-1}} \stackrel{def}{=} < \mathcal{T}^{-\frac{1}{2}}(x), \mathcal{T}^{-\frac{1}{2}}(y) >_{\mathcal{H}} \quad \forall\, x, y \in \mathcal{H}_{-1}$$

и, значит, $(\mathcal{H}_{-1}, < \cdot, \cdot >_{\mathcal{H}_{-1}})$ является гильбертовым пространством.

Определение 3.1.2. *Полуторалинейное отображение*

$$< \cdot, \cdot >_D \colon \mathcal{H}_{-1} \times \mathcal{H}_1 \to \mathbb{C}, \;\; < x, y >_D = < \mathcal{T}^{-\frac{1}{2}}(x), T^{\frac{1}{2}}(y) >_{\mathcal{H}} \;\; \forall\, x \in \mathcal{H}_{-1}, \forall\, y \in \mathcal{H}_1,$$

будем называть дуальным скалярным произведением, определённым для пары пространств $\mathcal{H}_{-1}$ *и* $\mathcal{H}_1$.

Непосредственно из определения следует, что справедливо неравенство

$$| < x, y >_D | \leqslant \; \|x\|_{\mathcal{H}_{-1}} \|y\|_{\mathcal{H}_1} \quad \forall\, x \in \mathcal{H}_{-1}, \; \forall\, y \in \mathcal{H}_1.$$

Отметим, что из этого неравенства вытекает секвенциальная непрерывность дуального скалярного произведения $< \cdot, \cdot >_D$ по первой компоненте относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}}$, а по второй компоненте относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$.

Замечание 3.1.2. *Из самосопряжённости оператора $T^{-\frac{1}{2}}$ в гильбертовом пространстве $(\mathcal{H}, <\cdot,\cdot>_{\mathcal{H}})$ несложно вывести, что*

$$< x, y >_D = < x, y >_{\mathcal{H}} \quad \forall\, x \in \mathcal{H},\ \forall\, y \in \mathcal{H}_1.$$

Рассмотрим антилинейный оператор

$$G\colon \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_{-1}^*,\ \ y \longmapsto G_y,\ \ G_y(x) = < x, y >_D \ \ \forall\, x \in \mathcal{H}_{-1}.$$

Для этого оператора справедливо представление

$$G = (\mathcal{T}^{-\frac{1}{2}})^* \circ \pi \circ T^{\frac{1}{2}},$$

где $\pi\colon (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}) \to (\mathcal{H}^*, \|\cdot\|_{\mathcal{H}^*})$ – естественный изометрический изоморфизм гильбертова пространства и сопряжённого к нему. Поскольку операторы

$$T^{\frac{1}{2}}\colon (\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}) \to (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}) \ \text{ и } \ (\mathcal{T}^{-\frac{1}{2}})^*\colon (\mathcal{H}^*, \|\cdot\|_{\mathcal{H}^*}) \to (\mathcal{H}_{-1}^*, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}^*})$$

также являются изометрическими изоморфизмами соответствующих пространств, то и оператор G, как их композиция, осуществляет изометрический изоморфизм пространств $(\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1})$ и $(\mathcal{H}_{-1}^*, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}^*})$.

Заметим, что построенный выше в доказательстве утверждения 3.1.1 оператор $F_1\colon (\mathcal{H}_{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}}) \to (\mathcal{H}_1^{\overline{*}}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^{\overline{*}}})$, являющийся изометрическим изоморфизмом соответствующих пространств, также можно выразить через дуальное скалярное произведение:

$$(F_1(u))(v) = < u, v >_D \quad \forall\, u \in \mathcal{H}_{-1},\ \forall\, v \in \mathcal{H}_1.$$

Отображение же $F_2\colon (\mathcal{H}_{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}}) \to (\mathcal{H}_1^*, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^*})$, определяемое как

$$(F_2(u))(v) \stackrel{def}{=} \overline{(F_1(u))(v)} \ \ \forall\, u \in \mathcal{H}_{-1},\ \forall\, v \in \mathcal{H}_1,$$

тоже очевидным образом является изометрическим изоморфизмом соответствующих пространств и удовлетворяет соотношению

$$(F_2(u))(v) = \overline{< u, v >_D} \ \ \forall\, u \in \mathcal{H}_{-1},\ \forall\, v \in \mathcal{H}_1.$$

Теперь с помощью дуального скалярного произведения определим понятия симметричности и самосопряжённости для операторов, действующих из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$.

Определение 3.1.3. *Линейный оператор*

$$Q\colon \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_{-1}$$

с областью определения $D(Q) \subset \mathcal{H}_1$ называется симметрическим, если порождённая им в смысле дуального скалярного произведения квадратичная форма вещественна, то есть

$$< Q(v), v >_D \in \mathbb{R} \ \ \forall\, v \in D(Q).$$

Из этого определения и поляризационного тождества, связывающего полуторалинейную форму с соответствующей квадратичной формой, следует, что оператор $Q\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$ с областью определения $D(Q) \subset \mathcal{H}_1$ является симметрическим тогда и только тогда, когда

$$< Q(u), v >_D = \overline{< Q(v), u >_D} \quad \forall\, u, v \in D(Q).$$

Определение 3.1.4. *Пусть задан линейный оператор $Q\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$ со всюду плотной в $(\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1})$ областью определения $D(Q)$. Тогда сопряжённый к Q оператор*

$$Q^*\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$$

определяется следующим образом:

$$y \in D(Q^*) \Longleftrightarrow \exists\, z_y \in \mathcal{H}_{-1}: \ < Q(x), y >_D = \overline{< z_y, x >_D} \ \ \forall\, x \in D(Q);$$

$$Q^*(y) = z_y \ \ \forall\, y \in D(Q^*).$$

Отметим, что определение 3.1.4 согласуется с классическим определением оператора $Q^*_{cl}\colon \mathcal{H}^*_{-1} \to \mathcal{H}^*_1$, сопряжённого к оператору $Q\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$, поскольку, как несложно показать, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^*_{-1} & \xrightarrow{Q^*_{cl}} & \mathcal{H}^*_1 \\ \Big\uparrow{\scriptstyle G} & & \Big\uparrow{\scriptstyle F_2} \\ \mathcal{H}_1 & \xrightarrow{Q^*} & \mathcal{H}_{-1} \end{array}$$

коммутативна.

Покажем, что если оператор $Q\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$ с плотной в $(\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1})$ областью определения $D(Q)$ является симметрическим в смысле определения 3.1.3, то

$$Q \subset Q^*,$$

то есть оператор Q^* есть продолжение оператора Q. Действительно, из симметричности оператора $Q\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$ следует, что для произвольного $y \in D(Q)$ справедливо соотношение

$$< Q(x), y >_D = \overline{< Q(y), x >_D} \quad \forall\, x \in D(Q),$$

а это, в свою очередь, означает, что $y \in D(Q^*)$ и $Q^*(y) = Q(y)$.

Определение 3.1.5. *Линейный оператор $Q\colon \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_{-1}$ с плотной в $(\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1})$ областью определения $D(Q)$ называется самосопряжённым, если имеет место соотношение*

$$Q^* = Q,$$

где оператор Q^* является сопряжённым к Q в смысле определения 3.1.4.

Легко видеть, что из самосопряжённости в смысле определения 3.1.5 линейного оператора $Q\colon \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_{-1}$ следует его симметричность в смысле определения 3.1.3. Также очевидно и следующее частичное обращение этого факта: симметрический оператор $Q\colon \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_{-1}$ с областью определения $D(Q) = \mathcal{H}_1$ является самосопряжённым.

Для доказательства самосопряжённости оператора $\mathcal{T}\colon \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_{-1}$ нам потребуется следующее замечание.

Замечание 3.1.3. *Поскольку, как отмечалось выше, справедливо равенство*

$$\mathcal{T}^{-\frac{1}{2}} \circ \mathcal{T} = T^{\frac{1}{2}},$$

то для произвольных $x, y \in \mathcal{H}_1$ *имеем*

$$< \mathcal{T}(x), y >_D = < T^{\frac{1}{2}}(x), T^{\frac{1}{2}}(y) >_{\mathcal{H}} .$$

В частности,

$$< \mathcal{T}(x), x >_D = \ \|x\|^2_{\mathcal{H}_1} \ \ \forall\, x \in \mathcal{H}_1.$$

Утверждение 3.1.2. *Оператор* $\mathcal{T}\colon \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_{-1}$ *является самосопряжённым в смысле определения 3.1.5.*

Доказательство. Так как $D(\mathcal{T}) = \mathcal{H}_1$, то для доказательства самосопряжённости оператора $\mathcal{T}$ достаточно установить его симметричность в смысле определения 3.1.3. Применяя замечание 3.1.3, получаем справедливость цепочки равенств

$$\overline{< \mathcal{T}(y), x >_D} = \overline{< T^{\frac{1}{2}}(y), T^{\frac{1}{2}}(x) >_{\mathcal{H}}} = < T^{\frac{1}{2}}(x), T^{\frac{1}{2}}(y) >_{\mathcal{H}} = < \mathcal{T}(x), y >_D \ \ \forall\, x, y \in \mathcal{H}_1,$$

откуда и следует симметричность оператора $\mathcal{T}\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$.

Утверждение 3.1.2 доказано.

Напомним некоторые классические определения из теории операторов, которые будут использоваться в дальнейшем.

Определение 3.1.6. *Пусть* $(\mathcal{H}, < \cdot, \cdot >_{\mathcal{H}})$ *– гильбертово пространство. Тогда квадратичная форма* $q\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ *с областью определения* $D(q) \subset \mathcal{H}$ *называется секториальной, если существуют константы* $C \in \mathbb{R}$ *и* $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, *такие, что*

$$\{q(x) \mid x \in D(q), \|x\|_{\mathcal{H}} = 1\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |arg(z - C)| \leqslant \theta\}.$$

Определение 3.1.7. *Пусть* $(\mathcal{H}, < \cdot, \cdot >_{\mathcal{H}})$ *– гильбертово пространство. Тогда линейный оператор* $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *с областью определения* $D(A) \subset \mathcal{H}$ *называется секториальным, если секториальной является порождённая им квадратичная форма*

$$q_A\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}, \ \ q_A(x) = < A(x), x >_{\mathcal{H}} \quad \forall\, x \in D(q_A) \stackrel{def}{=} D(A).$$

Определение 3.1.8. *Пусть на гильбертовом пространстве* $(\mathcal{H}, <\cdot,\cdot>_{\mathcal{H}})$ *задана секториальная квадратичная форма* q *с областью определения* $D(q) \subset \mathcal{H}$. *Тогда будем говорить, что последовательность* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(q)$ $q-$*сходится к элементу* $x \in \mathcal{H}$ *и обозначать эту сходимость как* $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{q} x$, *если*

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_{\mathcal{H}}} x \ \text{ и } \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon \ |q(x_m - x_n)| \leqslant \varepsilon \ \ \forall\, m,n > N_0.$$

Определение 3.1.9. *Пусть* $(\mathcal{H}, <\cdot,\cdot>_{\mathcal{H}})$ *— гильбертово пространство. Тогда секториальная квадратичная форма* $q\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ *с областью определения* $D(q) \subset \mathcal{H}$ *называется замкнутой, если из того, что последовательность* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(q)$ $q-$*сходится к* $x \in \mathcal{H}$, *следует, что* $x \in D(q)$ *и* $q(x_n - x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Определение 3.1.10. *Будем говорить, что линейный оператор* $Q\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$ *с областью определения* $D(Q) \subset \mathcal{H}_1$ *является* $\mathcal{T}-$*подчинённым в смысле форм, если для некоторого числа* $\alpha > 0$ *найдётся такая константа* $\beta(\alpha) \geqslant 0$, *что*

$$| < Q(x), x >_D | \ \leqslant \alpha \cdot < \mathcal{T}(x), x >_D + \beta(\alpha) \cdot \|x\|^2_{\mathcal{H}} \ \ \forall\, x \in D(Q).$$

Для $\mathcal{T}-$*подчинённого оператора* Q *инфимум всех таких* α *будем называть* $\mathcal{T}-$*гранью оператора* Q.

Отметим, что если в условиях определения 3.1.10 число $\alpha_Q \geqslant 0$ является $\mathcal{T}-$гранью оператора Q, то для произвольного числа $\alpha_0 > \alpha_Q$ найдётся такое число $\beta(\alpha_0) \geqslant 0$, что для всех $x \in D(Q)$ справедлива оценка

$$| < Q(x), x >_D | \ \leqslant \alpha \cdot < \mathcal{T}(x), x >_D + \beta(\alpha_0) \cdot \|x\|^2_{\mathcal{H}} \quad \forall\, \alpha \geqslant \alpha_0.$$

Теорема 3.1.1. *Пусть линейный оператор* $Q\colon \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_{-1}$ *определён на всём пространстве* $\mathcal{H}_1$ *и подчинён оператору* $\mathcal{T}$ *в смысле форм с* $\mathcal{T}-$*гранью* $\alpha_Q < 1$. *Тогда квадратичная форма* $t + q\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ *с областью определения* $D(t+q) = \mathcal{H}_1$, *определённая как*

$$(t+q)(x) \stackrel{def}{=} < (\mathcal{T} + Q)(x), x >_D \ \ \forall\, x \in \mathcal{H}_1,$$

является секториальной и замкнутой относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

Доказательство. Рассмотрим форму $t + q$ как сумму квадратичных форм t и q, где

$$t(x) \stackrel{def}{=} < \mathcal{T}(x), x >_D \ \ \forall\, x \in D(t) = \mathcal{H}_1; \quad q(x) \stackrel{def}{=} < Q(x), x >_D \ \ \forall\, x \in D(q) = \mathcal{H}_1.$$

Так как согласно замечанию 3.1.3 имеем, что

$$t(x) = \|x\|^2_{\mathcal{H}_1} \geqslant 0 \ \ \forall\, x \in D(t) = \mathcal{H}_1,$$

то форма t секториальна, поскольку в качестве C можно взять 0, а в качестве θ любое положительное число, меньшее $\frac{\pi}{2}$.

Докажем замкнутость формы t. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(t)$ и $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{t} x$. Тогда поскольку согласно замечанию 3.1.3 имеет место соотношение

$$t(x_n - x_m) = <\mathcal{T}(x_n - x_m), x_n - x_m>_D = \|x_n - x_m\|^2_{\mathcal{H}_1} \;\; \forall\, m, n \in \mathbb{N},$$

то последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$. Так как пространство $(\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1})$ является полным, то

$$\exists\, x_0 \in \mathcal{H}_1\colon\;\; x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}} x_0.$$

Поскольку вложение $(\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}) \subset (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ является непрерывным, то из сходимости $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}} x_0$ следует сходимость $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_{\mathcal{H}}} x_0$. В силу единственности предела в произвольном метрическом пространстве отсюда следует, что $x = x_0$ и, значит,

$$x \in \mathcal{H}_1 = D(t).$$

Поскольку при этом

$$t(x_n - x) = \|x_n - x\|^2_{\mathcal{H}_1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

то квадратичная форма t является замкнутой относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

Так как форма q подчинена форме t в смысле квадратичных форм с $t-$гранью $\alpha_Q < 1$, то согласно классическому утверждению из теории квадратичных форм, ассоциированных с неограниченными операторами (см., например, [9; Теорема VI.1.33]), форма $t + q$ также будет секториальной и замкнутой.

Теорема 3.1.1 доказана.

Следствие 3.1.1. *Пусть в условиях теоремы 3.1.1 оператор $Q\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$ является симметрическим в смысле определения 3.1.3. Тогда определённая на $\mathcal{H}_1$ квадратичная форма*

$$t + q\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}, \;\; (t+q)(x) \stackrel{def}{=} <(\mathcal{T} + Q)(x), x>_D \quad \forall\, x \in D(t+q) = \mathcal{H}_1,$$

будет, к тому же, симметрической и полуограниченной снизу относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, то есть найдётся такая константа $C \in \mathbb{R}$, что

$$(t+q)(x) \geqslant \; C\cdot <x, x>_{\mathcal{H}} \quad \forall\, x \in \mathcal{H}_1.$$

Доказательство. Так как оператор Q является симметрическим, то

$$q(x) = <Q(x), x>_D \in \mathbb{R} \;\; \forall\, x \in \mathcal{H}_1.$$

Положим $\alpha_0 = (1 + \alpha_Q)/2$. Легко видеть, что форма $t + q$ является симметрической и для произвольного $x \in \mathcal{H}_1$ справедлива оценка

$$(t+q)(x) = <\mathcal{T}(x), x>_D + <Q(x), x>_D \geqslant <\mathcal{T}(x), x>_D - |<Q(x), x>_D| \geqslant$$

$$\geqslant (1-\alpha_0) < \mathcal{T}(x), x >_D - \beta(\alpha_0)\, \|x\|^2_{\mathcal{H}} = \frac{1-\alpha_Q}{2} \|x\|^2_{\mathcal{H}_1} - \beta(\alpha_0)\, \|x\|^2_{\mathcal{H}} \geqslant -\beta(\alpha_0)\, \|x\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Эта оценка и означает полуограниченность формы $t+q$ снизу.

Следствие 3.1.1 доказано.

Теорема 3.1.2. *Пусть линейный оператор $Q\colon \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_{-1}$ определён на всём пространстве $\mathcal{H}_1$ и подчинён в смысле форм оператору $\mathcal{T}$ с $\mathcal{T}-$гранью $\alpha_Q < 1$. Тогда сужение $\mathcal{T} \widetilde{+} Q\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ оператора $\mathcal{T}+Q$ на множество*

$$D(\mathcal{T} \widetilde{+} Q) = \{x \in \mathcal{H}_1 \mid (\mathcal{T}+Q)(x) \in \mathcal{H}\}$$

является секториальным оператором.

Если, кроме того, Q является симметрическим относительно дуального скалярного произведения, то оператор $\mathcal{T}+Q$ является самосопряжённым в смысле определения 3.1.5, а оператор $\mathcal{T} \widetilde{+} Q$ – самосопряжённым в пространстве $(\mathcal{H}, < \cdot, \cdot >_{\mathcal{H}})$ и полуограниченным снизу относительно нормы $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$.

Доказательство. Рассмотрим полуторалинейную форму

$$t+q\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}, \ \ (t+q)(x,y) = < (\mathcal{T}+Q)(x), y >_D \quad \forall\, x,\, y \in \mathcal{H}_1,$$

чья область определения $D(t+q) = \mathcal{H}_1$ плотна в $(\mathcal{H}, \| \cdot \|_{\mathcal{H}})$. Поскольку секториальность и замкнутость полуторалинейной формы определяется в терминах обладания соответствующими свойствами квадратичной формой, ассоциированной с данной полуторалинейной формой, то согласно теореме 3.1.1 полуторалинейная форма $t+q\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ является секториальной и замкнутой относительно топологии пространства $(\mathcal{H}, < \cdot, \cdot >_{\mathcal{H}})$. Тогда применима классическая первая теорема о представлении (см. [9; Теорема VI.2.1]), согласно которой существует секториальный оператор $L\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ с областью определения $D(L)$, удовлетворяющий следующим свойствам:
1) $D(L) \subset D(t+q) = \mathcal{H}_1$ и $(t+q)(x,y) = < L(x), y >_{\mathcal{H}} \quad \forall\, x \in D(L),\ \forall\, y \in \mathcal{H}_1$;
2) множество $D(L)$ является ядром для формы $t+q$, то есть наименьшая замкнутая форма, являющаяся продолжением формы $(t+q)|_{D(L)}$, совпадает с самой формой $t+q$;
3) если $x \in \mathcal{H}_1$, $z \in \mathcal{H}$ и для всех y, принадлежащих некоторому ядру формы $t+q$, выполняется равенство

$$(t+q)(x,y) = < z, y >_{\mathcal{H}},$$

то $x \in D(L)$ и $L(x) = z$.

Докажем теперь, что операторы $L\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ и $\mathcal{T} \widetilde{+} Q\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ совпадают.

Пусть $x \in D(\mathcal{T} \widetilde{+} Q)$, то есть $(\mathcal{T}+Q)(x) \in \mathcal{H}$. Тогда, учитывая замечание 3.1.2, получаем, что

$$(t+q)(x,y) = < (\mathcal{T}+Q)(x), y >_D = < (\mathcal{T}+Q)(x), y >_{\mathcal{H}} \quad \forall\, y \in \mathcal{H}_1. \tag{3.5}$$

Естественно, $\mathcal{H}_1 = D(t+q)$ является ядром формы $t+q$ и, значит, из соотношения (3.5) согласно свойству 3) первой теоремы о представлении следует, что

$$x \in D(L) \text{ и } L(x) = (\mathcal{T} + Q)(x).$$

Таким образом, $\mathcal{T} \widetilde{+} Q \subset L$.

Пусть теперь $x \in D(L)$. Тогда согласно свойству 1) первой теоремы о представлении для произвольного $y \in \mathcal{H}_1$ имеем

$$< L(x), y >_{\mathcal{H}} = (t+q)(x,y) = < (\mathcal{T}+Q)(x), y >_D = < \mathcal{T}^{-\frac{1}{2}}((\mathcal{T}+Q)(x)), T^{\frac{1}{2}}(y) >_{\mathcal{H}} .$$

Поскольку $T^{\frac{1}{2}} \colon (\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}) \longrightarrow (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ является изометрическим изоморфизмом, то это соотношение может быть переписано в виде

$$< L(x), T^{-\frac{1}{2}}(z) >_{\mathcal{H}} = < \mathcal{T}^{-\frac{1}{2}}((\mathcal{T}+Q)(x)), z >_{\mathcal{H}} \quad \forall\, z \in \mathcal{H}.$$

Учитывая, что оператор $T^{-\frac{1}{2}}$ является самосопряжённым в гильбертовом пространстве $(\mathcal{H}, < \cdot, \cdot >_{\mathcal{H}})$, а $L(x) \in \mathcal{H} = D(T^{-\frac{1}{2}})$, получаем, что

$$< \mathcal{T}^{-\frac{1}{2}}((\mathcal{T}+Q)(x)), z >_{\mathcal{H}} = < L(x), T^{-\frac{1}{2}}(z) >_{\mathcal{H}} = < T^{-\frac{1}{2}}(L(x)), z >_{\mathcal{H}} \quad \forall\, z \in \mathcal{H}.$$

Тогда имеет место цепочка равенств

$$\mathcal{T}^{-\frac{1}{2}}((\mathcal{T}+Q)(x)) = T^{-\frac{1}{2}}(L(x)) = \mathcal{T}^{-\frac{1}{2}}(L(x)),$$

из которой в силу инъективности оператора $\mathcal{T}^{-\frac{1}{2}}$ следует, что

$$(\mathcal{T}+Q)(x) = L(x) \in \mathcal{H}.$$

Тогда, согласно определению оператора $\mathcal{T} \widetilde{+} Q$,

$$x \in D(\mathcal{T} \widetilde{+} Q) \text{ и } (\mathcal{T} \widetilde{+} Q)(x) = L(x).$$

В силу произвольности выбора $x \in D(L)$ этим доказано, что $L \subset \mathcal{T} \widetilde{+} Q$.

Таким образом, доказано совпадение операторов $\mathcal{T} \widetilde{+} Q$ и L, из чего, в частности, следует секториальность оператора $\mathcal{T} \widetilde{+} Q$.

Докажем теперь вторую часть утверждения теоремы. Пусть оператор Q является симметрическим относительно $< \cdot, \cdot >_D$. Тогда определённый всюду на $\mathcal{H}_1$ оператор $\mathcal{T} + Q \colon \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_{-1}$ также является симметрическим относительно $< \cdot, \cdot >_D$ и, следовательно, самосопряжённым в смысле определения 3.1.5. Применив же к квадратичной форме $t+q \colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ и ассоциированному с ней оператору $L = T \widetilde{+} Q \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ классическое утверждение [9; теорема VI.2.6], получаем, что оператор $\mathcal{T} \widetilde{+} Q$ является самосопряжённым относительно $< \cdot, \cdot >_{\mathcal{H}}$ и полуограниченным снизу относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

Теорема 3.1.2 доказана.

Далее нам потребуется несколько вспомогательных утверждений, проясняющих связь понятия $\mathcal{T}-$подчинённости операторов с их непрерывностью и компактностью.

Утверждение 3.1.3. *Определённый всюду на $\mathcal{H}_1$ ограниченный линейный оператор*

$$Q\colon (\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}) \longrightarrow (\mathcal{H}_{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}})$$

является $\mathcal{T}-$ подчинённым с $\mathcal{T}-$гранью $\alpha_Q \leqslant \|Q\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_{-1})}$.

Доказательство. Для произвольного $x \in \mathcal{H}_1$ имеем

$$|< Q(x), x >_D| \leqslant \|Q(x)\|_{\mathcal{H}_{-1}} \|x\|_{\mathcal{H}_1} \leqslant \|Q\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_{-1})} < \mathcal{T}(x), x >_D,$$

то есть для оператора Q оценка из определения $\mathcal{T}-$подчинённости выполняется для $\alpha = \|Q\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_{-1})}$ и $\beta(\alpha) = 0$.

Таким образом, оператор $Q\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$ является $\mathcal{T}-$подчинённым с $\mathcal{T}-$гранью

$$\alpha_Q \leqslant \|Q\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_{-1})}.$$

Утверждение 3.1.3 доказано.

Из утверждения 3.1.3 нетрудно получить следующий результат.

Следствие 3.1.2. *Пусть определённый всюду на $\mathcal{H}_1$ линейный оператор*

$$Q_0\colon (\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}) \longrightarrow (\mathcal{H}_{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}})$$

является ограниченным, а линейный оператор $Q_1\colon \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_{-1}$ с областью определения $D(Q_1) \subset \mathcal{H}_1$ является $\mathcal{T}-$подчинённым в смысле форм с $\mathcal{T}-$гранью α_{Q_1}, то есть для произвольного числа $\alpha_0 > \alpha_{Q_1}$ найдётся такое число $\beta(\alpha_0) \geqslant 0$, что справедлива оценка

$$|< Q_1(x), x >_D| \;\leqslant\; \alpha_0 < \mathcal{T}(x), x >_D + \beta(\alpha_0)\, \|x\|^2_{\mathcal{H}} \quad \forall\, x \in D(Q_1).$$

Тогда для любого числа $\alpha \geqslant \alpha_0$ справедливо неравенство

$$|< (Q_0+Q_1)(x), x >_D| \leqslant (\alpha + \|Q_0\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_{-1})}) < \mathcal{T}(x), x >_D + \beta(\alpha_0)\, \|x\|^2_{\mathcal{H}} \quad \forall x \in D(Q_1)$$

и оператор $Q \overset{def}{=} Q_0 + Q_1$, чья область определения совпадает с $D(Q_1)$, является $\mathcal{T}-$подчиненным с $\mathcal{T}-$гранью $\alpha_Q \leqslant \|Q_0\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_{-1})} + \alpha_{Q_1}$.

Утверждение 3.1.4. *Пусть ограниченный линейный оператор*

$$Q\colon (\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}) \longrightarrow (\mathcal{H}_{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}}),$$

определённый всюду на $\mathcal{H}_1$, конечномерен. Тогда Q является $\mathcal{T}-$подчинённым с $\mathcal{T}-$гранью $\alpha_Q = 0$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$.

Пусть $e_1, \ldots, e_m -$ базис линейного подпространства $Im(Q)$, ортонормированный относительно скалярного произведения $< \cdot, \cdot >_{\mathcal{H}_{-1}}$. Тогда в силу плотности множества $\mathcal{H}$ в пространстве $(\mathcal{H}_{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}})$ найдутся векторы $\{h_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{H}$, такие, что

$$\|e_i - h_i\|_{\mathcal{H}_{-1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \;\; \forall\, i = \overline{1, m}.$$

Определим всюду на $\mathcal{H}_1$ оператор $Q_\varepsilon \colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$ с $Im(Q_\varepsilon) \subset \mathcal{H}$ следующим образом:

$$Q_\varepsilon(x) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^m < Q(x), e_k >_{\mathcal{H}_{-1}} \cdot h_k \quad \forall\, x \in \mathcal{H}_1.$$

Поскольку для произвольного $x \in \mathcal{H}_1$ справедлива цепочка неравенств

$$\sum_{k=1}^m | < Q(x), e_k >_{\mathcal{H}_{-1}} | \leqslant \sqrt{m} \left(\sum_{k=1}^m | < Q(x), e_k >_{\mathcal{H}_{-1}} |^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{m}\, \|Q(x)\|_{\mathcal{H}_{-1}} \leqslant \sqrt{m}\, \|Q\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_{-1})} \|x\|_{\mathcal{H}_1},$$

то

$$\|(Q - Q_\varepsilon)(x)\|_{\mathcal{H}_{-1}} \leqslant \sum_{k=1}^m | < Q(x), e_k >_{\mathcal{H}_{-1}} | \cdot \|e_k - h_k\|_{\mathcal{H}_{-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^m | < Q(x), e_k >_{\mathcal{H}_{-1}} | \leqslant \varepsilon\, \|Q\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_{-1})} \|x\|_{\mathcal{H}_1} \;\; \forall\, x \in \mathcal{H}_1,$$

откуда очевидным образом вытекает ограниченность определённого всюду на $\mathcal{H}_1$ оператора $Q - Q_\varepsilon \colon (\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}) \longrightarrow (\mathcal{H}_{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}})$ и неравенство

$$\|Q - Q_\varepsilon\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_{-1})} \leqslant \varepsilon\, \|Q\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_{-1})}.$$

Так как $Im(Q_\varepsilon) \subset \mathcal{H}$ и, следовательно,

$$< Q_\varepsilon(x), x >_D = < Q_\varepsilon(x), x >_{\mathcal{H}} \quad \forall\, x \in \mathcal{H}_1,$$

то для квадратичной формы, порождённой оператором Q_ε, справедлива оценка

$$| < Q_\varepsilon(x), x >_D | \leqslant \|Q_\varepsilon(x)\|_{\mathcal{H}}\, \|x\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|x\|_{\mathcal{H}} \cdot \sum_{k=1}^m | < Q(x), e_k >_{\mathcal{H}_{-1}} | \cdot \; \|h_k\|_{\mathcal{H}} \;\; \forall\, x \in \mathcal{H}_1.$$

Введя обозначение $C = \max\limits_{k=\overline{1,m}} \|h_k\|_{\mathcal{H}}$ и применяя полученную выше оценку для суммы $\sum\limits_{k=1}^m | < Q(x), e_k >_{\mathcal{H}_{-1}} |$, отсюда получаем, что

$$| < Q_\varepsilon(x), x >_D | \leqslant C\, \|x\|_{\mathcal{H}} \sum_{k=1}^m | < Q(x), e_k >_{\mathcal{H}_{-1}} | \leqslant$$

$$\leqslant C\sqrt{m}\,\|Q\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_{-1})}\,\|x\|_{\mathcal{H}}\,\|x\|_{\mathcal{H}_1} = 2\,C_1\,\|x\|_{\mathcal{H}}\,\|x\|_{\mathcal{H}_1}\quad \forall\, x\in\mathcal{H}_1,$$

где

$$C_1 = \frac{C\sqrt{m}\,\|Q\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_{-1})}}{2}.$$

Применяя неравенство $2\,ab \leqslant a^2+b^2$ для $a=\varepsilon\|x\|_{\mathcal{H}_1}$ и $b=\frac{1}{\varepsilon}\|x\|_{\mathcal{H}}$, получаем, что для произвольного $x\in\mathcal{H}_1 = D(Q_\varepsilon)$ имеем

$$|<Q_\varepsilon(x),x>_D| \leqslant C_1\left((\varepsilon\|x\|_{\mathcal{H}_1})^2+\left(\frac{1}{\varepsilon}\|x\|_{\mathcal{H}}\right)^2\right) = C_1\varepsilon^2 <\mathcal{T}(x),x>_D + \frac{C_1}{\varepsilon^2}<x,x>_{\mathcal{H}}.$$

Таким образом, оператор $Q_\varepsilon\colon \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_{-1}$ является $\mathcal{T}-$подчинённым с $\mathcal{T}-$гранью $\alpha_{Q_\varepsilon}\leqslant C_1\varepsilon^2$, а оператор $Q-Q_\varepsilon\colon (\mathcal{H}_1,\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1})\longrightarrow(\mathcal{H}_{-1},\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}})$ ограничен, причём

$$\|Q-Q_\varepsilon\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_{-1})}\leqslant \varepsilon\,\|Q\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_{-1})}.$$

Применяя следствие 3.1.2 для оператора $Q=(Q-Q_\varepsilon)+Q_\varepsilon$, получаем, что оператор Q является $\mathcal{T}-$подчинённым с $\mathcal{T}-$гранью

$$\alpha_Q \leqslant C_1\varepsilon^2+\varepsilon\,\|Q\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_{-1})}.$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon>0$, из этой оценки следует, что $\mathcal{T}-$грань оператора Q равна 0.

Утверждение 3.1.4 доказано.

Следствие 3.1.3. *Пусть определёный всюду на $\mathcal{H}_1$ линейный оператор*

$$Q\colon (\mathcal{H}_1,\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1})\longrightarrow(\mathcal{H}_{-1},\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}})$$

является компактным. Тогда он $\mathcal{T}-$подчинён с $\mathcal{T}-$гранью $\alpha_Q=0$.

Доказательство. Фиксируем произвольное число $\varepsilon>0$. Так как оператор Q является компактным, то существует определённый всюду на $\mathcal{H}_1$ конечномерный линейный оператор $Q_\varepsilon\colon \mathcal{H}_1\longrightarrow\mathcal{H}_{-1}$, такой что

$$\|Q-Q_\varepsilon\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_{-1})}\leqslant\varepsilon.$$

Согласно утверждению 3.1.4 имеет место $\mathcal{T}-$подчинённость оператора Q_ε с $\mathcal{T}-$гранью $\alpha_{Q_\varepsilon}=0$.

Тогда, применяя следствие 3.1.2 для оператора $Q=(Q-Q_\varepsilon)+Q_\varepsilon$, получаем, что Q является $\mathcal{T}-$подчинённым и для его $\mathcal{T}-$грани α_Q выполняется оценка

$$\alpha_Q\leqslant\alpha_{Q_\varepsilon}+\|Q-Q_\varepsilon\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_{-1})}\leqslant\varepsilon.$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon>0$ из этого неравенства следует, что $\alpha_Q=0$.

Следствие 3.1.3 доказано.

Далее для двух линейных операторов $A\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$ и $B\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$ с областями определения $D(A) \subset \mathcal{H}_1$ и $D(B) \subset \mathcal{H}_1$ соответственно будем через $A \widetilde{+} B\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ обозначать сужение оператора $A + B\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$ на множество

$$D(A \widetilde{+} B) = \{x \in D(A) \cap D(B) \mid (A+B)(x) \in \mathcal{H}\}.$$

Перед тем, как исследовать вопрос о резольвентной сходимости последовательности операторов $\mathcal{T} \widetilde{+} Q_n\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ к оператору $\mathcal{T} \widetilde{+} Q\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ при некоторых дополнительных условиях, наложенных на потенциалы $Q_n\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$ и $Q\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$, приведём определение равномерной резольвентной сходимости операторов.

Напомним, что для банахова пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ через $Cl_d(X)$ мы обозначаем множество всех замкнутых относительно $\|\cdot\|_X$ линейных операторов $A\colon X \to X$ с плотной в $(X, \|\cdot\|_X)$ областью определения. Для линейного же оператора $A\colon X \to X$ с областью определения $D(A)$, плотной в $(X, \|\cdot\|_X)$, через $\rho(A)$ обозначается резольвентное множество оператора A, а через $\sigma(A)$ – его спектр.

Определение 3.1.11. *Пусть X – банахово пространство и $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Cl_d(X)$. Тогда будем говорить, что последовательность операторов A_n при $n \to \infty$ сходится к оператору $A \in Cl_d(X)$ в смысле равномерной резольвентной сходимости, если существует $\zeta \in \mathbb{C}$, такое, что для некоторого натурального числа $N_0 \in \mathbb{N}$*

$$\zeta \in \rho(A) \cap \rho(A_n) \ \ \forall\, n > N_0$$

и

$$(A_n - \zeta \cdot Id_X)^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{B}(X)} (A - \zeta \cdot Id_X)^{-1}.$$

В этом случае будем писать $A_n \overset{R}{\Longrightarrow} A$.

Теорема 3.1.3. *Пусть даны определённые всюду на $\mathcal{H}_1$ ограниченные линейные операторы*

$$Q_n\colon (\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}) \to (\mathcal{H}_{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}}), \ \ n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\},$$

и оператор Q_0 является $\mathcal{T}$–подчинённым с $\mathcal{T}$–гранью $\alpha_{Q_0} < 1$. Тогда из сходимости

$$Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_{-1})} Q_0$$

следует равномерная резольвентная сходимость последовательности линейных операторов $\mathcal{T} \widetilde{+} Q_n\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ к линейному оператору $\mathcal{T} \widetilde{+} Q_0\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ в пространстве $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$.

Доказательство. Так как оператор $Q_0\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$ является $\mathcal{T}$–подчинённым с $\mathcal{T}$–гранью $\alpha_{Q_0} < 1$, то для $\alpha_0 \overset{def}{=} (\alpha_{Q_0} + 1)/2$ найдётся такое число $\beta(\alpha_0) \geqslant 0$, что

$$| < Q_0(x), x >_D | \leqslant \alpha_0 \cdot < \mathcal{T}(x), x >_D + \beta(\alpha_0) \cdot < x, x >_{\mathcal{H}} \ \ \forall\, x \in D(Q_0) = \mathcal{H}_1.$$

Поскольку $\alpha_0 < 1$ и Q_n сходится к Q_0 в $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_{-1})$, то для некоторого натурального числа $N_0 \in \mathbb{N}$ имеем, что

$$\|Q_n - Q_0\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_{-1})} < \frac{1-\alpha_0}{2} \qquad \forall\, n > N_0.$$

Тогда согласно следствию 3.1.2 для всех натуральных чисел $n > N_0$ справедлива равномерная по n оценка

$$| < Q_n(x), x >_D | \leqslant (\alpha_0 + \|Q_n - Q_0\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_{-1})}) \ < \mathcal{T}(x), x >_D + \beta(\alpha_0)\, \|x\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_1 \ < \mathcal{T}(x), x >_D + \beta(\alpha_0)\, \|x\|^2_{\mathcal{H}} \quad \forall\, x \in \mathcal{H}_1,$$

где $\alpha_1 \stackrel{def}{=} (1+\alpha_0)/2 < 1$.

Заметим, что определённый на $\mathcal{H}_1$ ограниченный линейный оператор

$$J \colon (\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}) \to (\mathcal{H}_{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}}),\ J(x) = Id_{\mathcal{H}_1}(x) = x \ \ \forall\, x \in \mathcal{H}_1,$$

осуществляет естественное вложение пространства $\mathcal{H}_1$ в пространство $\mathcal{H}_{-1}$.

Фиксируем теперь произвольное действительное число $\rho \in (-\infty, -\beta(\alpha_0))$. Докажем сначала, что для $n = 0$ и $n > N_0$ операторы

$$\mathcal{T} + Q_n - \rho \cdot J \colon \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_{-1}$$

имеют ограниченные обратные $(\mathcal{T} + Q_n - \rho \cdot J)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1}, \mathcal{H}_1)$.

Для этого рассмотрим определённые всюду на $\mathcal{H}$ линейные операторы

$$Z_n \stackrel{def}{=} \mathcal{T}^{-\frac{1}{2}} \circ (\mathcal{T} + Q_n - \rho \cdot J) \circ T^{-\frac{1}{2}} \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Учитывая, что $\mathcal{T}^{-\frac{1}{2}} \circ \mathcal{T} = T^{\frac{1}{2}}$, легко видеть, что для произвольного числа $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливо соотношение $Z_n = Id_{\mathcal{H}} + K_n - \rho \cdot T^{-1}$, где

$$K_n \stackrel{def}{=} \mathcal{T}^{-\frac{1}{2}} \circ Q_n \circ T^{-\frac{1}{2}} \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}.$$

Отметим, что все операторы $Id_{\mathcal{H}},\ K_n, n \in \mathbb{Z}_+$, и T^{-1} определены всюду на $\mathcal{H}$ и ограничены относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, и, следовательно,

$$Z_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \ \ \forall\, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Заметим также, что из равенства $Z_n = Id_{\mathcal{H}} + K_n - \rho \cdot T^{-1}$ следует, что

$$Z_n - Z_m = K_n - K_m \ \ \forall\, m, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Фиксируем произвольное натуральное число $m \in \mathcal{N}_0 \cup \{0\}$, где $\mathcal{N}_0 = \mathbb{N} \cap (N_0, +\infty)$. Чтобы доказать обратимость оператора Z_m и ограниченность обратного к нему оператора в пространстве $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$, достаточно установить, что числовой образ оператора Z_m отделён от 0 положительной константой. Для этого оценим снизу величину $Re(< Z_m(x), x >_{\mathcal{H}})$.

Из справедливости равенства

$$< K_m(x), x >_{\mathcal{H}} = < \mathcal{T}^{-\frac{1}{2}}(Q_m(T^{-\frac{1}{2}}(x))), x >_{\mathcal{H}} = < Q_m(T^{-\frac{1}{2}}(x)), T^{-\frac{1}{2}}(x) >_D \quad \forall\, x \in \mathcal{H},$$

и установленной выше равномерной по $n \in \mathcal{N}_0 \cup \{0\}$ оценки величин $| < Q_n(x), x >_D |$ следует, что

$$Re(< Z_m(x), x >_{\mathcal{H}}) = < x, x >_{\mathcal{H}} + Re(< K_m(x), x >_{\mathcal{H}}) - \rho < T^{-1}(x), x >_{\mathcal{H}} =$$

$$= < x, x >_{\mathcal{H}} + Re(< Q_m(T^{-\frac{1}{2}}(x)), T^{-\frac{1}{2}}(x) >_D) - \rho\ < T^{-\frac{1}{2}}(x), T^{-\frac{1}{2}}(x) >_{\mathcal{H}} \geqslant$$

$$\geqslant\ \|x\|^2_{\mathcal{H}} - \alpha_1 < \mathcal{T}(T^{-\frac{1}{2}}(x)), T^{-\frac{1}{2}}(x) >_D - \beta(\alpha_0) < T^{-\frac{1}{2}}(x), T^{-\frac{1}{2}}(x) >_{\mathcal{H}} - \rho\, \|x\|^2_{\mathcal{H}_{-1}} =$$

$$= \|x\|^2_{\mathcal{H}} - \alpha_1 \|T^{-\frac{1}{2}}(x)\|^2_{\mathcal{H}_1} - (\beta(\alpha_0)+\rho)\|x\|^2_{\mathcal{H}_{-1}} = (1-\alpha_1)\|x\|^2_{\mathcal{H}} - (\beta(\alpha_0)+\rho)\|x\|^2_{\mathcal{H}_{-1}} \ \ \forall x \in \mathcal{H}.$$

Так как $\beta(\alpha_0) + \rho < 0$, то отсюда следует, что

$$Re(< Z_m(x), x >_{\mathcal{H}}) \geqslant (1 - \alpha_1)\, \|x\|^2_{\mathcal{H}} \ \ \forall\, x \in \mathcal{H}.$$

Учитывая, что $\alpha_1 < 1$, мы таким образом получаем, что числовой образ оператора $Z_m \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то есть множество вида

$$\{< Z_m(x), x >_{\mathcal{H}} \ | \ x \in \mathcal{H},\ \|x\|_{\mathcal{H}} = 1\},$$

отделён от нуля, причём

$$| < Z_m(x), x >_{\mathcal{H}} | \geqslant (1 - \alpha_1)\, \|x\|^2_{\mathcal{H}} \ \ \forall\, x \in \mathcal{H}.$$

В силу того, что спектр ограниченного оператора лежит в замыкании его числового образа, имеем, что $0 \notin \sigma(Z_m)$ и, следовательно, оператор Z_m обратим в пространстве $\mathcal{H}$, причём $Z_m^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Более того, операторная норма обратного оператора Z_m^{-1} ограничена сверху константой $\frac{1}{1-\alpha_1}$, поскольку

$$\|Z_m(x)\|_{\mathcal{H}} \cdot \|x\|_{\mathcal{H}} \geqslant |< Z_m(x), x >_{\mathcal{H}}| \geqslant (1 - \alpha_1) \cdot \|x\|^2_{\mathcal{H}} \ \ \forall\, x \in \mathcal{H},$$

и, следовательно,

$$\|Z_m^{-1}(y)\|_{\mathcal{H}} \ \leqslant\ \frac{1}{1 - \alpha_1} \cdot \|y\|_{\mathcal{H}} \ \ \forall\, y \in \mathcal{H}.$$

Поскольку для произвольного числа $n \in \mathbb{Z}_+$ из равенства

$$Z_n = \mathcal{T}^{-\frac{1}{2}} \circ (\mathcal{T} + Q_n - \rho \cdot J) \circ T^{-\frac{1}{2}}$$

следует соотношение

$$\mathcal{T} + Q_n - \rho \cdot J = \ \mathcal{T}^{\frac{1}{2}} \circ Z_n \circ T^{\frac{1}{2}},$$

а операторы

$$T^{\frac{1}{2}} : (\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}) \to (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}) \ \text{ и } \ \mathcal{T}^{\frac{1}{2}} : (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}) \to (\mathcal{H}_{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}})$$

являются изометрическими изоморфизмами соответствующих пространств, то оператор $\mathcal{T}+Q_m-\rho\cdot J\colon \mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_{-1}$ является обратимым и $(\mathcal{T}+Q_m-\rho\cdot J)^{-1}\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1},\mathcal{H}_1)$, причём

$$\|(\mathcal{T}+Q_m-\rho\cdot J)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1},\mathcal{H}_1)}=\|Z_m^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}\leqslant\frac{1}{1-\alpha_1}\,.$$

Так как $T\,\widetilde{+}\,Q_m$ является сужением оператора $T+Q_m$ на область определения

$$D(\mathcal{T}\,\widetilde{+}\,Q_m)=\{x\in\mathcal{H}_1\mid(\mathcal{T}+Q_m)(x)\in\mathcal{H}\},$$

то оператор $\mathcal{T}\,\widetilde{+}\,Q_m-\rho\cdot Id_{\mathcal{H}}\colon\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ совпадает с сужением сюръективного оператора $\mathcal{T}+Q_m-\rho\cdot J\colon\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_{-1}$ на $D(\mathcal{T}\,\widetilde{+}\,Q_m)$ и, следовательно, отображает $D(\mathcal{T}\,\widetilde{+}\,Q_m)$ на всё множество $\mathcal{H}$. Отсюда нетрудно вывести, что сужение оператора

$$(\mathcal{T}+Q_m-\rho\cdot J)^{-1}\colon\mathcal{H}_{-1}\to\mathcal{H}_1$$

на пространство $\mathcal{H}$ является оператором, обратным к $\mathcal{T}\,\widetilde{+}\,Q_m-\rho\cdot Id_{\mathcal{H}}\colon\mathcal{H}\to\mathcal{H}$.

Заметим, что из справедливости непрерывных вложений $(\mathcal{H},\|\cdot\|_{\mathcal{H}})\subset(\mathcal{H}_{-1},\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}})$ и $(\mathcal{H}_1,\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1})\subset(\mathcal{H},\|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ следует, что для произвольного ограниченного оператора

$$A\colon(\mathcal{H}_{-1},\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}})\to(\mathcal{H}_1,\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1})$$

с областью определения, совпадающей со всем пространством $\mathcal{H}_{-1}$, его ограничение на $\mathcal{H}$ является ограниченным оператором в пространстве $(\mathcal{H},\|\cdot\|_{\mathcal{H}})$, причём

$$\|\,A|_{\mathcal{H}}\,\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}\leqslant C\,\|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1},\mathcal{H}_1)}\,,$$

где $C=\|Id_{\mathcal{H}_1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H})}\cdot\|Id_{\mathcal{H}}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}_{-1})}$.

В частности, для оператора $(\mathcal{T}+Q_m-\rho\cdot J)^{-1}\colon\mathcal{H}_{-1}\to\mathcal{H}_1$ и его ограничения $(\mathcal{T}+Q_m-\rho\cdot J)^{-1}\big|_{\mathcal{H}}=(\mathcal{T}\,\widetilde{+}\,Q_m-\rho\cdot Id_{\mathcal{H}})^{-1}$ справедлива оценка

$$\|(\mathcal{T}\,\widetilde{+}\,Q_m-\rho\cdot Id_{\mathcal{H}})^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}\leqslant C\,\|(\mathcal{T}+Q_m-\rho\cdot J)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1},\mathcal{H}_1)}\leqslant\frac{C}{1-\alpha_1}\,.\tag{3.6}$$

Таким образом, мы показали, что для произвольного числа $m\in\mathcal{N}_0\cup\{0\}$ оператор $\mathcal{T}\,\widetilde{+}\,Q_m-\rho\cdot Id_{\mathcal{H}}\colon\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ имеет ограниченный обратный, причём для норм операторов $(\mathcal{T}\,\widetilde{+}\,Q_m-\rho\cdot Id_{\mathcal{H}})^{-1}\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ имеет место равномерная по $m\in\mathcal{N}_0\cup\{0\}$ оценка (3.6).

Так как для произвольного числа $k\in\mathcal{N}_0\cup\{0\}$ имеют место равенства операторов

$$(\mathcal{T}+Q_k-\rho\cdot J)^{-1}=T^{-\frac{1}{2}}\circ Z_k^{-1}\circ\mathcal{T}^{-\frac{1}{2}}$$

и

$$Z_k^{-1}-Z_0^{-1}=Z_k^{-1}\circ(Z_0-Z_k)\circ Z_0^{-1}=Z_k^{-1}\circ(K_0-K_k)\circ Z_0^{-1},$$

то для произвольного натурального числа $n>N_0$ получаем, что

$$\|(\mathcal{T}\,\widetilde{+}\,Q_n-\rho\cdot Id_{\mathcal{H}})^{-1}-(\mathcal{T}\,\widetilde{+}\,Q_0-\rho\cdot Id_{\mathcal{H}})^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}\leqslant$$

$$\leqslant C\,\|(\mathcal{T}+Q_n-\rho J)^{-1}-(\mathcal{T}+Q_0-\rho J)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1},\mathcal{H}_1)} =$$

$$= C\,\|T^{-\frac{1}{2}}\circ(Z_n^{-1}-Z_0^{-1})\circ\mathcal{T}^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_{-1},\mathcal{H}_1)} = C\,\|Z_n^{-1}-Z_0^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} =$$

$$= C\,\|Z_n^{-1}\circ(K_0-K_n)\circ Z_0^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}\ \leqslant\ C_0\,\|K_0-K_n\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})},$$

где $C_0 = C/(1-\alpha_1)^2$.

Поскольку

$$\|K_0-K_n\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \|\mathcal{T}^{-\frac{1}{2}}\circ(Q_0-Q_n)\circ T^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \|Q_0-Q_n\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_{-1})}$$

и, согласно условиям теоремы, $\|Q_0-Q_n\|_{B(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_{-1})}\to 0$ при $n\to\infty$, то из полученной выше для произвольного натурального числа $n > N_0$ оценки

$$\|(\mathcal{T}\,\widetilde{+}\,Q_n-\rho\cdot Id_{\mathcal{H}})^{-1}-(\mathcal{T}\,\widetilde{+}\,Q_0-\rho\cdot Id_{\mathcal{H}})^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}\leqslant\ C_0\,\|K_0-K_n\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$$

следует равномерная резольвентная сходимость

$$\mathcal{T}\,\widetilde{+}\,Q_n \overset{R}{\Longrightarrow} \mathcal{T}\,\widetilde{+}\,Q.$$

Теорема 3.1.3 доказана.

Замечание 3.1.4. *Фактически при доказательстве теоремы 3.1.3 установлено, что если $Q\colon\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_{-1}$ — всюду на $\mathcal{H}_1$ определённый ограниченный линейный оператор и для некоторых чисел $\alpha<1$ и $\beta(\alpha)\geqslant 0$ выполнено неравенство*

$$|<Q(x),x>_D|\leqslant\alpha\cdot<\mathcal{T}(x),x>_D+\beta(\alpha)\cdot<x,x>_{\mathcal{H}}\quad\forall\,x\in\mathcal{H}_1,$$

то

$$(-\infty,-\beta(\alpha))\subset\rho(\mathcal{T}+Q)\subset\rho(\mathcal{T}\,\widetilde{+}\,Q).$$

Более того, также было установлено, что тогда для произвольного числа $\rho<-\beta(\alpha)$ справедливо соотношение

$$R_\rho(\mathcal{T}\,\widetilde{+}\,Q)\overset{def}{=}(\mathcal{T}\,\widetilde{+}\,Q-\rho\cdot Id_{\mathcal{H}})^{-1}=(\mathcal{T}+Q-\rho\cdot J)^{-1}\big|_{\mathcal{H}},$$

где $J\colon\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_{-1}$ — тождественное вложение $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$.

3.2. Периодические пространства бесселевых потенциалов и степени оператора Лапласа на $n-$мерном торе

В этом параграфе для $n-$мерного тора $\mathbb{T}^n$ введём пространства бесселевых потенциалов (также иногда называемые обобщёнными пространствами Соболева) $H_p^s(\mathbb{T}^n)$, $s\in\mathbb{R}, p>1$, и опишем их основные свойства. Кроме того, в этом параграфе исследуем действие в шкале пространств $H_2^s(\mathbb{T}^n)$ степеней оператора $-\Delta: \ \mathbb{H}_2^1(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{H}_2^{-1}(\mathbb{R}^n)$, где Δ есть продолжение классического оператора Лапласа Δ_{cl}, определённого на $C^2(\mathbb{T}^n)$.

Будем рассматривать $n-$мерный тор $\mathbb{T}^n \overset{def}{=} \underbrace{S_1 \times \ldots \times S_1}_{n}$, где $S_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Пространство всех комплекснозначных функций, заданных на торе $\mathbb{T}^n$, будем обозначать $F(\mathbb{T}^n)$, а пространство заданных на $\mathbb{R}^n$ $2\pi-$периодических (по каждой из своих n переменных) комплекснозначных функций будем обозначать как $F_\pi(\mathbb{R}^n)$.

С помощью отображения

$$\Pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n;\ \ (x_1, \ldots, x_n) \xrightarrow{\Pi} (e^{ix_1}, \ldots, e^{ix_n})$$

мы будем сопоставлять функции $f \in F(\mathbb{T}^n)$ функцию $f_\Pi \overset{def}{=} f \circ \Pi \in F_\pi(\mathbb{R}^n)$.

В дальнейшем для произвольного элемента $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ будем использовать следующие обозначения:

$$|\alpha|_1 = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|, \quad |\alpha| = \left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ оператор дифференцирования D^α на торе определяется с помощью операторов частного дифференцирования на $\mathbb{T}^n$, заданных как

$$\partial_i f(z) \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x_i} f_\Pi(x),$$

где $z \in \mathbb{T}^n$, а x – произвольный элемент $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условию $\Pi(x) = z$.

Для произвольного числа $m \in \mathbb{Z}_+$ множество всех функций $f\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$, таких, что

$$D^\alpha(f) \in C(\mathbb{T}^n)\ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\colon |\alpha|_1 \leqslant m,$$

будем обозначать через $C^m(\mathbb{T}^n)$. На $C^m(\mathbb{T}^n)$ стандартным образом вводится норма

$$\|f\|_{C^m(\mathbb{T}^n)} = \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n\colon |\alpha|_1 \leqslant m} \ \sup_{z \in \mathbb{T}^n} |(D^\alpha(f))(z)|.$$

Множество же всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций, заданных на $n-$мерном торе, наделённое счетной системой норм

$$\|\cdot\|_m \overset{def}{=} \|\cdot\|_{C^m(\mathbb{T}^n)},\ \ m \in \mathbb{Z}_+,$$

будем обозначать $D(\mathbb{T}^n)$. При отображении

$$P\colon F(\mathbb{T}^n) \to F_\pi(\mathbb{R}^n),\ \ f \xrightarrow{P} f_\Pi = f \circ \Pi,$$

образ пространства $D(\mathbb{T}^n)$ совпадает с множеством $C_\pi^\infty(\mathbb{R}^n)$ всех бесконечно дифференцируемых комплекснозначных $2\pi-$периодических функций на $\mathbb{R}^n$.

Пространство $D'(\mathbb{T}^n)$ определяется как пространство комплекснозначных линейных непрерывных функционалов на $D(\mathbb{T}^n)$. При этом $D'(\mathbb{T}^n)$ наделяется топологией слабой сходимости, которая задаётся системой полунорм $\|\cdot\|_f$, $f \in D(\mathbb{T}^n)$, где

$$\|u\|_f = |u(f)| \;\; \forall\, u \in D'(\mathbb{T}^n).$$

Сходимость $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{D'(\mathbb{T}^n)} u$ означает, что

$$u_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(f) \;\; \forall\, f \in D(\mathbb{T}^n).$$

Определим на торе $\mathbb{T}^n$ семейство функций $\Phi = \{f_k \mid k \in \mathbb{Z}^n\} \subset D(\mathbb{T}^n)$ следующим образом:

$$f_k(z) = \frac{z^k}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\,, \;\text{ где }\; z^k \stackrel{def}{=} z_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot z_n^{k_n} \;\text{ для } z = (z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{T}^n.$$

Будем рассматривать также семейство функций

$$\Phi_\pi = \{g_k \stackrel{def}{=} f_k \circ \Pi \mid k \in \mathbb{Z}^n\} \subset C_\pi^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Поскольку для произвольного мультииндекса $k \in \mathbb{Z}^n$ имеем, что

$$g_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\, e^{i<k,x>} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

то семейство функций Φ образует счётный ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^n)$.

Далее аналогично случаю $\mathbb{R}^n$ через $\mathbf{f}$ будем обозначать регулярный функционал из $D'(\mathbb{T}^n)$ с плотностью $f \in L_1(\mathbb{T}^n)$, а через $\mathbf{D}(\mathbb{T}^n)$ – множество всех регулярных функционалов из $D'(\mathbb{T}^n)$, плотность которых является функцией, принадлежащей $D(\mathbb{T}^n)$.

Замечание 3.2.1. *Согласно классическому факту (см.* [21; пункт 4.11.1]*) для произвольного $u \in D'(\mathbb{T}^n)$ справедливо равенство*

$$u \stackrel{D'(\mathbb{T}^n)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(u)\,\mathbf{f}_k,$$

где $c_k(u) = u(f_{-k})$. В частности, для $f \in L_2(\mathbb{T}^n)$ из разложения Фурье

$$f \stackrel{L_2(\mathbb{T}^n)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(f)\, f_k$$

следует, что

$$\mathbf{f} \stackrel{D'(\mathbb{T}^n)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(f)\,\mathbf{f}_k.$$

Отметим, что в этом случае для коэффициентов Фурье функции $f \in L_2(\mathbb{T}^n)$ справедливо соотношение

$$c_k(f) \stackrel{def}{=} < f, f_k >_{L_2(\mathbb{T}^n)} = \mathbf{f}(f_{-k}) \stackrel{def}{=} c_k(\mathbf{f}).$$

Аналогичным образом для функции $f \in F_\pi(\mathbb{R}^n)$, такой, что $f|_{[0,2\pi]^n} \in L_2([0,2\pi]^n)$, справедливо соотношение

$$\mathbf{f} \stackrel{S'(\mathbb{R}^n)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(f)\, \mathbf{g}_k,$$

где $c_k(f) = < f, g_k >_{L_2([0,2\pi]^n)}$.

Замечание 3.2.2. *Коэффициенты Фурье*

$$c_k(f) = < f, g_k >_{L_2([0,2\pi]^n)}$$

функции $f \in C_\pi^\infty(\mathbb{R}^n)$ убывают быстрее любой отрицательной степени $|k|$, то есть

$$\forall\, N \in \mathbb{N}\ \ \exists\, C_N > 0:\ |c_k(f)| \leqslant \frac{C_N}{1 + |k|^N}\ \ \forall\, k \in \mathbb{Z}^n.$$

Наоборот, если последовательность $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n} \subset \mathbb{C}$ убывает быстрее любой отрицательной степени $|k|$, то ряд $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k\, g_k$ является рядом Фурье некоторой функции $f \in C_\pi^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Поскольку скалярное произведение в $L_2(\mathbb{T}^n)$ определяется равенством

$$< \varphi, \psi >_{L_2(\mathbb{T}^n)} = < \varphi_\Pi, \psi_\Pi >_{L_2([0,2\pi]^n)}\ \ \ \forall\, \varphi,\ \psi \in L_2(\mathbb{T}^n),$$

то для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{T}^n)$ её коэффициенты Фурье относительно ортонормированной в $(L_2(\mathbb{T}^n), < \cdot, \cdot >_{L_2(\mathbb{T}^n)})$ системы функций $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ совпадают с коэффициентами Фурье функции f_Π относительно ортонормированной в $(L_2([0,2\pi]^n), < \cdot, \cdot >_{L_2([0,2\pi]^n)})$ системы функций $\{\, g_k|_{[0,2\pi]^n}\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$. Поэтому критерием принадлежности функции $f \in L_2(\mathbb{T}^n)$ множеству $D(\mathbb{T}^n)$ также является убывание последовательности её коэффициентов Фурье $c_k(f) = < f, f_k >_{L_2(\mathbb{T}^n)}$, $k \in \mathbb{Z}^n$, быстрее любой отрицательной степени $|k|$.

Из замечания 3.2.2 несложно вывести, что для произвольной функции $f \in D(\mathbb{T}^n)$ имеет место равенство

$$f \stackrel{D(\mathbb{T}^n)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(f)\, f_k,$$

где $c_k(f) = < f, f_k >_{L_2(\mathbb{T}^n)}$.

Напомним, что линейный оператор $J_s\colon S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$, введённый в определении 1.1.2, задаётся соотношением

$$J_s(u) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_s \cdot \mathcal{F}(u))\ \ \forall\, u \in S'(\mathbb{R}^n),$$

где $\varphi_s(x) = (1 + |x|^2)^{\frac{s}{2}}\ \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

Лемма 3.2.1. *Пусть $s \in \mathbb{R}$, $f \in C_\pi^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда найдётся функция $g \in C_\pi^\infty(\mathbb{R}^n)$, такая, что*

$$J_s(\mathbf{f}) \overset{S'(\mathbb{R}^n)}{=} \mathbf{g},$$

причём для коэффициентов Фурье функций f и g справедливо следующее соотношение:

$$c_k(g) = (1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}\, c_k(f) \ \ \forall\, k \in \mathbb{Z}^n.$$

Доказательство. Поскольку согласно замечанию 3.2.2 последовательность $c_k(f)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, коэффициентов Фурье функции $f \in C_\pi^\infty(\mathbb{R}^n)$ убывает быстрее любой отрицательной степени $|k|$, то числовая последовательность $(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}} \cdot c_k(f)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, также убывает быстрее любой отрицательной степени $|k|$. Следовательно, в силу того же замечания 3.2.2 существует такая функция $g \in C_\pi^\infty(\mathbb{R}^n)$, что для её коэффициентов Фурье справедливо соотношение

$$c_k(g) = (1+|k|^2)^{\frac{s}{2}} \cdot c_k(f).$$

Для $f \in C_\pi^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеем, что $\mathbf{f} \in S'(\mathbb{R}^n)$ и, значит, корректно определено действие оператора J_s на распределении $\mathbf{f}$. Поскольку $\mathbf{g} \in S'(\mathbb{R}^n)$, то для завершения доказательства остаётся показать, что

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi_s \cdot \mathcal{F}(\mathbf{f})) \overset{S'(\mathbb{R}^n)}{=} \mathbf{g}.$$

Это соотношение, в свою очередь, эквивалентно равенству

$$\varphi_s \cdot \mathcal{F}(\mathbf{f}) \overset{S'(\mathbb{R}^n)}{=} \mathcal{F}(\mathbf{g}).$$

Согласно замечанию 3.2.1 справедливо равенство

$$\mathbf{f} \overset{S'(\mathbb{R}^n)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(f)\, \mathbf{g}_k.$$

Поскольку

$$\mathcal{F}(\mathbf{g}_k)(\varphi) = \mathbf{g}_k(\mathcal{F}(\varphi)) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\,<k,x>} \cdot (\mathcal{F}(\varphi))(x)\, dx =$$

$$= (\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi)))(k) = \varphi(k) = \delta_k(\varphi) \ \ \forall\, \varphi \in S(\mathbb{R}^n),$$

то, учитывая непрерывность преобразования Фурье $\mathcal{F}$ в $S'(\mathbb{R}^n)$, получаем, что

$$\mathcal{F}(\mathbf{f}) \overset{S'(\mathbb{R}^n)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(f)\, \delta_k.$$

Так как оператор умножения на функцию φ_s также является непрерывным в $S'(\mathbb{R}^n)$, то

$$\varphi_s \cdot \mathcal{F}(\mathbf{f}) \overset{S'(\mathbb{R}^n)}{=} \varphi_s \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(f)\, \delta_k \overset{S'(\mathbb{R}^n)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}\, c_k(f)\, \delta_k.$$

С другой стороны, для функции $g \in C^\infty_\pi(\mathbb{R}^n)$ так же, как для $f \in C^\infty_\pi(\mathbb{R}^n)$, справедливо равенство

$$\mathcal{F}(\mathbf{g}) \overset{S'(\mathbb{R}^n)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(g)\, \delta_k \overset{S'(\mathbb{R}^n)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}\, c_k(f)\, \delta_k.$$

Таким образом, получаем справедливость доказываемого равенства

$$\varphi_s \cdot \mathcal{F}(\mathbf{f}) \overset{S'(\mathbb{R}^n)}{=} \mathcal{F}(\mathbf{g}).$$

Лемма 3.2.1 доказана.

Определение 3.2.1. *Пусть $s \in \mathbb{R}$. Тогда оператор $J_{s,\pi}\colon D(\mathbb{T}^n) \to D(\mathbb{T}^n)$ определяется соотношением*

$$J_{s,\pi}(f) \overset{D(\mathbb{T}^n)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(f)\, (1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}\, f_k \quad \forall\, f \in D(\mathbb{T}^n),$$

где $c_k(f) = < f, f_k >_{L_2(\mathbb{T}^n)}$.

Из замечания 3.2.2 следует, что в определении 3.2.1 для функции $f \in D(\mathbb{T}^n)$ последовательность её коэффициентов Фурье $c_k(f)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, убывает быстрее любой отрицательной степени $|k|$, и, следовательно, тем же свойством обладает и последовательность $c_k(f)\,(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}$, $k \in \mathbb{Z}^n$. Опять применяя замечание 3.2.2, отсюда получаем, что ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(f)\, (1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}\, f_k$$

действительно является рядом Фурье для некоторой функции из $D(\mathbb{T}^n)$, то есть действие оператора $J_{s,\pi}$ корректно определено в пространстве $D(\mathbb{T}^n)$.

Заметим также, что действие оператора $J_{s,\pi}\colon D(\mathbb{T}^n) \to D(\mathbb{T}^n)$ согласовано с действием оператора $J_s\colon S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$, так как для произвольной функции $f \in D(\mathbb{T}^n)$ имеем, что $h \overset{def}{=} f_\Pi \in C^\infty_\pi(\mathbb{R}^n)$ и согласно лемме 3.2.1 справедливо равенство

$$J_s(\mathbf{h}) \overset{S'(\mathbb{R}^n)}{=} \mathbf{g},$$

где $g \overset{def}{=} J_{s,\pi}(f) \circ \Pi$.

Определение 3.2.2. *Пусть $s \in \mathbb{R}$. Тогда оператор $J_{s,\pi}\colon D'(\mathbb{T}^n) \to D'(\mathbb{T}^n)$ определяется соотношением*

$$J_{s,\pi}(u) \overset{D'(\mathbb{T}^n)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(u)\, (1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}\, \mathbf{f}_k \quad \forall\, u \in D'(\mathbb{T}^n),$$

где $c_k(u) = u(f_{-k})$.

Так как

$$\mathbf{f}(f_{-k}) = < f, f_k >_{L_2(\mathbb{T}^n)} = c_k(f) \ \ \forall f \in L_2(\mathbb{T}^n),$$

то определения 3.2.1 и 3.2.2 согласованы в следующем смысле:

$$J_{s,\pi}(\mathbf{f}) \overset{D'(\mathbb{T}^n)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(f)(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}} \, \mathbf{f}_k \ \ \forall f \in D(\mathbb{T}^n).$$

В частности,

$$J_{s,\pi}(\mathbf{f}_k) \overset{D'(\mathbb{T}^n)}{=} (1+|k|^2)^{\frac{s}{2}} \, \mathbf{f}_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n,$$

то есть система распределений $\mathbf{f}_k$, $k \in \mathbb{Z}^n$, состоит из собственных функций оператора $J_{s,\pi} \colon D'(\mathbb{T}^n) \to D'(\mathbb{T}^n)$, отвечающих собственным значениям $\lambda_k = (1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}$, $k \in \mathbb{Z}^n$.

Замечание 3.2.3. *Пусть $u \in D'(\mathbb{T}^n)$ и $f \in D(\mathbb{T}^n)$. Тогда поскольку, как отмечалось выше, справедливо представление*

$$f \overset{D(\mathbb{T}^n)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} < f, f_k >_{L_2(\mathbb{T}^n)} \ f_k,$$

то

$$u(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(f) \, c_{-k}(u),$$

где $c_k(f) = < f, f_k >_{L_2(\mathbb{T}^n)}$ и $c_k(u) = u(f_{-k})$.

Лемма 3.2.2. *Пусть $u \in D'(\mathbb{T}^n)$, $f \in D(\mathbb{T}^n)$. Тогда справедливо равенство*

$$(J_{s,\pi}(u))(f) = u(J_{s,\pi}(f)) \ \ .$$

Доказательство. Пусть $u \in D'(\mathbb{T}^n)$, $f \in D(\mathbb{T}^n)$. Тогда

$$(J_{s,\pi}(u))(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(f) \, c_{-k}(J_{s,\pi}(u)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(f) \, (1+|k|^2)^{\frac{s}{2}} c_{-k}(u) =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(J_{s,\pi}(f)) \, c_{-k}(u) = u(J_{s,\pi}(f)).$$

Лемма 3.2.2 доказана.

Для того, чтобы дать определение пространства $H_p^s(\mathbb{T}^n)$ бесселевых потенциалов на торе $\mathbb{T}^n$, определим сначала пространство $H_p^0(\mathbb{T}^n)$, изоморфное пространству $L_p(\mathbb{T}^n)$.

Определение 3.2.3. *Для $p > 1$ определим пространство $H_p^0(\mathbb{T}^n)$ равенством*

$$H_p^0(\mathbb{T}^n) \overset{def}{=} \{\mathbf{f} \in D'(\mathbb{T}^n) \mid f \in L_p(\mathbb{T}^n)\}$$

и наделим его нормой

$$\|\mathbf{f}\|_{H_p^0(\mathbb{T}^n)} \overset{def}{=} \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^n)}.$$

Определение 3.2.4. *Пусть $s \in \mathbb{R}$, $p > 1$. Тогда определим пространство бесселевых потенциалов $H_p^s(\mathbb{T}^n)$ равенством*

$$H_p^s(\mathbb{T}^n) \overset{def}{=} \{u \in D'(\mathbb{T}^n) \mid J_{s,\pi}(u) \in H_p^0(\mathbb{T}^n)\}$$

и наделим его нормой

$$\|u\|_{H_p^s(\mathbb{T}^n)} \overset{def}{=} \|J_{s,\pi}(u)\|_{H_p^0(\mathbb{T}^n)}.$$

Заметим, что семейство операторов $J_{s,\pi}\colon D'(\mathbb{T}^n) \to D'(\mathbb{T}^n)$ обладает полугрупповым свойством, то есть

$$J_{s,\pi} \circ J_{t,\pi} = J_{s+t,\pi} = J_{t,\pi} \circ J_{s,\pi} \quad \forall\, s,\, t \in \mathbb{R},\, \forall\, p > 1.$$

Несложно видеть, что для произвольных чисел s, $\alpha \in \mathbb{R}$ и $p > 1$ отображение

$$J_{\alpha,\pi}|_{H_p^s(\mathbb{T}^n)} : (H_p^s(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_p^s(\mathbb{T}^n)}) \to (H_p^{s-\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_p^{s-\alpha}(\mathbb{T}^n)})$$

является изометрическим изоморфизмом.

В частности, для произвольного $s \in \mathbb{R}$ оператор

$$J_{-s,\pi}|_{H_p^0(\mathbb{T}^n)} : (H_p^0(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_p^0(\mathbb{T}^n)}) \to (H_p^s(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_p^s(\mathbb{T}^n)})$$

является изометрическим изоморфизмом соответствующих пространств. Поскольку множество $\mathbf{D}(\mathbb{T}^n)$ плотно вложено в $(H_p^0(\mathbb{T}^n),\ \|\cdot\|_{H_p^0(\mathbb{T}^n)})$ и, как несложно видеть из замечания 3.2.2 и согласованности определений 3.2.1 и 3.2.2, $J_{-s,\pi}(\mathbf{D}(\mathbb{T}^n)) \subset \mathbf{D}(\mathbb{T}^n)$, то отсюда следует, что $\mathbf{D}(\mathbb{T}^n)$ плотно вложено и в пространство $(H_p^s(\mathbb{T}^n),\ \|\cdot\|_{H_p^s(\mathbb{T}^n)})$.

Замечание 3.2.4. *Пусть $s \in \mathbb{R}$, $u \in D'(\mathbb{T}^n)$, причём*

$$u \overset{D'(\mathbb{T}^n)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(u)\, \mathbf{f}_k.$$

Тогда

$$u \in H_2^s(\mathbb{T}^n) \iff \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |c_k(u)|^2 (1 + |k|^2)^s < +\infty.$$

Также для произвольного $u \in H_2^s(\mathbb{T}^n)$ имеем

$$\|u\|_{H_2^s(\mathbb{T}^n)} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |c_k(u)|^2 (1 + |k|^2)^s \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Как и в случае пространств бесселевых потенциалов на $\mathbb{R}^n$, для периодических пространств бесселевых потенциалов имеет место двойственность между пространствами $H_p^s(\mathbb{T}^n)$ и $H_{p'}^{-s}(\mathbb{T}^n)$ для произвольных чисел $s \in \mathbb{R}$, $p > 1$. Действительно, для $s \in \mathbb{R}$, $p > 1$ можно ввести дуальное скалярное произведение

$$< \cdot, \cdot >_{s,\pi} \colon H_{p'}^{-s}(\mathbb{T}^n) \times H_p^s(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C},$$

определённое равенством

$$< u, v >_{s,\pi} = < J_{-s,\pi}(u), J_{s,\pi}(v) >_{0,\pi} \quad \forall\, u \in H_{p'}^{-s}(\mathbb{T}^n),\ \forall\, v \in H_p^s(\mathbb{T}^n),$$

где

$$< \mathbf{f}, \mathbf{g} >_{0,\pi} = \int\limits_{\mathbb{T}^n} f(x) \cdot \overline{g(x)}\, d\mu(x) \quad \forall\, f \in L_{p'}(\mathbb{T}^n),\ \forall\, g \in L_p(\mathbb{T}^n).$$

При этом очевидно, что справедлива оценка

$$|< u, v >_{s,\pi}| \leqslant \|u\|_{H_{p'}^{-s}(\mathbb{T}^n)} \|v\|_{H_p^s(\mathbb{T}^n)} \ \forall\, u \in H_{p'}^{-s}(\mathbb{T}^n),\ \forall\, v \in H_p^s(\mathbb{T}^n). \tag{3.7}$$

Из замечания 3.2.3 следует, что для произвольного $u \in H_{p'}^{-s}(\mathbb{T}^n)$ справедливо равенство

$$< u, \mathbf{f} >_{s,\pi} = u(\overline{f}) \ \forall\, f \in D(\mathbb{T}^n).$$

Учитывая это равенство, из оценки (3.7) получаем, что справедливо неравенство

$$|u(f)| \leqslant \|u\|_{H_{p'}^{-s}(\mathbb{T}^n)} \|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{T}^n)} \quad \forall\, u \in H_{p'}^{-s}(\mathbb{T}^n),\ \forall\, f \in D(\mathbb{T}^n).$$

Отсюда следует, что для произвольных чисел $s \in \mathbb{R},\ p > 1$ сходимость

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{H_p^s(\mathbb{T}^n)} u$$

влечёт слабую сходимость

$$u_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(f) \ \forall\, f \in D(\mathbb{T}^n).$$

Кроме того, если $u \in D'(\mathbb{T}^n)$ и для некоторой константы $C > 0$ справедлива оценка

$$|u(f)| \leqslant C\, \|\mathbf{f}\|_{H_p^s(\mathbb{T}^n)} \ \forall\, f \in D(\mathbb{T}^n),$$

то $u \in H_{p'}^{-s}(\mathbb{T}^n)$ и

$$\|u\|_{H_{p'}^{-s}(\mathbb{T}^n)} \leqslant C.$$

Так же, как и в случае $\mathbb{R}^n$, исходя из приведённых выше соотношений, легко показать, что для произвольных чисел $s \in \mathbb{R}$ и $p > 1$ линейное отображение

$$F_\pi \colon (H_{p'}^{-s}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_{p'}^{-s}(\mathbb{T}^n)}) \to ((H_p^s(\mathbb{T}^n))^{\overline{*}}, \|\cdot\|_{(H_p^s(\mathbb{T}^n))^{\overline{*}}}), \quad u \mapsto F_u,$$

где

$$F_u(v) = < u, v >_{s,\pi} \ \forall\, v \in H_p^s(\mathbb{T}^n),$$

является изометрическим изоморфизмом соответствующих пространств.

Из замечания 3.2.4 непосредственно следует, что имеет место непрерывное вложение

$$H_2^{s_1}(\mathbb{T}^n) \subset H_2^{s_2}(\mathbb{T}^n) \quad \forall\, s_1,\ s_2 \in \mathbb{R} \colon s_1 \geqslant s_2.$$

В частности, при $s \geqslant 0$ пространство $(H_2^s(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^s(\mathbb{T}^n)})$ непрерывно вложено в пространство $(H_2^0(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^0(\mathbb{T}^n)})$, изоморфное пространству $(L_2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{L_2(\mathbb{T}^n)})$. В дальнейшем мы также будем обозначать пространство $H_2^0(\mathbb{T}^n)$ через $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$. Поэтому для $s \geqslant 0$ можно корректно определить функциональное пространство $\mathbb{H}_2^s(\mathbb{T}^n)$, изоморфное пространству распределений $H_2^s(\mathbb{T}^n)$, следующим образом.

Определение 3.2.5. *Пусть $s \geqslant 0$. Тогда определим пространство*

$$\mathbb{H}_2^s(\mathbb{T}^n) \stackrel{def}{=} \{f \in L_2(\mathbb{T}^n) \mid \mathbf{f} \in H_2^s(\mathbb{T}^n)\},$$

на котором вводится норма $\|f\|_{\mathbb{H}_2^s(\mathbb{T}^n)} = \|\mathbf{f}\|_{H_2^s(\mathbb{T}^n)}$.

Определение 3.2.6. *Пусть $s \geqslant \alpha \geqslant 0$. Тогда на пространстве $\mathbb{H}_2^s(\mathbb{T}^n)$ естественным образом можно определить оператор*

$$\mathbb{J}_{\alpha,\pi} \colon \mathbb{H}_2^s(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{H}_2^{s-\alpha}(\mathbb{T}^n)$$

следующим образом:

$$\mathbb{J}_{\alpha,\pi}(f) = g, \quad \textit{где } \ \mathbf{g} = J_{\alpha,\pi}(\mathbf{f}).$$

Поскольку, как отмечалось выше, определения оператора $J_{\alpha,\pi}$ в пространствах $D(\mathbb{T}^n)$ и $D'(\mathbb{T}^n)$ согласованы, то при $s \geqslant \alpha \geqslant 0$ ограничение $\mathbb{J}_{\alpha,\pi}$ на множество $D(\mathbb{T}^n)$ совпадает с оператором $J_{\alpha,\pi} \colon D(\mathbb{T}^n) \to D(\mathbb{T}^n)$, причём оператор

$$\mathbb{J}_{\alpha,\pi} \colon (\mathbb{H}_2^s(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{\mathbb{H}_2^s(\mathbb{T}^n)}) \to (\mathbb{H}_2^{s-\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{\mathbb{H}_2^{s-\alpha}(\mathbb{T}^n)})$$

является изометрическим изоморфизмом соответствующих пространств.

Отметим также, что в условиях определения 3.2.6 для функций $f \in \mathbb{H}_2^s(\mathbb{T}^n)$ и $\mathbb{J}_{\alpha,\pi}(f) \in \mathbb{H}_2^{s-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ справедливо следующее соотношение, связывающее их коэффициенты Фурье относительно ортонормированной системы $\Phi = \{f_k \mid k \in \mathbb{Z}^n\} \subset L_2(\mathbb{T}^n)$:

$$c_k(\mathbb{J}_{\alpha,\pi}(f)) = (1 + |k|^2)^{\frac{\alpha}{2}}\, c_k(f) \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^n.$$

Заметим, что из отмеченной выше плотности множества $\mathbf{D}(\mathbb{T}^n)$ в пространстве $(H_p^s(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_p^s(\mathbb{T}^n)})$ при $s \in \mathbb{R},\ p > 1$ следует плотность множества $D(\mathbb{T}^n)$ в пространстве $(\mathbb{H}_2^s(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{\mathbb{H}_2^s(\mathbb{T}^n)})$ при $s \geqslant 0$.

Утверждение 3.2.1. *Пусть $s \geqslant 0$. Тогда оператор $\mathbb{J}_{s,\pi} \colon L_2(\mathbb{T}^n) \to L_2(\mathbb{T}^n)$ с областью определения $\mathbb{H}_2^s(\mathbb{T}^n)$ является самосопряжённым относительно $< \cdot,\cdot >_{L_2(\mathbb{T}^n)}$.*

Доказательство. Симметричность оператора $\mathbb{J}_{s,\pi}$ в пространстве $L_2(\mathbb{T}^n)$ относительно скалярного произведения $< \cdot,\cdot >_{L_2(\mathbb{T}^n)}$ тривиально следует из соотношения между коэффициентами Фурье

$$c_k(\mathbb{J}_{s,\pi}(f)) = (1 + |k|^2)^{\frac{s}{2}} \cdot c_k(f) \ \ \forall\, k \in \mathbb{Z}^n,\ \forall\, f \in \mathbb{H}_2^s(\mathbb{T}^n).$$

Поскольку же, как было отмечено выше, $\mathbb{J}_{s,\pi}(\mathbb{H}_2^s(\mathbb{T}^n)) = L_2(\mathbb{T}^n)$, то самосопряжённость оператора $\mathbb{J}_{s,\pi}$ в пространстве $(L_2(\mathbb{T}^n), < \cdot, \cdot >_{L_2(\mathbb{T}^n)})$ следует из теоремы о самосопряжённости симметрического оператора, образ которого совпадает со всем пространством (см. [30; Theorem 4.1.3]).

Утверждение 3.2.1 доказано.

Замечание 3.2.5. *Заметим, что при $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$: $s_1 > s_2$ непрерывное вложение*

$$H_2^{s_1}(\mathbb{T}^n) \subset H_2^{s_2}(\mathbb{T}^n)$$

является компактным, поскольку ограниченный линейный оператор

$$Id_{H_2^{s_1}(\mathbb{T}^n)} \colon (H_2^{s_1}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{s_1}(\mathbb{T}^n)}) \to (H_2^{s_2}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{s_2}(\mathbb{T}^n)})$$

представим в виде

$$Id_{H_2^{s_1}(\mathbb{T}^n)} = J_{-s_2}|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} \circ J_{s_2-s_1}|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} \circ J_{s_1}|_{H_2^{s_1}(\mathbb{T}^n)}\,,$$

где

$$J_{s_1}|_{H_2^{s_1}(\mathbb{T}^n)} \in \mathcal{B}(H_2^{s_1}(\mathbb{T}^n), \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)), \quad J_{-s_2}|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} \in \mathcal{B}(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), H_2^{s_2}(\mathbb{T}^n)),$$

а оператор

$$J_{s_2-s_1}|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} : \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$$

является компактным в пространстве $(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})$ в силу того, что система его собственных функций $\{\mathbf{f}_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ образует базис этого пространства, а последовательность собственных значений $\lambda_k = (1+|k|^2)^{-\frac{s_1-s_2}{2}}$ оператора $J_{s_2-s_1}|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}$ стремится к 0 при $|k| \to +\infty$.

Напомним теперь определение классического пространства Соболева на $n-$мерном торе.

Определение 3.2.7. *Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $p \geqslant 1$. Тогда классическое пространство Соболева $W_p^k(\mathbb{T}^n)$ определяется как*

$$W_p^k(\mathbb{T}^n) \stackrel{def}{=} \{f \in L_p(\mathbb{T}^n) \mid D^\alpha(f) \in L_p(\mathbb{T}^n) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n : \, |\alpha|_1 \leqslant k\},$$

а норма на пространстве $W_p^k(\mathbb{T}^n)$ задаётся равенством

$$\|f\|_{W_p^k(\mathbb{T}^n)} = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n : \, |\alpha|_1 \leqslant k} \| \, D^\alpha(f) \, \|_{L^p(\mathbb{T}^n)}\ .$$

Так же, как и в случае $\mathbb{R}^n$, для $n-$мерного тора $\mathbb{T}^n$ при $k \in \mathbb{Z}_+$ имеет место совпадение пространств $W_2^k(\mathbb{T}^n)$ и $\mathbb{H}_2^k(\mathbb{T}^n)$ с эквивалентностью соответствующих норм.

Введём теперь оператор Лапласа на торе $\mathbb{T}^n$ и приведём те его классические свойства, которые будем использовать в дальнейшем.

Определение 3.2.8. *Классическим оператором Лапласа Δ_{cl} на торе $\mathbb{T}^n$ будем называть линейный оператор $\Delta_{cl}\colon L_2(\mathbb{T}^n) \to L_2(\mathbb{T}^n)$ с областью определения*

$$D(\Delta_{cl}) \stackrel{def}{=} C^2(\mathbb{T}^n) \subset L_2(\mathbb{T}^n),$$

определённый для произвольной функции $f \in C^2(\mathbb{T}^n)$ равенством

$$(\Delta_{cl}(f))(z) = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j^2 f)(z) \ \ \forall\, z \in \mathbb{T}^n.$$

Замечание 3.2.6. *Согласно первому тождеству Грина на $n-$мерном торе для произвольных функций $f,\, g \in D(\Delta_{cl}) = C^2(\mathbb{T}^n)$ имеем*

$$< (-\Delta_{cl})(f), g >_{L_2(\mathbb{T}^n)} = \int\limits_{[0,2\pi]^n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_\pi(x) \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} g_\pi(x)} dx.$$

Из этого тождества непосредственно следует, что оператор

$$-\Delta_{cl}\colon L_2(\mathbb{T}^n) \to L_2(\mathbb{T}^n)$$

с областью определения $D(-\Delta_{cl}) = C^2(\mathbb{T}^n)$ является неотрицательно определённым и симметрическим относительно скалярного произведения $< \cdot, \cdot >_{L_2(\mathbb{T}^n)}$.

Поскольку, как несложно видеть, для произвольной функции $f \in D(\mathbb{T}^n)$ имеем

$$(Id_{D(\mathbb{T}^n)} - \Delta_{cl})(f) \stackrel{D(\mathbb{T}^n)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(f)\, (1 + |k|^2)\, f_k,$$

где $c_k(f) = < f, f_k >_{L_2(\mathbb{T}^n)}$, то

$$(Id_{D(\mathbb{T}^n)} - \Delta_{cl})^m(f) \stackrel{D(\mathbb{T}^n)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(f)\, (1 + |k|^2)^m\, f_k = \mathbb{J}_{2m,\pi}(f) \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}_+,$$

то есть для произвольного числа $m \in \mathbb{Z}_+$ действующие в $L_2(\mathbb{T}^n)$ операторы $\mathbb{J}_{2m,\pi}$ и $(Id_{D(\mathbb{T}^n)} - \Delta_{cl})^m$ совпадают на множестве $D(\mathbb{T}^n)$.

Утверждение 3.2.2. *Оператор $-\Delta_{cl}\colon L_2(\mathbb{T}^n) \to L_2(\mathbb{T}^n)$ с областью определения $D(-\Delta_{cl}) = C^2(\mathbb{T}^n)$ имеет в пространстве $L_2(\mathbb{T}^n)$ самосопряженное замыкание $\mathbb{L}$ с областью определения*

$$D(\mathbb{L}) = W_2^2(\mathbb{T}^n) \subset L_2(\mathbb{T}^n).$$

Доказательство. Поскольку согласно замечанию 3.2.6 оператор

$$-\Delta_{cl}\colon L_2(\mathbb{T}^n) \to L_2(\mathbb{T}^n)$$

с областью определения $C^2(\mathbb{T}^n)$, плотной в $(L_2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{L_2(\mathbb{T}^n)})$, является симметрическим, то сопряжённый к нему оператор $(-\Delta_{cl})^*\colon L_2(\mathbb{T}^n) \to L_2(\mathbb{T}^n)$ является его замкнутым расширением. Поэтому линейный оператор $-\Delta_{cl}\colon L_2(\mathbb{T}^n) \to L_2(\mathbb{T}^n)$ является замыкаемым и, значит, корректно определено его замыкание

$$\mathbb{L}\colon L_2(\mathbb{T}^n) \to L_2(\mathbb{T}^n).$$

Рассмотрим оператор

$$\mathbb{J}_{2,\pi}\colon L_2(\mathbb{T}^n) \to L_2(\mathbb{T}^n)$$

с областью определения $D(\mathbb{J}_{2,\pi}) = W_2^2(\mathbb{T}^n) = \mathbb{H}_2^2(\mathbb{T}^n)$. Поскольку в силу утверждения 3.2.1 оператор $\mathbb{J}_{2,\pi}$ является самосопряжённым в $(L_2(\mathbb{T}^n), < \cdot, \cdot >_{L_2(\mathbb{T}^n)})$, то согласно [19; §VIII.2, с. 333] линейный оператор $\mathbb{J}_{2,\pi} - Id_{L_2(\mathbb{T}^n)}$ с областью определения $W_2^2(\mathbb{T}^n)$ также является самосопряжённым относительно $< \cdot, \cdot >_{L_2(\mathbb{T}^n)}$.

Докажем теперь, что действующие в пространстве $L_2(\mathbb{T}^n)$ линейные операторы $\mathbb{L}$ и $\mathbb{J}_{2,\pi} - Id_{L_2(\mathbb{T}^n)}$ совпадают.

Отметим, что оператор $-\Delta_{cl}\colon C^2(\mathbb{T}^n) \to L_2(\mathbb{T}^n)$ является ограниченным относительно норм $\|\cdot\|_{C^2(\mathbb{T}^n)}$ и $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{T}^n)}$, поскольку $(-\Delta_{cl})(C^2(\mathbb{T}^n)) \subset C(\mathbb{T}^n)$, оператор $-\Delta_{cl}$ ограничен относительно норм $\|\cdot\|_{C^2(\mathbb{T}^n)}$ и $\|\cdot\|_{C(\mathbb{T}^n)}$ и имеет место непрерывное вложение

$$(C(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{C(\mathbb{T}^n)}) \subset (L_2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{L_2(\mathbb{T}^n)}).$$

Оператор

$$(\mathbb{J}_{2,\pi} - Id_{L_2(\mathbb{T}^n)})\big|_{C^2(\mathbb{T}^n)} \colon C^2(\mathbb{T}^n) \to L_2(\mathbb{T}^n)$$

также ограничен относительно норм $\|\cdot\|_{C^2(\mathbb{T}^n)}$ и $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{T}^n)}$, так как он ограничен относительно норм $\|\cdot\|_{W_2^2(\mathbb{T}^n)}$ и $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{T}^n)}$ и имеет место непрерывное вложение

$$(C^2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{C^2(\mathbb{T}^n)}) \subset (W_2^2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{W_2^2(\mathbb{T}^n)}).$$

Поэтому из полученного выше соотношения

$$(-\Delta_{cl})(f) = (\mathbb{J}_{2,\pi} - Id_{L_2(\mathbb{T}^n)})(f) \ \ \forall\, f \in D(\mathbb{T}^n)$$

и плотности $D(\mathbb{T}^n)$ в пространстве $(C^2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{C^2(\mathbb{T}^n)})$ получаем, что действующие в $L_2(\mathbb{T}^n)$ операторы $-\Delta_{cl}$ и $\mathbb{J}_{2,\pi} - Id_{L_2(\mathbb{T}^n)}$ совпадают также и на множестве $C^2(\mathbb{T}^n)$. Таким образом, оператор $\mathbb{J}_{2,\pi} - Id_{L_2(\mathbb{T}^n)}$ с областью определения $W_2^2(\mathbb{R}^n)$ является замкнутым расширением оператора $-\Delta_{cl}$ и, следовательно,

$$\mathbb{L} \subset \mathbb{J}_{2,\pi} - Id_{L_2(\mathbb{T}^n)},$$

то есть оператор $\mathbb{J}_{2,\pi} - Id_{L_2(\mathbb{T}^n)}$ является продолжением оператора $\mathbb{L}$.

Докажем теперь, что

$$\mathbb{J}_{2,\pi} - Id_{L_2(\mathbb{T}^n)} \subset \mathbb{L}.$$

Пусть $f \in W_2^2(\mathbb{T}^n)$. Тогда в силу плотности множества $D(\mathbb{T}^n)$ в $(W_2^2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{W_2^2(\mathbb{T}^n)})$ существует последовательность $f_n \in D(\mathbb{T}^n), n \in \mathbb{N}$, такая, что

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{W_2^2(\mathbb{T}^n)} f.$$

Так как имеет место непрерывное вложение $(W_2^2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{W_2^2(\mathbb{T}^n)}) \subset (L_2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{L_2(\mathbb{T}^n)})$, то отсюда следует, что

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_2(\mathbb{T}^n)} f.$$

Поскольку заданный на $C^2(\mathbb{T}^n)$ оператор $-\Delta_{cl} \colon L_2(\mathbb{T}^n) \to L_2(\mathbb{T}^n)$ является дифференциальным оператором второго порядка, а сходимость в $W_2^2(\mathbb{T}^n)$ влечёт сходимость всех частных производных до второго порядка включительно в $L_2(\mathbb{T}^n)$, то последовательность $-\Delta_{cl}(f_n), n \in \mathbb{N}$, является фундаментальной относительно $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{T}^n)}$. Тогда в силу полноты пространства $L_2(\mathbb{T}^n)$ найдётся функция $f_0 \in L_2(\mathbb{T}^n)$, такая, что

$$\mathbb{L}(f_n) = -\Delta_{cl}(f_n) = (\mathbb{J}_{2,\pi} - Id_{L_2(\mathbb{T}^n)})(f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{L_2(\mathbb{T}^n)} f_0.$$

Поскольку операторы $\mathbb{L}$ и $\mathbb{J}_{2,\pi} - Id_{L_2(\mathbb{T}^n)}$ являются замкнутыми в $(L_2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{L_2(\mathbb{T}^n)})$, то отсюда следует, что $f \in D(\mathbb{L})$ и

$$\mathbb{L}(f) = f_0 = (\mathbb{J}_{2,\pi} - Id_{L_2(\mathbb{T}^n)})(f).$$

В силу произвольности выбора $f \in W_2^2(\mathbb{T}^n) = D(\mathbb{J}_{2,\pi} - Id_{L_2(\mathbb{T}^n)})$, этим доказано, что оператор $\mathbb{L}$ является продолжением $\mathbb{J}_{2,\pi} - Id_{L_2(\mathbb{T}^n)}$.

Таким образом, в итоге мы получаем, что действующий в $L_2(\mathbb{T}^n)$ линейный оператор $\mathbb{J}_{2,\pi} - Id_{L_2(\mathbb{T}^n)}$ с областью определения $W_2^2(\mathbb{T}^n)$ является замыканием определённого на $C^2(\mathbb{T}^n)$ оператора $-\Delta_{cl} \colon L_2(\mathbb{T}^n) \to L_2(\mathbb{T}^n)$.

Утверждение 3.2.2 доказано.

В дальнейшем будем обозначать через Δ_0 самосопряжённый относительно скалярного произведения $< \cdot, \cdot >_{L_2(\mathbb{T}^n)}$ линейный оператор $-\mathbb{L} \colon L_2(\mathbb{T}^n) \to L_2(\mathbb{T}^n)$ с областью определения $W_2^2(\mathbb{T}^n)$, являющийся замыканием определённого на $C^2(\mathbb{T}^n)$ оператора $\Delta_{cl} \colon L_2(\mathbb{T}^n) \to L_2(\mathbb{T}^n)$.

Замечание 3.2.7. *Отметим, что семейство функций* $\{f_k \mid k \in \mathbb{Z}^n\}$, *где*

$$f_k(z) = \frac{z^k}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}},\ z \in \mathbb{T}^n,$$

образующее, как указано выше, ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{T}^n)$, *состоит из собственных функций оператора* $-\Delta_0$ *с собственными значениями* $\lambda_k = |k|^2$.

Определение 3.2.9. *Пусть* $\alpha \geqslant 0$. *Тогда зададим линейный оператор*

$$(-\Delta_0)^\alpha \colon L_2(\mathbb{T}^n) \to L_2(\mathbb{T}^n)$$

с областью определения $D((-\Delta_0)^\alpha) = \mathbb{H}_2^{2\alpha}(\mathbb{T}^n)$ *следующим образом: для произвольной функции* $f \in \mathbb{H}_2^{2\alpha}(\mathbb{T}^n)$ *положим*

$$(-\Delta_0)^\alpha(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(f)\,|k|^{2\alpha}\, f_k,$$

где $c_k(f) = < f, f_k >_{L_2(\mathbb{T}^n)}\ \ \forall\, k \in \mathbb{Z}^n$.

Ясно, что система функций $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ образует ортонормированный относительно $< \cdot, \cdot >_{L_2(\mathbb{T}^n)}$ базис из собственных функций оператора $(-\Delta_0)^\alpha$ с собственными значениями $|k|^{2\alpha}$.

Также несложно видеть, что $(-\Delta_0)^\alpha$ является симметрическим и неотрицательно определённым линейным оператором в пространстве $(L_2(\mathbb{T}^n), < \cdot, \cdot >_{L_2(\mathbb{T}^n)})$.

Теперь для произвольного числа $\alpha \geqslant 0$ рассмотрим линейный оператор

$$T_0 \overset{def}{=} Id_{L_2(\mathbb{T}^n)} + (-\Delta_0)^\alpha\colon L_2(\mathbb{T}^n) \to L_2(\mathbb{T}^n).$$

С помощью оператора T_0 определим линейный оператор

$$T\colon H_2^0(\mathbb{T}^n) \to H_2^0(\mathbb{T}^n)$$

следующим образом:

$$T(\mathbf{f}) = \mathbf{g}\quad \forall\, f \in \mathbb{H}_2^{2\alpha}(\mathbb{T}^n),$$

где $g = T_0(f)$.

В дальнейшем будем использовать обозначение $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ для $H_2^0(\mathbb{T}^n)$, а также обозначать введённое выше скалярное произведение $< \cdot, \cdot >_{H_2^0(\mathbb{T}^n)}$ через $< \cdot, \cdot >_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}$.

Очевидно, что область определения $D(T)$ оператора $T\colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ совпадает с множеством $H_2^{2\alpha}(\mathbb{T}^n)$ и этот оператор может быть явным образом задан в терминах коэффициентов Фурье следующим образом:

$$T(\mathbf{f}) \overset{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(f)\,(1 + |k|^{2\alpha})\,\mathbf{f}_k\quad \forall\, f \in \mathbb{H}_2^{2\,\alpha}(\mathbb{T}^n), \tag{3.8}$$

где $c_k(f) = < f, f_k >_{L_2(\mathbb{T}^n)}\ \ \forall\, k \in \mathbb{Z}^n$.

Из соотношения (3.8) и замечания 3.2.4 получаем, что оператор $T\colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ сюръективен. Поскольку из того же соотношения следует симметричность оператора T относительно $< \cdot, \cdot >_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}$, то T является самосопряжённым оператором в пространстве $(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), < \cdot, \cdot >_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})$.

Также из (3.8) следует, что для произвольной функции $f \in \mathbb{H}_2^{2\alpha}(\mathbb{T}^n)$ справедливо равенство

$$< T(\mathbf{f}), \mathbf{f} >_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} = < \mathbf{f}, \mathbf{f} >_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c_k(f)|^2 |k|^{2\alpha}$$

и, значит, имеет место оценка

$$< T(\mathbf{f}), \mathbf{f} >_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} \geqslant\ < \mathbf{f}, \mathbf{f} >_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}\quad \forall\, f \in \mathbb{H}_2^{2\alpha}(\mathbb{T}^n).$$

Таким образом, оператор T удовлетворяет всем условиям, накладывавшимся в предыдущем параграфе на абстрактный самосопряжённый полуограниченный снизу линейный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (здесь в его роли выступает $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$). Поэтому, следуя абстрактной схеме, изложенной в первом параграфе, можно для произвольного числа $s \in \mathbb{R}$ корректно определить самосопряжённый оператор $T^s \colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ и построить шкалу линейных пространств $\mathcal{H}_s \overset{def}{=} D(T^{\frac{s}{2}})$, $s \geqslant 0$, на которых норма $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_s}$ вводится следующим образом:

$$\|u\|_{\mathcal{H}_s} \overset{def}{=} \|T^{\frac{s}{2}}(u)\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} \;\; \forall\, u \in \mathcal{H}_s.$$

При этом при $s \geqslant 0$ линейный оператор

$$T^{\frac{s}{2}} \colon (\mathcal{H}_s, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_s}) \to (\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})$$

является изометрическим изоморфизмом соответствующих пространств.

Отметим, что справедливо соотношение

$$T(\mathbf{f}_k) = (1 + |k|^{2\alpha})\, \mathbf{f}_k \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^n,$$

то есть для произвольного элемента $k \in \mathbb{Z}^n$ распределение $\mathbf{f}_k$ является собственным вектором для оператора T с собственным значением $\lambda_k \overset{def}{=} 1 + |k|^{2\alpha}$. Учитывая, что система распределений $\{\mathbf{f}_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ образует ортонормированный базис пространства $(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), <\cdot,\cdot>_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})$, при $s \in \mathbb{R}$ для оператора $T^s \colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ с областью определения $\mathcal{H}_{2s}$ получаем следующее представление:

$$T^s(u) \overset{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(u)\, (1 + |k|^{2\alpha})^s\, \mathbf{f}_k \quad \forall\, u \in \mathcal{H}_{2s},$$

где $c_k(u) = < u, \mathbf{f}_k >_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}$.

Из общей теории, развитой в первом параграфе, также следует, что для произвольного числа $s \geqslant 0$ оператор $T^{-s} \in \mathcal{B}(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n))$ является обратным к оператору T^s в следующем смысле:

$$T^{-s} \circ T^s = Id_{\mathcal{H}_{2s}} \;\text{ и }\; T^s \circ T^{-s} = Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}.$$

В частности, линейные операторы $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n))$ и T связаны соотношениями

$$T^{-1} \circ T = Id_{\mathcal{H}_2} \;\text{ и }\; T \circ T^{-1} = Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}.$$

Очевидно, что для $s \geqslant 0$ оператор $T^{-s} \colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ также может быть задан в терминах коэффициентов Фурье следующим образом:

$$T^{-s}(\mathbf{f}) \overset{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(f)\, (1 + |k|^{2\alpha})^{-s}\, \mathbf{f}_k \quad \forall\, f \in L_2(\mathbb{T}^n),$$

где $c_k(f) = < f, f_k >_{L_2(\mathbb{T}^n)}$. В частности, отсюда следует, что

$$T^{-s}(\mathbf{f}_k) = (1 + |k|^{2\alpha})^{-s} \cdot \mathbf{f}_k \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^n.$$

В силу замечания 3.2.2 из представления оператора T^s, $s \in \mathbb{R}$, в терминах коэффициентов Фурье следует, что

$$T^s(\mathbf{D}(\mathbb{T}^n)) = \mathbf{D}(\mathbb{T}^n) \;\; \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Поскольку $\mathbf{D}(\mathbb{T}^n)$ плотно в $(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})$, а для произвольного числа $s \geqslant 0$ оператор

$$T^{-\frac{s}{2}} \colon (\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}) \to (\mathcal{H}_s, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_s})$$

является изометрическим изоморфизмом, то отсюда следует плотность множества $\mathbf{D}(\mathbb{T}^n)$ в пространстве $(\mathcal{H}_s, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_s})$ при $s \geqslant 0$.

Теорема 3.2.1. *Пусть $\alpha \geqslant 0$ и $T \colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ – определяемый соотношением (3.8) линейный оператор. Тогда для произвольного числа $s \geqslant 0$ пространства $\mathcal{H}_s = D(T^{\frac{s}{2}})$ и $H_2^{\alpha s}(\mathbb{T}^n)$ совпадают, а нормы $\|\cdot\|_{H_2^{\alpha s}(\mathbb{T}^n)}$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_s}$ эквивалентны.*

Доказательство. Фиксируем произвольное число $s \geqslant 0$. Поскольку пространства $(\mathcal{H}_s, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_s})$ и $(H_2^{\alpha s}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{\alpha s}(\mathbb{T}^n)})$ являются полными и множество $\mathbf{D}(\mathbb{T}^n)$ плотно в каждом из них, то для доказательства теоремы достаточно доказать эквивалентность норм $\|\cdot\|_{H_2^{\alpha s}(\mathbb{T}^n)}$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_s}$ на $\mathbf{D}(\mathbb{T}^n)$. Отметим, что для произвольной функции $f \in D(\mathbb{T}^n)$ имеют место соотношения

$$T^{\frac{s}{2}}(\mathbf{f}) \overset{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(f)\,(1 + |k|^{2\alpha})^{\frac{s}{2}}\, \mathbf{f}_k, \;\text{ а }\; J_{\alpha s, \pi}(\mathbf{f}) \overset{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(f)\,(1 + |k|^2)^{\frac{\alpha s}{2}}\, \mathbf{f}_k,$$

где $c_k(f) = < f, f_k >_{L_2(\mathbb{T}^n)} \;\; \forall\, k \in \mathbb{Z}^n$, и, значит,

$$\|\mathbf{f}\|^2_{\mathcal{H}_s} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |c_k(f)|^2\,(1 + |k|^{2\alpha})^s \;\text{ и }\; \|\mathbf{f}\|^2_{H_2^{\alpha s}(\mathbb{T}^n)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |c_k(f)|^2\,(1 + |k|^2)^{\alpha s}.$$

Рассмотрим теперь функции

$$f_1 \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\; t \mapsto (1 + t^{2\alpha})^s \;\text{ и }\; f_2 \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\; t \mapsto (1 + t^2)^{\alpha s}.$$

Тогда эквивалентность норм $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_s}$ и $\|\cdot\|_{H_2^{\alpha s}(\mathbb{T}^n)}$ на множестве $\mathbf{D}(\mathbb{T}^n)$ следует из эквивалентности непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций f_1 и f_2 при $t \to +\infty$.

Теорема 3.2.1 доказана.

В частности, из теоремы 3.2.1 следует, что

$$\mathcal{H}_1 = H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \;\text{ и }\; \mathcal{H}_0 = \mathcal{H} = H_2^0(\mathbb{T}^n) = \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n).$$

Так же, как и в общем случае, будем обозначать через $\mathcal{H}_{-1}$ пополнение нормированного пространства $(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}})$, где

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}_{-1}} \overset{def}{=} \|T^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{f})\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} \quad \forall\, f \in L_2(\mathbb{T}^n).$$

Лемма 3.2.3. *Пусть $\alpha \geqslant 0$. Тогда пространства $\mathcal{H}_{-1}$ и $H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ совпадают, а нормы этих пространств $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}}$ и $\|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)}$ эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $f \in L_2(\mathbb{T}^n)$. Тогда имеет место разложение

$$\mathbf{f} \overset{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(f)\,\mathbf{f}_k,$$

где $c_k(f) = < f, f_k >_{L_2(\mathbb{T}^n)} \ \forall\, k \in \mathbb{Z}^n$.

Поскольку

$$T^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{f}) \overset{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+|k|^{2\alpha})^{-\frac{1}{2}}\,c_k(f)\,\mathbf{f}_k \quad \text{и} \quad J_{-\alpha,\pi}(\mathbf{f}) \overset{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+|k|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\,c_k(f)\,\mathbf{f}_k,$$

то справедливы равенства

$$\|\mathbf{f}\|^2_{\mathcal{H}_{-1}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+|k|^{2\alpha})^{-1}\,|c_k(f)|^2 \ \text{ и } \ \|\mathbf{f}\|^2_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+|k|^2)^{-\alpha}\,|c_k(f)|^2.$$

В силу произвольности выбора функции $f \in L_2(\mathbb{T}^n)$ отсюда следует, что на множестве $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}}$ и $\|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)}$ эквивалентны. Поскольку пространство $\mathcal{H}_{-1}$ определено как пополнение $\mathcal{H} = \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}}$, а пространство $(H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)})$ является банаховым, то можно считать, что пространство $\mathcal{H}_{-1}$ совпадает с пространством $H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$, причём нормы этих пространств эквивалентны.

Лемма 3.2.3 доказана.

Согласно общей схеме, изложенной в первом параграфе этой главы, определённый на $H_2^{2\alpha}(\mathbb{T}^n)$ ограниченный биективный линейный оператор

$$T\colon (H_2^{2\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)}) \to (\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)})$$

может быть продолжен до определённого на всём $H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)$ ограниченного линейного оператора

$$\mathcal{T}\colon (H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)}) \to (H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)}),$$

взаимнооднозначно отображающего $H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)$ на $H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$. Отметим, что при этом обратный оператор $\mathcal{T}^{-1}\colon H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n) \to H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)$ также является ограниченным относительно норм $\|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)}$ и $\|\cdot\|_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)}$.

Аналогичным образом продолжая взаимно обратные ограниченные биективные линейные операторы

$$T^{\frac{1}{2}}\colon (H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}) \to (\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)})$$

и

$$T^{-\frac{1}{2}}\colon (\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)}) \to (H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}),$$

получаем соответствующие ограниченные биективные линейные операторы

$$\mathcal{T}^{\frac{1}{2}}\colon (\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}) \to (H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)})$$

и

$$\mathcal{T}^{-\frac{1}{2}}\colon (H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)}) \to (\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}),$$

также являющиеся взаимно обратными.

3.3. Мультипликативные оценки и теоремы вложения для пространств мультипликаторов на $n-$мерном торе

Дадим теперь определение нормы на пространстве $H_p^s(\mathbb{T}^n)$, $s \geqslant 0$, $p > 1$, эквивалентной стандартной норме этого пространства. Это определение основано на переносе стандартной нормы пространства $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ на $n-$мерный тор $\mathbb{T}^n$ с помощью гладкого разбиения единицы на $\mathbb{T}^n$. Отметим, что этот подход используется для определения пространств бесселевых потенциалов на абстрактном компактном гладком многообразии (см., например, [61; §1.3.1]).

Будем обозначать через $Q_a(x)$ открытый $n-$мерный куб со стороной длины $a > 0$ и центром $x \in \mathbb{R}^n$.

Нетрудно видеть, что найдётся такое натуральное число $N \in \mathbb{N}$ и такие элементы $x_j \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1, N}$, что совокупность областей $\{\Pi(Q_2(x_j))\}_{j=1}^N$ образует открытое покрытие тора $\mathbb{T}^n$ и отображения

$$\Pi|_{Q_2(x_j)}\colon Q_2(x_j) \to \Pi(Q_2(x_j)),\ j = \overline{1, N},$$

являются диффеоморфизмами, причём существует система действительнозначных неотрицательных функций $\Psi = \{\psi_j\}_{j=1}^N \subset D(\mathbb{T}^n)$, удовлетворяющая условиям

$$supp(\psi_j) \subset \Pi(Q_2(x_j))\ \ \forall\, j = \overline{1, N} \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^N \psi_j(x) = 1\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Определим для произвольного числа $j = \overline{1, N}$ функцию $\psi_{j,\,0}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ следующим образом:

$$\psi_{j,\,0}(x) = \psi_j(\Pi(x))\ \ \forall\, x \in Q_2(x_j), \quad \psi_{j,\,0}(x) = 0\ \ \forall\, x \notin Q_2(x_j).$$

Очевидно, что $\psi_{j,\,0} \in D(\mathbb{R}^n)$ и $supp(\psi_{j,\,0}) \subset Q_2(x_j)$.

При $s \geqslant 0$ и $p > 1$ на линейном пространстве $\mathbf{D}(\mathbb{T}^n) = \{\mathbf{f} \in D'(\mathbb{T}^n) \mid f \in D(\mathbb{T}^n)\}$ можно определить норму $\|\cdot\|_{s,p,\Psi}$ с помощью равенства

$$\|\mathbf{f}\|_{s,p,\Psi} \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^N \|\psi_{j,0}\cdot f_\Pi\|_{\mathbb{H}_p^s(\mathbb{R}^n)}\ \ \forall\, f \in D(\mathbb{T}^n).$$

Можно показать, что на $\mathbf{D}(\mathbb{T}^n)$ эта норма является эквивалентной норме $\|\cdot\|_{H^s_p(\mathbb{T}^n)}$ и, следовательно, соответствующие различным рабиениям единицы Ψ_1 и Ψ_2 нормы $\|\cdot\|_{s,p,\Psi_1}$ и $\|\cdot\|_{s,p,\Psi_2}$ также эквивалентны на $\mathbf{D}(\mathbb{T}^n)$.

Заметим, что оператор умножения на функцию $f \in D(\mathbb{T}^n)$ ограничен в $\mathbf{D}(\mathbb{T}^n)$ относительно нормы $\|\cdot\|_{s,p,\Psi}$ и, следовательно, относительно нормы $\|\cdot\|_{H^s_p(\mathbb{T}^n)}$. Учитывая этот факт, несложно показать, что, если в определении нормы $\|\cdot\|_{s,p,\Psi}$ разбиение единицы Ψ заменить на семейство функций $\Psi^2 = \{\psi_1^2, \ldots, \psi_N^2\}$, то норма $\|\cdot\|_{s,p,\Psi^2}$, определённая равенством

$$\|\mathbf{f}\|_{s,p,\Psi^2} \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{N} \|\psi_{j,0}^2 \cdot f_\Pi\|_{\mathbb{H}^s_p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, f \in D(\mathbb{T}^n),$$

является эквивалентной на $\mathbf{D}(\mathbb{T}^n)$ нормам $\|\cdot\|_{s,p,\Psi}$ и $\|\cdot\|_{H^s_p(\mathbb{T}^n)}$.

Докажем теперь для пространств бесселевых потенциалов на торе $\mathbb{T}^n$ мультипликативные оценки, аналогичные мультипликативным оценкам, полученным в [60] для пространств $H^s_2(\mathbb{R}^n),\ s \geqslant 0$.

Лемма 3.3.1. *Пусть $s \geqslant t \geqslant 0$ и $s > \frac{n}{2}$. Тогда существует константа $C_{s,\,t} > 0$, такая, что справедливо мультипликативное неравенство*

$$\|\, f \cdot \mathbf{g} \,\|_{H^t_2(\mathbb{T}^n)} \leqslant C_{s,\,t}\, \|\, \mathbf{f} \,\|_{H^s_2(\mathbb{T}^n)}\, \|\, \mathbf{g} \,\|_{H^t_2(\mathbb{T}^n)} \quad \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{T}^n).$$

Доказательство. Пусть $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^N$ – введённое выше разбиение единицы на торе $\mathbb{T}^n$. Тогда в силу эквивалентности норм $\|\cdot\|_{H^t_2(\mathbb{T}^n)}$ и $\|\cdot\|_{t,2,\Psi^2}$ на $\mathbf{D}(\mathbb{T}^n)$ найдётся такая константа $C > 0$, что для произвольных функций $f,\, g \in D(\mathbb{T}^n)$ справедлива оценка

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H^t_2(\mathbb{T}^n)} \leqslant C\, \|f \cdot \mathbf{g}\|_{t,2,\Psi^2}.$$

Поскольку для произвольных функций $f,\, g \in D(\mathbb{T}^n)$ имеет место соотношение

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{t,2,\Psi^2} = \sum_{j=1}^{N} \|\psi_{j,0}^2 \cdot f_\Pi \cdot g_\Pi\|_{\mathbb{H}^t_2(\mathbb{R}^n)} = \sum_{j=1}^{N} \|(\psi_{j,0} \cdot f_\Pi) \cdot (\psi_{j,0} \cdot g_\Pi)\|_{\mathbb{H}^t_2(\mathbb{R}^n)},$$

то, применяя для функций $\psi_{j,0} \cdot f_\Pi \in D(\mathbb{R}^n)$ и $\psi_{j,0} \cdot g_\Pi \in D(\mathbb{R}^n)$ мультипликативную оценку из леммы 2.3.1 (в случае $p = q = 2$), получаем, что найдётся такая константа $C'_{s,\,t} > 0$, что справедлива оценка

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H^t_2(\mathbb{T}^n)} \leqslant C \cdot C'_{s,\,t} \sum_{j=1}^{N} \|\psi_{j,0} \cdot f_\Pi\|_{\mathbb{H}^s_2(\mathbb{R}^n)}\, \|\psi_{j,0} \cdot g_\Pi\|_{\mathbb{H}^t_2(\mathbb{R}^n)} \;\; \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{T}^n).$$

Так как из определения нормы $\|\cdot\|_{\gamma,2,\Psi}$ при $\gamma > 0$ следует, что для произвольного индекса $j = \overline{1, N}$ каждое из слагаемых в сумме выше допускает оценку

$$\|\psi_{j,0} \cdot f_\Pi\|_{\mathbb{H}^s_2(\mathbb{R}^n)} \cdot \|\psi_{j,0} \cdot g_\Pi\|_{\mathbb{H}^t_2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|\mathbf{f}\|_{s,2,\Psi}\, \|\mathbf{g}\|_{t,2,\Psi},$$

то в итоге для произвольных функций $f,\ g \in D(\mathbb{T}^n)$ мы получаем оценку

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H_2^t(\mathbb{T}^n)} \leqslant C_1 \, \|\mathbf{f}\|_{s,2,\Psi} \, \|\mathbf{g}\|_{t,2,\Psi},$$

где $C_1 = C \cdot C'_{s,\,t} \cdot N$.

В силу того, что для произвольного числа $\gamma \geqslant 0$ нормы $\|\cdot\|_{\gamma,2,\Psi}$ и $\|\cdot\|_{H_2^\gamma(\mathbb{T}^n)}$ эквивалентны на $\mathbf{D}(\mathbb{T}^n)$, отсюда следует, что существует такая константа $C_{s,\,t} > 0$, что

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H_2^t(\mathbb{T}^n)} \leqslant C_{s,\,t} \|\mathbf{f}\|_{H_2^s(\mathbb{T}^n)} \, \|\mathbf{g}\|_{H_2^t(\mathbb{T}^n)} \quad \forall\, f,\ g \in D(\mathbb{T}^n).$$

Лемма 3.3.1 доказана.

Лемма 3.3.2. *Пусть* $\frac{n}{2} \geqslant s \geqslant t \geqslant \varepsilon > 0$. *Тогда существует такая константа* $C_{s,\,t,\,\varepsilon} > 0$, *что*

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H^{t-\varepsilon}_{n/(n-s)}(\mathbb{T}^n)} \leqslant C_{s,\,t,\,\varepsilon} \, \|\mathbf{f}\|_{H_2^s(\mathbb{T}^n)} \, \|\mathbf{g}\|_{H_2^t(\mathbb{T}^n)} \ \ \forall\, f,\ g \in D(\mathbb{T}^n).$$

Доказательство. Пусть $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^N$ – введённое выше разбиение единицы на торе $\mathbb{T}^n$. Тогда в силу эквивалентности норм $\|\cdot\|_{H^{t-\varepsilon}_{n/(n-s)}(\mathbb{T}^n)}$ и $\|\cdot\|_{t-\varepsilon,\,n/(n-s),\,\Psi^2}$ на $\mathbf{D}(\mathbb{T}^n)$ найдётся такая константа $C > 0$, что для произвольных функций $h_1,\ h_2 \in D(\mathbb{T}^n)$ справедлива оценка

$$\|h_1 \cdot \mathbf{h}_2\|_{H^{t-\varepsilon}_{n/(n-s)}(\mathbb{T}^n)} \leqslant C \, \|h_1 \cdot \mathbf{h}_2\|_{t-\varepsilon,\,n/(n-s),\,\Psi^2}\,. \tag{3.9}$$

Отметим также, что из лемм 3 и 5 работы [60] непосредственно следует, что для некоторой константы $K_{s,\,t,\,\varepsilon} > 0$ справедлива следующая мультипликативная оценка:

$$\|f_0 \cdot \mathbf{g}_0\|_{H^{t-\varepsilon}_{n/(n-s)}(\mathbb{R}^n)} \leqslant K_{s,\,t,\,\varepsilon} \, \|\mathbf{f}_0\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)} \, \|\mathbf{g}_0\|_{H_2^t(\mathbb{R}^n)} \ \ \forall\, f_0,\ g_0 \in D(\mathbb{R}^n). \tag{3.10}$$

Фиксируем теперь произвольные функции $f,\ g \in D(\mathbb{T}^n)$. Из соотношения

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{t-\varepsilon,\,n/(n-s),\Psi^2} = \sum_{j=1}^N \|\psi_{j,0}^2 \cdot f_\Pi \cdot g_\Pi\|_{\mathbb{H}^{t-\varepsilon}_{n/(n-s)}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{j=1}^N \|(\psi_{j,0} \cdot f_\Pi) \cdot (\psi_{j,0} \cdot g_\Pi)\|_{\mathbb{H}^{t-\varepsilon}_{n/(n-s)}(\mathbb{R}^n)},$$

неравенства (3.9) и оценки (3.10), применённой к функциям $\psi_{j,0} \cdot f_\Pi$ и $\psi_{j,0} \cdot g_\Pi$, взятым в качестве f_0 и g_0 соответственно, следует, что справедлива оценка

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H^{t-\varepsilon}_{n/(n-s)}(\mathbb{T}^n)} \leqslant C \cdot K_{s,\,t,\,\varepsilon} \sum_{j=1}^N \|\psi_{j,0} \cdot f_\Pi\|_{\mathbb{H}_2^s(\mathbb{R}^n)} \, \|\psi_{j,0} \cdot g_\Pi\|_{\mathbb{H}_2^t(\mathbb{R}^n)}.$$

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям из доказательства леммы 3.3.1, отсюда несложно ввывести, что для некоторой константы $C_{s,\,t,\,\varepsilon} > 0$, не зависящей от выбора f и g, имеет место неравенство

$$\|f \cdot \mathbf{g}\|_{H^{t-\varepsilon}_{n/(n-s)}(\mathbb{T}^n)} \leqslant C_{s,\,t,\,\varepsilon} \, \|\mathbf{f}\|_{H_2^s(\mathbb{T}^n)} \|\mathbf{g}\|_{H_2^t(\mathbb{T}^n)},$$

что в силу произвольности выбора функций f и g и завершает доказательство леммы.

Лемма 3.3.2 доказана.

Теперь определим пространства мультипликаторов на торе $\mathbb{T}^n$, приведём их основные свойства и докажем для этих пространств аналоги теорем вложения, установленных в [60] для случая $\mathbb{R}^n$.

Определение 3.3.1. *Пусть $s,\, t \geqslant 0$. Будем говорить, что $u \in D'(\mathbb{T}^n)$ является мультипликатором из $H_2^s(\mathbb{T}^n)$ в $H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)$, если*

$$|u(f \cdot \overline{g})| \leqslant C\, \|\mathbf{f}\|_{H_2^s(\mathbb{T}^n)}\, \|\mathbf{g}\|_{H_2^t(\mathbb{T}^n)} \quad \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{T}^n).$$

Так же, как и в случае $\mathbb{R}^n$, множество $M_\pi[s,-t]$ всех мультипликаторов из $H_2^s(\mathbb{T}^n)$ в $H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)$ является линейным пространством, причем норма на этом пространстве может быть задана равенством

$$\|u\|_{M_\pi[s,-t]} \stackrel{def}{=} \inf\{C \in \mathbb{R}_+ |\ |u(f \cdot \overline{g})| \leqslant C\, \|\mathbf{f}\|_{H_2^s(\mathbb{T}^n)}\, \|\mathbf{g}\|_{H_2^t(\mathbb{T}^n)}\ \ \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{T}^n)\}.$$

Ясно, что для произвольных $s,\, t \geqslant 0$ пространства $M_\pi[s,-t]$ и $M_\pi[t,-s]$ совпадают, так как выполнение неравенства из определения 3.3.1 не зависит от перестановки функций f и g.

Поскольку при $\gamma \geqslant 0$ множество $\mathbf{D}(\mathbb{T}^n)$ плотно в пространстве $(H_2^\gamma(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^\gamma(\mathbb{T}^n)})$, то в условиях определения 3.3.1 принадлежность распределения $u \in D'(\mathbb{T}^n)$ пространству мультипликаторов $M_\pi[s,-t]$ фактически означает, что полуторалинейная форма

$$q_u \colon \mathbf{D}(\mathbb{T}^n) \times \mathbf{D}(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C},\ \ q_u(\mathbf{f},\mathbf{g}) \stackrel{def}{=} u(f \cdot \overline{g})\ \ \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{T}^n),$$

допускает непрерывное относительно норм $\|\cdot\|_{H_2^s(\mathbb{T}^n)}$ и $\|\cdot\|_{H_2^t(\mathbb{T}^n)}$ продолжение на $H_2^s(\mathbb{T}^n) \times H_2^t(\mathbb{T}^n)$. Получившуюся в результате полуторалинейную форму будем обозначать как $\widetilde{q_u} \colon H_2^s(\mathbb{T}^n) \times H_2^t(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$.

Если $u \in M_\pi[s,-t]$, то определён порождённый мультипликатором u ограниченный оператор $M_u \colon H_2^s(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)$, такой, что

$$< M_u(v), w >_{t,\pi} = \widetilde{q_u}(v,w) \quad \forall\, v \in H_2^s(\mathbb{T}^n),\ \forall\, w \in H_2^t(\mathbb{T}^n).$$

При этом нетрудно видеть, что

$$M_u(\mathbf{f}) = f \cdot u \quad \forall\, f \in D(\mathbb{T}^n)$$

и

$$\|u\|_{M_\pi[s,-t]} = \|M_u\|_{\mathcal{B}(H_2^s(\mathbb{T}^n), H_2^{-t}(\mathbb{T}^n))}.$$

Дадим теперь в случае $\max(s,t) > \frac{n}{2}$ описание пространства мультипликаторов $M_\pi[s,-t]$ в шкале пространств $H_r^\gamma(\mathbb{T}^n)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $r > 1$, аналогичное полученному в работе [60] описанию пространства $M[s,-t]$ в шкале пространств $H_{r,\,unif}^\gamma(\mathbb{R}^n)$.

Утверждение 3.3.1. *Пусть s, $t \geqslant 0$ и $\max(s,t) > \frac{n}{2}$. Тогда имеет место совпадение пространств*

$$M_\pi[s,-t] = H_2^{-\min(s,t)}(\mathbb{T}^n),$$

причём соответствующие нормы эквивалентны.

Доказательство. Поскольку, как было отмечено выше, $M_\pi[s,-t] = M_\pi[t,-s]$, то, без ограничения общности, достаточно рассмотреть лишь случай $s \geqslant t$ и для него доказать совпадение пространств $M_\pi[s,-t]$ и $H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)$ с эквивалентностью соответствующих норм.

Пусть $u \in H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)$. Поскольку для произвольного распределения $v \in H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)$ имеет место неравенство

$$|v(h)| \leqslant \|v\|_{H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)} \|\mathbf{h}\|_{H_2^t(\mathbb{T}^n)} \ \ \forall\, h \in D(\mathbb{T}^n),$$

то для произвольных функций f, $g \in D(\mathbb{T}^n)$ справедлива оценка

$$|u(f \cdot \overline{g})| \leqslant \|u\|_{H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)} \|f \cdot \mathbf{g_1}\|_{H_2^t(\mathbb{T}^n)},$$

где $g_1 = \overline{g} \in D(\mathbb{T}^n)$. В силу леммы 3.3.1 из этой оценки следует, что для некоторой константы $C_{s,t} > 0$ справедливо неравенство

$$|u(f \cdot \overline{g})| \leqslant C_{s,t} \|u\|_{H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)} \|\mathbf{f}\|_{H_2^s(\mathbb{T}^n)} \|\mathbf{g}\|_{H_2^t(\mathbb{T}^n)} \ \ \forall\, f,\, g \in D(\mathbb{T}^n).$$

Это неравенство означает, что $u \in M_\pi[s,-t]$ и

$$\|u\|_{M_\pi[s,-t]} \leqslant C_{s,t} \|u\|_{H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)},$$

откуда в силу произвольности выбора $u \in H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)$ и следует справедливость непрерывного вложения

$$H_2^{-t}(\mathbb{T}^n) \subset M_\pi[s,-t].$$

Теперь докажем обратное непрерывное вложение $M_\pi[s,-t] \subset H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)$.

Пусть $u \in M_\pi[s,-t]$. Поскольку тождественно равная единице на торе $\mathbb{T}^n$ функция E является бесконечно дифференцируемой, то имеем, что $E \in D(\mathbb{T}^n)$ и, следовательно, порождённый ею регулярный функционал $\mathbf{E}$ принадлежит пространству $H_2^s(\mathbb{T}^n)$. Поскольку $u \in M_\pi[s,-t]$, то $u = M_u(\mathbf{E}) \in H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)$ и

$$\|u\|_{H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)} \leqslant \|M_u\|_{\mathcal{B}(H_2^s(\mathbb{T}^n), H_2^{-t}(\mathbb{T}^n))} \|\mathbf{E}\|_{H_2^s(\mathbb{T}^n)} = C \|u\|_{M_\pi[s,-t]},$$

где $C = \|\mathbf{E}\|_{H_2^s(\mathbb{T}^n)}$.

В силу произвольности выбора $u \in M_\pi[s,-t]$ это и означает справедливость непрерывного вложения

$$M_\pi[s,-t] \subset H_2^{-t}(\mathbb{T}^n).$$

Утверждение 3.3.1 доказано.

Утверждение 3.3.2. *Пусть $s,\ t > 0,\ max(s,t) \leqslant \frac{n}{2}$. Тогда для произвольного числа $\varepsilon \in (0, \min(s,t)]$ справедливо непрерывное вложение*

$$H^{-\min(s,t)+\varepsilon}_{\frac{n}{\max(s,t)}}(\mathbb{T}^n) \subset M_\pi[s,-t].$$

Доказательство. Фиксируем произвольное число $\varepsilon \in (0, \min(s,t)]$.

Поскольку $M_\pi[s,-t] = M_\pi[t,-s]$, то достаточно рассмотреть только случай $s \geqslant t$ и доказать для этого случая справедливость непрерывного вложения

$$H^{-t+\varepsilon}_{\frac{n}{s}}(\mathbb{T}^n) \subset M_\pi[s,-t].$$

Пусть $u \in H^{-t+\varepsilon}_{\frac{n}{s}}(\mathbb{T}^n)$. Применяя справедливую для произвольных чисел $\gamma \in \mathbb{R}$ и $r > 1$ оценку

$$|v(h)| \leqslant \|v\|_{H^{-\gamma}_{r'}(\mathbb{T}^n)} \|\mathbf{h}\|_{H^{\gamma}_{r}(\mathbb{T}^n)} \ \ \forall\, v \in H^{-\gamma}_{r'}(\mathbb{T}^n),\ \forall\, h \in D(\mathbb{T}^n)$$

в случае, когда $\gamma = t - \varepsilon$ и $r = \frac{n}{n-s}$, а также используя мультипликативную оценку из леммы 3.3.2, получаем, что найдётся такая константа $C_{s,\,t,\,\varepsilon} > 0$, что для произвольных функций $f,\ g \in D(\mathbb{R}^n)$ имеет место оценка

$$|u(f\cdot\overline{g})| \ \leqslant\ \|u\|_{H^{-t+\varepsilon}_{\frac{n}{s}}(\mathbb{T}^n)} \|f\cdot\mathbf{g_1}\|_{H^{t-\varepsilon}_{\frac{n}{n-s}}(\mathbb{T}^n)} \leqslant C_{s,\,t,\,\varepsilon}\, \|u\|_{H^{-t+\varepsilon}_{\frac{n}{s}}(\mathbb{T}^n)} \|\mathbf{f}\|_{H^{s}_{2}(\mathbb{T}^n)}\, \|\mathbf{g}\|_{H^{t}_{2}(\mathbb{T}^n)},$$

где $g_1 = \overline{g} \in D(\mathbb{T}^n)$.

Из этой оценки следует, что $u \in M_\pi[s,-t]$, причём

$$\|u\|_{M_\pi[s,-t]} \leqslant C_{s,\,t,\,\varepsilon}\, \|u\|_{H^{-t+\varepsilon}_{\frac{n}{s}}(\mathbb{T}^n)},$$

что в силу произвольности выбора $u \in H^{-t+\varepsilon}_{\frac{n}{s}}(\mathbb{T}^n)$ и означает справедливость непрерывного вложения

$$H^{-t+\varepsilon}_{\frac{n}{s}}(\mathbb{T}^n) \subset M_\pi[s,-t].$$

Утверждение 3.3.2 доказано.

Утверждение 3.3.3. *Пусть $s,\ t \geqslant 0$, $\max(s,t) > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $r > 1$ и имеет место непрерывное вложение*

$$H^{\gamma}_{r}(\mathbb{T}^n) \subset M_\pi[s,-t].$$

Тогда для произвольного $u \in H^{\gamma}_{r}(\mathbb{T}^n)$ оператор $M_u\colon H^{s}_{2}(\mathbb{T}^n) \to H^{-t}_{2}(\mathbb{T}^n)$ компактен.

Доказательство. Фиксируем произвольный элемент $u \in H^{\gamma}_{r}(\mathbb{T}^n)$. Поскольку множество $\mathbf{D}(\mathbb{T}^n)$ плотно в пространстве $(H^{\gamma}_{r}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H^{\gamma}_{r}(\mathbb{T}^n)})$, то существует такая последовательность функций $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset D(\mathbb{T}^n)$, что

$$\mathbf{f}_m \xrightarrow[n\to\infty]{H^{\gamma}_{r}(\mathbb{T}^n)} u.$$

Поскольку вложение $H_2^s(\mathbb{T}^n) \subset H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)$ компактно, а из отмечавшейся выше ограниченности оператора умножения на произвольную функцию $f \in D(\mathbb{T}^n)$ в пространстве $(\mathbf{D}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^s(\mathbb{T}^n)})$ вытекает, что $M_{\mathbf{f}} \in \mathcal{B}(H_2^s(\mathbb{T}^n))$ и, следовательно, для произвольного числа $m \in \mathbb{N}$ оператор $M_{\mathbf{f}_m} \colon H_2^s(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)$, совпадающий с оператором умножения на функцию $f_m \in D(\mathbb{T}^n)$, является компактным относительно норм $\|\cdot\|_{H_2^s(\mathbb{T}^n)}$ и $\|\cdot\|_{H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)}$.

Поскольку вложение $H_r^\gamma(\mathbb{T}^n) \subset M_\pi[s,-t]$ непрерывно, а $u \in H_r^\gamma(\mathbb{T}^n)$, то найдётся такая константа $C > 0$, что

$$\|M_{\mathbf{f}_m} - M_u\|_{\mathcal{B}(H_2^s(\mathbb{T}^n), H_2^{-t}(\mathbb{T}^n))} = \|M_{\mathbf{f}_m - u}\|_{\mathcal{B}(H_2^s(\mathbb{T}^n), H_2^{-t}(\mathbb{T}^n))} =$$
$$= \|\mathbf{f}_m - u\|_{M_\pi[s,-t]} \leqslant C\, \|\mathbf{f}_m - u\|_{H_r^\gamma(\mathbb{T}^n)}.$$

Следовательно, последовательность ограниченных линейных операторов $M_{\mathbf{f}_m}$ сходится к оператору M_u в пространстве $\mathcal{B}(H_2^s(\mathbb{T}^n), H_2^{-t}(\mathbb{T}^n))$, и поэтому компактность $M_u \colon H_2^s(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)$ следует из компактности $M_{\mathbf{f}_m} \colon H_2^s(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)$.

Утверждение 3.3.3 доказано.

Замечание 3.3.1. *Из утверждений 3.3.1 и 3.3.3 непосредственно следует, что при $s,\ t \geqslant 0$ в случае выполнения условия Стрихартца $\max(s,t) > \frac{n}{2}$ пространство $M_\pi[s,-t]$ состоит только из компактных мультипликаторов, то есть для произвольного $u \in M_\pi[s,-t]$ оператор*

$$M_u \colon (H_2^s(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^s(\mathbb{T}^n)}) \to (H_2^{-t}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{-t}(\mathbb{T}^n)})$$

является компактным.

3.4. Основные теоремы

Рассмотрим для произвольного числа $\alpha \geqslant 0$ линейный оператор

$$(-\Delta)^\alpha \colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n),$$

определённый всюду на $H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$ с помощью равенства

$$(-\Delta)^\alpha(x) = \mathcal{T}(x) - x \ \ \forall\, x \in H_2^\alpha(\mathbb{T}^n),$$

где определённый выше в параграфе 3.2 оператор $\mathcal{T} \colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ построен по линейному оператору $T_0 = Id_{L_2(\mathbb{T}^n)} + (-\Delta_0)^\alpha \colon L_2(\mathbb{T}^n) \to L_2(\mathbb{T}^n)$, чья область определения совпадает с $\mathbb{H}_2^{2\alpha}(\mathbb{T}^n)$.

Очевидно, что действие ограничения оператора $(-\Delta)^\alpha \colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ на множество $H_2^{2\alpha}(\mathbb{T}^n)$ согласовано с действием оператора $(-\Delta_0)^\alpha \colon L_2(\mathbb{T}^n) \to L_2(\mathbb{T}^n)$ следующим образом: для произвольной функции $f \in \mathbb{H}_2^{2\alpha}(\mathbb{T}^n)$ имеем

$$(-\Delta)^\alpha(\mathbf{f}) = \mathbf{g}, \quad \text{где } \ g = (-\Delta_0)^\alpha(f).$$

Теорема 3.4.1. *Пусть* $\alpha \geqslant 0,\ \ q \in M_\pi[\alpha, -\alpha]$ *и оператор*

$$Q = M_q\colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$$

подчинён оператору $\mathcal{T}$ *в смысле форм с* $\mathcal{T}-$*гранью* $a_Q < 1$. *Тогда для оператора*

$$S \overset{def}{=} (-\Delta)^\alpha + Q :\ H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n),$$

определённого всюду на $H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$, *его сужение на множество*

$$\{x \in H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \mid S(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)\}$$

является секториальным оператором в $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$.

Доказательство. Рассмотрим линейный оператор $Q_1\colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$, определённый на всём $H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$ соотношением

$$Q_1(x) = Q(x) - x \ \ \forall\, x \in H_2^\alpha(\mathbb{T}^n).$$

Очевидно, что оператор $S\colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ можно представить в виде $S = \mathcal{T} + Q_1$, причём оператор Q_1 будет $\mathcal{T}-$подчинённым в смысле форм с той же самой $\mathcal{T}-$гранью $a_Q < 1$, что и оператор Q.

Тогда применима теорема 3.1.2 для $\mathcal{H}_1 = H_2^\alpha(\mathbb{T}^n), \mathcal{H} = \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{H}_{-1} = H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$, согласно которой сужение оператора $S = \mathcal{T} + Q_1$ на множество

$$\{x \in H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \mid S(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)\}$$

является секториальным оператором в $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$.

Теорема 3.4.1 доказана.

Следствие 3.4.1. *Пусть имеет место один из следующих двух случаев:*
1) $\alpha > \frac{n}{2},\ q \in H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$;
или
2) $0 < \alpha \leqslant \frac{n}{2},\ q \in H_{\frac{n}{\alpha}}^{-\alpha+\varepsilon}(\mathbb{T}^n)$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$.
Тогда корректно определён оператор

$$S = (-\Delta)^\alpha + M_q :\ H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n),$$

с областью определения $D(S) = H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$ *и его сужение на множество*

$$\{x \in H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \mid S(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)\}$$

является секториальным оператором в $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$.

Доказательство. Поскольку при $\alpha > \frac{n}{2}$ согласно утверждению 3.3.1 имеет место совпадение пространств
$$M_\pi[\alpha, -\alpha] = H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n),$$
а при $0 < \alpha \leqslant \frac{n}{2}$ согласно утверждению 3.3.2 справедливо непрерывное вложение
$$H_{\frac{n}{\alpha}}^{-\alpha+\varepsilon}(\mathbb{T}^n) \subset M_\pi[\alpha, -\alpha]$$
то в обоих этих случаях $q \in M_\pi[\alpha, -\alpha]$. При этом в силу утверждения 3.3.3 определённый всюду на $H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$ оператор
$$Q = M_q \colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n),$$
компактен.

Поскольку в нашем случае $\mathcal{H}_1 = H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{H}_{-1} = H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$, а в силу утверждения 3.1.3 $\mathcal{T}-$грань компактного оператора, действующего из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$, равна 0, то согласно теореме 3.4.1 сужение оператора $S = (-\Delta)^\alpha + M_q \colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ на множество $\{x \in H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \mid S(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)\}$ является секториальным оператором в пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$.

Следствие 3.4.1 доказано.

В дальнейшем для произвольных линейных операторов $A \colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ и $B \colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$, определённых на всём $H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$, будем через $A \widetilde{+} B$ обозначать сужение оператора
$$A + B \colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$$
на множество
$$D(A \widetilde{+} B) \overset{def}{=} \{x \in H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \mid (A + B)(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)\}.$$

Теорема 3.4.2. *Пусть* $\alpha \geqslant 0$, $q \in M_\pi[\alpha, -\alpha]$, *оператор*
$$Q_0 = M_q \colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$$
подчинён оператору $\mathcal{T}$ *в смысле форм с* $\mathcal{T}-$*гранью* $a_{Q_0} < 1$ *и пусть также для последовательности мультипликаторов* $\{q_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset M_\pi[\alpha, -\alpha]$ *имеем*
$$q_m \xrightarrow[m \to \infty]{M_\pi[\alpha, -\alpha]} q.$$
Тогда для последовательности линейных операторов $Q_m = M_{q_m} \colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ *имеем, что*
$$(-\Delta)^\alpha \widetilde{+} Q_m \overset{R}{\Longrightarrow} (-\Delta)^\alpha \widetilde{+} Q_0,$$
то есть последовательность операторов $(-\Delta)^\alpha \widetilde{+} Q_m$, $m \in \mathbb{N}$, *сходится к оператору* $(-\Delta)^\alpha \widetilde{+} Q_0$ *в смысле равномерной резольвентной сходимости в пространстве* $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$.

Доказательство. Поскольку для произвольного числа $m \in \mathbb{Z}_+$ распределение q_m является мультипликатором из $H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)$ в $H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$, то на всём пространстве $H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)$ корректно определены линейные операторы

$$Q_m = M_{q_m} \colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n),\ m \in \mathbb{Z}_+.$$

Определим линейные операторы $K_m \colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ равенством

$$K_m = Q_m - Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)} \ \ \forall\, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Очевидно, что для произвольного числа $m \in \mathbb{Z}_+$ область определения оператора K_m совпадает со всем пространством $H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)$, причём линейный оператор K_0 является $\mathcal{T}-$подчинённым с той же $\mathcal{T}-$гранью $a_{Q_0} < 1$, что и оператор Q_0.

Из ограниченности операторов Q_m, $m \in \mathbb{Z}_+$, относительно норм $\|\cdot\|_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)}$ и $\|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)}$ и непрерывности вложения $H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \subset H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ следует ограниченность операторов

$$K_m \colon (H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)}) \to (H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)}),\ \ m \in \mathbb{Z}_+.$$

Более того, поскольку из сходимости q_m к q в пространстве $M_{\pi}[\alpha, -\alpha]$ следует сходимость $Q_m \xrightarrow[m\to\infty]{} Q_0$ в пространстве $\mathcal{B}(H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n), H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n))$, то последовательность операторов K_m сходится к оператору K_0 относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n), H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n))}$.

Поскольку для произвольного числа $m \in \mathbb{Z}_+$ справедливы соотношения

$$(-\Delta)^{\alpha} + Q_m = \mathcal{T} + K_m \quad \text{и} \quad (-\Delta)^{\alpha} \mathbin{\widetilde{+}} Q_m = \mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} K_m,$$

то, применяя теорему 3.1.3, получаем, что

$$(-\Delta)^{\alpha} \mathbin{\widetilde{+}} Q_m = \mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} K_m \stackrel{R}{\Longrightarrow} \mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} K_0 = (-\Delta)^{\alpha} \mathbin{\widetilde{+}} Q_0.$$

Теорема 3.4.2 доказана.

Следствие 3.4.2. *Пусть имеет место один из двух случаев:*
1) $\alpha > \frac{n}{2}$, $q \in H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$;
или
2) $0 < \alpha \leqslant \frac{n}{2}$, $q \in H_{\frac{n}{\alpha}}^{-\alpha+\varepsilon}(\mathbb{T}^n)$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$.
Тогда существует последовательность мультипликаторов

$$\{\mathbf{f}_m \mid f_m \in D(\mathbb{T}^n)\}_{m\in\mathbb{N}} \subset M_{\pi}[\alpha, -\alpha],$$

такая, что

$$(-\Delta)^{\alpha} \mathbin{\widetilde{+}} M_{\mathbf{f}_m} \stackrel{R}{\Longrightarrow} (-\Delta)^{\alpha} \mathbin{\widetilde{+}} M_q.$$

Доказательство. Поскольку в силу утверждений 3.3.1 и 3.3.2 справедливы непрерывные вложения

$$H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n) \subset M_\pi[\alpha, -\alpha] \ \text{ и } \ H_{\frac{n}{\alpha}}^{-\alpha+\varepsilon}(\mathbb{T}^n) \subset M_\pi[\alpha, -\alpha],$$

то как в случае 1), так и в случае 2) имеем, что $q \in M_\pi[\alpha, -\alpha]$. При этом поскольку для произвольных чисел $s \geqslant 0$ и $p > 1$ множество $\mathbf{D}(\mathbb{T}^n)$ плотно в пространстве $(H_p^s(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_p^s(\mathbb{T}^n)})$, то существует последовательность функций $f_m \in D(\mathbb{T}^n)$, $m \in \mathbb{N}$, такая, что

$$\mathbf{f}_m \xrightarrow[m\to\infty]{M_\pi[\alpha,-\alpha]} q.$$

Так как в силу утверждения 3.3.3 оператор $Q = M_q \colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ является компактным относительно норм соответствующих пространств, то, согласно следствию 3.1.3, этот оператор $\mathcal{T}-$ подчинён с $\mathcal{T}-$гранью, равной 0. Тогда, применяя теорему 3.4.2, получаем, что имеет место равномерная резольвентная сходимость последовательности операторов $(-\Delta)^\alpha \,\widetilde{+}\, M_{\mathbf{f}_m} \colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ к оператору $(-\Delta)^\alpha \,\widetilde{+}\, M_q \colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$.

Следствие 3.4.2 доказано.

Пусть линейный оператор

$$A \colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$$

определён всюду на пространстве $H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)$. Так как $H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)$ является всюду плотным подпространством пространства $(H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)})$, то для оператора A можно естественным образом определить понятия спектра, резольвенты, собственных и корневых векторов.

Будем говорить, что число $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит спектру $\sigma(A)$ оператора A, если оператор

$$A - \lambda \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)} \colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$$

не имеет обратного линейного оператора, ограниченного относительно норм $\|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)}$ и $\|\cdot\|_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)}$. В противном случае будем говорить, что λ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ и называть ограниченный оператор

$$R_\lambda(A) \stackrel{def}{=} (A - \lambda \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)})^{-1} \colon H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n) \to H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)$$

резольвентой для оператора A, соответствующей значению λ.

Число $\lambda \in \sigma(A)$ называется собственным значением оператора A, если

$$Ker(A - \lambda \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)}) \neq \{0\}.$$

При этом линейное пространство

$$E_\lambda(A) \stackrel{def}{=} Ker(A - \lambda \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)})$$

будем называть собственным подпространством оператора A, а любой ненулевой элемент $u \in E_\lambda(A)$ – собственным вектором с собственным значением λ. Точечный спектр оператора A, то есть множество всех собственных значений этого оператора, будем обозначать через $\sigma_p(A)$.

Для числа $\lambda \in \mathbb{C}$, являющегося собственным значением оператора A, будем называть $u \in H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$ корневым вектором, соответствующим собственному значению λ, если найдётся такое число $k \in \mathbb{N}$, что

$$(A - \lambda \cdot Id_{H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)})^m(u) \in H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \ \ \forall\, m = \overline{1, k-1}, \ \text{ и } \ (A - \lambda \cdot Id_{H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)})^k(u) = 0.$$

Корневым подпространством, соответствующим собственному значению $\lambda \in \mathbb{C}$ оператора A, будем называть линейное подпространство

$$K_\lambda(A) \overset{def}{=} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Ker(A - \lambda \cdot Id_{H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)})^k.$$

Лемма 3.4.1. *Пусть $\alpha > 0$ и определённый всюду на $H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$ линейный оператор*

$$A \colon (H_2^\alpha(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)}) \to (H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)})$$

является компактным. Тогда имеет место совпадение спектров, а также собственных и корневых подпространств для операторов

$$\mathcal{T} + A \colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$$

и

$$\mathcal{T} \widetilde{+} A \colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n).$$

Доказательство. Покажем, что множества собственных значений и соответствующие им собственные и корневые подпространства для операторов

$$\mathcal{T} + A \colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n) \ \text{ и } \ \mathcal{T} \widetilde{+} A \colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$$

совпадают.

Фиксируем произвольное $\rho \in \mathbb{C}$. Вложение

$$Ker(\mathcal{T} \widetilde{+} A - \rho \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}) \subset Ker(\mathcal{T} + A - \rho \cdot Id_{H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)})$$

следует из того, что оператор $\mathcal{T} \widetilde{+} A$ является сужением оператора $\mathcal{T} + A$. Обратное вложение следует из того, что для

$$u \in Ker(\mathcal{T} + A - \rho \cdot Id_{H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)}) \subset H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$$

имеем

$$(\mathcal{T} + A)(u) = \rho \cdot u \in H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \subset \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n),$$

откуда вытекает, что $u \in D(\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A)$ и, следовательно,

$$u \in Ker(\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A - \rho \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}).$$

Таким образом,

$$Ker(\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A - \rho \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}) = Ker(\mathcal{T} + A - \rho \cdot Id_{H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)}),$$

откуда следует совпадение множеств собственных значений и соответствующих собственных подпространств для операторов $\mathcal{T} + A$ и $\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A$.

Покажем теперь, что, более того,

$$Ker\ (\mathcal{T} + A - \rho \cdot Id_{H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)})^m = Ker\ (\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A - \rho \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})^m \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Вложение $Ker\ (\mathcal{T} + A - \rho \cdot Id_{H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)})^m \subset Ker\ (\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A - \rho \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})^m$ непосредственно следует из того, что, как легко показать, оператор $(\mathcal{T} + A - \rho \cdot Id_{H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)})^m$ является продолжением оператора $(\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A - \rho \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})^m$.

Обратное вложение докажем индукцией по $m \in \mathbb{N}$. Справедливость этого вложения при $m = 1$ доказана выше. Пусть справедливо предположение индукции, то есть

$$Ker\ (\mathcal{T} + A - \rho \cdot Id_{H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)})^k \subset Ker\ (\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A - \rho \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})^k \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \colon 1 \leqslant k \leqslant m - 1.$$

Если $u \in Ker\ (\mathcal{T} + A - \rho \cdot Id_{H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)})^m$, то для

$$v \stackrel{def}{=} (\mathcal{T} + A - \rho \cdot Id_{H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)})(u) \in H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$$

имеем, что

$$(\mathcal{T} + A)(u) = \rho \cdot u + v \in H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \subset \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n).$$

Следовательно, $u \in D(\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A)$ и $v = (\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A - \rho \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})(u)$. Поскольку

$$v \in Ker\ (\mathcal{T} + A - \rho \cdot Id_{H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)})^{m-1} \subset Ker\ (\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A - \rho \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})^{m-1},$$

то отсюда получаем, что

$$0 = (\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A - \rho \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})^{m-1}(v) = (\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A - \rho \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})^m(u),$$

то есть $u \in Ker\ (\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A - \rho \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})^m$, что и завершает доказательство обратного вложения.

В результате получаем, что

$$K_\lambda(\mathcal{T} + A) = K_\lambda(\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A) \quad \forall\, \lambda \in \sigma_p(\mathcal{T} + A) = \sigma_p(\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A),$$

то есть корневые подпространства для операторов $\mathcal{T} + A$ и $\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A$, отвечающие одному и тому же собственному значению λ, совпадают.

Теперь докажем совпадение резольвентных множеств для операторов

$$\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A\colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \text{ и } \mathcal{T} + A\colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n),$$

что равносильно совпадению спектров этих операторов.

Пусть $\rho_0 \in \rho(\mathcal{T} + A)$, то есть на всём пространстве $H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ корректно определён ограниченный линейный оператор

$$(\mathcal{T} + A - \rho_0 \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)})^{-1}\colon (H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)}) \to (H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)}).$$

Тогда, учитывая сюръективность оператора

$$\mathcal{T} + A - \rho_0 \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)}\colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n),$$

нетрудно вывести, что для ограничения действующего из $H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ в $H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)$ линейного оператора $(\mathcal{T} + A - \rho_0 \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)})^{-1}$ на множество $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ справедливы соотношения

$$(\mathcal{T} + A - \rho_0 \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)})^{-1}\Big|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} \circ (\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A - \rho_0 \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}) = Id_{D(\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A)}$$

и

$$(\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A - \rho_0 \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}) \circ (\mathcal{T} + A - \rho_0 \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)})^{-1}\Big|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} = Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)},$$

то есть это ограничение является оператором, обратным к действующему в пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ оператору $\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A - \rho_0 \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}$.

Тогда из принадлежности числа ρ_0 резольвентному множеству оператора $\mathcal{T} + A$ и непрерывности вложений $H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \subset \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ и $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \subset H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ следует, что для некотрых положительных констант C, C_1, C_2 справедлива цепочка неравенств

$$\|(\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A - \rho_0 \cdot Id_{L_2(\mathbb{T}^n)})^{-1}(x)\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} \leqslant C_1 \,\|(\mathcal{T} + A - \rho_0 \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)})^{-1}(x)\|_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)} \leqslant$$

$$\leqslant C_1\, C\, \|x\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)} \leqslant C_2\, C_1\, C\, \|x\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} \quad \forall\, x \in \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n).$$

Следовательно,

$$(\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A - \rho_0 \cdot Id_{L_2(\mathbb{T}^n)})^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)),$$

а это и означает, что $\rho_0 \in \rho(\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A)$.

В силу произвольности выбора $\rho_0 \in \rho(\mathcal{T} + A)$ таким образом доказано, что

$$\rho(\mathcal{T} + A) \subset \rho(\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A).$$

Докажем обратное вложение. Пусть $\rho_0 \in \rho(\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A)$, то есть на всём пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ определён оператор

$$(\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} A - \rho_0 \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)).$$

Поскольку непрерывное вложение $H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \subset H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ компактно согласно замечанию 3.2.5, то оператор

$$A - \rho_0 \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)} \colon (H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)}) \to (H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)})$$

является компактным. Так как линейный оператор $\mathcal{T} \colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ биективен и $\mathcal{T}^{-1} \in \mathcal{B}(H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n), H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n))$, а оператор $A - \rho_0 \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)} \colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ компактен относительно соответствующих норм, то, согласно классическому критерию Никольского (см., например, [10; утверждение 8.5.22]), линейный оператор

$$\mathcal{T} + A - \rho_0 \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)} \colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$$

является фредгольмовым с нулевым индексом. Поскольку, как было показано выше,

$$Ker(\mathcal{T} \,\widetilde{+}\, A - \rho \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}) = Ker(\mathcal{T} + A - \rho \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)}) \ \ \forall\, \rho \in \mathbb{C},$$

а $\rho_0 \in \rho(\mathcal{T} \,\widetilde{+}\, A)$, то

$$Ker\,(\mathcal{T} + A - \rho_0 \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)}) = \{0\}.$$

Отсюда, учитывыя, что индекс оператора $\mathcal{T} + A - \rho_0 \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)} \colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ равен нулю, получаем, что

$$Im(\mathcal{T} + A - \rho_0 \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)}) = H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n).$$

Таким образом, линейный оператор $\mathcal{T} + A - \rho_0 \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)} \in \mathcal{B}(H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n), H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n))$ является биекцией банаховых пространств $H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)$ и $H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$. Тогда согласно теореме Банаха об обратном операторе на всём пространстве $H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ определён ограниченный оператор

$$(\mathcal{T} + A - \rho_0 \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)})^{-1} \colon (H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)}) \to (H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)})$$

и, следовательно, $\rho_0 \in \rho(\mathcal{T} + A)$.

Итак, в силу произвольности выбора $\rho_0 \in \rho(\mathcal{T} \,\widetilde{+}\, A)$ доказано обратное вложение $\rho(\mathcal{T} \,\widetilde{+}\, A) \subset \rho(\mathcal{T} + A)$, что и завершает доказательство совпадения резольвентных множеств, а, значит, и спектров линейных операторов

$$\mathcal{T} + A \colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n) \ \text{ и } \ \mathcal{T} \,\widetilde{+}\, A \colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n).$$

Лемма 3.4.1 доказана.

Для действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ линейного оператора A, спектр которого состоит только из не более чём счётного числа изолированных собственных значений конечной кратности, будем называть считающей функцией собственных значений этого оператора функцию $N_A \colon (0, +\infty) \to \mathbb{Z}_+$, заданную равенством

$$N_A(r) \ = \sum_{\lambda \in \sigma(A) \colon |\lambda| < r} dim\, K_\lambda(A).$$

Теорема 3.4.3. *Пусть* $\alpha > 0$, $q \in M_\pi[\alpha, -\alpha]$ *и определённый всюду на* $H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$ *линейный оператор*

$$Q = M_q\colon (H_2^\alpha(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)}) \to (H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)})$$

является компактным. Тогда линейный оператор

$$(-\Delta)^\alpha \,\widetilde{+}\, Q\colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$$

имеет компактную резольвенту, система его корневых векторов полна в $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ *и для считающей функции собственных значений оператора* $(-\Delta)^\alpha \,\widetilde{+}\, Q$ *справедливо асимптотическое соотношение*

$$N_{(-\Delta)^\alpha \,\widetilde{+}\, Q}(r) \sim N_{(-\Delta)^\alpha}(r) \sim C_\alpha \cdot r^{\frac{n}{2\alpha}} \quad \text{при } r \to +\infty,$$

где C_α *— некоторая положительная константа, зависящая только от* α *и* n.

Доказательство. Представим оператор $(-\Delta)^\alpha + Q\colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ в виде

$$(-\Delta)^\alpha + Q = \mathcal{T} + Q_0,$$

где

$$Q_0 = Q - Id_{H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)}\colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n).$$

Отметим, что тогда очевидным образом имеем

$$(-\Delta)^\alpha \,\widetilde{+}\, Q = \mathcal{T} \,\widetilde{+}\, Q_0.$$

Из компактности оператора

$$Q\colon (H_2^\alpha(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)}) \to (H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)})$$

и того, что согласно замечанию 3.2.5 вложение $H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \subset H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ компактно, вытекает, что оператор

$$Q_0\colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$$

также является компактным относительно норм $\|\cdot\|_{H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)}$ и $\|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)}$.

Тогда, применяя лемму 3.4.1, где в качестве оператора A берётся Q_0, получаем, что у операторов

$$\mathcal{T} + Q_0\colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n) \ \text{ и } \ \mathcal{T} \,\widetilde{+}\, Q_0\colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$$

совпадают спектры, множества собственных значений и соответствующие собственные и корневые подпространства.

Докажем сначала, что оператор

$$\mathcal{T} \,\widetilde{+}\, Q_0\colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$$

имеет компактную резольвенту, то есть найдётся число $\rho_0 \in \mathbb{C}$, такое, что определённый всюду на $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ линейный оператор

$$(\mathcal{T} \widetilde{+} Q_0 - \rho_0 \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})^{-1} \colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$$

является компактным относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}$.

В силу следствия 3.1.3 оператор $Q_0 \colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ является $\mathcal{T}-$подчинённым с $\mathcal{T}-$гранью $\alpha_{Q_0} = 0$, то есть для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\beta(\varepsilon) \geqslant 0$, что

$$| < Q_0(x), x >_{\alpha,\pi} | \leqslant \varepsilon < \mathcal{T}(x), x >_{\alpha,\pi} + \beta(\varepsilon) < x, x >_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} \quad \forall\, x \in H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n).$$

В частности, это неравенство справедливо для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и некоторого числа $\beta(\frac{1}{2})$.

Фиксируем теперь произвольное $\rho_0 < -\beta(\frac{1}{2})$. Применяя замечание 3.1.4 для ситуации, когда в качестве $\mathcal{H}$ выступает пространство $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$, в качестве $\mathcal{H}_1$ – $H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)$, а в качестве $\mathcal{H}_{-1}$ – $H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$, получаем, что $\rho_0 \in \rho(\mathcal{T} \widetilde{+} Q_0) = \rho(\mathcal{T} + Q_0)$ и обратным к оператору $\mathcal{T} \widetilde{+} Q_0 - \rho_0 \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} \colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ является линейный оператор

$$(\mathcal{T} + Q_0 - \rho_0 \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)})^{-1}\Big|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}.$$

Значит, справедливо представление

$$(\mathcal{T} \widetilde{+} Q_0 - \rho_0 \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})^{-1} = J_1 \circ (\mathcal{T} + Q_0 - \rho_0 \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)})^{-1} \circ J_0,$$

где J_0 – вложение пространства $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ в $H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$, а J_1 – вложение $H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)$ в $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$. Поскольку из принадлежности числа ρ_0 множеству $\rho(\mathcal{T}+Q_0)$ следует ограниченность оператора

$$(\mathcal{T} + Q_0 - \rho_0 \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)})^{-1} \colon (H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)}) \to (H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)}),$$

а вложения $J_0 \colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ и $J_1 \colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ согласно замечанию 3.2.5 компактны относительно соответствующих норм, то резольвента

$$R_{\rho_0}(T \widetilde{+} Q_0) = (\mathcal{T} \widetilde{+} Q_0 - \rho_0 \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})^{-1}$$

является компактным оператором в пространстве $(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})$. Таким образом, линейный оператор

$$\mathcal{T} \widetilde{+} Q_0 \colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$$

имеет компактную резольвенту. Как хорошо известно (см. [9; глава III, теорема 6.29]), в этом случае для любого $\rho \in \rho(\mathcal{T} \widetilde{+} Q_0)$ резольвента этого оператора

$$R_{\rho}(\mathcal{T} \widetilde{+} Q_0) = (\mathcal{T} \widetilde{+} Q_0 - \rho \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})^{-1}$$

компактна в $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$, а спектр оператора $\mathcal{T}\widetilde{+}Q_0$ состоит из счётного числа изолированных собственных значений конечной кратности. Отсюда следует, что на $(0,+\infty)$ корректно определена считающая функция $N_{\mathcal{T}\widetilde{+}Q_0}(\cdot)$ собственных значений оператора $\mathcal{T}\widetilde{+}Q_0$.

Докажем теперь полноту системы корневых векторов оператора $\mathcal{T}\widetilde{+}Q_0$. Для этого нам потребуется рассмотреть определённый всюду на $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ линейный оператор

$$K \stackrel{def}{=} \mathcal{T}^{-\frac{1}{2}} \circ Q_0 \circ T^{-\frac{1}{2}}\colon\ \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n).$$

Поскольку

$$T^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)),\ \mathcal{T}^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}(H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n), \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)),$$

а линейный оператор $Q_0\colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ является компактным относительно норм $\|\cdot\|_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)}$ и $\|\cdot\|_{H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)}$, то линейный оператор K является компактным в пространстве $(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})$.

Отметим, что для произвольного числа $\rho \in \mathbb{C}$ на всём пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ определён линейный оператор

$$Z_\rho \stackrel{def}{=} Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} + K - \rho \cdot T^{-1}\colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n),$$

являющийся ограниченным в пространстве $(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})$. Учитывая доказанное в абстрактной ситуации равенство

$$\mathcal{T}^{-\frac{1}{2}} \circ \mathcal{T} = T^{\frac{1}{2}}$$

и тот факт, что операторы $\mathcal{T}^{\frac{1}{2}}\colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{T}^{-\frac{1}{2}}\colon H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ взаимно обратны, несложно показать, что для произвольного числа $\rho \in \mathbb{C}$ совпадают линейные операторы

$$\mathcal{T} + Q_0 - \rho \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)}\colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n) \ \text{ и } \ \mathcal{T}^{\frac{1}{2}} \circ Z_\rho \circ T^{\frac{1}{2}}\colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n).$$

Из совпадения этих операторов и инъективности оператора $\mathcal{T}^{\frac{1}{2}}\colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ следует, что

$$T^{\frac{1}{2}}(Ker(\mathcal{T} + Q_0 - \rho \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)})) = Ker\, Z_\rho \quad \forall\, \rho \in \mathbb{C}.$$

Напомним, что найдётся такая константа $\beta(\frac{1}{2}) \geqslant 0$, что справедлива оценка

$$|<Q_0(x), x>_{\alpha,\pi}| \leqslant \frac{1}{2} \cdot <\mathcal{T}(x), x>_{\alpha,\pi} + \beta\Big(\frac{1}{2}\Big) \cdot <x, x>_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} \quad \forall\, x \in H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n).$$

Фиксируем теперь некоторое число $\rho_1 < -\beta(\frac{1}{2})$. Применяя, как и ранее, замечание 3.1.4, получаем, что

$$\rho_1 \in \rho(\mathcal{T}\widetilde{+}Q_0) = \rho(\mathcal{T} + Q_0).$$

Отметим, что операторы $T^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n))$ и $\mathcal{T}^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}(H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n), \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n))$ являются обратными к операторам $T^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}(H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n), \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n))$ и $\mathcal{T}^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n))$. Поэтому из соотношения

$$\mathcal{T} + Q_0 - \rho_1 \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)} = \mathcal{T}^{\frac{1}{2}} \circ Z_{\rho_1} \circ T^{\frac{1}{2}}$$

и того, что $\rho_1 \in \rho(\mathcal{T} + Q_0)$, следует, что оператор Z_{ρ_1} обратим, причём

$$Z_{\rho_1}^{-1} = T^{\frac{1}{2}} \circ (\mathcal{T} + Q_0 - \rho_1 \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)})^{-1} \circ \mathcal{T}^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)).$$

Учитывая, что оператор $Z_{\rho_1}^{-1}$ биективно отображает $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ на себя, для произвольного числа $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{\rho_1\}$ получаем, что

$$Ker\, Z_\rho = \{u \in \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \mid (Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} + K)(u) = \rho \cdot T^{-1}(u)\} =$$

$$= \{u \in \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \mid Z_{\rho_1}(u) = (\rho - \rho_1) \cdot T^{-1}(u)\} =$$

$$= \left\{u \in \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \mid Z_{\rho_1}^{-1} \circ T^{-1}(u) = \frac{1}{\rho - \rho_1} \cdot u\right\} = Ker\left(Z_{\rho_1}^{-1} \circ T^{-1} - \frac{1}{\rho - \rho_1} \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}\right).$$

Отсюда, в силу доказанного выше равенства

$$T^{\frac{1}{2}}(Ker(\mathcal{T} + Q_0 - \rho \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)})) = Ker\, Z_\rho \ \ \forall\, \rho \in \mathbb{C},$$

следует, что

$$T^{\frac{1}{2}}(Ker(\mathcal{T} + Q_0 - \rho \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)})) = Ker\Big(Z_{\rho_1}^{-1} \circ T^{-1} - \frac{1}{\rho - \rho_1} \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}\Big) \quad \forall\, \rho \in \mathbb{C} \setminus \{\rho_1\}.$$

Последнее соотношение эквивалентно равенству

$$T^{-\frac{1}{2}}(Ker(Z_{\rho_1}^{-1} \circ T^{-1} - \lambda \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})) = Ker\Big(\mathcal{T} + Q_0 - \Big(\frac{1}{\lambda} + \rho_1\Big) \cdot Id_{H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)}\Big) \ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Поскольку оператор $Z_{\rho_1}^{-1} \circ T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n))$ очевидным образом является инъективным, то $0 \notin \sigma_p(Z_{\rho_1}^{-1} \circ T^{-1})$. Поэтому для множеств собственных значений операторов

$$\mathcal{T} + Q_0 \colon H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n) \quad \text{и} \quad Z_{\rho_1}^{-1} \circ T^{-1} \colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$$

справедливо соотношение

$$f(\sigma_p(Z_{\rho_1}^{-1} \circ T^{-1})) = \sigma_p(\mathcal{T} + Q_0),$$

где

$$f \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \ \ z \longmapsto \frac{1}{z} + \rho_1,$$

причем оператор $T^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n))$, образ которого совпадает с $H_2^{\alpha}(\mathbb{T}^n)$, осуществляет биекцию собственных подпространств этих операторов:

$$T^{-\frac{1}{2}}(E_\lambda(Z_{\rho_1}^{-1} \circ T^{-1})) = E_{\frac{1}{\lambda} + \rho_1}(\mathcal{T} + Q_0) \quad \forall\, \lambda \in \sigma_p(Z_{\rho_1}^{-1} \circ T^{-1}).$$

С помощью индукции по $m \in \mathbb{N}$ можно показать, что для произвольного числа $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ справедливо равенство множеств

$$T^{-\frac{1}{2}} \left(Ker \, (Z_{\rho_1}^{-1} \circ T^{-1} - \lambda \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})^m \right) = Ker \, \left(\mathcal{T} + Q_0 - \left(\frac{1}{\lambda} + \rho_1 \right) \cdot Id_{H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)} \right)^m \ \ \forall m \in \mathbb{N},$$

и, следовательно, для корневых подпространств операторов $Z_{\rho_1}^{-1} \circ T^{-1}$ и $\mathcal{T} + Q_0$ также справедливо аналогичное доказанному для собственных подпространств соотношение:

$$T^{-\frac{1}{2}}(K_\lambda(Z_{\rho_1}^{-1} \circ T^{-1})) = K_{\frac{1}{\lambda}+\rho_1}(\mathcal{T} + Q_0) \quad \forall \, \lambda \in \sigma_p(Z_{\rho_1}^{-1} \circ T^{-1}).$$

Докажем полноту системы корневых векторов оператора $Z_{\rho_1}^{-1} \circ T^{-1}$ в пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$. Для оператора $T^{-1} \colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ существует ортонормированный относительно $< \cdot, \cdot >_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)}$ счётный базис из собственных векторов $\mathbf{f}_k$, $k \in \mathbb{Z}^n$, отвечающих собственным значениям λ_k, где для произвольного элемента $k \in \mathbb{Z}^n$

$$\lambda_k = \frac{1}{1 + |k|^{2\alpha}} \quad \text{и} \quad f_k(z) = \frac{z^k}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \ \ \forall \, z \in \mathbb{T}^n.$$

Поскольку классическим критерием компактности диагонального оператора, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве, является сходимость его собственных значений к нулю, то отсюда следует, что оператор $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n))$ является компактным в пространстве $(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), \| \cdot \|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})$.

Докажем, что $T^{-1} \colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ является оператором конечного порядка, а именно, что для некоторого числа $p > 0$ имеет место сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (s_n(T^{-1}))^p,$$

где $s_n(T^{-1})$, $n \in \mathbb{N}$ – последовательность сингулярных чисел компактного оператора T^{-1}, занумерованных в порядке убывания и с учётом кратности. Поскольку T^{-1} является самосопряжённым и положительно определённым оператором в гильбертовом пространстве $(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), < \cdot, \cdot >_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})$, а сингулярное число компактного оператора A определяется как собственное значение положительно определённого самосопряжённого оператора $\sqrt{A^* \circ A}$, то последовательность $s_n(T^{-1})$, $n \in \mathbb{N}$, совпадает с последовательностью аналогичным образом упорядоченных собственных значений оператора T^{-1}. Существование же такого числа $p > 0$, что ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{(1 + |k|^{2\alpha})^p}$$

сходится, следует из справедливой для любого числа $N \in \mathbb{N}$ оценки частичных сумм

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n \colon \, k \in [-N,N]^n} \frac{1}{(1 + |k|^{2\alpha})^p} \leqslant \sum_{k_1 \in \mathbb{Z} \colon \, |k_1| \leqslant N} \cdots \sum_{k_n \in \mathbb{Z} \colon \, |k_n| \leqslant N} \frac{1}{(1 + |k_1|^{2\alpha})^{\frac{p}{n}}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{(1 + |k_n|^{2\alpha})^{\frac{p}{n}}}$$

и того, что ряд

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^{\frac{2\alpha p}{n}}}$$

сходится при $p > \frac{n}{2\alpha}$. Таким образом, компактный оператор $T^{-1}\colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ является оператором конечного порядка.

Нетрудно видеть, что для линейного оператора $Z_{\rho_1}^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n))$, обратного к оператору $Z_{\rho_1} = Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} + K - \rho_1 \cdot T^{-1}$, справедливо соотношение

$$Z_{\rho_1}^{-1} = Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)} + T_1,$$

где оператор

$$T_1 \stackrel{def}{=} (-K + \rho_1 \cdot T^{-1}) \circ Z_{\rho_1}^{-1}$$

является компактным в пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ в силу ограниченности оператора $Z_{\rho_1}^{-1}$ и компактности операторов K и T^{-1} в пространстве $(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})$. Так как, к тому же, оператор $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n))$ является самосопряжённым компактным полным (в смысле Келдыша) оператором конечного порядка, то применима обобщённая теорема Келдыша (см., например, [12; глава I, теорема 4.2]), согласно которой система корневых векторов оператора $Z_{\rho_1}^{-1} \circ T^{-1}$ полна в пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$, то есть

$$\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) = cl\left(Lin\Big(\bigcup_{\lambda \in \sigma_p(Z_{\rho_1}^{-1} \circ T^{-1})} K_\lambda(Z_{\rho_1}^{-1} \circ T^{-1}) \Big) \right).$$

Поскольку, как показано выше,

$$T^{-\frac{1}{2}}(K_\lambda(Z_{\rho_1}^{-1} \circ T^{-1})) = K_{\frac{1}{\lambda} + \rho_1}(\mathcal{T} + Q_0) \;\; \forall\, \lambda \in \sigma_p(Z_{\rho_1}^{-1} \circ T^{-1}),$$

а оператор $T^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), H_2^\alpha(\mathbb{T}^n))$ биективно отображает $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ на $H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$, то из полноты системы корневых векторов для оператора $Z_{\rho_1}^{-1} \circ T^{-1}$ в пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ следует полнота системы корневых векторов оператора

$$\mathcal{T} + Q_0\colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$$

в пространстве $(H_2^\alpha(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)})$. В силу того, что вложение $H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \subset \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ является непрерывным и множество $H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$ плотно в пространстве $(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})$, отсюда следует, что система корневых векторов оператора $\mathcal{T} + Q_0$ плотна в пространстве $(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})$. Таким образом, учитывая следующее из леммы 3.4.1 совпадение корневых подпространств для операторов $\mathcal{T} \widetilde{+} Q_0$ и $\mathcal{T} + Q_0$, получаем, что система корневых векторов оператора $\mathcal{T} \widetilde{+} Q_0\colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ полна в пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$.

Осталось только исследовать асимптотическое поведение считающей функции собственных значений оператора

$$\mathcal{T} \widetilde{+} Q_0\colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n).$$

Отметим, что так как $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n))$, то $0 \in \rho(T)$. В силу того, что

$$K \circ T \circ R_0(T) = K \circ T \circ T^{-1} = K,$$

а оператор $K\colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ является компактным, получаем, что оператор $K \circ T$ компактен относительно оператора T (о компактности одного оператора относительно другого см., например, [12; глава I, §3]).

Поскольку, как было доказано выше, оператор $T^{-1} = R_0(T)$ компактен в пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$, то самосопряжённый оператор T имеет компактную резольвенту. Тогда, согласно [12; глава I, теорема 8.2], оператор $T + K \circ T$ также имеет компактную резольвенту в пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$. В силу классической теоремы о спектре оператора с компактной резольвентой (см. [9; глава III, теорема 6.29]) спектр оператора

$$T + K \circ T\colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$$

состоит только из счётного числа изолированных собственных значений конечной кратности. Поэтому так же, как и для оператора $\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} Q_0\colon \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$, корректно определена считающая функция $N_{T+K\circ T}\colon (0,+\infty) \to \mathbb{Z}_+$ собственных значений линейного оператора $T + K \circ T$.

Поскольку для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет место соотношение

$$(T + K \circ T - \lambda \cdot Id_{\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)})^m = \left(\mathcal{T}^{-\frac{1}{2}} \circ (\mathcal{T} + Q_0 - \lambda \cdot Id_{H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)}) \circ T^{\frac{1}{2}}\Big|_{H_2^{2\alpha}(\mathbb{T}^n)}\right)^m =$$

$$= \mathcal{T}^{-\frac{1}{2}} \circ (\mathcal{T} + Q_0 - \lambda \cdot Id_{H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)})^m \circ T^{\frac{1}{2}}\Big|_{H_2^{2\alpha}(\mathbb{T}^n)} \quad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

то $\sigma_p(\mathcal{T}+Q_0) = \sigma_p(T+K\circ T)$, то есть множества собственных значений для операторов $\mathcal{T}+Q_0$ и $T+K\circ T$ совпадают, а для корневых подпространств этих операторов имеет место соотношение

$$T^{\frac{1}{2}}(K_\lambda(T + K \circ T)) = K_\lambda(\mathcal{T} + Q_0) = K_\lambda(\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} Q_0) \quad \forall\, \lambda \in \sigma_p(\mathcal{T} + Q_0).$$

Отсюда, учитывая инъективность оператора $T^{\frac{1}{2}}$, получаем, что

$$N_{\mathcal{T} \mathbin{\widetilde{+}} Q_0}(r) = N_{T+K\circ T}(r) \quad \forall\, r > 0.$$

Поскольку для упорядоченных в порядке возрастания собственных значений операторов T и $(-\Delta)^\alpha$ имеет место соотношение

$$\lambda_m(T) = 1 + \lambda_m((-\Delta)^\alpha),\ m \in \mathbb{N},$$

и, как хорошо известно, найдётся такая константа $C_\alpha > 0$, что

$$N_{(-\Delta)^\alpha}(r) \sim C_\alpha \cdot r^{\frac{n}{2\alpha}} \ \text{ при } r \to +\infty,$$

то

$$N_T(r) \sim C_\alpha \cdot r^{\frac{n}{2\alpha}} \text{ при } r \to +\infty.$$

В силу того, что T – самосопряжённый оператор в $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$ с компактной резольвентой и, как отмечалось выше, оператор $K \circ T$ компактен относительно T, можно применить результаты [12; глава I, следствие 8.5 и замечание 8.7], согласно которым из асимптотического соотношения

$$N_T(r) \sim C_\alpha \cdot r^{\frac{n}{2\alpha}} \text{ при } r \to +\infty$$

следует справедливость асимптотического соотношения

$$N_{\mathcal{T} \,\widetilde{+}\, Q_0}(r) = N_{T+K\circ T}(r) \sim C_\alpha \cdot r^{\frac{n}{2\alpha}} \quad \text{при } r \to +\infty.$$

Теорема 3.4.3 доказана.

Следствие 3.4.3. *Пусть имеет место один из двух случаев:*
1) $\alpha > \frac{n}{2}$, $q \in H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$;
или
2) $0 < \alpha \leqslant \frac{n}{2}$, $q \in H_{n/\alpha}^{-\alpha+\varepsilon}(\mathbb{T}^n)$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$.
Тогда оператор

$$Q = M_q \colon H_2^\alpha(\mathbb{T}^n) \to H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$$

является компактным и справедливо утверждение теоремы 3.4.3.

Заключение

Диссертация посвящена изучению пространств мультипликаторов в пространствах бесселевых потенциалов и применению теории мультипликаторов для исследования сингулярных возмущений эллиптических дифференциальных операторов. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. При выполнении условий $s,\ t \geqslant 0,\ \max(s,t) < \frac{n}{2}$ для $m = \min(s,t),\ p = \frac{n}{\max(s,t)}$ доказана точность непрерывного вложения пространства $H^{-m}_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ в пространство мультипликаторов $M[H^s_2(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_2(\mathbb{R}^n)]$ в смысле невозможности уменьшения показателя $p = \frac{n}{\max(s,t)}$. Отсюда следует, что невозможно получить описание пространства мультипликаторов $M[H^s_2(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_2(\mathbb{R}^n)]$ в терминах равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов $H^{\gamma}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ в нестрихартцевском случае.

2. Показано, что при $s,\ t \in \mathbb{R},\ p,\ q > 1$ выполнение неравенства $p \leqslant q$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы равномерная норма на пространстве $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$ была эквивалентна стандартной норме этого пространства.

3. При $s,\ t \geqslant 0,\ p,\ q > 1$ в случае выполнения условий, обобщающих классическое условие Стрихартца, в наиболее общей ситуации получены описания пространств мультипликаторов $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$ и $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)]$ в терминах равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов $H^{\gamma}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ при выполнении дополнительных условий $p \leqslant q$ и $p \leqslant q'$ соответственно. При этом показано, что условия $p \leqslant q$ и $p \leqslant q'$ являются необходимыми для получения таких описаний.

4. В случае невыполнения условий стрихартцевского типа получены двусторонние вложения пространств типа $H^{\gamma}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ в пространство мультипликаторов $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-s}_{q'}(\mathbb{R}^n)]$ в ситуации, когда $s \geqslant 0,\ p,\ q > 1$.

5. Доказано, что если потенциал является компактным мультипликатором из пространства $H^{\alpha}_2(\mathbb{T}^n)$ в пространства $H^{-\alpha}_2(\mathbb{T}^n)$, то соответствующее сингулярное возмущение степени оператора Лапласа на многомерном торе $\mathbb{T}^n$ имеет компактную резольвенту, а система его корневых векторов полна в $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n)$. Также в этой ситуации получена асимптотика считающей функции собственных значений этого возмущения.

Развитые в диссертации методы исследования пространств мультипликаторов в пространствах бесселевых потенциалов могут быть применены и для исследования более общего случая мультипликаторов в пространствах Бесова–Лизоркина–Трибеля.

В случае пространств Лизоркина–Трибеля, которые так же, как и пространства бесселевых потенциалов, обладают свойством равномерной локализации, большой интерес представляет получение в случае выполнения условий типа Стрихартца точного описания соответствующего пространства мультипликаторов в терминах равномерно локализованных пространств Лизоркина–Трибеля, аналогичного описаниям, полученным в диссертации для пространств $H_p^s(\mathbb{R}^n)$. Возможность ослабления условий на сингулярный потенциал, накладываемых в основных теоремах третьей главы, связана с детальным изучением вопроса компактности мультипликаторов на торе, положительно решённого в диссертации в случае выполнения условий типа Стрихартца. Также применяемые методы теории мультипликаторов являются перспективными для изучения сингулярных возмущений эллиптических операторов общего вида как в случае $n-$мерного тора, так и в более общем случае компактного гладкого многообразия.

Список литературы

[1] Д.-Г. Бак, А. А. Шкаликов, “Мультипликаторы в дуальных соболевских пространствах и операторы Шрёдингера с потенциалами-распределениями”, *Матем. заметки*, **71 : 5** (2002), 643 – 651.

[2] Й. Берг, Й. Лёфстрём, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980.

[3] Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддев, “Замечание об уравнении Щрёдингера с сингулярным потенциалом”, *Докл. АН СССР*, **137 : 5** (1961), 1011 – 1014.

[4] В. В. Борисов, “О равномерной резольвентной сходимости линейных операторов при возмущении”, *Матем. заметки*, **48 : 2** (1990), 19 – 25.

[5] А. Б. Гулисашвили, “О мультипликаторах в пространствах Бесова”, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **135** (1984), 36 – 50.

[6] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Спектральная теория, самосопряжённые операторы в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1966.

[7] Г. А. Калябин, “Критерии мультипликативности и вложения в C пространств типа Бесова-Лизоркина-Трибеля”, *Матем. заметки*, **30 : 4** (1981), 517 – 526.

[8] Г. А. Калябин, “Поточечные мультипликаторы в некоторых пространствах Соболева, содержащих неограниченные функции”, *Тр. МИАН*, **204** (1993), 160 – 165.

[9] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[10] С. С. Кутателадзе, *Основы функционального анализа*, Изд-во Инс-та математики, Новосибирск, 2001.

[11] В. Г. Мазья, Т. О. Шапошникова, *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1986.

[12] А. С. Маркус, *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков*, Штиинца, Кишинёв, 1986.

[13] Р. А. Минлос, Л. Д. Фаддеев, “О точечном взаимодействии для системы из трёх частиц в квантовой механике”, *Докл. АН СССР*, **141 : 6** (1961), 1335 – 1338.

[14] В. А. Михайлец, В. Н. Молибога, “О спектре сингулярных возмущений операторов на окружности”, *Матем. заметки*, **91 : 4** (2012), 629 – 632.

[15] М. И. Нейман-Заде, *Операторы Шрёдингера и эллиптические операторы с коэффициентами-распределениями*, Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, 2002.

[16] М. И. Нейман-Заде, А. М. Савчук, “Операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами”, *Тр. МИАН*, **236** (2002), 262 – 271.

[17] М. И. Нейман-Заде, А. А. Шкаликов, “Операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов”, *Матем. заметки*, **66 : 5** (1999), 723 – 733.

[18] А. И. Парфёнов, “Характеризация мультипликаторов в пространствах Хедберга-Нетрусова”, *Матем. тр.*, **14 : 1** (2011), 158 – 194.

[19] Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу*, Мир, М., 1979.

[20] И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.

[21] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.

[22] S. Albeverio, S. Fassari, F. Rinaldi, “A remarkable spectral feature of the Schroedinger Hamiltonian of the harmonic oscillator perturbed by an attractive δ'-interaction centred at the origin: double degeneracy and level crossing”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46 : 38** (2013).

[23] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden, *Solvable models in quantum mechanics*, AMS Chelsea Publishing (2nd edition), Providence, 2005.

[24] S. Albeverio, P. Kurasov, *Singular perturbations of differential operators. Solvable Schroedinger type operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[25] G. Bourdaud, “Localisations des espaces de Besov”, *Stud. Math.*, **90 : 2** (1988), 153 – 163.

[26] P. Djakov, B. Mityagin, “Spectral gaps of Schroedinger operators with periodic singular potentials”, *Dynamics of PDE*, **6 : 2** (2009), 95 – 165.

[27] D. Drihem, M. Moussai, “Some embeddings into the multiplier spaces associated to Besov and Lizorkin-Triebel spaces”, *Z. Anal. Anwend.*, **21 : 1** (2002), 179 – 184.

[28] D. E. Edmunds, H. Triebel, “Eigenvalue distributions of some degenerate elliptic operators: an approach via entropy numbers”, *Math. Ann.*, **299 : 2** (1994), 311 – 340.

[29] D. E. Edmunds, H. Triebel, *Function Spaces, Entropy Numbers, Differential Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[30] Yu. V. Egorov, V. A. Kondratiev, *On spectral theory of elliptic operators*, Birkhauser, Basel, 1996.

[31] J. Franke, “On the spaces $F^s_{p,\,q}$ of Triebel-Lizorkin type: pointwise multipliers and spaces on domains”, *Math. Nachr.*, **125** (1986), 29 – 68.

[32] M. Frazier, B. Jawerth, “A discrete transform and decompositions of distribution spaces”, *J. Funct. Anal.*, **93 : 1** (1990), 34 – 170.

[33] M. Gadella, M. L. Glasser, L. M. Nieto, “One dimensional models with a singular potential of the type $-\alpha\delta(x) + \beta\delta'(x)$”, *Int. J. Theor. Phys.*, **50 : 7** (2011), 2144 – 2152.

[34] S. Gala, “Multipliers spaces, Muckenhoupt weights and pseudo-differential operators”, *J. Math. Anal. Appl.*, **324 : 2** (2006), 1262 – 1273.

[35] S. Gala, P. G. Lemarie-Rieusset, “Multipliers between Sobolev spaces and fractional differentiation”, *J. Math. Anal. Appl.*, **322 : 2** (2006), 1030 – 1054.

[36] P. Germain, “Multipliers, paramultipliers and weak-strong uniqueness for the Navier-Stokes equations”, *J. Differential Equations*, **226 : 2** (2006), 373 – 428.

[37] G. Grubb, *Distributions and operators*, Springer, New York, 2009.

[38] D. D. Haroske, L. Skrzypczak,, “Spectral theory of some degenerate elliptic operators with local singularities”, *J. Math. Anal. Appl.*, **371 : 1** (2010), 282 – 299.

[39] R. O. Hryniv Ya. V. Mykytyuk, “1D Schroedinger operators with periodic singular potentials”, *Meth. Funct. Anal. Topol.*, **7 : 4** (2001), 31 – 42.

[40] J. Johnsen, “Pointwise multiplication on Besov and Triebel-Lizorkin spaces”, *Math. Nachr.*, **175** (1995), 85 – 133.

[41] T. Kappeler, C. Mohr, “Estimates for periodic and Dirichlet eigenvalues of the Schroedinger operator with singular potentials”, *J. Funct. Anal.*, **186 : 1** (2001), 62 – 91.

[42] T. Kappeler, P. Topalov, “Riccati map on $L^2_0(\mathbb{T})$ and its applications”, *J. Math. Anal. Appl.*, **309 : 2** (2005), 544 – 566.

[43] H. Koch, W. Sickel, “Pointwise multipliers of Besov spaces of smoothness zero and spaces of continuous functions”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **18 : 3** (2002), 587 – 626.

[44] E. Korotyaev, “A priori estimates for the Hill and Dirac operators”, *Russ. J. Math. Phys.*, **15 : 3** (2008), 320 – 331.

[45] L. D. Ky, “Bilinear decompositions and commutators of singular integral operators”, *Trans. Am. Math. Soc.*, **365 : 6** (2013), 2931 – 2958.

[46] D. Lannes, “Sharp estimates for pseudo-differential operators with symbols of limited smoothness and commutators”, *J. Funct. Anal.*, **232 : 2** (2006), 495 – 539.

[47] P. G. Lemarie-Rieusset, *The Navier-Stokes problem in the 21st century*, Chapman And Hall/CRC, Boca Raton, 2016.

[48] P. G. Lemarie-Rieusset, R. May, “Uniqueness for the Navier-Stokes equations and multipliers between Sobolev spaces”, *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, **66 : 4** (2007), 819 – 838.

[49] J. Marschall, “Some remarks on Triebel spaces”, *Stud. Math.*, **87** (1987), 79 – 92.

[50] J. Marschall, “Pseudo-differential operators with coefficients in Sobolev spaces”, *Trans. Am. Math. Soc.*, **307 : 1** (1988), 335 – 361.

[51] J. Marschall, “On the boundedness and compactness of nonregular pseudo-differential operators”, *Math. Nachr.*, **175 : 1** (1995), 231 – 262.

[52] V. G. Maz’ya, T. O. Shaposhnikova, “Characterization of multipliers in pairs of Besov spaces”, *Operator Theoretical Methods and Applications to Mathematical Physics: The Erhard Meister Memorial Volume*, 2004, 365 – 386.

[53] V. G. Maz’ya, T. O. Shaposhnikova, *Theory of Sobolev multipliers, with applications to differential and integral operators*, Springer, Berlin, 2009.

[54] V. G. Maz’ya, I. E. Verbitsky, “The Schroedinger operator on the energy space: boundedness and compactness criteria”, *Acta Math.*, **188 : 2** (2002), 263 – 302.

[55] V. G. Maz’ya, I. E. Verbitsky, “The form boundedness criterion for the relativistic Schroedinger operator”, *Ann. Inst. Fourier*, **54 : 2** (2004), 317 – 339.

[56] V. G. Maz’ya, I. E. Verbitsky, “Form boundedness of the general second-order differential operator”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **59 : 9** (2006), 1286 – 1329.

[57] B. Mityagin, P. Siegl, “Root system of singular perturbations of the harmonic oscillator type operators”, *Lett. Math. Phys.*, **106 : 2** (2016), 147 – 167.

[58] D. Mugnolo, R. Nittka, O. Post, “Norm convergence of sectorial operators on varying Hilbert spaces”, *Oper. Matrices*, **7 : 4** (2013), 955 – 995.

[59] E. Nakai, “A characterization of pointwise multipliers on the Morrey spaces”, *Sci. Math.*, **3 : 3** (2000), 445 – 454.

[60] M. I. Neiman-Zade, A. A. Shkalikov, “Strongly elliptic operators with singular coefficients”, *Russ. J. Math. Phys.*, **13 : 1** (2006), 70 – 78.

[61] S. Rosenberg, *The Laplacian on a Riemanian manifold: an introduction to analysis on manifolds*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[62] T. Runst, W. Sickel, *Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators and nonlinear partial differential equations*, De Gruyter, Berlin, 1996.

[63] W. Sickel, “On pointwise multipliers for $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ in case $\sigma_{p,q} < s < \frac{n}{p}$”, *Ann. Mat. Pura Appl., IV*, **176** (1999), 209 – 250.

[64] W. Sickel, S. Smirnov, “Localization properties of Besov spaces and of its associated multiplier spaces”, *Jenaer Schriften Math. Inf.*, **21** (1999).

[65] W. Sickel, H. Triebel, “Hoelder inequalities and sharp embeddings in function spaces of $B^s_{p,q}$ and $F^s_{p,q}$ type”, *Z. Anal. Anwend.*, **14 : 1** (1995), 105 – 140.

[66] R. S. Strichartz, “Multipliers on fractional Sobolev spaces”, *J. Math. Mech.*, **16** (1967), 1031 – 1060.

[67] H. Triebel, *Theory of function spaces II*, Birkhauser, Basel, 1992.

[68] T. Valent, “A property of multiplication in Sobolev spaces. Some applications”, *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, **74** (1985), 63 – 73.

[69] M. Yamazaki, “A quasi-homogeneous version of paradifferential operators, Part I: Boundedness on spaces of Besov type”, *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A*, **33** (1986), 131 – 174.

[70] A. Youssfi, “Regularity properties of singular integral operators”, *Stud. Math.*, **119 : 3** (1996), 199 – 217.

Работы автора по теме диссертации

[71] А. А. Беляев, “Сингулярные возмущения степеней оператора Лапласа на торе”, *Матем. заметки*, **94 : 4** (2013), 632 – 636.

[72] A. A. Belyaev, “Characterization of spaces of multipliers for Bessel potential spaces”, *Mathematical Notes*, **96 : 6** (2014), 634 – 646.

[73] А. А. Беляев, “О точности вложения пространств бесселевых потенциалов в пространства мультипликаторов”, *Международная конференция “Современные проблемы математики, механики и их приложений”, посвящённая 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего,* Материалы конференции, М.: Университетская книга, 2009.

[74] А. А. Беляев, “Сингулярные возмущения степеней оператора Лапласа на торе”, *Международная конференция “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвящённая 110-ой годовщине со дня рождения И.Г. Петровского, XXIII совместное заседание Московского математического общества и семинара им. И.Г. Петровского,* Сборник тезисов, М.: Изд. МГУ, 2011.

[75] А. А. Беляев, “Теоремы вложения для пространств мультипликаторов”, *Международная конференция “Спектральная теория и дифференциальные уравнения”, посвящённая 100-летию со дня рождения Б.М. Левитана,* Сборник тезисов, М.: Изд. МГУ, 2014.

[76] А. А. Беляев, “Пространства мультипликаторов для пространств бесселевых потенциалов: эквивалентные нормы и характеризация в шкале пространств $H^s_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n)$”, *Международная конференция “Функциональные пространства и теория приближения функций”, посвящённая 110-летию со дня рождения академика С.М. Никольского,* Тезисы докладов, М.: Изд. МИАН, 2015.