

"УТВЕРЖДАЮ"

Проректор по организации научной и  
просекторно-инновационной деятельности  
Южного федерального университета  
доктор экономических наук, доцент



И. К. Шевченко

» ноября 2016 г.

### ОТЗЫВ

ведущей организации — федерального государственного  
автономного образовательного учреждения высшего образования

«Южный федеральный университет»

на диссертацию Беляева Алексея Александровича

«Мультипликаторы в пространствах бесселевых потенциалов

и сингулярные возмущения эллиптических операторов»,

представленную на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук по специальности

01.01.01 — «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация А. А. Беляева посвящена важным задачам современной теории функциональных пространств, находящимся на стыке функционального анализа, теории операторов и гармонического анализа. В диссертации изучаются пространства мультипликаторов общего вида, действующих из произвольного пространства бесселевых потенциалов  $H_p^s(\mathbb{R}^n)$  в другое такое же пространство  $H_q^t(\mathbb{R}^n)$ . Развита метод конструктивного описания этих пространств, опирающийся на использование шкалы равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов, и, в частности, в наиболее общей ситуации получены описания соответствующих пространств мультипликаторов в терминах этой шкалы. Исследованы сингулярные возмущения степеней оператора Лапласа на  $n$ -мерном торе.

Систематическое изучение мультипликаторов в пространствах функций дробной гладкости соболевского типа началось в 1960-ые годы с класси-

ческих результатов Р. С. Стрихартца, Я. Петре, И. И. Хиршмана, А. П. Кальдерона и других математиков. Интенсивно развивались новые методы и подходы, в частности, были изучены мультипликаторы в классических пространствах Бесова, Трибеля-Лизоркина, их многочисленных обобщениях, в других пространствах, связанных с дробными степенями операторов математической физики. Изучение мультипликаторов в пространствах соболевского типа в случае, когда индексы гладкости этих пространств имеют разные знаки, было инициировано циклом работ А. А. Шкаликова, М. И. Нейман-Заде и Дж. -Г. Бака, где был предложен новый метод получения достаточных условий принадлежности распределения пространству мультипликаторов в терминах выполнения мультипликативных функциональных оценок. Многочисленные приложения мультипликаторных методов и подходов к различным задачам теории операторов и теории функций обуславливают актуальность тематики данной диссертационной работы.

Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения.

В первой главе доказывается при  $s, t \geq 0$  точность вложения

$$H_{n/\max(s,t), \text{unif}}^{-\min(s,t)}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_2^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)],$$

установленного ранее в совместной работе М. И. Нейман-Заде и А. А. Шкаликова. Из этого выводится основной результат первой главы о невозможности описания пространств мультипликаторов в терминах равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов даже при  $p = q = 2$ , то есть в наилучшем случае, если условия стрихартцевского типа, связывающие индекс гладкости пространства с его размерностью, не выполняются.

Во второй главе диссертации исследуются пространства мультипликаторов из  $H_p^s(\mathbb{R}^n)$  в  $H_q^t(\mathbb{R}^n)$  для произвольных индексов  $s, t \in \mathbb{R}$  и  $p, q > 1$ . Получено описание для пространств мультипликаторов  $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_q^t(\mathbb{R}^n)]$  при  $p \leq q$  и  $M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_{q'}^{-t}(\mathbb{R}^n)]$  при  $p \leq q'$  в терминах равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов  $H_{r, \text{unif}}^\gamma(\mathbb{R}^n)$  при условиях, обобщающих классическое условие Стрихартца. Эти результаты являются новыми даже в случае неотрицательных индексов гладкости и содержат,



в частности, все известные ранее результаты такого рода.

Развитая в диссертационной работе техника теории мультипликаторов применяется в третьей главе к исследованию сингулярных возмущений степеней оператора Лапласа на  $n$ -мерном торе  $\mathbb{T}^n$ . Основным результатом состоит в том, что если потенциал является компактным мультипликатором из  $H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$  в  $H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$ , то соответствующее сингулярное возмущение степени оператора Лапласа на  $\mathbb{T}^n$  имеет компактную резольвенту, система его корневых векторов полна в  $L_2(\mathbb{T}^n)$ , а асимптотика считающей функции собственных значений этого возмущения определяется известной асимптотикой невозмущенного оператора.

Имеется несколько замечаний, не носящих принципиального характера. Так в теореме 1.3.1 отсутствует условие  $\max(s, t) > 0$ , без которого нельзя гарантировать существование хотя бы одного числа  $\alpha \in (0, s + t)$ . В формулировке теоремы 3.1.2 в частном случае вводится понятие сужения суммы операторов, которое далее на стр. 99 определяется в общем случае. Логично сначала ввести общее определение, которое использовалось бы, в том числе, в формулировке теоремы 3.1.2. Возникает также вопрос о целесообразности использования двух различных обозначений для равномерной мультипликаторной нормы. Эти замечания не являются существенными и не снижают научную значимость результатов диссертации.

Результаты диссертации являются новыми, в полной мере представлены в работах, опубликованных в журналах из списка ВАК, и докладывались на представительных научных семинарах и международных конференциях. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Диссертационная работа носит теоретический характер. Развитие в ней методы и подходы представляют несомненный интерес в контексте дальнейших исследований по теории мультипликаторов, теории сингулярных возмущений операторов, теории уравнений в частных производных и в других разделах математики.

Диссертационная работа А. А. Беляева «Мультипликаторы в пространствах бесселевых потенциалов и сингулярные возмущения эллиптических

операторов» является цельным и завершенным научным исследованием на актуальную тему. Данная работа отвечает всем требованиям «Положения о присуждении учёных степеней», а её автор — Беляев Алексей Александрович — заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

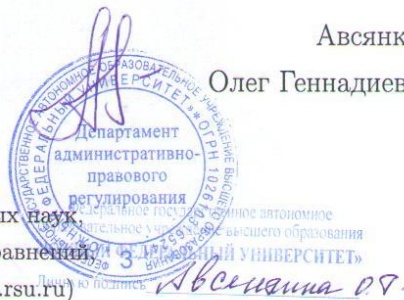
Отзыв подготовлен доктором физико-математических наук (специальность 01.01.01), профессором кафедры дифференциальных и интегральных уравнений Института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета Алексеем Николаевичем Карапетянцем (e-mail: karapetyants@gmail.com)

Отзыв заслушан и утвержден на заседании кафедры дифференциальных и интегральных уравнений Института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, протокол № 3 от 3 ноября 2016 года.

Заведующий кафедрой дифференциальных и интегральных уравнений Института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета доктор физико-математических наук (специальность 01.01.01), доцент

Авсянкин  
Олег Геннадиевич

344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а,  
Институт математики, механики и компьютерных наук  
кафедра дифференциальных и интегральных уравнений,  
телефон: 8(863) 2975-116. e-mail: avsyanki@math.rsu.ru



ЗАВЕРЯЮ:

Ведущий специалист по работе с персоналом  
« 09 » и « Валцова С.В. »  
20 16 г.