МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
(РУДН)

ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198
ОГРН 1027739189323; ОКПО 02066463; ИНН 7728073720

Тел. (495) 434-53-00; факс (495) 433-15-11;
www.rudn.ru; E-mail: rudn@rudn.ru

____ ______________20 ______ №______________

ОТЗЫВ

официального оппонента В.И. Буренкова на диссертационную работу
Беляева Алексея Александровича
«Мультипликаторы в пространствах бесселевых потенциалов
и сингулярные возмущения эллиптических операторов»,
представленную на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация Алексея Александровича Беляева посвящена актуальным вопросам современной теории мультипликаторов в пространствах бесселевых потенциалов и её приложениям к спектральной теории операторов типа Лапласа в случае периодических краевых условий.

Пространства бесселевых потенциалов являются естественным обобщением пространств Соболева на случай произвольных (не обязательно целых, не обязательно положительных) индексов гладкости. Эти пространства могут быть получены из классических пространств Соболева с помощью комплексного метода интерполяции, относительно которого пространства бесселевых потенциалов образуют замкнутую шкалу.

Вскоре после того, как в работах Р. А. Адамса, Н. Ароншайна, К. Т. Смита, А. П. Кальдерона и других математиков были введены эти пространства и изучены их основные свойства, Р. С. Стрихартцем было проведено и детальное изучение пространства мультипликаторов, действующих из пространства бесселевых потенциалов $H^s_p(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, $p > 1$, в себя же. Р. С. Стрихартц установил, что при $s > n/p$ (то есть в случае, когда $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вложено в пространство $L_\infty(\mathbb{R}^n)$) пространство мультипликаторов $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^s_p(\mathbb{R}^n)]$ совпадает с равномерно локализованным пространством бесселевых потенциалов $H^s_{p,\, unif}(\mathbb{R}^n)$ с нормой

$$\|u\|_{H^s_{p,\, unif}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \|\eta(\cdot + z)u(\cdot)\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}\,,$$

где η – бесконечно непрерывно дифференцируемая функция с компактным носителем такая, что $0 \le \eta(x) \le 1, x \in \mathbb{R}^n$ и $\eta(x) = 1, |x| \le 1$ (для разных таких функций η эти нормы эквивалентны).

В дальнейшем использование шкалы равномерно локализованных пространств соболевского типа для описания пространств мультипликаторов было продолжено, причём был получен и ряд результатов такого рода для мультипликаторов в пространствах Никольского-Бесова и Лизоркина-Трибеля.

В. Г. Мазья и Т. О. Шапошникова предложили другой подход к изучению мультипликаторов в обобщённых соболевских пространствах, основанный на применении понятия ёмкости компактного множества.

В большинстве этих работ рассматривалось пространство мультипликаторов, действующих из некоторого пространства соболевского типа в себя. Случай же мультипликаторов, действующих из пространства с положительным индексом гладкости в пространство с отрицательным индексом гладкости, впервые систематически был рассмотрен в ряде работ А. А. Шкаликова, М. И. Нейман-Заде и Дж. - Г. Бака.

Теория мультипликаторов представляет значительный интерес сама по себе. Кроме того, она применяется для решения ряда проблем теории дифференциальных уравнений с частными производными, например, при изучении сингулярных возмущений эллиптических дифференциальных операторов и спектральных характеристик этих операторов. Таким образом, актуальность темы диссертации не вызывает сомнений.

Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав и заключения.

В первой главе диссертации показано, что при $s,\ t \geqslant 0$ и выполнении условия $0 < \max(s,t) < n/2$ показатель $p_0 = n/\max(s,t)$ в непрерывном вложении

$$H^{-min(s,t)}_{p_0,\, unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_2(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_2(\mathbb{R}^n)]$$

невозможно уменьшить таким образом, чтобы соответствующее вложение оставалось справедливым.

Для доказательства этого факта для всех достаточно малых положительных чисел ε строятся конкретные регулярные функционалы u_ε, принадлежащие пространству $H^{-\min(s,t)}_{p_0-\varepsilon,\, unif}(\mathbb{R}^n)$, но не являющиеся мультипликаторами из $H^s_2(\mathbb{R}^n)$ в $H^{-t}_2(\mathbb{R}^n)$. Отсюда следует, что в случае, когда $0 < \max(s,t) < n/2$, пространство мультипликаторов $M[H^s_2(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_2(\mathbb{R}^n)]$ не совпадает ни с одним пространством вида $H^\gamma_{r,\, unif}(\mathbb{R}^n)$.

Во второй главе существенно обобщаются полученные ранее результаты А. А. Шкаликова, М. И. Нейман-Заде, Дж. - Г. Бака, В. Г. Мазьи и Т. О. Шапошниковой по описанию пространств мультипликаторов $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$ в терминах равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов. Для $s,\ t \geqslant 0$ в случае, когда $p \leqslant q$ и выполняются условия, обобщающие восходящее к работе Стрихартца условие $s > n/p$, доказано, что пространство $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$ совпадает с пространством $H^t_{q,\, unif}(\mathbb{R}^n)$, а пространство $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_q(\mathbb{R}^n)]$ совпадает с пространством $H^{-t}_{q,\, unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p',\, unif}(\mathbb{R}^n)$.

При этом в диссертации показано, что условие $p \leqslant q$ является необходимым для получения такой характеризации пространства мультипликаторов. Поскольку из результатов первой главы следует необходимость условий стрихартцевского типа, то поставленная задача описания мультипликаторов в терминах шкалы $H^{\gamma}_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ решена таким образом в максимально общей ситуации.

Если же условия стрихартцевского типа не выполняются, то при естественных ограничениях для некоторого $r_0 > 1$ установлено непрерывное вложение пространства $H^{-s}_{r_0,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ в пространство мультипликаторов $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-s}_q(\mathbb{R}^n)]$.

Третья глава посвящена исследованию сингулярных возмущений степеней оператора Лапласа, заданных на $n-$мерном торе $\mathbb{T}^n$. Её результаты основаны на применении теории мультипликаторов и вносят вклад в развитие теории сингулярных возмущений эллиптических операторов в случае периодических краевых условий. В этой главе доказывается, что для $s,\ t \geqslant 0$ пространство мультипликаторов $M[H^s_2(\mathbb{T}^n) \to H^{-t}_2(\mathbb{T}^n)]$ при выполнении условия $\max(s,t) > n/2$ совпадает с периодическим пространством бесселевых потенциалов $H_2^{-\min(s,t)}(\mathbb{T}^n)$, а при $s,\ t > 0,\ \max(s,t) < n/2$ для произвольного числа $\varepsilon \in (0, \min(s,t)]$ имеет место непрерывное вложение

$$H^{-\min(s,t)+\varepsilon}_{n/\max(s,t)}(\mathbb{T}^n) \subset M[H^s_2(\mathbb{T}^n) \to H^{-t}_2(\mathbb{T}^n)].$$

Эти факты позволяют получить основной результат третьей главы, который состоит в том, что для сингулярных потенциалов из соответствующего периодического пространства бесселевых потенциалов возмущение степени оператора Лапласа $(-\Delta)^s,\ s > 0$, является оператором с компактной резольвентой (откуда, в частности, следует дискретность спектра этого оператора), а система его собственных и присоединённых функций полна в пространстве $L_2(\mathbb{T}^n)$. Также получена асимптотика считающей функции собственных значений возмущённого оператора.

Автор продемонстрировал хорошее владение методами функционального анализа и теории дифференциальных уравнений с частными производными. Для получения перечисленных результатов автору пришлось преодолеть существенные трудности и разработать новые методы исследования.

Все результаты диссертации являются новыми и снабжены строгими и подробными доказательствами. Следует особо отметить тщательность изложения материала.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора, в том числе в журналах из списка ВАК, и докладывались на ряде научных семинаров и на ряде международных научных конференций.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

В качестве пожелания для дальнейшей работы по этой тематике можно порекомендовать завершить исследование вопроса о том, когда функция $|x|^{-\alpha}$ с $\alpha > 0$ принадлежит пространству $M[H^s_2(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_2(\mathbb{R}^n)]$, где $s, t \geq 0, \max(s,t) > 0$. В первой главе доказано, что если $\alpha > s + t$, то не принадлежит этому пространству (что и используется в дальнейшем), а если $\alpha < s + t$, то принадлежит. Остается нерассмотренным случай $\alpha = s + t$.

Значительный интерес предсталяет также рассмотрение в задаче о мультипликаторах "пограничного" случая $\max(s, t) = \frac{n}{p}$.

Работа носит теоретический характер. Её результаты могут найти применение в исследованиях по теории функциональных пространств, теории возмущений и по смежным вопросам теории уравнений в частных производных, проводимых в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, Математическом институте имени В. А. Стеклова Российской академии наук, Российском университете дружбы народов, Южном федеральном университете, Институте математики имени С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук и других научных центрах.

Диссертационная работа А. А. Беляева «Мультипликаторы в пространствах бесселевых потенциалов и сингулярные возмущения эллиптических операторов» является законченным научным исследованием, соответствует «Положению о присуждении учёных степеней» и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым Высшей аттестационной комиссией Министерства образования и науки Российской Федерации к диссертационным работам на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, а её автор, Беляев Алексей Александрович, заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент: 15.11.2016

Буренков Виктор Иванович,
доктор физико-математических наук (специальность 01.01.01), профессор,
заведующий кафедрой математического анализа и теории функций
факультета физико-математических и естественных наук
федерального государственного автономного образовательного
учреждения высшего образования
«Российский университет дружбы народов»

Почтовый адрес: 117198, Москва, улица Миклухо-Маклая, 6
Телефон: 8 (495) 952 - 35 - 83, мобильный 8 (985) 279-81-98
Адрес электронной почты: burenkov@cf.ac.uk

"Подпись руки профессора В.И. Буренкова заверяю"

Учёный секретарь Учёного совета РУДН
/Савчин В.М./