ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу
Беляева Алексея Александровича
«Мультипликаторы в пространствах бесселевых потенциалов
и сингулярные возмущения эллиптических операторов»,
представленную на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

В диссертации изучаются действующие в соболевских пространствах мультипликаторы, а также связанные с такими мультипликаторами сингулярные возмущения степеней оператора Лапласа на n-мерном торе. При выполнении некоторых естественных ограничений, в максимально широкой ситуации получено описание таких мультипликаторов в терминах равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов. При невыполнении этих ограничений показана невозможность подобного описания, причём в случае, когда индексы лебеговости соответствующих пространств равны 2, исследован вопрос о точности вложения равномерно локализованного пространства бесселевых потенциалов в соответствующее пространство мультипликаторов.

Историю описания мультипликаторов в пространствах бесселевых потенциалов открывает относящаяся к 1967 году статья Р. С. Стрихартца, в которой в терминах равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов $H^{\gamma}_{r,unif}(\mathbb{R}^n)$ была установлена характеризация пространства мультипликаторов $M[H^s_p(\mathbb{R}^n), H^s_p(\mathbb{R}^n)]$. В дальнейшем этот результат Р. С. Стрихартца получил существенное развитие в следующих двух направлениях. Во-первых, рассматривались мультипликаторы из некоторого пространства более общего вида — например, пространства Бесова $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ или пространства Лизоркина–Трибеля $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ — в себя при выполнении условия $s > n/p$ (накладывавшегося также и в работе Р. С. Стрихартца). Во-вторых, рассматривались мультипликаторы из одного пространства бесселевых потенциалов в аналогичное, однако не совпадающее с первым.

В рамках первого направления, использующего технику так называемых парапроизведений, были получены описания пространств мультипликаторов $M[F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n), F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)]$ (Й. Франке, 1986) и $M[B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n), B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)]$ при выполнении дополнительного условия $p \leqslant q$ (В. Зикель, И. Смирнов, 1999). При этом ранее было показано также, что в случае $p > q$ такое описание для пространства $M[B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n), B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)]$ получить нельзя (Ж. Бурдо, 1988).

В рамках второго направления, в относящемся к началу 1980-ых цикле работ В. Г. Мазьи и Т. О. Шапошниковой, исследовались пространства мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n), H_p^t(\mathbb{R}^n)]$. Окончательный результат здесь имеет следующий вид:

$$M[H_p^s(\mathbb{R}^n), H_p^t(\mathbb{R}^n)] = H_{p,unif}^t(\mathbb{R}^n) \text{ при } p > 1, \ s \geqslant t \geqslant 0, s > \frac{n}{p}.$$

Все указанные результаты — относящиеся к обоим охарактеризованным выше направлениям исследования — касаются лишь ситуации, когда индексы гладкости s и t рассматриваемых пространств имеют общий знак (или даже просто совпадают). Между тем, с точки зрения теории возмущений эллиптических дифференциальных операторов наиболее интересным является как раз тот случай, когда знаки индексов гладкости различны. Изучение этой ситуации было начато в ряде работ Дж.-Г. Бака, М. И. Нейман-Заде и А. А. Шкаликова, относящихся к концу 1990-ых и первой половине 2000-ых годов. В этих работах, при выполнении условий типа отмеченного выше условия $s > n/p$, для пространства мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n), H_q^{-t}(\mathbb{R}^n)]$ в той ситуации, когда справедливы либо равенства $p = q = 2$, либо равенства $s = t$ и $p = q$, также было получено выраженное в терминах равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов описание.

Кроме того, в работе В. Г. Мазьи и Т. О. Шапошниковой (2004) было получено аналогичное описание пространства мультипликаторов $M[W_p^k(\mathbb{R}^n), W_p^{-l}(\mathbb{R}^n)]$, относящееся к случаю, когда индексы гладкости являются целыми числами (то есть рассматриваемые пространства представляют собой классические пространства Соболева).

Несмотря на всё сказанное, долгое время оставался открытым вопрос о возможности описания в терминах шкалы $H_{r,unif}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ для пространств мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n), H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ и $M[H_p^s(\mathbb{R}^n), H_q^{-t}(\mathbb{R}^n)]$ в том случае, когда $s, t \geqslant 0$, а индексы p и q не совпадают. В рецензируемой диссертации решение этого вопроса дано при ограничениях максимально общего вида.

Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы.

В первой главе установлено, что при выполнении накладываемого на индексы $s, t \geqslant 0$ условия

$$0 < \max(s,t) < n/2$$

непрерывное вложение пространства $H_{p_0,unif}^{-s_0}(\mathbb{R}^n)$, где положено $s_0 \rightleftharpoons \min(s,t)$ и $p_0 \rightleftharpoons n/\max(s,t)$, в пространство $M[H_2^s(\mathbb{R}^n), H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)]$ является точным в смысле невозможности дальнейшего уменьшения индекса p_0. Доказательство этого факта основано на исследовании условий принадлежности пространствам $H_{r,unif}^{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$ и $M[H_2^s(\mathbb{R}^n), H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)]$ регулярного функционала u_β с плотностью $f_\beta(x) = |x|^{-\beta}$. Этот результат важен тем, что из него может быть извлечён факт несовпадения пространства мультипликаторов $M[H_2^s(\mathbb{R}^n), H_2^{-t}(\mathbb{R}^n)]$ ни с одним из пространств $H_{r,unif}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ в том случае, когда $\max(s,t) < n/2$.

Вторая глава диссертации посвящена, главным образом, изучению проблемы описания пространства мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n), H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ в случае выполнения естественных ограничений, обобщающих условие $s > n/p$ из работы Р. С. Стрихартца. Центральные результаты этой главы относятся к описанию пространства мультипликаторов в случае как положительных индексов гладкости (теорема 2.3.1), так и индексов гладкости разного знака (теорема 2.3.2). Говоря более точно, в теореме 2.3.1 установлено, что для $s, t \geqslant 0$, и $p, q > 1$ при выполнении условия $s > n/p$ и естественных ограничений

$$p \leqslant q, \qquad s - \frac{n}{p} \geqslant t - \frac{n}{q}$$

пространство $M[H_p^s(\mathbb{R}^n), H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ совпадает с пространством $H_{q,unif}^t(\mathbb{R}^n)$. Теорема 2.3.2, в свою очередь, утверждает совпадение пространства мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n), H_q^{-t}(\mathbb{R}^n)]$ с пространством $H_{q,unif}^{-t}(\mathbb{R}^n) \cap H_{q',unif}^{-s}(\mathbb{R}^n)$ при выполнении оценок $s, t \geqslant 0$, $p, q > 1$ и $p \leqslant q$, а также одного из условий

$$s \geqslant t \geqslant 0, \quad s > \frac{n}{p} \qquad \text{или} \qquad t \geqslant s \geqslant 0, \quad t > \frac{n}{q'},$$

где

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

При этом показано, что вводимые дополнительно к содержащимся в постановке исходной проблемы условиям $s, t \geqslant 0$ и $p, q > 1$ ограничения на индексы p, q, s и t являются для получения описания соответствующего пространства мультипликаторов в терминах пространств $H_{r,unif}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ необходимыми.

Указанные результаты являются прямым и неулучшаемым (в смысле невозможности отказаться хотя бы от одного из накладываемых ограничений) обобщением всех полученных ранее результатов по описанию пространств мультипликаторов $M[H_p^s(\mathbb{R}^n), H_q^t(\mathbb{R}^n)]$ в терминах равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов.

В конце второй главы получена также теорема о справедливости непрерывного вложения

$$H_{r_0,unif}^{-s}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n), H_q^{-s}(\mathbb{R}^n)],$$

где положено

$$r_0 \rightleftharpoons \frac{n}{s - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) n},$$

в случае выполнения оценок $1 < p \leqslant q$ и дополнительного ограничения

$$\frac{n}{\max(p, q)} > s > n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right).$$

Вложения такого вида для пространств $M[H_p^s(\mathbb{R}^n), H_q^{-s}(\mathbb{R}^n)]$ при несовпадающих индексах p и q ранее, по-видимому, не рассматривались.

В третьей главе диссертации методы теории мультипликаторов применяются при изучении спектральных свойств сингулярных возмущений положительных степеней $(-\Delta)^\alpha$ оператора Лапласа на n-мерном торе $\mathbb{T}^n$. Основной результат этой главы составляет теорема 3.4.3, заключающаяся в следующем: в той ситуации, когда возмущающий потенциал представляет собой компактный мультипликатор из пространства $H_2^\alpha(\mathbb{T}^n)$ в пространство $H_2^{-\alpha}(\mathbb{T}^n)$, возмущённый оператор имеет компактную резольвенту, причём система его корневых векторов полна в пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbb{T}^n) = H_2^0(\mathbb{T}^n)$, а асимптотика считающей функции собственных значений определяется таковой для невозмущённого оператора. Также в этой главе рассмотрена проблема аппроксимации (в смысле равномерной резольвентной сходимости) оператора с сингулярным потенциалом из периодического пространства бесселевых потенциалов с негативным индексом гладкости операторами с гладкими потенциалами (теорема 3.4.2). Достаточное условие, гарантирующее возможность такой аппроксимации, даётся в терминах сходимости потенциалов в пространстве мультипликаторов на торе.

В заключении кратко перечисляются основные результаты диссертации, а также указываются возможные пути продолжения исследований по её тематике.

Текст диссертации содержит незначительное количество опечаток и неточностей, не носящих принципиального характера. Так, в условиях теоремы 1.3.1 для корректности приведённого доказательства требуется наложить дополнительное ограничение $\max(s,t) > 0$. Теорема 1.3.2 становится бессодержательной без исключения вырожденного случая $s = t = 0$. В доказательстве теоремы 1.3.2 (на стр. 40) указана неверная переменная интегрирования. На стр. 54 после определения 2.2.1 отмечена независимость этого определения от выбора функции φ, в то время как вводимая именно в нём норма $\|\cdot\|_{M_{unif,\varphi}[H_p^s(\mathbb{R}^n), H_q^t(\mathbb{R}^n)]}$ очевидным образом зависит от выбора указанной функции (в действительности речь здесь должна идти об эквивалентности получаемых на указанном пути пространств). В доказательстве леммы 2.3.1 случай $t = 0$ должен быть выделен для отдельного рассмотрения (что, впрочем, заведомо не сказывается на справедливости самого результата). Следует ещё раз отметить, однако, что все эти недостатки не затрагивают основной сути диссертационной работы и не снижают научной значимости её результатов.

Все результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и снабжены строгими математическими доказательствами. Основные результаты диссертации опубликованы в ряде работ автора, в том числе в журналах из списка ВАК, а также докладывались на ряде международных научных конференций и научно-исследовательских семинаров.

Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Работа носит теоретический характер. Её результаты могут найти применение в исследованиях по различным направлениям функционального анализа и теории функций вещественной переменной — таким, как теория пространств соболевского типа и теория интерполяции функциональных пространств, — а также по их приложениям к спектральной теории дифференциальных операторов.

Диссертационная работа А. А. Беляева «Мультипликаторы в пространствах бесселевых потенциалов и сингулярные возмущения эллиптических операторов» является законченным научным исследованием, соответствует «Положению о присуждении учёных степеней» и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым Высшей аттестационной комиссией Министерства образования и науки Российской Федерации к диссертационным работам на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. Её автор, Беляев Алексей Александрович, заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:

Владимиров Антон Алексеевич,
кандидат физико-математических наук (специальность 01.01.01),
старший научный сотрудник
отдела «Распознавание, защита и анализ информации»
Вычислительного центра им. А. А. Дородницына
Российской академии наук
Федерального государственного учреждения
«Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление”
Российской академии наук»

Почтовый адрес: 119333, г. Москва, улица Вавилова, 44, корп. 2
Адрес электронной почты: vladimi@mech.math.msu.su

17.11.2016

Подпись А.А. Владимирова заверяю
Ученый секретарь ФИЦ ИУ РАН
д.т.н. В.Н. Захаров
«17» 11 2016