МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Шилин Иван Сергеевич

АТТРАКТОРЫ МИЛНОРА И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Ильяшенко Юлий Сергеевич**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Лерман Лев Михайлович**
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Института информационных технологий, математики и механики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (ИИТММ ННГУ)

Тихомиров Сергей Борисович
доктор физико-математических наук, доцент направления «Математика» ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (СПбГУ)

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук (МИАН)

Защита диссертации состоится 9 декабря 2016 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе ФГБОУ ВО “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО “МГУ имени М.В. Ломоносова” по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, и на сайте механико-математического факультета:
http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi

Автореферат разослан «_____» октября 2016 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 на базе МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор **В. В. Власов**

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Существует довольно много неэквивалентных определений аттракторов. Эти определения объединены общей идеей: аттрактор динамической системы должен быть инвариантным множеством, к которому притягивается под действием динамики большинство или хотя бы большое количество точек фазового пространства.

Первые определения аттракторов появились в 60-е годы. Вплоть до середины 80-х эти определения, хоть и отличались друг от друга в деталях, формулировались исключительно в топологических терминах и были довольно похожи[1]. Во многих из них требовалось, чтобы аттрактор был пересечением образов некоторой своей поглощающей окрестности для положительных моментов времени. Вот одно из самых простых определений такого рода.

Определение (Максимальный аттрактор)**.** Пусть у непрерывного отображения F есть поглощающая область U, т.е. $\overline{F(U)} \subset U$. Тогда *максимальным аттрактором в области* U называется пересечение образов этой области под действием (положительных) итераций отображения: $A_{max}(F, U) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F^n(U)$.

Аттракторы, определенные таким образом, также называют топологическими, иногда добавляя какое-нибудь требование неразложимости, например требование топологической или цепочной транзитивности, однако в этом случае априори речь уже не идет о глобальном аттракторе: две притягивающие неподвижные точки одного отображения будут принадлежать разным неразложимым топологическим аттракторам.

Максимальные аттракторы, однако, плохо подходят для описания глобального притягивающего множества. Во первых, максимальный аттрактор зависит от выбора поглощающей области U. Во-вторых, он может содержать блуждающие[2] точки, к которым заведомо ничего не притягивается.

[1] Обзор этих определений можно найти в работе *Milnor J.* On the concept of attractor // Comm. Math. Phys. 1985. Vol. 99. Pp. 177–195.

[2] Точка называется блуждающей, если у нее есть окрестность, которая не пересекается со своими образами под действием динамики, и неблуждающей — в противном случае. Совокупность неблуждающих точек называется неблуждающим множеством. Здесь и далее мы ограничиваемся рассмотрением динамических систем с дискретным временем.

Наконец, как показали К. Бонатти, М. Ли и Д. Янг[3], если рассматривать топологические аттракторы с требованием цепочной транзитивности, найдутся локально топологически типичные C^1-диффеоморфизмы без топологических аттракторов.

Дж. Милнор[4] первым, по-видимому, предложил определение аттрактора, опирающееся на меру на фазовом пространстве.

Определение (Аттрактор Милнора[5])**.** Пусть X — компактное метрическое пространство с борелевской мерой μ, а F — непрерывное отображение X в себя. *Аттрактором Милнора* отображения F называется наименьшее замкнутое множество, содержащее ω-предельные множества почти всех точек фазового пространства X.

Мы будем обозначать аттрактор Милнора через A_M или $A_M(F)$. В работе Дж. Милнора показано, что если X — гладкое компактное риманово многообразие (возможно, с краем) с мерой, эквивалентной мере Лебега в каждой координатной окрестности[6], то аттрактор Милнора корректно определен. В общем случае доказательство проводится точно так же.

Нам также потребуются определения *статистического*[7] и *минимального*[8] аттракторов. Мы приводим здесь определения в том виде, в котором они используются в диссертации, и отсылаем читателя к обзору Ю.С. Ильяшенко[9], в котором обсуждаются эквивалентные определения, проливающие свет на общность милноровского, статистического и минимального аттракторов.

Статистическим ω-предельным множеством точки $x \in M$ (обозначение: $\omega_{stat}(x)$) будем называть множество точек $z \in M$, таких что для любой окрестности U точки z "частота" попадания (положительной) орбиты точ-

[3] *Bonatti C.*, *Li M.*, *Yang D.* On the existence of attractors // Trans. Amer. Math. Soc. 2013. Vol. 365, no. 3. Pp. 1369–1391.

[4] См. сноску 1.

[5] Дж. Милнор называет это *the likely limit set*.

[6] Т.е. образ нашей меры под действием каждой карты имеет всюду положительную гладкую плотность относительно меры Лебега. Любую такую меру на многообразии мы далее будем называть лебеговой.

[7] Теория бифуркаций / Арнольд В.И. [и др.] // Динамические системы – 5. М. : ВИНИТИ, 1986. с. 5—218. (Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления ; 5).

[8] *Gorodetski A.*, *Ilyashenko Yu.* Minimal and strange attractors // Internat. J. Bifur. Chaos. 1996. Vol. 6, no. 6. Pp. 1177–1183.

[9] *Ilyashenko Yu.* Minimal Attractors // EQUADIFF 2003. World Scientific Publ., 2005. Pp. 421–428.

ки x в U положительна, а точнее говоря, выполнено неравенство

$$\operatorname{Freq}(x,U) := \limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \#\{n : F^n(x) \in U,\ 0 \le n < N\} > 0.$$

Определение. *Статистическим аттрактором* $A_{stat}(F)$ отображения F называется минимальное по вложению замкнутое подмножество фазового пространства, содержащее $\omega_{stat}(x)$ для почти всех по мере μ точек x.

Рассмотрим последовательность мер $(F_*^n \mu)_{n\in\mathbb{N}}$, где $F_*^n\mu(S) = \mu(F^{-n}(S))$ для любого борелевского множества S, и последовательность средних $\overline{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} F_*^n \mu$. Будем называть *хорошей мерой* любой частичный предел последовательности $(\overline{\mu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в смысле $*$-слабой сходимости.

Определение. *Минимальным аттрактором* $A_{min}(F)$ отображения F называется замыкание объединения носителей всех хороших мер.

Следующие включения выполнены всегда, и притом каждое может быть строгим[10]:

$$A_{min}(F) \subset A_{stat}(F) \subset A_M(F) \subset A_{max}(F, X).$$

Аттракторы и устойчивость по Ляпунову

Определение. Инвариантное множество K отображения F называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любой окрестности U множества K существует меньшая окрестность $V \supset K$, такая что любая положительная полуорбита отображения F, начинающаяся в V, никогда не покидает U.

Максимальные аттракторы всегда устойчивы по Ляпунову — это легко следует из определения. Милноровские, статистические и минимальные аттракторы, напротив, могут быть неустойчивы. Простейший пример такой неустойчивости дается диффеоморфизмом окружности с единственной полуустойчивой неподвижной точкой:

$$x \mapsto x + 0.1(1 - \cos x).$$

В этом примере фазовое пространство не содержит непустых собственных диссипативных областей, так что ничего не остается, кроме как объявить всю окружность максимальным аттрактором. Однако такой аттрактор несет мало информации о предельном поведении орбит. В то же время

[10] См. предыдущую сноску.

очевидно, что все точки фазового пространства в конечном итоге притягиваются к точке 0, так что эта точка является в данном случае аттрактором Милнора, а также минимальным и статистическим аттрактором. Легко видеть, что этот аттрактор неустойчив по Ляпунову: с одной стороны точки убегают от нуля, прежде чем притянуться к нему.

Естественным образом возникает вопрос, насколько типичны диффеоморфизмы гладких многообразий с неустойчивыми по Ляпунову аттракторами Милнора. Например, неизвестен ответ на следующий вопрос.

Проблема. *Существует ли открытое множество диффеоморфизмов с неустойчивыми по Ляпунову аттракторами?*

Существенная часть диссертации посвящена локально топологически типичной неустойчивости аттракторов Милнора по Ляпунову и ее связи с другими динамическими явлениями.

Свойство диффеоморфизмов называется *топологически типичным* (или *типичным по Бэру*), если диффеоморфизмы, обладающие данным свойством, образуют остаточное подмножество[11] в рассматриваемом пространстве диффеоморфизмов. Свойство называется *локально топологически типичным*, если диффеоморфизмы с этим свойством образуют остаточное подмножество в некоторой области пространства диффеоморфизмов. Когда говорят, что (локально) топологически типичный диффеоморфизм обладает каким-либо свойством, имеется в виду, что это свойство (локально) топологически типично.

Можно сказать, что современная парадигма (не общепринятая) в теории динамических систем состоит в том, что нужно в первую очередь изучать свойства типичных систем. Типичные C^1-диффеоморфизмы и потоки легче поддаются исследованию по сравнению с C^r-системами для $r \geq 2$; обзор полученных для них результатов содержится в 10-й главе книги К. Бонатти, Л. Диаза и М. Вианы “Dynamics beyond uniform hyperbolicity”[12]; К. Бонатти также предложил программу дальнейших исследований в данном направлении[13]. Тема диссертации близко примыкает к этому кругу вопросов.

---

[11] т.е. подмножество, содержащее счетное пересечение открытых всюду плотных подмножеств рассматриваемого пространства диффеоморфизмов.

[12] *Bonatti C.*, *Díaz L.R.*, *Viana M.* Dynamics beyond uniform hyperbolicity. A global geometric and probabilistic perspective. Berlin : Springer-Verlag, 2005. xviii+384. (Encyclopaedia of Mathematical Sciences ; 102) (Mathematical Physics ; III).

[13] *Bonatti C.* Towards a global view of dynamical systems, for the C^1-topology // Ergodic Theory and

Цель работы

Диссертация посвящена исследованию свойств глобальных аттракторов динамических систем, в первую очередь аттракторов Милнора. Цель работы — изучить структуру аттракторов Милнора типичных отображений и выяснить, насколько часто встречаются динамические системы с неустойчивыми по Ляпунову аттракторами.

Научная новизна

Результаты работы являются новыми. Они заключаются в следующем.

- Установлено, что неустойчивость аттракторов Милнора по Ляпунову является локально топологически типичным феноменом, который всегда наблюдается в тех областях в пространстве диффеоморфизмов, где плотны диффеоморфизмы с гомоклиническим касанием для 2-сжимающего периодического седла, непрерывно зависящего от отображения.
- Доказано, что если у топологически типичного C^1-диффеоморфизма есть гомоклинический класс, не допускающий расщепления с доминированием, то аттрактор Милнора неустойчив по Ляпунову для этого диффеоморфизма или для обратного к нему.
- Для открытого всюду плотного множества ступенчатых косых произведений со слоем отрезок и сохраняющими ориентацию послойными отображениями найдена структура аттракторов Милнора; исследован (нетипичный) пример ступенчатого косого произведения с неустойчивым аттрактором.

Теоретическая и практическая значимость работы

Работа носит теоретический характер. Описываемый в работе феномен — локально топологически типичная неустойчивость аттракторов по Ляпунову — может представлять интерес для широкого круга специалистов в области динамических систем. Вспомогательные результаты, необходимые для доказательства леммы о захвате (см. краткое содержание работы), могут быть интересны специалистам в области гомоклинических бифуркаций.

Dynamical Systems. 2011. Vol. 31, no. 04. Pp. 959–993.

Методы исследования

В диссертации применяются классические методы гиперболической теории и методы теории гомоклинических бифуркаций, а также техника ренормализации. Как уже было отмечено выше, нас в первую очередь интересуют свойства топологически типичных систем, поэтому ключевым элементом доказательств является так называемое рассуждение Бэра или его частный случай — рассуждение Ньюхауса.[14] Другие важные ингредиенты — λ-лемма и лемма Франкса, а также замечательный прием С.С. Минкова, состоящий в применении теоремы Егорова для исследования аттракторов косых произведений.

Апробация результатов

Результаты работы докладывались на

- международной конференции "Dynamics, Bifurcations and Chaos 2015 (DBC II)" («Динамика, бифуркации и странные аттракторы, 2015»), Нижний Новгород, июль 2015, доклад "Lyapunov unstable Milnor attractors" («Неустойчивые по Ляпунову аттракторы Милнора»);
- семинаре «Динамические системы» (под руководством проф. Ю.С. Ильяшенко), МГУ, несколько докладов в 2011–2015гг.;
- летней школе «Динамические системы», Ратмино, 2015.
- межвузовском (МГУ им. М.В. Ломоносова, МГТУ им. Н.Э. Баумана, РЭУ им. Г.В. Плеханова) семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений под руководством проф. И.В. Асташовой и проф. А.В. Филиновского в 2016г.

[14] Суть рассуждения Бэра заключается в следующем. Пусть мы работаем в каком-то пространстве Бэра, например в полном метрическом пространстве $\mathrm{Diff}^r(M)$, и нас интересуют точки с некоторым свойством P. Чтобы показать, что это свойство топологически типично, достаточно представить его в виде конечной или счетной конъюнкции свойств $P_j,\ j \in \mathbb{N}$, таких что свойством P_j обладают точки из открытого всюду плотного множества. Другими словами, каждое свойство P_j должно быть "устойчиво" (открыто), в то время как отрицание этого свойства должно быть "неустойчиво" (пустая внутренность). Этот метод может использоваться для неявного доказательства существования.

Под рассуждением Ньюхауса подразумевается рассуждение Бэра, в котором свойство P — наличие у отображения бесконечного числа стоков, а свойство P_j — наличие j стоков, причем плотность свойства P_j доказывается с использованием устойчивого гомоклинического касания.

Препринт[15] с доказательствами теорем A, B и леммы размещен в репозитории arXiv.org.

Публикации

Основные результаты опубликованы в двух работах автора в журналах из перечня ВАК: [1] (в соавторстве с Ю.С. Ильяшенко) и [2].

Краткое содержание работы

Диссертация состоит из семи разделов, включая введение, заключение и список литературы из 44 наименований. Объем диссертации — 81 страница.

Во **введении (раздел 1)** даются основные определения, обосновывается актуальность темы и коротко описывается основное содержание работы, в том числе формулируются главные результаты.

В **разделе 2** показано, что неустойчивость аттракторов является довольно-таки распространенным явлением. Чтобы сформулировать основной результат раздела, нам потребуется несколько определений. Пусть M — гладкое замкнутое риманово многообразие размерности не меньше двух с римановым объемом в качестве меры, а $F \in \mathrm{Diff}^r(M)$ — его диффеоморфизм. Пусть p — периодическая гиперболическая точка для F периода $\mathrm{per}(p)$, т.е. такая, что у дифференциала $dF^{\mathrm{per}(p)}(p)$ есть собственные значения, по модулю большие единицы, и собственные значения, по модулю меньшие единицы, но нет собственных значений, по модулю равных единице. Эти собственные значения обычно называют *собственными значениями седла p.*

Определение. Гиперболическое периодическое седло p диффеоморфизма F называется *диссипативным*, если $|\det(dF^{\mathrm{per}(p)}(p))| < 1$. Если $|\det(dF^{\mathrm{per}(p)}(p))| > 1$, седло называется *антидиссипативным* или *увеличивающим объем.*

Седло p называется *2-сжимающим*, если оно имеет единственное "растягивающее" собственное значение $\lambda_1 : |\lambda_1| > 1$, и для любых двух собственных значений λ_i, λ_j $(i \neq j)$ выполнено $|\lambda_i \lambda_j| < 1$.

[15] *Shilin I.* Locally topologically generic diffeomorphisms with Lyapunov unstable Milnor attractors. 2016. URL: `https://arxiv.org/abs/1604.02437` (дата обр. 11.04.2016).

Название «2-сжимающее» объясняется тем, что существуют координаты, в которых дифференциал $dF^{\mathrm{per}(p)}(p)$ сжимает двумерный евклидов объем в любом двумерном сечении. Соответственно, некоторая степень этого дифференциала обязана сжимать двумерный объем, порожденный римановой структурой. В случае, когда фазовое пространство двумерно, диссипативное седло и 2-сжимающее седло — это одно и то же.

По теореме Адамара–Перрона у любого гиперболического седла p есть устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия, которые обычно обозначаются $W^s(p)$ и $W^u(p)$.

Определение. Гомоклиническое касание для периодического седла p — это нетрансверсальное пересечение инвариантных многообразий $W^s(p_1)$ и $W^u(p_2)$ двух точек p_1, p_2 (возможно, совпадающих), принадлежащих орбите $O(p)$ седла p.

Теорема А. *Пусть на некотором плотном подмножестве открытого множества $U \subset \mathrm{Diff}^r(M)$, $r \geq 1$, диффеоморфизмы имеют гомоклиническое касание для 2-сжимающего периодического седла p, непрерывно зависящего от диффеоморфизма в U. Тогда для топологически типичного диффеоморфизма из U аттрактор Милнора неустойчив по Ляпунову.*

Области, удовлетворяющие условию теоремы А, впервые были построены Ш. Ньюхаусом в цикле статей[16,17,18], посвященных устойчивым касаниям в C^2. Он также предложил пример локально плотных диффеоморфизмов с гомоклиническим касаниями в C^1 для случая, когда фазовое пространство имеет размерность три или выше[19]; этот пример был недавно переоткрыт М. Асаокой[20], а К. Бонатти и Л. Диаз предложили[21] более общую конструкцию с тем же свойством. Прямолинейное применение теоремы А к этим результатам приводит к двум важным следствиям. Во-первых, для

[16] *Newhouse S.* Non-density of Axiom A(a) on S^2 // Global Analysis. Proc. Symp. in Pure Math. Vol. XIV. A.M.S. 1970. Pp. 191–203.

[17] *Newhouse S.* Diffeomorphisms with infinitely many sinks // Topology. 1974. Vol. 13. Pp. 9–18.

[18] *Newhouse S.* The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 1979. Vol. 50. Pp. 101–151.

[19] Sect. 8 в *Newhouse S.* Lectures on dynamical systems // Dynamical Systems / ed. by C. Marchioro. C.I.M.E. Ed. Liguori & Birkhäuser, 1980. Pp. 209–312.

[20] *Asaoka M.* Hyperbolic sets exhibiting C^1-persistent homoclinic tangency for higher dimensions // Proc. Amer. Math. Soc. 2008. Vol. 136, no. 2. Pp. 667–686.

[21] *Bonatti C.*, *Diaz L.J.* Connexions heterocliniques et genericité d'une infinité de puits ou de sorces // Ann. Sci. École Norm. Sup. 1999. Vol. 32. Pp. 135–150.

любого двумерного многообразия диффеоморфизмы с неустойчивыми по Ляпунову аттракторами Милнора локально топологически типичны в C^2 (и в C^r при $r > 2$). Во-вторых, на многообразиях размерности три и выше такие диффеоморфизмы локально топологически типичны в C^1 (и в C^r при $r > 1$). Надо, однако, заметить, что эти следствия много проще теоремы А и могут быть доказаны короче, чем сама теорема А (схема доказательства приводится в замечании 24 в подразделе 2.4.1). Тем не менее, теорема существенно используется для доказательства еще одного следствия: локально типичные диффеоморфизмы с неустойчивыми аттракторами могут быть найдены в любой C^2-окрестности любого C^2-диффеоморфизма с гомоклиническим касанием для 2-сжимающего седла (следствие 25).

Важным элементом доказательства теоремы А является следующая лемма о захвате.

Лемма C (лемма о захвате)**.** *Пусть у* $F \in \mathrm{Diff}^r(M)$, $r \geq 1$, *есть 2-сжимающее периодическое гиперболическое седло* $p = p(F)$ *с гомоклиническим касанием. Тогда сколь угодно близко к* F *в смысле* C^r*-метрики можно найти диффеоморфизм* G*, для которого* $W^u(p(G), G)$ *пересекает бассейн притяжения периодического стока.*

При размыкании касания сток захватывает своей областью притяжения часть неустойчивого многообразия седла — этим объясняется выбор названия леммы. Можно сказать, пренебрегая некоторыми деталями[22], что доказательство этой леммы для двумерного случая было целью работы J.C. Tatjer и M. Simo[23]; авторы достигли существенного продвижения, рассматривая 16 случаев, различающихся знаками собственных значений седла и геометрией касания — лемма была доказана для большинства из этих случаев полностью, а для оставшихся — при некотором дополнительном условии. Также двумерный вариант леммы о захвате (в том виде, который используется в диссертации) можно найти у Ш. Ньюхауса[24], но у него есть

[22] J.C. Tatjer и M. Simo исследовали вопрос о том, как ведут себя бассейны притяжения периодических стоков, образующихся, когда гомоклиническое касание для диссипативного седла разрушается в типичном однопараметрическом семействе. В частности, их интересовало, пересекается ли неустойчивое многообразие седла с бассейном образовавшегося стока. Таким образом, речь шла о лемме о захвате для однопараметрических семейств.

[23] *Tatjer J., Simó C.* Basins of attraction near homoclinic tangencies // Ergod. Th. Dynam. Systems. 1994. Vol. 14, no. 2. Pp. 351–390.

[24] *Newhouse S.* New phenomena associated with homoclinic tangencies // Ergod. Th. Dynam. Systems.

пробел в доказательстве. В диссертации лемма о захвате доказана для случая произвольной размерности при помощи техники Дж. Палиса и М. Вианы[25].

Раздел 3 посвящен другому, но довольно близкому сюжету. К. Бонатти, Л. Диаз и Э. Пухальс доказали[26] следующую дихотомию для C^1-типичных диффеоморфизмов: каждый гомоклинический класс[27] такого диффеоморфизма или допускает расщепление с доминированием[28], или содержится в замыкании бесконечного множества источников или стоков. В диссертации из этого результата выводится следующая теорема.

Теорема B. *Пусть M — замкнутое многообразие, а $F \in \mathrm{Diff}^1(M)$ — топологически типичный диффеоморфизм M. Тогда*

- *или всякий гомоклинический класс диффеоморфизма F допускает расщепление с доминированием,*
- *или аттрактор Милнора неустойчив по Ляпунову для F или для F^{-1}.*

В данном случае речь идет уже о глобальной типичности, а не о локальной. Доказательство опирается на другую лемму о захвате, лемму D, которая, играет ту же роль, что и первая, но доказывается совершенно иначе с помощью результатов вышеупомянутой работы Бонатти, Диаза и Пухальса. Лемма D утверждает, что если в гомоклиническом классе некоторого седла p, не допускающем расщепления с доминированием, имеется диссипативное седло, то малым возмущением можно получить сток, чей

2004. Vol. 24, no. 5. Pp. 1725–1738.

[25] *Palis J., Viana M.* High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many periodic attractors // Ann. of Math. 1994. Vol. 140, no. 1. Pp. 207–250.

[26] *Bonatti C., Díaz L., Pujals E.R.* A C^1-generic dichotomy for diffeomorphisms: weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources // Ann. of Math. 2003. Vol. 158. Pp. 355–418.

[27] *Гомоклинический класс* седла p — это замыкание множества трансверсальных гомоклинических точек орбиты седла p: $H(p,F) = \overline{W^u(O(p),F) \pitchfork W^s(O(p),F)}$. Здесь под (не)устойчивым многообразием орбиты понимается объединение (не)устойчивых многообразий точек этой орбиты.

[28] Пусть Λ — F-инвариантное подмножество многообразия M, а $T_\Lambda M = E \oplus G$ — dF-инвариантное расщепление TM над Λ с не зависящими от точки базы размерностями слоев расслоений E и G. Расщепление $E \oplus G$ называется *расщеплением с доминированием* (англ. *dominated splitting*), если существует $n \in \mathbb{N}$, такое что для любой точки $x \in \Lambda$ и любых векторов $u \in E(x), v \in G(x)$ выполнено неравенство

$$\frac{\|dF^n(x)u\|}{\|u\|} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\|dF^n(x)v\|}{\|v\|}.$$

бассейн притяжения пересекается с неустойчивым многообразием продолжения седла p.

Нужно сделать два замечания касательно сформулированных выше результатов о неустойчивых аттракторах. Во-первых, все результаты разделов 2, 3, за исключением теоремы В, справедливы также для диффеоморфизмов компактных многообразий с краем внутрь себя и даже для локальных диффеоморфизмов. Теорема В в том виде, в котором мы ее приводим, справедлива только для тех отображений, для которых существует обратное, так что её можно переформулировать, например, для диффеоморфизмов компактных многообразий с краем, сохраняющих край.

Во-вторых, все результаты разделов 2 и 3 также остаются справедливыми для любого другого определения аттрактора в случае, если из этого определения следует, что

- аттрактор существует для любого отображения из рассматриваемого класса,
- аттрактор замкнут,
- аттрактор содержится в неблуждающем множестве,
- любой гиперболический сток содержится в аттракторе.

Например, статистический и минимальный аттракторы, а также the generic limit set[29] обладают этими свойствами, а потому теоремы о неустойчивости можно переформулировать для них.

В **разделе 4** рассматривается вопрос о том, как устроены аттракторы Милнора гиперболических диффеоморфизмов. Известно, что для C^2-гладких гиперболических диффеоморфизмов аттрактор Милнора совпадает с объединением притягивающих базисных множеств из спектрального разложения.[30] Для C^1-диффеоморфизмов это может быть не так, однако в типичном случае аттракторы устроены так же, как у C^2-гладких гиперболических отображений.

[29] *The generic limit set* — наименьшее замкнутое множество, к которому притягивается топологически типичная точка фазового пространства. Это определение также предложено Дж. Милнором в упомянутой выше статье.

[30] *Городецкий А.С.* Иерархия аттракторов для диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме А // Вестн. Моск. ун-та. 1996. № 1. с. 84—86.

Теорема E. *Аттрактор Милнора топологически типичного Ω-устойчивого*[31] *C^1-диффеоморфизма есть объединение притягивающих гиперболических базисных множеств.*

Мы также анонсируем совсем свежий результат, полученный совместно с К. Бонатти, С.С. Минковым и А.В. Окуневым: на двумерном торе существует диффеоморфизм Аносова, для которого аттрактор Милнора имеет нулевую меру Лебега (теорема F).

Раздел 5 посвящен аттракторам Милнора ступенчатых косых произведений. Пусть $\Sigma^s = \{1, \ldots, s\}^{\mathbb{Z}}$ — множество бесконечных в обе стороны последовательностей $\omega = \ldots \omega_{-1}\omega_0\omega_1 \ldots$, составленных из символов $1, 2, \ldots, s$. *Сдвигом Бернулли* называется отображение

$$\sigma \colon \Sigma^s \to \Sigma^s,\ (\sigma\omega)_n = \omega_{n+1},$$

сдвигающее последовательности влево на одну позицию.

Определение. *Ступенчатым косым произведением* (СКП) над сдвигом Бернулли (Σ^s, σ) со *слоем* M и послойными отображениями $f_1, \ldots, f_s \colon M \to M$ называется отображение пространства $X = \Sigma^s \times M$ в себя, имеющее следующий вид:

$$F : X \to X,\ (\omega, p) \to (\sigma\omega, f_{\omega_0}(p)),$$

где ω_0 — символ на нулевом месте в последовательности ω. Пространство Σ^s называется *базой* косого произведения.

Д.С. Волк и В.А. Клепцын получили замечательный результат[32] о структуре максимальных аттракторов типичных ступенчатых косых произведений со слоем отрезок и сохраняющими ориентацию послойными отображениями: оказывается, фазовое пространство разбивается на конечное число чередующихся поглощающих и выталкивающих полос; максимальные аттракторы поглощающих полос и максимальные репеллеры выталкивающих имеют меру ноль; каждый из них можно представить в виде объединения

[31] Диффеоморфизм $F \in \mathrm{Diff}^1(M)$ называется Ω-устойчивым, если для любого достаточно близкого C^1-диффеоморфизма G ограничение G на его неблуждающее множество $\Omega(G)$ сопряжено (гомеоморфизмом) с ограничением F на $\Omega(F)$.

[32] *Kleptsyn V.*, *Volk D.* Physical measures for nonlinear random walks on interval // Mosc. Math. J. 2014. Vol. 14, no. 2. Pp. 339–365.

графика почти всюду определенной функции из базы косого произведения в слой (будем называть его *графиком максимального аттрактора полосы*) и множества отрезков-костей, проецирующегося в множество нулевой меры в базе. В диссертации на основе этого результата доказывается теорема G об устройстве аттракторов Милнора.

Теорема G. *В условиях теоремы Клепцына–Волка аттрактор Милнора ступенчатого косого произведения*[33] *совпадает с объединением замыканий графиков максимальных аттракторов поглощающих полос.*

Из этой теоремы следует, что для открытого всюду плотного множества отображений рассматриваемого класса милноровский аттрактор совпадает со статистическим и минимальным. Далее в разделе 5 доказывается лемма H о связи между устойчивостью аттрактора и устойчивостью его проекции под действием полугруппы послойных отображений. Эта лемма оказалась полезной при изучении вопроса об устойчивости аттракторов ступенчатых косых произведений: А.В. Окунев доказал с её помощью, что для топологически типичного ступенчатого косого произведения со слоем отрезок или окружность статистический и милноровский аттракторы устойчивы по Ляпунову.

Раздел 5 завершается рассмотрением (нетипичного) примера ступенчатого косого произведения с неустойчивым по Ляпунову аттрактором Милнора.

Теорема I. *Пусть для СКП F над сдвигом Бернулли в Σ^2 со слоем M послойные отображения f_0 и f_1 обладают следующими свойствами:*

1) *отображение f_0 имеет гиперболический сток a_0, к которому притягиваются все точки многообразия M, за исключением точек стратифицированного многообразия S размерности не выше $k-1$;*
2) *отображение f_1 имеет гиперболический источник $r_0 = a_0$;*
3) *выполняется неравенство $\|df_0(a_0)\|\|df_1(a_0)\| < 1$;*

[33] В качестве метрики на Σ^s возьмем $d(\omega, \tilde{\omega}) = 2^{-\min\{|n|\,:\,\omega_n \neq \tilde{\omega}_n\}}$, а в качестве меры — меру Бернулли с равными вероятностями всех символов. Мера на фазовом пространстве — это произведение меры Бернулли на меру Лебега в слое, а расстояние — сумма расстояний вдоль слоя и вдоль базы. В таком случае аттрактор Милнора СКП корректно определен.

4) для любой точки $q \in S$ существует конечное слово w, такое, что соответствующая ему композиция послойных отображений $f_w = f_{w_{|w|-1}} \circ \dots \circ f_{w_0}$ переводит q в точку вне S.

Тогда отображение F имеет аттрактор Милнора $A_M(F) = \Sigma^2 \times \{a_0\}$, неустойчивый по Ляпунову.

Эта теорема доказана в работе [21] и хронологически предшествует результатам разделов 2, 3. Она является важным элементом принадлежащей Ю.С. Ильяшенко конструкции косых произведений с так называемыми условно неустойчивыми аттракторами. В конце раздела 5 мы приводим краткое описание этой конструкции, чтобы поместить пример в контекст и объяснить, для чего он был нужен.

Заключение

В диссертации даны достаточные условия того, чтобы топологически типичные диффеоморфизмы из $\mathrm{Diff}^1(M)$ или из некоторой области в $\mathrm{Diff}^r(M)$ имели неустойчивые по Ляпунову глобальные аттракторы; показано, что неустойчивость аттракторов по Ляпунову не наблюдается среди типичных C^1-гладких гиперболических систем; исследована структура аттракторов Милнора для типичных ступенчатых косых произведений со слоем отрезок и разобран пример нетипичного ступенчатого косого произведения с неустойчивым по Ляпунову глобальным аттрактором.

Подводя итоги, можно сказать, что достаточные условия локальной топологической типичности неустойчивости аттракторов по Ляпунову, представленные в этой работе, являются в некотором смысле низковисящими плодами, случайно до сих пор незамеченными. По-прежнему остается открытым вопрос, существуют ли в пространстве диффеоморфизмов открытые области, где все отображения имеют неустойчивые по Ляпунову аттракторы Милнора (или статистические, или минимальные). Также неизвестно, могут ли отображения с неустойчивыми аттракторами быть локально превалентны. Чтобы ответить на эти вопросы, потребуются, по-видимому, какие-то новые методы.

Все результаты, касающиеся связи между явлением Ньюхауса и неустойчивостью аттракторов, должны несложно обобщаться на случай потоков.

Например, существование локально топологически типичных потоков с неустойчивыми аттракторами автоматически следует из аналогичного результата для отображений при помощи стандартной конструкции надстройки.

П. Берже построил[34] локально топологически типичные конечно-параметрические семейства диффеоморфизмов, для которых точкам из единичного шара в пространстве параметров соответствуют отображения с бесконечным числом стоков. В его конструкции стоки образуются при размыкании гомоклинических касаний для конечного набора неподвижных седел. Можно показать, что в случае, когда стоков бесконечное число, конструкция Берже гарантирует, что они накапливаются к одному из этих седел, а затем при помощи леммы о захвате или модификации конструкции добиться того, чтобы неустойчивые многообразия неподвижных седел пересекались с бассейнами стоков. Таким образом можно получить локально топологически типичные конечно-параметрические семейства диффеоморфизмов, в которых единичный шар в пространстве параметров соответствует диффеоморфизмам с неустойчивыми по Ляпунову аттракторами.

Благодарности

Я хотел бы поблагодарить моего научного руководителя профессора Юлия Сергеевича Ильяшенко за помощь в выборе направления исследований, за постановку задач, полезные обсуждения и конструктивную критику, а также Станислава Сергеевича Минкова и Алексея Владимировича Окунева за вдохновляющие обсуждения, полезные советы и моральную поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Ильяшенко Ю.С., Шилин И.С.* Условно неустойчивые аттракторы // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 91–100. [Шилину И.С. принадлежит доказательство теорем 2, 3. Ильяшенко Ю.С. принадлежит формулировка и доказательство теоремы 1.]

2. *Шилин И.С.* Неустойчивые по Ляпунову аттракторы Милнора // Докл. Акад. Наук. 2016. Т. 469, № 3. С. 287–290.

[34] *Berger P.* Generic family with robustly infinitely many sinks. 2014. URL: http://arxiv.org/abs/1411.6441 (дата обр. 12.05.2016).