МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Шилин Иван Сергеевич

АТТРАКТОРЫ МИЛНОРА И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Ильяшенко Юлий Сергеевич

Москва — 2016

Оглавление

1 Введение

Актуальность темы исследования

Существует довольно много неэквивалентных определений аттракторов. Эти определения объединены общей идеей: аттрактор динамической системы должен быть инвариантным множеством, к которому притягивается под действием динамики большинство или хотя бы большое количество точек фазового пространства.

Первые определения аттракторов появились в 60-е годы. Вплоть до середины 80-х эти определения, хоть и отличались друг от друга в деталях, формулировались исключительно в топологических терминах и были довольно похожи. Обзор этих определений можно найти в работе [27]. Во многих из них требовалось, чтобы аттрактор был пересечением образов некоторой своей поглощающей окрестности для положительных моментов времени. Мы будем пользоваться самым простым определением такого рода.

Определение 1 (Максимальный аттрактор)**.** Пусть у непрерывного отображения F есть поглощающая область U, т.е. $\overline{F(U)} \subset U$. Тогда *максимальным аттрактором в области* U называется пересечение образов этой области под действием (положительных) итераций отображения: $A_{max}(F, U) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F^n(U)$.

Аттракторы, определенные таким образом, также называют топологическими, иногда добавляя какое-нибудь требование неразложимости, например требование топологической или цепочной транзитивности (см., например, введение к [15]), однако в этом случае априори речь уже не идет о глобальном аттракторе: две притягивающие неподвижные точки одного отображения будут принадлежать разным неразложимым топологическим аттракторам.

Максимальные аттракторы, однако, плохо подходят для описания глобального притягивающего множества. Во первых, максимальный аттрактор зависит от выбора поглощающей области U. Во-вторых, он может содержать блуждающие[1] точки, к которым заведомо ничего не притягивается. Наконец, как показали К. Бонатти, М. Ли и Д. Янг в [15], если рассматривать топологические аттракторы с требованием цепочной транзитивности, найдутся локально топологически типичные C^1-диффеоморфизмы без топологических аттракторов.

Дж. Милнор в работе [27] первым, по-видимому, предложил определение аттрактора, опирающееся на меру на фазовом пространстве.

Определение 2 (Аттрактор Милнора[2])**.** Пусть X — компактное метрическое пространство с борелевской мерой μ, а F — непрерывное отображение X в себя. *Аттрактором Милнора* отображения F называется наименьшее замкнутое множество, содержащее ω-предельные множества почти всех точек фазового пространства X.

[1] Точка называется блуждающей, если она обладает окрестностью, которая не пересекается со своими образами под действием динамики, и неблуждающей — в противном случае. Совокупность неблуждающих точек называется неблуждающим множеством. Здесь и далее мы ограничиваемся рассмотрением динамических систем с дискретным временем.

[2] Дж. Милнор в статье [27] называет это *the likely limit set*.

Мы будем обозначать аттрактор Милнора через A_M или $A_M(F)$. В [27] показано, что если X — гладкое компактное риманово многообразие (возможно, с краем) с мерой, эквивалентной мере Лебега в каждой координатной окрестности[3], то аттрактор Милнора корректно определен. В общем случае доказательство проводится точно так же.

Нам также потребуются определения *статистического* и *минимального* аттракторов, предложенные соответственно в обзоре [1] и статье [22]. Мы приводим те определения, которыми нам будет удобно пользоваться, и отсылаем читателя к обзору [24], в котором обсуждаются эквивалентные определения, проливающие свет на общность милноровского, статистического и минимального аттракторов.

Статистическим ω-предельным множеством точки $x \in M$ (обозначение: $\omega_{stat}(x)$) будем называть множество точек $z \in M$, таких что для любой окрестности U точки z "частота" попадания (положительной) орбиты точки x в U положительна, а точнее говоря, выполнено неравенство

$$\mathrm{Freq}(x, U) := \limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \#\{n : F^n(x) \in U,\ 0 \le n < N\} > 0.$$

Определение 3. *Статистическим аттрактором* $A_{stat}(F)$ отображения F называется минимальное по вложению замкнутое подмножество фазового пространства, содержащее $\omega_{stat}(x)$ для почти всех по мере μ точек x.

Рассмотрим последовательность мер $(F_*^n \mu)_{n\in\mathbb{N}}$, где $F_*^n\mu(S) = \mu(F^{-n}(S))$ для любого борелевского множества S, и последовательность средних $\overline{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} F_*^n \mu$. Будем называть *хорошей мерой* любой частичный предел последовательности $(\overline{\mu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в смысле $*$-слабой сходимости.

Определение 4. *Минимальным аттрактором* $A_{min}(F)$ отображения F называется замыкание объединения носителей всех хороших мер.

Следующие включения выполнены всегда, и притом каждое может быть строгим (см. [24]):

$$A_{min}(F) \subset A_{stat}(F) \subset A_M(F) \subset A_{max}(F, X).$$

Определение 5. Инвариантное множество K отображения F называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любой окрестности U множества K существует меньшая окрестность $V \supset K$, такая что любая положительная полуорбита отображения F, начинающаяся в V, никогда не покидает U.

Максимальные аттракторы всегда устойчивы по Ляпунову — это легко следует из определения. Милноровские, статистические и минимальные аттракторы, напротив, могут быть неустойчивы. Простейший пример такой неустойчивости дается диффеоморфизмом окружности с единственной полуустойчивой неподвижной точкой:

$$x \mapsto x + 0.1(1 - \cos x).$$

[3]Т.е. образ нашей меры под действием каждой карты имеет всюду положительную гладкую плотность относительно меры Лебега. Любую такую меру на многообразии мы далее будем называть мерой Лебега.

В этом примере фазовое пространство не содержит непустых собственных диссипативных областей, так что ничего не остается, кроме как объявить всю окружность максимальным аттрактором. Однако такой аттрактор несет мало информации о предельном поведении орбит. В то же время очевидно, что все орбиты в этом примере притягиваются к точке 0, так что эта точка является в данном случае аттрактором Милнора, а также минимальным и статистическим аттрактором. Легко видеть, что этот аттрактор неустойчив по Ляпунову: с одной стороны точки убегают от нуля.

Естественным образом возникает вопрос, насколько типичны диффеоморфизмы гладких многообразий с неустойчивыми по Ляпунову аттракторами Милнора. Например, неизвестен ответ на следующий вопрос, поставленный Ю. С. Ильяшенко.

Проблема. *Существует ли открытое множество диффеоморфизмов с неустойчивыми по Ляпунову аттракторами?*

Существенная часть данной работы посвящена локально топологически типичной неустойчивости аттракторов Милнора по Ляпунову и ее связи с другими динамическими явлениями.

Свойство диффеоморфизмов называется *топологически типичным* (или *типичным по Бэру*), если диффеоморфизмы, обладающие данным свойством, образуют остаточное подмножество[4] в рассматриваемом пространстве диффеоморфизмов. Свойство называется *локально топологически типичным*, если диффеоморфизмы с этим свойством образуют остаточное подмножество в некоторой области пространства диффеоморфизмов. Когда говорят, что (локально) топологически типичный диффеоморфизм обладает каким-либо свойством, имеется в виду, что это свойство (локально) топологически типично.

Можно сказать, что современная парадигма (не общепринятая) в теории динамических систем состоит в том, что нужно в первую очередь изучать свойства типичных систем. Типичные C^1-диффеоморфизмы и потоки легче поддаются исследованию по сравнению с C^r-системами для $r \geq 2$; обзор полученных для них результатов содержится в 10-й главе книги К. Бонатти, Л. Диаза и М. Вианы [14], а программа дальнейших исследований была предложена в обзоре К. Бонатти [12]. Тема настоящей работы близко примыкает к данному кругу вопросов.

Краткое содержание работы

Диссертация посвящена исследованию свойств глобальных аттракторов динамических систем, в первую очередь аттракторов Милнора. **Цель работы** — изучить структуру аттракторов Милнора типичных отображений и выяснить, насколько часто встречаются динамические системы с неустойчивыми по Ляпунову аттракторами.

В разделе 2 мы покажем, что неустойчивость аттракторов является довольно-таки распространенным явлением. Условимся, что M всегда обозначает, если явно не оговорено иное, гладкое замкнутое риманово многообразие размерности не меньше двух с

[4] т.е. подмножество, содержащее счетное пересечение открытых всюду плотных подмножеств рассматриваемого пространства диффеоморфизмов.

римановым объемом в качестве меры.[5] Основной результат раздела выглядит следующим образом.

Теорема A. *Пусть на некотором плотном подмножестве открытого множества $U \subset \mathrm{Diff}^r(M)$, $r \geq 1$, диффеоморфизмы имеют гомоклиническое касание для 2-сжимающего*[6] *периодического седла p, непрерывно зависящего от диффеоморфизма в U. Тогда для топологически типичного диффеоморфизма из U аттрактор Милнора неустойчив по Ляпунову.*

Гомоклиническое касание для периодического седла p — это нетрансверсальное пересечение многообразий $W^s(p_1)$ и $W^u(p_2)$ двух точек p_1, p_2, принадлежащих орбите седла p. Отметим, что в посылке теоремы A говорится, что такие нетрансверсальные пересечения наблюдаются для локально плотного множества диффеоморфизмов, но не предполагается непрерывной зависимости точки пересечения от диффеоморфизма.

Области, удовлетворяющие условию теоремы A, впервые были построены Ш. Ньюхаусом в цикле статей, посвященных устойчивым касаниям в C^2 [30, 31, 32]. Он также предложил пример локально плотных диффеоморфизмов с гомоклиническим касаниями в C^1 в размерности три и выше (см. Sect. 8 в [33]; этот пример был недавно переоткрыт Масаюки Асаокой, [10]). Прямолинейное применение теоремы A к этим результатам приводит к двум важным следствиям. Во-первых, для любого двумерного многообразия диффеоморфизмы с неустойчивыми по Ляпунову аттракторами Милнора локально топологически типичны в C^2 (и в C^r при $r > 2$). Во-вторых, на многообразиях размерности три и выше такие диффеоморфизмы локально топологически типичны в C^1 (см. следствия 21 и 22). В замечании 24 мы, однако, обращаем внимание на то, что эти утверждения много проще теоремы A и могут быть доказаны короче в обход теоремы. Тем не менее, теорема существенно используется для доказательства того, что локально типичные диффеоморфизмы с неустойчивыми аттракторами могут быть найдены в любой C^2-окрестности любого C^2-диффеоморфизма с гомоклиническим касанием для 2-сжимающего седла (см. следствие 25).

Важным элементом доказательства теоремы A является следующая лемма о захвате.

Лемма C (лемма о захвате)**.** *Пусть у $F \in \mathrm{Diff}^r(M)$, $r \geq 1$, есть 2-сжимающее периодическое гиперболическое седло $p = p(F)$ с гомоклиническим касанием. Тогда сколь угодно близко к F в смысле C^r-метрики можно найти диффеоморфизм G, для которого $W^u(p(G), G)$ пересекает бассейн притяжения периодического стока.*

При размыкании касания сток захватывает своей областью притяжения часть неустойчивого многообразия седла — этим объясняется выбор названия леммы. Двумерная версия этой леммы для случая так называемых сильно диссипативных седел

[5] Тем не менее, результаты, касающиеся неустойчивых аттракторов и изложенные в разделах 2, 3, за исключением теоремы B, справедливы также для диффеоморфизмов компактных многообразий с краем внутрь себя и даже для локальных диффеоморфизмов. Теорема B в том виде, в котором мы ее приводим, справедлива только для тех отображений, для которых существует обратное, так что её можно переформулировать, например, для диффеоморфизмов компактных многообразий с краем, сохраняющих край.

[6] т.е. сжимающего двумерные объемы, см. определение 6 в разделе 2.1; в двумерном случае это просто диссипативное седло.

следует из основного результата работы [44]. Также двумерный вариант может быть найден в [34], но там есть пробел в доказательстве. Мы доказываем лемму о захвате в произвольной размерности, пользуясь техникой работы [37].

В разделе 3 мы переходим к другому, но довольно близкому сюжету. К. Бонатти, Л. Диаз и Э. Пухальс доказали в работе [13] следующую дихотомию для C^1-типичных диффеоморфизмов: каждый гомоклинический класс такого диффеоморфизма или допускает расщепление с доминированием[7], или содержится в замыкании бесконечного множества источников или стоков. Основываясь на этом результате, мы доказываем следующую теорему.

Теорема B. *Пусть M — замкнутое многообразие, а $F \in \mathrm{Diff}^1(M)$ — топологически типичный диффеоморфизм M. Тогда*

- *или всякий гомоклинический класс диффеоморфизма F допускает расщепление с доминированием,*
- *или аттрактор Милнора неустойчив по Ляпунову для F или для F^{-1}.*

В данном случае речь идет уже о глобальной типичности, а не о локальной.

Доказательство опирается на другую лемму о захвате, лемму D (см. раздел 3.2), которая, хотя и имеет ту же функцию, что и первая, доказывается совершенно иначе с помощью результатов работы [13].

Сразу заметим, что результаты разделов 2 и 3 также остаются справедливыми для любого другого определения аттрактора в случае, если из этого определения следует, что

- аттрактор существует для любого отображения из рассматриваемого класса,
- аттрактор замкнут,
- аттрактор содержится в неблуждающем множестве,
- любой гиперболический сток содержится в аттракторе.

Например, статистический и минимальный аттракторы, а также the generic limit set[8] обладают этими свойствами, а потому теоремы о неустойчивости можно переформулировать для них.

В разделе 4 мы рассматриваем вопрос о том, как устроены аттракторы Милнора гиперболических диффеоморфизмов. Известно, что для C^2-гладких гиперболических диффеоморфизмов аттрактор Милнора совпадает с объединением притягивающих базисных множеств из спектрального разложения.[9] Для C^1-диффеоморфизмов это может

[7] см. определение 45.

[8] *The generic limit set* — наименьшее замкнутое множество, к которому притягивается топологически типичная точка фазового пространства, [27]. Может показаться, что теорема A для этого определения аттрактора противоречит результату из [28], который состоит в том, что в C^1-типичном случае ω-предельное множество топологически типичной точки устойчиво по Ляпунову. Здесь нет никакого противоречия: хотя каждое отдельное ω-предельное множество устойчиво, замыкание их объединения вполне может быть неустойчиво.

[9] См. [3] или раздел 4.2. Мы напоминаем необходимые определения и теоремы в разделе 4.1.

быть не так, однако в типичном случае аттракторы устроены так же, как у C^2-гладких гиперболических отображений.

Теорема E. *Аттрактор Милнора топологически типичного Ω-устойчивого C^1-диффеоморфизма есть объединение притягивающих гиперболических базисных множеств.*

Мы также анонсируем совсем свежий результат, полученный совместно с К. Бонатти, С. С. Минковым и А. В. Окуневым: на двумерном торе существует диффеоморфизм Аносова, для которого аттрактор Милнора имеет нулевую меру Лебега (теорема F).

Раздел 5 посвящен аттракторам Милнора ступенчатых косых произведений. Сначала напоминаются основные определения, после чего мы приводим результат Д. С. Волка и В. А. Клепцына о структуре максимальных аттракторов типичных ступенчатых косых произведений со слоем отрезок и доказываем на его основе теорему G об устройстве аттракторов Милнора. Оказывается, в частности, что для открытого всюду плотного множества отображений рассматриваемого класса милноровский аттрактор совпадает со статистическим и минимальным. Далее мы доказываем лемму H о связи между устойчивостью аттрактора и устойчивостью его проекции под действием полугруппы послойных отображений (см. определение 67). Эта лемма оказалась полезной при изучении вопроса об устойчивости аттракторов ступенчатых косых произведений: А. В. Окунев доказал с её помощью, что для топологически типичного ступенчатого косого произведения со слоем отрезок или окружность статистический и милноровский аттракторы устойчивы по Ляпунову.

Раздел 5 завершается рассмотрением примера ступенчатого косого произведения с неустойчивым по Ляпунову аттрактором Милнора (теорема I). Этот пример хронологически предшествует результатам разделов 2, 3. Он является важным элементом принадлежащей Ю. С. Ильяшенко конструкции косых произведений с так называемыми условно неустойчивыми аттракторами. Мы коротко описываем эту конструкцию в разделе 5.4.3, чтобы поместить наш пример в контекст и объяснить, для чего он был нужен.

Научная новизна

Результаты работы являются новыми. Их можно резюмировать следующим образом.

- Установлено, что неустойчивость аттракторов Милнора по Ляпунову является локально топологически типичным феноменом, который всегда наблюдается в тех областях в пространстве диффеоморфизмов, где плотны диффеоморфизмы с гомоклиническим касанием для 2-сжимающего периодического седла, непрерывно зависящего от отображения.
- Доказано, что если у топологически типичного C^1-диффеоморфизма есть гомоклинический класс, не допускающий расщепления с доминированием, то аттрактор Милнора неустойчив по Ляпунову для этого диффеоморфизма или для обратного к нему.
- Для открытого всюду плотного множества ступенчатых косых произведений со слоем отрезок и сохраняющими ориентацию послойными отображениями найдена

структура аттракторов Милнора; исследован (нетипичный) пример ступенчатого косого произведения с неустойчивым аттрактором (теорема I).

Теоретическая и практическая значимость работы

Работа носит теоретический характер. Описываемый в работе феномен — локально топологически типичная неустойчивость аттракторов по Ляпунову — может представлять интерес для широкого круга специалистов в области динамических систем. Вспомогательные результаты, необходимые для доказательства леммы о захвате, могут быть интересны специалистам в области гомоклинических бифуркаций.

Методы исследования

В диссертации применяются классические методы гиперболической теории и методы теории гомоклинических бифуркаций, а также техника ренормализации. Как уже было отмечено выше, нас в первую очередь интересуют свойства топологически типичных систем, поэтому ключевым элементом доказательств является так называемое *рассуждение Бэра* или его частный случай — *рассуждение Ньюхауса*.[10] Другие важные ингредиенты — λ-лемма и лемма Франкса, а также замечательный прием С. С. Минкова, состоящий в применении теоремы Егорова для исследования аттракторов косых произведений и позволяющий значительно упростить некоторые рассуждения.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся теоремы A, B, G, I и лемма о захвате (лемма C).

Апробация результатов

Результаты работы докладывались на

- международной конференции “Dynamics, Bifurcations and Chaos 2015 (DBC II)” («Динамика, бифуркации и странные аттракторы, 2015»), Нижний Новгород, июль 2015, доклад “Lyapunov unstable Milnor attractors” («Неустойчивые по Ляпунову аттракторы Милнора»);
- семинаре «Динамические системы» (под руководством проф. Ю.С. Ильяшенко), МГУ, несколько докладов в 2011–2015гг.;

[10] Суть рассуждения Бэра заключается в следующем. Пусть мы работаем в каком-то пространстве Бэра, например в $\mathrm{Diff}^r(M)$, и нас интересуют точки с некоторым свойством P. Чтобы показать, что это свойство топологически типично, достаточно представить его в виде конечной или счетной конъюнкции свойств $P_j,\ j \in \mathbb{N}$, таких что свойством P_j обладают точки из открытого всюду плотного множества. Другими словами, каждое свойство P_j должно быть “устойчиво” (открыто), в то время как отрицание этого свойства должно быть “неустойчиво” (пустая внутренность). Этот метод может использоваться для неявного доказательства существования.

Под рассуждением Ньюхауса мы подразумеваем рассуждение Бэра, в котором свойство P — наличие у отображения бесконечного числа стоков, а свойство P_j — наличие j стоков, причем плотность свойства P_j доказывается с использованием устойчивого гомоклинического касания. Мы также будем называть рассуждением Ньюхауса любое похожее рассуждение.

- летней школе «Динамические системы», Ратмино, 2015.
- межвузовском (МГУ им. М.В. Ломоносова, МГТУ им. Н.Э. Баумана, РЭУ им. Г.В. Плеханова) семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений под руководством проф. И.В. Асташовой и проф. А.В. Филиновского в 2016г.

Препринт [42] с доказательствами теорем A, B и леммы C размещен в репозитории arXiv.org.

Публикации

Основные результаты опубликованы в двух работах автора в журналах из перечня ВАК: [6] (в соавторстве с Ю. С. Ильяшенко) и [8].

Благодарности

Я хотел бы поблагодарить моего научного руководителя профессора Юлия Сергеевича Ильяшенко за помощь в выборе направления исследований, за постановку задач, полезные обсуждения и конструктивную критику, а также Станислава Сергеевича Минкова и Алексея Владимировича Окунева за вдохновляющие обсуждения, полезные советы и моральную поддержку.

2 Явление Ньюхауса и локально топологически типичная неустойчивость аттракторов

В этом разделе мы рассмотрим связь между явлением Ньюхауса и неустойчивостью аттракторов Милнора и докажем, в частности, что любая область в пространстве диффеоморфизмов, где имеет место устойчивое касание для 2-сжимающего седла, содержит остаточное подмножество диффеоморфизмов с неустойчивыми по Ляпунову аттракторами Милнора. Начнем с напоминания необходимых определений.

2.1 Основные определения и предварительные сведения

Почти все определения в этом разделе являются стандартными и могут быть найдены в книгах [14] или [25], однако для некоторых терминов нет общепринятого перевода на русский язык. В этом случае мы приводим в скобках английский вариант.

Если мы говорим о C^m-типичных диффеоморфизмах из множества $U \subset \mathrm{Diff}^r(M)$, где $m \geq r$, мы имеем в виду диффеоморфизмы из остаточного подмножества в $U \cap \mathrm{Diff}^m(M)$ (в смысле топологии, которую $\mathrm{Diff}^m(M)$ индуцирует на $U \cap \mathrm{Diff}^m(M)$). Аналогично мы будем говорить, что какое-то подмножество C^m-плотно в U, если оно плотно в $U \cap \mathrm{Diff}^m(M)$. В дальнейшем "типичный" будет всегда означать "топологически типичный", если иное не указано явно.

Определение 6. Гиперболическое периодическое седло p диффеоморфизма F называется *диссипативным*, если $|\det(dF^{\mathrm{per}(p)}(p))| < 1$, где $\mathrm{per}(p)$ — период седла p. Если $|\det(dF^{\mathrm{per}(p)}(p))| > 1$, седло называется *анти-диссипативным* или *увеличивающим объем*.

Седло p называется *2-сжимающим* (англ. sectionally dissipative), если оно имеет единственное "растягивающее" собственное значение $\lambda_1 : |\lambda_1| > 1$, и для любых двух собственных значений λ_i, λ_j $(i \neq j)$ выполнено $|\lambda_i \cdot \lambda_j| < 1$.

Замечание 7. Седло p является 2-сжимающим тогда и только тогда, когда в некоторых координатах оператор $dF^{\mathrm{per}(p)}$ сжимает двумерный евклидов объем, т.е. в ограничении на любую (не обязательно инвариантную) двумерную плоскость этот оператор сжимает объем (этим объясняется происхождение английского термина).

Определение 8. Инвариантное под действием отображения F множество Λ называется *локально максимальным*, если оно совпадает с пересечением образов некоторой своей окрестности U под действием положительных и отрицательных итераций отображения F: $\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} F^n(U(\Lambda))$. Топологически транзитивное локально максимальное (замкнутое) гиперболическое инвариантное множество называется *базисным*.

Базисные множества выживают при малом возмущении диффеоморфизма, и мы иногда будем использовать для гиперболического продолжения базисного множества то же обозначение, что и для исходного базисного множества. Периодические точки всегда плотны в базисном множестве. Тривиальным примером базисного множества является гиперболическая периодическая орбита.

Замечание 9. Пусть Λ — базисное множество, а $p \in \Lambda$ — периодическое седло. Обозначим через $O(p)$ орбиту точки p. Тогда $W^u(O(p))$ плотно в $W^u(\Lambda)$. Действительно, рассмотрим точку $x \in \Lambda$ с плотной положительной полуорбитой[11]. Мы можем считать, что x находится близко к p. Тогда $W^u(p) \pitchfork W^s(x) \neq \emptyset$ из-за локальной структуры прямого произведения (см. [25, Prop. 6.4.21]). Но для любой точки y из этого пересечения $\mathrm{dist}(F^n(y), F^n(x)) \to 0$, когда $n \to \infty$. Теперь из плотности положительной полуорбиты точки x следует, что $W^u_{loc}(\Lambda) \subset \overline{W^u(O(p))}$, а значит, и $W^u(\Lambda) \subset \overline{W^u(O(p))}$. Аналогичное утверждение справедливо для $W^s(O(p))$ и $W^s(\Lambda)$.

Два периодических седла p и q называются *гетероклинически зацепленными*[12], если $W^u(O(p)) \pitchfork W^s(O(q)) \neq \emptyset$ и $W^s(O(p)) \pitchfork W^u(O(q)) \neq \emptyset$. Из λ-леммы (также известной как inclination lemma, см. [25, Prop. 6.2.23]) следует транзитивность отношения зацепленности, а рефлексивность и симметричность видны из определения, так что это отношение есть отношение эквивалентности. Замыкание множества седел, гетероклинически зацепленных с p, называется *гомоклиническим классом* седла p. Мы будем обозначать гомоклинический класс седла p через $H(p, F)$, где F обозначает отображение. Всегда, когда мы используем это обозначение, мы подразумеваем, что p — гиперболическое седло отображения F.

Существует другое, эквивалентное определение гомоклинического класса. А именно, гомоклинический класс седла p — это замыкание множества трансверсальных гомоклинических точек орбиты седла p:

$$H(p, F) = \overline{W^u(O(p), F) \pitchfork W^s(O(p), F)}.$$

Определение 10. Мы будем говорить, что для гиперболического периодического седла p имеет место гомоклиническое касание (или просто: у седла p есть гомоклиническое касание), если $W^u(O(p))$ и $W^s(O(p))$ имеют точку нетрансверсального пересечения (и следовательно, орбиту, составленную из таких точек).

Определение 11. Пусть у каждого диффеоморфизма из открытой области $U \subset \mathrm{Diff}^r(M)$ есть базисное множество $\Lambda(F)$ седлового типа, непрерывно зависящее от диффеоморфизма, а кроме того, для каждого $F \in U$ найдутся две точки $p_1, p_2 \in \Lambda(F)$, такие что $W^s(p_1)$ в некоторой точке касается $W^u(p_2)$. В таком случае мы будем говорить, что имеет место *C^r-устойчивое касание* в области U *для гиперболического множества* $\Lambda(F)$ или же что $\Lambda(F)$ *демонстрирует C^r-устойчивое касание.*

В случае, когда у нас есть диффеоморфизм с базисным множеством, таким что в окрестности нашего диффеоморфизма имеет место устойчивое касание для гиперболического продолжения рассматриваемого базисного множества, мы будем для краткости говорить, что для этого диффеоморфизма или базисного множества наблюдается (или имеет место) устойчивое касание.

Доказательство следующего предложения может быть найдено в [33] (Лемма 8.4).[13]

[11] Множество Λ является полным сепарабельным метрическим пространством, а в этом случае топологическая транзитивность влечет существование точек с плотными положительной и отрицательной полуорбитами.

[12] Часто в англоязычных статьях в данном случае используется выражение "homoclinically related", однако автор убежден, что "heteroclinically related" точнее отражает суть явления.

[13] Хотя в [33] рассматривается прежде всего двумерный случай, это доказательство работает в любой размерности.

Предложение 12. *Пусть Λ — базисное множество диффеоморфизма $F \in \mathrm{Diff}^r(M)$, а $p \in \Lambda$ — периодическое седло и существуют две точки $p_1, p_2 \in \Lambda$, такие что $W^u(p_1)$ и $W^s(p_2)$ имеют точку касания. Тогда гомоклиническое касание для (гиперболического продолжения) седла p может быть получено сколь угодно малым C^r-возмущением отображения F.*

Из предложения 12 следует, что всегда, когда у нас есть область $U \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ с устойчивым касанием для базисного множества $\Lambda(F)$, диффеоморфизмы с гомоклиническим касанием для седла $p(F) \in \Lambda(F)$ образуют C^r-плотное подмножество в U для любого r. Поэтому для удобства мы дадим определение устойчивых касаний для периодических седел.

Определение 13. Будем говорить, что на открытом множестве $U \subset \mathrm{Diff}^r(M)$ имеет место *C^r-устойчивое гомоклиническое касание для седла p* диффеоморфизма $F \in U$, если для любого $G \in U$ гиперболическое продолжение седла p определено и диффеоморфизмы с гомоклиническим касанием для продолжения седла p плотны в U в C^r-топологии.

2.2 Достаточное условие для неустойчивости аттракторов

Предложение 14. *Пусть диффеоморфизм $F \in \mathrm{Diff}^1(M)$ удовлетворяет следующим двум условиям:*

- *у F есть гиперболическое седло p, чье неустойчивое многообразие $W^u(p)$ пересекает бассейн притяжения некоторого периодического стока γ;*
- *у F есть последовательность периодических стоков γ_j, $j \in \mathbb{N}$, сходящаяся к седлу p, т.е.*
$$\mathrm{dist}\,(\gamma_j, p) \to 0 \text{ при } j \to \infty.$$

Тогда $A_M(F)$ неустойчив по Ляпунову.

Доказательство. Прежде всего заметим, что аттрактор Милнора $A_M(F)$ содержится в неблуждающем множестве $\Omega(F)$. Действительно, для любой блуждающей точки найдется её окрестность, свободная от ω-предельных точек. Поэтому блуждающая точка не может лежать в аттракторе, так как в противном случае упомянутую выше окрестность можно было бы вычесть из аттрактора и получить строго меньшее множество, притягивающее почти все точки, что противоречило бы определению аттрактора.

Из определения аттрактора также следует, что любой сток γ_j принадлежит A_M, поскольку бассейн притяжения стока γ_j содержит окрестность этого стока и, следовательно, имеет положительную меру. Поскольку, с одной стороны, рассматриваемые стоки γ_j накапливаются к седлу p, а с другой стороны, аттрактор Милнора замкнут, имеем: $p \in A_M(F)$.

Рассмотрим теперь сток γ из первой посылки предложения. Весь бассейн этого стока, за исключением самого стока, состоит из блуждающих точек. Среди этих блуждающих точек есть точки неустойчивого многообразия $W^u(p)$. Рассмотрим одну из них. Так как она блуждающая, расстояние от нее до аттрактора положительно. С другой стороны, поскольку эта точка лежит в $W^u(p)$, её прообразы под действием итераций F подходят сколь угодно близко к $p \in A_M(F)$. Однако будь аттрактор устойчив по Ляпунову, такое было бы невозможно.

□

Замечание 15. Все утверждения о неустойчивости аттракторов, доказанные ниже, сводятся к предложению 14. Необходимо заметить, что доказательство Предложения 14 использует лишь следующие три свойства аттрактора Милнора: аттрактор замкнут, содержит любой сток и содержится в неблуждающем множестве. Таким образом, аналогичное утверждение справедливо для любого другого определения аттрактора, если только из этого определения следуют три рассматриваемых свойства. Кроме того, в предложении 14 предположение, что F является диффеоморфизмом, на самом деле, несущественно: это отображение с тем же успехом может быть всего лишь локальным диффеоморфизмом — доказательство остается тем же самым.

Замечание 16. Выше устойчивость по Ляпунову была определена в чисто топологических терминах, в то время как классическое определение устойчивости решения дифференциального уравнения формулируется в метрических терминах. На самом деле, можно рассматривать другое определение устойчивости по Ляпунову, очень похожее на то, что было сформулировано выше, но не эквивалентное ему[14]. А именно, будем называть инвариантное множество K *метрически устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое что любая положительная полуорбита, стартующая из δ-окрестности множества K, никогда не покинет ε-окрестность K. Суть замечания состоит в том, что верен аналог предложения 14, где неустойчивость по Ляпунову заменена на метрическую неустойчивость по Ляпунову, и, более того, доказательство в этом случае не использует замкнутость аттрактора. Таким образом, если мы будем рассматривать метрическую неустойчивость, мы сможем переформулировать все результаты для любого определения аттрактора, если это определение предполагает, что аттрактор содержит любой сток и содержится, в свою очередь, в неблуждающем множестве.

2.3 Явление Ньюхауса

В 70-е годы Ш. Ньюхаус опубликовал серию работ [30],[31],[32], посвященных устойчивым гомоклиническим касаниям и сосуществованию бесконечного множества стоков или источников.

Теорема 17 (Newhouse, [30, 31])**.** *Для любого многообразия M размерности больше единицы и для любого $r \geq 2$ существует открытое множество $U \subset \mathrm{Diff}^r(M)$, такое что у любого диффеоморфизма $G \in U$ есть базисное множество $\Lambda(G)$ с устойчивым касанием и притом топологически типичный диффеоморфизм из U имеет бесконечное число периодических стоков.*

Теорема 18 (Newhouse, [32])**.** *Пусть у диффеоморфизма $F \in \mathrm{Diff}^2(M)$, $\dim M = 2$, есть периодическое седло p с гомоклиническим касанием. Тогда сколь угодно близко*

[14] К примеру, в предложении 14 объединение всех стоков не замкнуто и является устойчивым по Ляпунову (в качестве V из определения устойчивости всегда можно взять объединение достаточно малых поглощающих окрестностей наших стоков), но не является метрически устойчивым по Ляпунову.

к F найдется открытое множество U C^2-диффеоморфизмов с устойчивым касанием для некоторого базисного множества $\Lambda(G)$, непрерывно зависящего от $G \in U$.

Дж. Палис и М. Виана в работе [37] обобщили последний результат на случай большей размерности в предположении, что седло p является 2-сжимающим. Они не строят одно базисное множество с устойчивым касанием, а получают вместо этого устойчивое гетероклиническое касание для пары базисных множеств и выводят из этого существование плотного множества диффеоморфизмов с гомоклиническим касанием для некоторого 2-сжимающего седла. Это устойчивое касание приводит к локально топологически типичному сосуществованию бесконечного множества стоков. Доказательство из работы [37] обобщает рассуждение для случая размерности два, представленное в книге [38].

Теорема 19 (Palis, Viana, [37])**.** *Пусть у диффеоморфизма $F \in \mathrm{Diff}^2(M)$ есть 2-сжимающее периодическое седло p с гомоклиническим касанием. Тогда сколь угодно близко к F найдется открытое множество $U \subset \mathrm{Diff}^2(M)$, в котором плотны диффеоморфизмы с гомоклиническим касанием для гиперболического продолжения некоторого 2-сжимающего седла $\tilde{p}$ и в котором топологически типичные диффеоморфизмы имеют счетное число стоков.*[15]

Нужно отметить также работу С. В. Гонченко, Д. В. Тураева и Л. П. Шильникова [2], в которой доказано более общее утверждение: вблизи любого C^2-диффеоморфизма с гомоклиническим касанием для периодического седла найдется область, где диффеоморфизмы с гомоклиническим касанием плотны.

2.4 Следствия теоремы A

Сначала повторим для удобства формулировку теоремы A, затем выведем несколько важных следствий.

Теорема A. *Пусть в открытом множестве $U \subset \mathrm{Diff}^r(M)$, $r \geq 1$, имеет место устойчивое гомоклиническое касание для 2-сжимающего периодического седла p. Тогда топологически типичный диффеоморфизм из U имеет неустойчивый по Ляпунову аттрактор Милнора.*

2.4.1 Гомоклинические касания и неустойчивость аттракторов

Следствие 20. *Пусть в открытой области $U \subset \mathrm{Diff}^r(M)$, $r \geq 1$, имеет место устойчивое касание для базисного множества $\Lambda(F)$, $F \in U$, содержащего 2-сжимающее периодическое седло $p(F)$, которое непрерывно зависит от $F \in U$. Тогда топологически C^m-типичный ($m \geq r$) диффеоморфизм из U имеет неустойчивый по Ляпунову аттрактор Милнора.*

[15] Необходимо заметить, что в [38], [37] рассматриваются только касания между инвариантными многообразиями одного и того же седла, однако Теорема 19 верна и для нашего определения гомоклинических касаний; см. предложение 44 ниже.

Доказательство. Из предложения 12 следует, что диффеоморфизмы с гомоклиническим касанием для седла $p(F)$ образуют C^m-плотное подмножество в $U \cap \mathrm{Diff}^m(M)$. В таком случае, применяя теорему A к $U \cap \mathrm{Diff}^m(M)$ мы получим ровно то, что требуется доказать. □

Следствие 21. *Для любого гладкого компактного двумерного многообразия M существует открытое множество $U \subset \mathrm{Diff}^2(M)$, такое что C^r-типичный ($r \geq 2$) диффеоморфизм $F \in U$ имеет неустойчивый по Ляпунову аттрактор Милнора.*

Доказательство. Рассмотрим открытое множество U из теоремы 17. Возьмем любой $F \in U$ и заметим, что после малого возмущения и, возможно, обращения времени, мы можем предполагать, что в C^2-окрестности V диффеоморфизма F базисное множество Λ, для которого имеет место устойчивое касание, содержит также диссипативное седло. Остается применить следствие 20 к области V, и получим, что требовалось. □

Следствие 22. *Для любого гладкого компактного многообразия M размерности $k \geq 3$ существует открытое множество $U \subset \mathrm{Diff}^1(M)$, такое что C^r-типичный ($r \geq 1$) диффеоморфизм в U имеет неустойчивый по Ляпунову аттрактор Милнора.*

Доказательство. Доказательство состоит в применении следствия 20 к следующей теореме[16].

Теорема 23 (Asaoka, [10])**.** *Для любого гладкого многообразия размерности не меньше трех существует C^∞-гладкий диффеоморфизм с базисным множеством, которое содержит 2-сжимающее седло и для которого имеет место C^1-устойчивое касание.*

□

Замечание 24. На самом деле, следствия 21 и 22 можно вывести из предложения 14 в обход теоремы A.

В двумерном случае, как было замечено независимо Ю.С. Ильяшенко и А. В. Окуневым, можно рассмотреть диффеоморфизм $F \in \mathrm{Diff}^2(M)$ как в теореме 19, то есть такой, что имеет место гомоклиническое касание для некоторого диссипативного седла p, и дополнительно потребовать, чтобы $W^u(O(p))$ пересекало бассейн какого-то стока.[17] Последнее свойство сохраняется при малых возмущениях, так что мы можем считать, что им обладают все отображения из множества U, существование которого утверждается в теореме 19. Далее нужно слегка усовершенствовать доказательство двумерной версии теоремы 19, представленное в книге [38], чтобы показать, что можно взять седло $\tilde{p}$, гетероклинически зацепленное с продолжением исходного седла. Тогда из λ-леммы будет следовать, что для $G \in U$ неустойчивое многообразие $W^u(\tilde{p}(G))$ пересекает бассейн притяжения упомянутого выше стока. Нетрудно показать (и мы проведем это рассуждение чуть ниже), что в таком случае для C^r-типичного диффеоморфизма из U стоки накапливаются к продолжению седла $\tilde{p}$. Значит, C^r-типичный диффеоморфизм из U

[16] В данном случае представляется более удобным дать ссылку на работу Масаюки Асаоки, поскольку в ней теорема сформулирована явно и в том виде, который нам нужен, однако, как было сказано выше, конструкция, лежащая в основе этого результата, была известна Ш. Ньюхаусу (см. [33]).

[17] Выполнения обоих этих условий можно добиться, изотопно меняя линейный диффеоморфизм $\mathbb{R}^2$ с седлом в начале координат, так что отображение с нужными свойствами существует.

удовлетворяет обоим требованиям предложения 14, а следовательно имеет неустойчивый по Ляпунову аттрактор Милнора.

Более того, удивительным образом оказалось, что конструкция, использованная Масаюки Асаокой в [10], также обеспечивает, что для (локально) типичного диффеоморфизма выполнены оба требования предложения 14. М. Асаока использует нормально-гиперболический инвариантный вперед отталкивающий диск, ограничение динамики на который является отображением Плыкина (см. статью Р.В. Плыкина [5] или книгу [23], где дан несколько более простой пример такого отображения), у которого есть неподвижное растягивающее площадь седло. Конструкция обеспечивает устойчивое касание именно для этого седла, причем устойчивое многообразие этого седла пересекает бассейн отталкивания источника, который есть у отображения Плыкина. После обращения времени получаем, что у отображения трехмерного многообразия есть 2-сжимающее седло p, у которого неустойчивое многообразие $W^u(p)$ пересекает бассейн стока, который был до обращения времени источником отображения Плыкина на нормально-гиперболическом диске. Далее можно применить слегка модифицированное рассуждение Ньюхауса (см. раздел 2.5 ниже) и доказать с его помощью, что локально типичным образом стоки накапливаются к нужному седлу.

Следствие 25. *Любой C^2-диффеоморфизм F с гомоклиническим касанием для 2-сжимающего периодического седла p принадлежит замыканию открытого в C^2-топологии множества $U \subset \mathrm{Diff}^2(M)$, в котором топологически типичный диффеоморфизм имеет неустойчивый по Ляпунову аттрактор Милнора.*

Доказательство. Теорема 19 говорит, что сколь угодно близко к F найдется область, где имеет место устойчивое касание для гиперболического продолжения некоторого 2-сжимающего седла $\tilde{p}$. Применяя теорему A к последовательности таких областей, в замыкании объединения которых лежит F (для каждой области теорема применяется к своему седлу $\tilde{p}$, которые априори не обязаны совпадать для разных областей), мы заключаем, что в каждой из них топологически типичны диффеоморфизмы с интересующим нас свойством. В таком случае мы можем взять объединение этих областей в качестве U. □

2.4.2 Бесконечное число стоков и неустойчивость аттракторов

Прежде всего нужно заметить, что некоторые авторы определяют *явление Ньюхауса* как локально типичное сосуществование бесконечного числа стоков, не предполагая наличия в той же области пространства диффеоморфизмов устойчивого касания для какого-либо базисного множества или седла. Присутствие устойчивых касаний для 2-сжимающих седел влечет типичность сосуществования бесконечного числа стоков, однако неизвестно, верно ли обратное. S. Crovisier, E. Pujals и M. Sambarino анонсировали результат (см. [18, Cor. 4.5]), согласно которому по крайней мере в C^1 локально типичное сосуществование бесконечного числа стоков влечет существование плотного множества диффеоморфизмов с гомоклиническими касаниями, что кажется довольно-таки близким к ответу на интересующий нас вопрос.

Теорема 26 (Crovisier, Pujals, Sambarino)**.** *Для любого открытого множества $V \subset \mathrm{Diff}^1(M)$, где M компактное многообразие, следующие условия эквивалентны:*

- *топологически типичный диффеоморфизм в V имеет бесконечно много стоков,*
- *в V плотны диффеоморфизмы с гомоклиническими касаниями для 2-сжимающих периодических седел.*

Поскольку гомоклинические касания в этой теореме относятся в общем случае к разным седлам (и мы не знаем, являются ли эти седла гетероклинически зацепленными), теорема A не влечет топологической типичности диффеоморфизмов с неустойчивыми аттракторами в рассматриваемом открытом множестве. Однако, поскольку C^1-диффеоморфизм с гомоклиническим касанием для некоторого седла может быть приближен C^2-диффеоморфизмом с гомоклиническим касанием для гиперболического продолжения этого седла, прямолинейное применение следствия 25 доказывает следующее утверждение.

Следствие 27. *Пусть M — гладкое компактное многообразие, а $V \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ — открытое множество, в котором топологически типичный диффеоморфизм V имеет бесконечно много стоков. Тогда в V плотны диффеоморфизмы с неустойчивыми по Ляпунову аттракторами.*

Таким образом, положительный ответ на следующий вопрос представляется весьма вероятным.

Проблема. *Верно ли, что на компактных многообразиях локально топологически типичное сосуществование бесконечного числа стоков всегда сопровождается топологически типичной неустойчивостью аттракторов Милнора?*

Подмножество фазового пространства называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и притягивает каждую точку из некоторой своей окрестности. Следующее рассуждение, принадлежащее А. В. Окуневу, показывает, что из сосуществования бесконечного числа стоков следует, по крайней мере, что аттрактор не является асимптотически устойчивым.

Теорема 28 (А. В. Окунев)**.** *Если диффеоморфизм F имеет бесконечно много стоков, его аттрактор Милнора не является асимптотически устойчивым.*

Доказательство. Рассмотрим сток γ отображения F. Обозначим через B бассейн притяжения его орбиты $O(\gamma)$. Граница ∂B этого бассейна — замкнутое инвариантное множество. Если пересечение границы бассейна с аттрактором не пусто, то аттрактор неустойчив по Ляпунову. Действительно, сколь угодно близко к точке $a \in \partial B \cap A_M$ можно взять точку $b \in B$, чья положительная полуорбита неизбежно проходит через блуждающую область $U \setminus \overline{F(U)}$, где U — некоторая фиксированная поглощающая окрестность орбиты $O(\gamma)$.

Предположим теперь, что для любого стока диффеоморфизма F граница его бассейна отделена от аттрактора. Заметим, что в этом случае ни одна точка границы не притягивается к аттрактору A_M. Рассмотрим последовательность стоков $(\gamma_j)_{j\in\mathbb{N}}$, которая сходится к точке $z \in M$ (как обычно, мы предполагаем, что M компактно). Поскольку аттрактор замкнут, z лежит в аттракторе A_M. Для каждого стока γ_j обозначим через B_j бассейн притяжения его орбиты $O(\gamma_j)$. Существует последовательность точек

$b_j \in \partial B_j$, сходящаяся к точке z. Действительно, для γ_j, близкого к точке z, можно взять (топологический, если угодно) отрезок, соединяющий z и γ_j, и найти какую-нибудь точку пересечения этого отрезка с ∂B_j. Таким образом мы получаем последовательность (b_j), которая сходится к $z \in A_M$, но состоит из точек, не притягивающихся к A_M, что противоречит асимптотической устойчивости аттрактора. □

2.5 Сведение теоремы A к лемме о захвате

Лемма C (лемма о захвате)**.** *Пусть у $F \in \mathrm{Diff}^r(M)$, $r \geq 1$, есть 2-сжимающее периодическое гиперболическое седло $p = p(F)$ с гомоклиническим касанием. Тогда сколь угодно близко к F в смысле C^r-метрики можно найти диффеоморфизм G, для которого $W^u(p(G), G)$ пересекает бассейн притяжения периодического стока.*

Замечание 29. Двумерная версия этой леммы может быть найдена в статье Ш. Ньюхауса [34, Lemma 2.2], однако там есть пробел в доказательстве. А именно, то доказательство работает лишь в случае, когда собственные значения $|\lambda| < 1 < |\sigma|$ седла p удовлетворяют неравенству $|\lambda\sigma^2| < 1$.

Замечание 30. Как сообщил автору J. C. Tatjer, двумерная версия леммы о захвате для случая сильно диссипативных седел, а также в некоторых других случаях доказана в [44](см. Thm. 5.8). Хотя доказательство из работы [44], вероятно, можно обобщить на случай большей размерности, мы воспользуемся другим подходом, основанным на работе [37] Дж. Палиса и М. Вианы.

В этом разделе мы выведем теорему A из леммы о захвате, а доказательству самой леммы будет посвящен следующий раздел.

Доказательство теоремы A. Пусть, как в формулировке теоремы A, у нас есть открытое множество $U \subset \mathrm{Diff}^r(M)$, $r \geq 1$, где имеет место устойчивое касание для 2-сжимающего периодического седла p (см. определение 13). Возьмем диффеоморфизм $F \in U$, у которого есть гомоклиническое касание для седла $p(F)$. Согласно Prop. 1 из статьи [31], размыкая гомоклиническое касание при помощи C^r-малого возмущения, мы можем добиться возникновения гиперболического периодического стока, орбита которого проходит вблизи точки, где раньше было касание.[18] Поскольку конечные отрезки орбит непрерывно зависят от отображения и от начальной точки, отсюда следует, что для произвольного δ можно при помощи сколь угодно малого возмущения создать сток, орбита которого проходит на расстоянии меньше δ от гиперболического продолжения седла p. Действительно, до возмущения точка гомоклинического касания q принадлежит устойчивому многообразию седла $p(F)$, а следовательно, существует окрестность V точки q и число n, такие что $F^n(V)$ содержится в (открытой) δ-окрестности $p(F)$. Аналогичное утверждение справедливо для любого диффеоморфизма G, достаточно близкого к F: седло $p(G)$ близко к $p(F)$, а область $G^n(V)$ близка к $F^n(V)$, так что $G^n(V)$ содержится в δ-окрестности седла $p(G)$. Таким образом, если у G есть сток внутри V, орбита этого стока проходит δ-близко к $p(G)$.

[18] Дж. Палис и М. Виана доказывают это для размыкания гомоклинического касания в типичном однопараметрическом семействе в статье [37] (см. Remark 6.1). Ниже в доказательстве леммы о захвате мы используем аналогичное, но чуть более простое рассуждение, см. раздел 2.7.

Теперь мы можем воспользоваться стандартным рассуждением Ш. Ньюхауса. А именно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через U_n подмножество открытого множества U, состоящее из диффеоморфизмов F, для которых на расстоянии меньше $\frac{1}{n}$ от седла $p(F)$ найдется гиперболический сток. Эти подмножества обладают следующими свойствами.

- Множество U_n является C^r-открытым, т.к. при малом возмущении гиперболические стоки "выживают" и смещается мало.
- Множество U_n является C^r-плотным подмножеством в U.

  Действительно, взяв любой диффеоморфизм $F \in U$, можно сначала возмутить его, чтобы получить диффеоморфизм с гомоклиническим касанием, а затем сделать еще одно C^r-возмущение, при котором касание размыкается и образуется сток, орбита которого проходит на расстоянии меньше $\frac{1}{n}$ от седла $p(\cdot)$, так что полученный диффеоморфизм принадлежит U_n.

Так как множества U_n C^r-открыты и C^r-плотны в $U \subset \mathrm{Diff}^r(M)$, множество $R = \bigcap_n U_n$ является остаточным подмножеством в U. Для любого $F \in U$ в любой окрестности седла $p(F)$ можно найти сток, а значит, есть последовательность стоков, накапливающаяся к этому седлу.

Предположим теперь, что лемма C доказана. Тогда диффеоморфизмы F, для которых $W^u(p(F))$ пересекает бассейн притяжения некоторого стока, образуют C^r-плотное подмножество C в U. Более того, это подмножество открыто из-за непрерывной зависимости локальных устойчивых и неустойчивых многообразий гиперболических периодических точек от отображения.

Любой диффеоморфизм в $R \cap C$ удовлетворяет условиям предложения 14: у него есть последовательность стоков, сходящаяся к седлу, неустойчивое многообразие которого пересекает бассейн притяжения одного из стоков. Согласно предложению 14, аттрактор Милнора в этом случае неустойчив по Ляпунову. Доказательство теоремы A по модулю леммы C завершено. □

2.6 Лемма о захвате: модельный пример

В этом разделе мы обсудим простейший двумерный пример размыкания гомоклинического касания. На этом примере мы покажем, избегая технических трудностей, возникающих в общем случае, как при размыкании касания образуется сток и как часть неустойчивого многообразия седла может быть захвачена этим стоком.

Описание семейства

Возьмем два числа $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}$, таких что $0 < \lambda < 1 < \sigma$ и $\lambda\sigma < 1$, и рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y и однопараметрическое семейство $\{F_\mu\}_{\mu \in [-\varepsilon, \varepsilon]}$ диффеоморфизмов этой плоскости (C^∞-гладких), таких что

- для любого μ ограничение F_μ на прямоугольник $R_0 = [-2, 2]^2$ имеет вид

$$F_\mu|_{R_0} \colon (x, y) \mapsto (\lambda x, \sigma y); \tag{1}$$

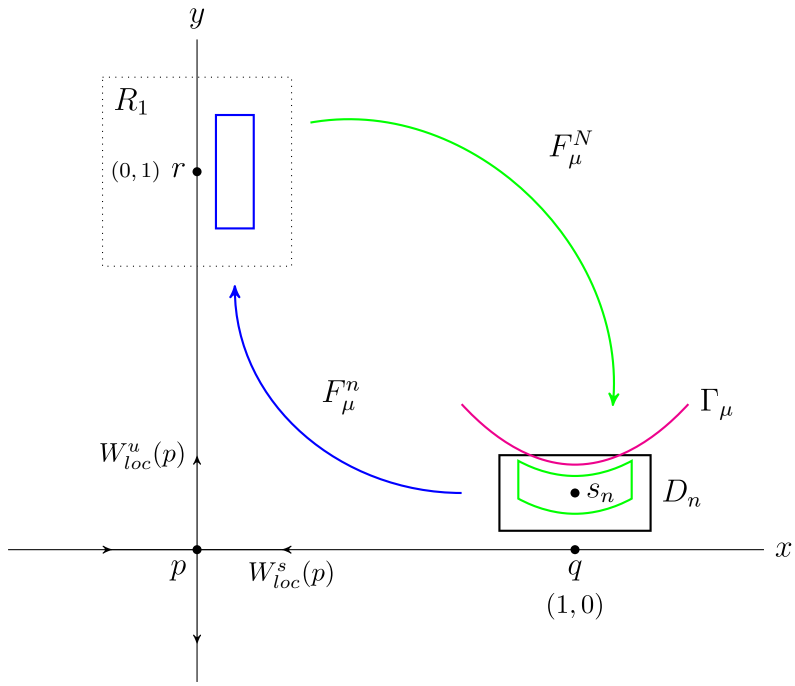


Рис. 1: Модельный пример.

- Существует маленький прямоугольник R_1 с центром в точке $r = (0,1)$ и число $N \in \mathbb{N}$, такие что для любого μ ограничение $F_\mu^N\big|_{R_1}$ имеет вид

$$F_\mu^N\big|_{R_1} : (x,y) \mapsto \left(y,\ \mu - x + (y-1)^2\right). \tag{2}$$

Очевидно, что у любого F_μ есть неподвижное диссипативное седло в начале координат. Обозначим это седло через p. Отрезки $[-2,2] \times \{0\}$ и $\{0\} \times [-2,2]$ являются соответственно локальными устойчивым и неустойчивым многообразиями седла p. Согласно второму из условий, наложенных на семейство, F_μ^N переводит отрезок $R_1 \cap Oy \subset W^u_{loc}(p, F_\mu)$ в дугу Γ_μ параболы, и притом эта дуга сдвигается вдоль вертикальной оси Oy, когда меняется параметр, а при $\mu = 0$ имеет место гомоклиническое касание для седла p в точке $q = (1,0)$, являющейся вершиной параболической дуги Γ_0 (см. рисунок 1).

Если μ положительно и мало, дуга Γ_μ сдвинута вверх и не пересекает ось Ox. Рассмотрим маленький прямоугольник R со сторонами, параллельными координатным осям, лежащий между точкой q и дугой Γ_μ. Под действием итераций отображения F_μ этот прямоугольник будет сжиматься вдоль горизонтальной оси и растягиваться вдоль вертикальной оси. Если центр нашего прямоугольника находится в точке $(1, \sigma^{-n})$, то n-й образ этого прямоугольника будет тонким, но длинным прямоугольником вблизи точки $(0,1)$. Если этот последний прямоугольник содержится в R_1, то отображение F_μ^N переводит его в загнутый четырехугольник, расположенный снизу от Γ_μ и, возможно, пересекающий прямоугольник R. Идея состоит в том, что подобрав μ и размеры исходного прямоугольника, можно гарантировать, что F_μ^{n+N} отобразит его внутрь самого себя, так что внутри прямоугольника будет периодическая точка.

Сток

Сначала мы покажем, как получить сток “вручную”. Это послужит мотивировкой для ренормализационной техники, которая будет использоваться ниже.

Предположим, что мы ищем периодическую точку $s = (x_s, y_s)$ диффеоморфизма F_μ, лежащую в малой окрестности q и переходящую в окрестность точки r через n итераций, а затем возвращающуюся в исходное положение спустя еще N итераций. Если такая периодическая точка существует, то $F_\mu^n(x_s, y_s) = (\lambda^n x_s, \sigma^n x_s)$ лежит в R_1 и, подставив это в (2), получаем аналитическое выражение для $F_\mu^{n+N}(\cdot) = \left(F_\mu^N \circ F_\mu^n\right)(\cdot)$ в окрестности точки s:

$$F_\mu^{n+N}(x,y) = (\sigma^n y,\ \mu - \lambda^n x + (\sigma^n y - 1)^2). \tag{3}$$

Теперь мы можем попробовать найти s, решая уравнение

$$(x_s, y_s) = (\sigma^n y_s,\ \mu - \lambda^n x_s + (\sigma^n y_s - 1)^2).$$

Положим $x_s = 1$. Тогда из уравнения находим $y_s = \sigma^{-n}$ и $\mu = \mu_n = \sigma^{-n} + \lambda^n$. Таким образом, мы получили решение $(x_s, y_s, \mu) = (1,\ \sigma^{-n},\ \sigma^{-n} + \lambda^n)$. Заметим, что $s \to q$ и $\mu_n \to 0$, когда $n \to \infty$. Теперь нетрудно проверить, что для достаточно больших значений n выполнено $F_{\mu_n}^n(x_s, y_s) \in R_1$, откуда следует, что $F_{\mu_n}^{n+N}$ в ограничении на окрестность точки s задается выражением (3). Таким образом, точка s действительно является периодической точкой для рассматриваемого значения параметра μ.

Используя выражение (3), мы можем легко посчитать матрицу Якоби отображения $F_{\mu_n}^{n+N}$ в окрестности точки s:

$$dF_{\mu_n}^{n+N} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^n \\ -\lambda^n & 2\sigma^n(\sigma^n y - 1) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Матрица дифференциала $dF_{\mu_n}^{n+N}(s)$ получается, если подставить $y = y_s = \sigma^{-n}$. Эта матрица имеет собственные значения $\pm i(\lambda\sigma)^{n/2}$. Поскольку $\lambda\sigma < 1$, модули собственных значений меньше единицы, так что точка s является периодическим стоком.

Итак, для любого достаточно большого n мы нашли значение μ_n параметра μ, при котором у отображения F_{μ_n} есть сток s_n:

$$s_n = (1, \sigma^{-n}),\ \mu_n = \lambda^n + \sigma^{-n}.$$

Ренормализация

Теперь мы воспользуемся ренормализационной техникой, представленной в [38, §3.4]. Рассмотрим следующую зависящую от n аффинную замену координат:

$$H_n\colon (x,y) \mapsto (X,Y) = (\sigma^n(x-1),\ \sigma^{2n}(y - \sigma^{-n})). \tag{5}$$

Начало новых координат X, Y находится в точке со старыми координатами $(1, \sigma^{-n})$, а квадрат $K = [-1,1]^2$ в новых координатах соответствует следующему прямоугольнику D_n в исходных координатах:

$$D_n = H_n^{-1}(K) = \{(x,y) \mid |x-1| \le \sigma^{-n},\ |y - \sigma^{-n}| \le \sigma^{-2n}\}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только достаточно большие значения n и предполагать, что $F_\mu^n(D_n) \subset R_1$.

Найдем выражение для $\mathcal{F}_{n,\mu} = H_n \circ F_\mu^{n+N} \circ H_n^{-1}$ в K, т.е. посмотрим, как выглядит ограничение F_μ^{n+N} на D_n в новых координатах:

$$(X,Y) \overset{H_n^{-1}}{\mapsto} (x,y) = (\sigma^{-n}X + 1,\ \sigma^{-2n}(Y+\sigma^n)) \overset{F_\mu^{n+N}}{\mapsto}$$

$$\overset{F_\mu^{n+N}}{\mapsto} (\sigma^{-n}(Y+\sigma^n),\ \sigma^{-2n}Y^2 - \lambda^n(\sigma^{-n}X+1)+\mu) \overset{H_n}{\mapsto}$$

$$\overset{H_n}{\mapsto} (Y,\ Y^2 - \lambda^n\sigma^nX + \sigma^{2n}(\mu - (\sigma^{-n}+\lambda^n))) = \mathcal{F}_{n,\mu}(X,Y).$$

Рассмотрим теперь зависящую от n замену параметра, определенную в окрестности значения $\mu_n = \sigma^{-n} + \lambda^n$:

$$\nu = \sigma^{2n}(\mu - (\sigma^{-n}+\lambda^n)). \tag{6}$$

Неравенство $|\nu| \le 1$ соответствует неравенству $|\mu - (\sigma^{-n}+\lambda^n)| \le \sigma^{-2n}$, и мы будем предполагать, что замена параметра определена для μ, принадлежащих отрезку радиуса σ^{-2n} с центром в точке $\mu_n = \sigma^{-n}+\lambda^n$, и что $\nu \in [-1,1]$.

Пусть $\mathcal{G}_{n,\nu(\mu)} := \mathcal{F}_{n,\mu}$. Так как

$$\mathcal{G}_{n,\nu}(X,Y) = (Y,\ Y^2 - (\lambda^n\sigma^n)X + \nu)$$

и $(\lambda\sigma)^n \to 0$, когда $n \to \infty$, имеем

$$\mathcal{G}_{n,\nu}(X,Y) \rightrightarrows (Y, Y^2+\nu) =: \mathcal{G}_\nu(X,Y) \text{ для } (X,Y) \in K \text{ и } |\nu| \le 1\ (n \to \infty). \tag{7}$$

Заметим, что если взять любое большое число $k > 1$, то для $(X,Y) \in k\cdot K = [-k,k]^2$ и $\nu \in [-k,k]$ упомянутые выше замена параметра (6) и замена координат (5) (а точнее говоря, обратные к ним) будут корректно определены для достаточно больших значений n, а кроме того, будет иметь место та же равномерная сходимость. Разумеется, в этом случае $H_n^{-1}(k\cdot K)$ будет прямоугольником $D_{n,k}$ с тем же центром, что и у D_n, но в k раз большим, а исходный параметр μ будет принимать значения в отрезке $[\mu_n - k\sigma^{-2n},\ \mu_n + k\sigma^{-2n}]$.

Отображение $\mathcal{G}_\nu$ (рассматриваемое как отображение из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$) "забывает" X-координату и переводит квадрат K в дугу параболы, а кроме того, оно, очевидно, полусопряжено с отображением $Y \mapsto Y^2 + \nu$ (из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$). Для малых ν последнее имеет ровно две неподвижные точки: сток a_ν вблизи точки ν и источник r_ν вблизи точки $1-\nu$, и орбита любой точки $y \in [-r_\nu, r_\nu]$ притягивается к стоку. В таком случае для любого $r < r_\nu$ прямоугольник

$$B : |Y| \le r,\ |X| \le 1$$

целиком притягивается к стоку (a_ν, a_ν) отображения $\mathcal{G}_\nu$, притом расстояние между j-м образом точки и стоком убывает равномерно на B с ростом j.

Поскольку сходимость $\mathcal{G}_{n,\nu}|_K \to \mathcal{G}_\nu|_K$ имеет место в C^1 (на самом деле, она имеет место и в C^∞), для достаточно большого n и малого ν отображение $\mathcal{G}_{n,\nu}$ имеет сток $s_{n,\nu}$ вблизи точки (a_ν, a_ν), и нетрудно показать, что прямоугольник B содержится в его бассейне притяжения: достаточно заметить, что требуется равномерно ограниченное число итераций, чтобы образ B попал в поглощающую область, где все отображения, C^1-близкие к $\mathcal{G}_n$, сжимают в подходящей метрике.

Захват

Предположим дополнительно, что выполнено условие

$$\lambda\sigma^2 < 1. \tag{8}$$

Мы будем называть седла, удовлетворяющие этому условию, *сильно диссипативными.*

Покажем, что для диффеоморфизма F_μ с μ достаточно близким к $\mu_n = \sigma^{-n} + \lambda^n$ неустойчивое многообразие седла p пересекает бассейн притяжения гиперболического продолжения стока $H_n^{-1}(s_{n,\nu(\mu_n)})$.

Вспомним, что в исходных x, y-координатах $r = (0,1) \in W^u_{loc}(p, F_\mu)$ и $F_\mu^N(r) = (1,\mu) \in W^u(p, F_\mu)$. Из условия (8) следует, что $\lambda^n\sigma^{2n} \to 0$ при $n \to \infty$, так что имеем:

$$H_n(1,\mu) = (0,\ \sigma^{2n}\mu - \sigma^n) = (0,\ \nu + \lambda^n\sigma^{2n}) \to (0,\nu).$$

Очевидно, когда n велико, а ν мало, $H_n(1,\mu) \in B$, т.е. точка неустойчивого многообразия попадает в бассейн стока.

Если условие (8) не выполнено, точка $(1,\mu)$ может и не лежать в бассейне притяжения стока $H_n^{-1}(s_{n,\nu(\mu)})$. К примеру, возьмем такие λ и σ, что $\sigma > 10$ и $\lambda^2\sigma^3 = 1$, и рассмотрим опять значение параметра $\mu = \mu_n = \sigma^{-n} + \lambda^n$. В этом случае нетрудно проверить при помощи прямого вычисления с использованием выражения (3), что $F_{\mu_n}^{2n+N}(1,\mu_n) = (\lambda^n + \lambda^{2n}\sigma^n,\ 2) \notin R_1$ и $F_{\mu_n}^{2n+N-1}(1,\mu_n) = (\lambda^{n-1} + \lambda^{2n-1}\sigma^n,\ 2\sigma^{-1}) \notin R_1$. Это означает, неформально говоря, что образ точки $(1,\mu_n)$ не попал в прямоугольник R_1 во время второго "витка" вдоль орбиты нашего стока. Можно наложить на семейство диффеоморфизмов дополнительные условия, которые бы гарантировали, что рассматриваемая орбита никогда не вернется в окрестность нашего стока: к примеру, можно потребовать, чтобы для каждого диффеоморфизма семейства некоторая окрестность точки $(0,2)$ притягивалась бы к другому стоку. Заметим, что в этом случае все равно остается возможность, что глобальное неустойчивое многообразие седла p пересекается с бассейном стока $H_n^{-1}(s_{n,\nu(\mu)})$, однако выяснить, имеет ли место такое пересечение, довольно сложно.

Для доказательства леммы о захвате в общем случае мы воспользуемся следующим приемом: мы покажем, что при помощи малого возмущения диффеоморфизма с гомоклиническим касанием для 2-сжимающего седла p можно получить отображение с гомоклиническим касанием для сильно диссипативного седла, гетероклинически зацепленного с продолжением исходного седла.

2.7 Лемма о захвате для сильно диссипативных седел

Прежде всего, нужно сформулировать общее определение сильно диссипативного седла для любой размерности. Рассмотрим периодическое гиперболическое 2-сжимающее седло p отображения F. Пусть σ — единственное растягивающее (т.е. по модулю большее единицы) собственное значение линейного отображения $dF^{\mathrm{per}\,(p)}(p)$, а λ — ограничение $dF^{\mathrm{per}\,(p)}(p)$ на гиперплоскость E^s_p, отвечающую остальным собственным значениям. Напомним, что для любой нормы на E^s_p определена соответствующая операторная норма для λ.

Определение 31. Периодическое гиперболическое 2-сжимающее седло p отображения F называется *сильно диссипативным*, если для некоторой нормы на E^s_p выполнено следующее неравенство:

$$\|\lambda\| \cdot \sigma^2 < 1. \tag{9}$$

В этом разделе мы докажем лемму о захвате для случая сильно диссипативных седел.

Предварительные возмущения

Пусть F — C^r-гладкий ($r \geq 1$) диффеоморфизм многообразия M с гомоклиническим касанием для сильно диссипативного седла p. Сколь угодно близко к F в $\mathrm{Diff}^r(M)$ найдется C^∞-диффеоморфизм со следующими свойствами:

- у $\hat{F}$ есть невырожденное гомоклиническое касание для седла p;
- седло p является нерезонансным для $\hat{F}$, и все собственные значения этого седла различны.

Таким образом, мы можем без ограничения общности предполагать с самого начала, что F является C^∞-гладким и обладает этими двумя свойствами. Чтобы доказать лемму о захвате для сильно диссипативных седел, достаточно показать, что такой диффеоморфизм может быть приближен в $\mathrm{Diff}^\infty(M)$ диффеоморфизмами, для которых неустойчивое многообразие продолжения седла p пересекает бассейн стока.

Линеаризующие координаты

Поскольку седло p теперь предполагается нерезонансным, а отображение — C^∞-гладким, согласно теореме Стернберга (см. [43]) существует окрестность седла p, где $F^{\mathrm{per}\,(p)}$ может быть линеаризовано при помощи подходящей C^∞-гладкой замены координат. Мы будем считать для простоты, что p — неподвижная точка для F, однако в случае периодической точки рассуждение совершенно аналогично.

Обозначим x, y линеаризующие координаты в окрестности точки p: $x \in \mathbb{R}^{m-1}$, $y \in \mathbb{R}$, $m = \dim M$. Для простоты будем отождествлять точки в области, где определена линеаризующая карта, и их координатные образы в $\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$. Мы будем считать, что в нашей линеаризующей карте точка p совпадает с началом координат, $W^s_{loc}(p) \subset \{y = 0\}$, а $W^u_{loc}(p) \subset \{x = 0\}$. Тогда, сделав при необходимости еще одну линейную замену координат, которая сохраняет ось y и гиперплоскость $\{y = 0\}$, мы можем также считать, что

- точка $r = (0, 1) \in W^u_{loc}(p)$ принадлежит орбите гомоклинического касания, а F^N переводит r в точку $q = (e, 0) \in W^s_{loc}(p)$, причем евклидова норма e в $\mathbb{R}^{m-1}$ меньше единицы;
- линейное отображение λ сжимающее, так что единичный шар B в плоскости $\{y = 0\}$ оно переводит внутрь себя;
- в выбранных нами координатах F линеаризуется в окрестности R_0 цилиндра $B \times [-1, 1]$.

Пусть R_1 — малая окрестность точки r. Если записать $F^N|_{R_1}$ в виде:

$$F^N\big|_{R_1}: (x,y) \mapsto (\mathcal{A}(x,y), \mathcal{B}(x,y)),$$

то, поскольку касание в точке q невырожденное, отображения $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-1}$ и $\mathcal{B}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям:

$$\mathcal{A}(0,1) = e, \ \mathcal{B}(0,1) = \partial_y \mathcal{B}(0,1) = 0, \ \ \partial_{yy}\mathcal{B}(0,1) \neq 0. \tag{10}$$

Специальное семейство

Теперь мы можем выбрать однопараметрическое C^∞-гладкое семейство (F_μ), проходящее через диффеоморфизм F при μ равном нулю. Требуемое возмущение отображения F будет впоследствии найдено в этом семействе, в точности как было сделано в модельном примере.

Выбирая семейство, нужно помнить, что, во-первых, хотелось бы, чтобы F_μ^N имело как можно более простой вид в окрестности R_1 точки r, а во-вторых, мы бы не хотели, чтобы ограничение отображений нашего семейства на R_0 зависело от параметра (в частности, пусть седло остается всегда в начале координат и имеет одни и те же собственные значения) и, в-третьих, мы хотим, чтобы гомоклиническое касание в нашем семействе размыкалось с ненулевой скоростью. Поэтому мы будем рассматривать семейство $(F_\mu)_{\mu\in[-\varepsilon,\varepsilon]}$, такое что

- $F_0 = F$ и любое F_μ совпадает с F вне малой окрестности (окрестность может быть взята не зависящей от μ) точки $z = F^{-1}(q) = F^{N-1}(r) \notin R_0$,
- когда параметр изменяется, F_μ-образ каждой точки в некоторой еще более малой окрестности точки z сдвигается в направлении оси y с той же скоростью, с какой меняется параметр.

На самом деле, принимая во внимание условия (10), мы можем выбрать такое семейство, чтобы F_μ^N имело следующий вид в окрестности R_1 точки r:

$$F_\mu^N\big|_{R_1}: (x,y) \mapsto \big(e + a\cdot(y-1) + \gamma x + \rho_1(x,y), \ \mu - cx + b(y-1)^2 + \rho_2(x,y)\big), \tag{11}$$

где $a \in \mathbb{R}^{m-1}, \ b \in \mathbb{R}$, $c\colon \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}$ и $\gamma\colon \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}^{m-1}$ — линейные отображения, а ρ_1, ρ_2 — остаточные члены, удовлетворяющие условиям

$$j^1_{(0,1)}\rho_1 = 0, \ j^1_{(0,1)}\rho_2 = 0, \ \ \partial_{yy}\rho_2(0,1) = 0. \tag{12}$$

Здесь j^1_t обозначает 1-струю отображения в точке t. Заметим, что выбрав подходящее семейство и достаточно малую окрестность R_1 мы добились того, чтобы остаточные члены не зависели от μ.

Выражение (11) напоминает соответствующее выражение (2) из модельного примера, различия состоят только в том, что появились несколько новых “коэффициентов” и остаточные члены.

Как мы уже говорили выше, в нашем специальном семействе ограничение $F_\mu|_{R_0}$ не зависит от μ:

$$F_\mu|_{R_0}\colon (x,y) \mapsto (\lambda x, \sigma y). \tag{13}$$

Ренормализация

Теперь воспользуемся ренормализационной техникой как в модельном случае. Как и раньше, тут мы следуем работам [38, 37].

Рассмотрим следующую зависящую от n аффинную замену координат:

$$H_n : X = \sigma^n(x - e),\ Y = b\sigma^{2n}(y - \sigma^{-n}). \tag{14}$$

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что n четно, а стало быть, σ^n положительно. Начало новых координат находится в точке со старыми координатами (e, σ^{-n}), а куб $K = [-k, k]^m,\ k \geq 2$, в новых координатах соответствует следующему параллелепипеду $D_{n,k}$ в исходных координатах:

$$D_{n,k} = H_n^{-1}(K) = \{(x, y) \mid |y - \sigma^{-n}| \leq k\sigma^{-2n}|b^{-1}|,\ |(x - e)_j| \leq k\sigma^{-n},\ j = 1, \dots, m - 1\}.$$

Как и в модельном случае, найдем выражение для $\mathcal{F}_{n,\mu} = H_n \circ F_\mu^{n+N} \circ H_n^{-1}$ в K в предположении, что n достаточно велико:

$$(X, Y) \overset{H_n^{-1}}{\mapsto} (x, y) = (\sigma^{-n}X + e,\ b^{-1}\sigma^{-2n}Y + \sigma^{-n})) \overset{F_\mu^{n+N}}{\mapsto}$$

$$\overset{F_\mu^{n+N}}{\mapsto} \left(e + a \cdot \frac{\sigma^{-n}}{b}Y + \gamma(\lambda^n(\sigma^{-n}X + e)) + \hat{\rho}_1,\ \mu - c\lambda^n(\sigma^{-n}X + e) + b(b^{-1}\sigma^{-n}Y)^2 + \hat{\rho}_2\right) \overset{H_n}{\mapsto}$$

$$\left(ab^{-1}Y + \gamma(\lambda^n(X + \sigma^n e)) + \sigma^n\hat{\rho}_1,\ Y^2 - cb\sigma^n\lambda^n(X) + b\sigma^{2n}(\mu - (\sigma^{-n} + c\lambda^n(e))) + b\sigma^{2n}\hat{\rho}_2\right)$$

Здесь

$$\hat{\rho}_i(X, Y) = \rho_i(\lambda^n(\sigma^{-n}X + e), 1 + b^{-1}\sigma^{-n}Y),\ i = 1, 2.$$

Заметим, что, поскольку седло p 2-сжимающее, $\|\lambda^n\|\sigma^n \to 0$ при $n \to \infty$ для любой операторной нормы для оператора λ. В этом случае, очевидно, $\|\gamma(\lambda^n(\sigma^n e))\| \to 0$, $\|\gamma \circ \lambda^n\| \to 0$ и $\|cb\sigma^n \cdot \lambda^n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Более того, нетрудно проверить, что из условий (12) следует, что

$$\sigma^n\hat{\rho}_1|_K \to 0,\ \sigma^{2n}\hat{\rho}_2|_K \to 0 \text{ в } C^1.$$

Теперь для достаточно больших n рассмотрим зависящую от n замену параметра

$$\nu = b\sigma^{2n}(\mu - (\sigma^{-n} + c \circ \lambda^n(e))), \tag{15}$$

определенную в замкнутой $k\frac{\sigma^{-2n}}{|b|}$-окрестности точки $\mu_n = \sigma^{-n} + c \circ \lambda^n(e)$. Обозначим эту окрестность через I_n. Тгда I_n соответствует отрезку $[-k, k]$ в новом пространстве параметров.

Положим $A = a \cdot b^{-1} \in \mathbb{R}^{m-1}$ и рассмотрим следующее семейство отображений

$$\mathcal{G}_\nu \colon \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} \colon (X, Y) \mapsto (AY, Y^2 + \nu).$$

Мы можем заключить, что для $\mathcal{G}_{n,\nu} := \mathcal{F}_{n,\mu(\nu)}$ в ограничении на K имеет место следующая сходимость:

$$\mathcal{G}_{n,\nu}|_K \xrightarrow{C^1} \mathcal{G}_\nu|_K \text{ равномерно для } |\nu| \leq 1 \text{ при } n \to \infty. \tag{16}$$

Сток и захват

Аналогично модельному примеру, при близких к нулю значениях параметра ν отображение $\mathcal{G}_\nu$ имеет сток (Aa_ν, a_ν), и притом существует $\delta > 0$, не зависящее от ν, такое что куб B:

$$B : |Y| \le \delta,\ |X_i| \le \delta,\ i = 1, \dots, m-1,$$

содержится в бассейне этого стока.

Из сходимости (16) следует, что для достаточно больших n и достаточно малых по модулю ν отображение $\mathcal{G}_{n,\nu}$ имеет сток $s_{n,\nu}$ вблизи точки (Aa_ν, a_ν) и что куб B содержится в его бассейне притяжения.

Наконец, посчитаем X, Y-координаты точки $F_\mu^N(r) \in W^u(p, F_\mu)$. Поскольку x, y-координаты этой точки равны (e, μ), имеем

$$H_n(e, \mu) = (0, \nu + bc(\sigma^{2n}\lambda^n(e))) \to (0, \nu) \text{ as } n \to \infty.$$

Эта сходимость имеет место в силу того, что седло сильно диссипативное. Заметим, что, хотя в определении сильной диссипативности требуется, чтобы условие (9) выполнялось для хоть какой-нибудь нормы, из этого условия тем не менее следует сходимость $\|\sigma^{2n}\lambda^n\| \to 0$ (при $n \to \infty$) в любой норме. Теперь мы видим, что при больших n и малых ν точка $H_n(e, \mu)$ лежит в кубе B. Мы получили таким образом диффеоморфизм F_μ, для которого неустойчивое многообразие седла p пересекает бассейн притяжения стока. Поскольку репараметризация была определена для $\mu \in I_n$, а отрезки I_n близки к нулю при больших n, такой диффеоморфизм F_μ можно найти сколь угодно близко к F, что завершает доказательство.

Замечание 32. Мы привели доказательство для случая неподвижного седла, однако, как уже было замечено выше, то же рассуждение работает и для периодических седел, даже в случае, когда точка касания принадлежит инвариантным многообразиям разных седел одной орбиты. Единственная разница состоит в том, что для данного n нужно рассматривать отображение $F_\mu^{n\cdot \mathrm{per}(p)+N}$ вместо F_μ^{n+N}.

Замечание 33. Модифицировав доказательство из этого раздела, можно показать, что захват происходит при возмущении в любом C^r-семействе, в котором невырожденное гомоклиническое касание для сильно диссипативного седла разрушается невырожденным образом. Затем можно избавиться от условия сильной диссипативности приблизительно так же, как это делается в следующем разделе.

2.8 Лемма о захвате в общем случае

Теперь мы переходим к случаю, когда седло p не является сильно диссипативным. Как и в разделе 2.7, мы предполагаем, что наше отображение F является C^∞-гладким, в окрестности седла p применима теорема Стернберга о линеаризации, а гомоклиническое касание невырождено. Все возмущения, рассматриваемые в этом разделе, предполагаются C^∞-малыми.

Поиск другого седла

Предположим, что после малого возмущения мы нашли сильно диссипативное седло p', гетероклинически зацепленное с продолжением исходного седла, и, более того, для седла p' имеет место гомоклиническое касание. В таком случае мы можем применить к этому касанию уже доказанную лемму о захвате для сильно диссипативных седел и заключить, что после еще одного малого возмущения неустойчивое многообразие гиперболического продолжения седла p' будет пересекать бассейн притяжения стока. Сохраним прежние обозначения p, p' для гиперболических продолжений старого и нового седла соответственно.

Поскольку эти седла гетероклинически зацеплены, из λ-леммы следует, что $W^u(O(p))$ накапливается к $W^u(O(p'))$. Но в таком случае $W^u(O(p))$ пересекает бассейн притяжения того же стока, что доказывает лемму о захвате в общем случае.

С помощью ренормализационной техники, описанной выше, можно получить естественного, в некотором смысле, кандидата на роль седла p'. Рассмотрим отображение $\mathcal{G}_\nu$ (определенное в предыдущем разделе) при $\nu = -2$:

$$(X, Y) \mapsto (AY, Y^2 - 2).$$

У этого отображения есть неподвижное седло $(2A, 2)$ с собственными значениями 4 кратности один и 0 кратности $m-1$. Поскольку отображения $\mathcal{G}_{n,-2}$ сходятся к $\mathcal{G}_{-2}$ в C^1 при $n \to \infty$, для фиксированного малого $\varepsilon > 0$ для достаточно больших значений n при $\nu \in [-2-\varepsilon, -2+\varepsilon]$ отображение $\mathcal{G}_{n,\nu}$ имеет сильно диссипативное неподвижное седло $p_{n,\nu}$, близкое к точке $(2A, 2)$. Действительно, для больших n седло $p_{n,\nu}$ имеет $m-1$ собственных значений, близких к нулю и одно собственное значение, близкое к 4, так что это седло обязано быть сильно диссипативным. В таком случае точка $\tilde{p}_{n,\mu(\nu)} = H_n^{-1}(p_{n,\nu})$ оказывается сильно диссипативным периодическим седлом соответствующего диффеоморфизма $F_{\mu(\nu)}$. Такое седло является естественным кандидатом на роль седла p', потому что, если n достаточно велико, для некоторого ν_0, близкого к -2, для седла $\tilde{p}_{n,\mu(\nu_0)}$ наблюдается гомоклиническое касание.

Предложение 34. *Пусть число $\varepsilon > 0$ фиксировано. Тогда для достаточно больших n найдется значение параметра $\nu_0 \in [-2-\varepsilon, -2+\varepsilon]$, такое что у отображения $\mathcal{G}_{n,\nu_0}$ есть гомоклиническое касание для седла p_{n,ν_0}.*

Доказательство этого предложения в двумерном случае можно найти в [38](§6.3, Prop. 2). Это доказательство обобщается на многомерный случай очевидным образом.

Теперь вспомним, что замена координат H_n^{-1} сопрягает отображение $\mathcal{G}_{n,\nu_0}$ с ограничением диффеоморфизма $F_{\mu(\nu_0)}$ на некоторый параллелепипед, так что у $F_{\mu(\nu_0)}$ есть гомоклиническое касание для седла $H_n^{-1}(p_{n,\nu_0})$.

О гомоклинических связях

В работе [37] Дж. Палис и М. Виана исследовали седла $\tilde{p}_{n,\mu(\nu)} = H_n^{-1}(p_{n,\nu})$, $\nu \in [-2-\varepsilon, -2+\varepsilon]$, чтобы построить базисные множества с большой толщиной (англ. thickness) в устойчивом направлении. Они доказали, что при некоторых дополнительных условиях, наложенных на седло p и на касание, которое размыкается для того, чтобы получить седло $\tilde{p}_{n,\mu}$, это последнее седло оказывается гетероклинически зацепленным с продолжением исходного седла p. В частности, они рассматривают только касания между устойчивым и неустойчивым многообразиями одного и того же седла, в то время как мы рассматриваем также касания между инвариантными многообразиями разных точек одной седловой орбиты.

Поскольку мы хотим доказать лемму о захвате для любого 2-сжимающего седла и любого ассоциированного с ним касания, требуется проделать некоторую дополнительную работу, прежде чем мы сможем воспользоваться результатом Дж. Палиса и М. Вианы. План состоит в том, чтобы заменить при необходимости исходное седло, а точнее говоря, его гиперболическое продолжение, на гетероклинически зацепленное седло и одновременно получить гомоклиническое касание для нового седла, а затем при помощи еще одного малого возмущения заменить это касание на другое, так чтобы в итоге новое седло и новое касание удовлетворяли упомянутым выше дополнительным условиям из [37], которые мы явно сформулируем ниже. Тогда, размыкая это последнее касание, мы получим сильно диссипативное седло, гетероклинически зацепленное с с продолжением исходного (а также гомоклиническое касание для этого нового седла).

В настоящий момент мы предполагаем, что у диффеоморфизма $F \in \mathrm{Diff}^\infty(M)$ есть 2-сжимающее периодическое седло p, что $F^{\mathrm{per}\, p}$ линеаризуемо в окрестности седла p и что гомоклиническое касание, ассоциированное с седлом p, невырождено. Мы будем использовать обозначения, введенные в части раздела 2.7, посвященной линеаризующим координатам, т.е. мы будем предполагать, что эти координаты определены в окрестности R_0 седла p, что $W^u_{loc}(p)$ лежит на оси Oy, а $W^s_{loc}(p)$ лежит в плоскости $\{y = 0\}$, что есть точки $r, q : F^N(r) = q$, принадлежащие орбите касания, и т.д. Как и раньше, мы не будем различать точки области R_0 и их образы в под действием линеаризующей карты. Ось Oy считается "вертикальной", а плоскость $\{y = 0\}$, соответственно, "горизонтальной".

Седло p отображения F может иметь несколько слабых сжимающих собственных значений, т.е. таких, которые имеют максимальный модуль среди собственных значений, по модулю меньших единицы. Однако в типичной ситуации — а мы можем считать, что мы рассматриваем именно типичный случай, — либо слабейшее собственное значение единственно, либо есть пара комплексно-сопряженных слабых собственных значений.

Обозначим w число этих слабых сжимающих собственных значений. Пусть E^{uw}_p — подпространство касательной плоскости T_pM, натянутое на единственный растягивающийся и слабые сжимающиеся собственные (в комплексном смысле) вектора, отвечающие седлу p, а E^{ss}_p — инвариантное подпространство, отвечающее всем остальным "сжимающим" собственным значениям, которые мы будем в дальнейшем называть сильными. У седла p есть $(m - w - 1)$-мерное сильно-устойчивое многообразие $W^{ss}(p)$, касательная плоскость к которому в точке p совпадает с E^{ss}_p. Если многообразие M двумерно, положим $E^{ss}_p = \{0\}$ и $W^{ss}(p) = \{p\}$. После возмущения, которое может быть выбрано сколь угодно малым, мы можем считать, что рассматриваемая нами орбита касания не лежит на сильно-устойчивом многообразии: $q \notin W^{ss}(p)$. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что это так.

Определим $dF^{\mathrm{per}(p)}$-инвариантное расщепление $T_{R_0}M = E^{uw} \oplus E^{ss}$ следующим образом: в линеаризующих координатах слои E^{uw}_z, где $z \in R_0$, попросту параллельны плоскости E^{uw}_p, а слои E^{ss}_z параллельны плоскости E^{ss}_p.

Обозначим π проекцию на E^{uw} вдоль E^{ss} и рассмотрим отображение

$$\Phi\colon E_r^{uw} \to E_q^{uw}, \quad \Phi = \pi \circ dF^N(r)|_{E_r^{uw}}.$$

Линеаризующие координаты позволяют нам отождествить E_r^{uw} и E_q^{uw} и рассматривать Φ как линейное отображение из $\mathbb{R}^{w+1}$ в себя. Поэтому можно рассмотреть следующее условие на касание в точке q:

$$\det(\pi \circ dF^N(r)|_{E_r^{uw}}) > 0. \tag{17}$$

В разделе 6 статьи [37] Дж. Палис и М. Виана рассматривают случай, когда $q \in W^s_{loc}(p) \cap W^u(p)$, а седло p имеет единственное слабое сжимающее собственное значение. Они доказывают, что если отображение Φ — изоморфизм, то седло $\tilde{p}_{n,\mu(\nu)}$, которое получается при помощи ренормализационной техники при размыкании гомоклинического касания в точке q, также имеет единственное слабое сжимающее собственное значение (по крайней мере, для достаточно больших n). Если это собственное значение положительно, и, кроме того, существуют трансверсальные гомоклинические орбиты, принадлежащие тем же связным компонентам множеств $W^u(p) \setminus \{p\}$ и $W^s(p) \setminus W^{ss}(p)$, что и былое касание в точке q, то седло $\tilde{p}_{n,\mu(\nu)}$ гетероклинически зацеплено с гиперболическим продолжением седла p при ν, близких к -2, и достаточно больших n. Суть в том, что условие (17) гарантирует, с одной стороны, что Φ — изоморфизм (что очевидно), а с другой стороны, что слабое сжимающее собственное значение седла $\tilde{p}_{n,\mu(\nu)}$ положительно, по крайней мере, когда ν близко к -2, а n велико и четно (см. обсуждение этого вопроса после (6.10) на стр. 244 статьи [37]; в обозначениях Дж. Палиса и М. Вианы условие (17) имеет вид $\det \Delta_{\mu=0}(r_0) > 0$). Для удобства сформулируем в качестве отдельного предложения нужное нам утверждение, доказанное в статье [37] (но не выделенное там в качестве предложения или леммы).

Предложение 35 ([37])**.** *Пусть у диффеоморфизма $F \in \mathrm{Diff}^\infty(M)$ есть 2-сжимающее седло p, такое что $W^s(p)$ и $W^u(p)$ имеют точку невырожденного касания. Предположим дополнительно, что выполнены следующие условия:*

a) седло p имеет единственное слабое сжимающее собственное значение,

b) $F^{\mathrm{per}(p)}$ линеаризуемо в окрестности седла p,

c) существуют трансверсальные гомоклинические точки, принадлежащие тем же компонентам связности множеств $W^u(p) \setminus \{p\}$ и $W^s(p) \setminus W^{ss}(p)$, что и точка касания,

d) для орбиты касания выполнено условие (17) (где число $N \in \mathbb{N}$ и точки $r \in W^s(p) \cap W^u_{loc}(p)$ и $q \in W^s_{loc}(p) \cap W^u(p)$ такие, как описано выше).

Тогда для ν, близких к -2, и достаточно больших n седло $\tilde{p}_{n,\mu(\nu)}$, образующееся при невырожденном размыкании касания в точке q в однопараметрическом семействе F_μ, гетероклинически зацеплено с гиперболическим продолжением седла p.

В качестве F_μ мы всегда будем брать специальное семейство, определенное в разделе 2.7. В статье [37] рассматриваются произвольные однопараметрические семейства, в которых гомоклиническое касание размыкается с ненулевой скоростью — именно это имеется в виду, когда мы говорим о невырожденном размыкании касания. Ренормализационная схема работает в случае таких семейств с минимальными изменениями, и можно точно так же определить седла $\tilde{p}_{n,\mu(\nu)}$, однако мы будем заниматься только специальными семействами, а потому за подробностями отсылаем читателя к работе Дж. Палиса и М. Вианы.

Если диффеоморфизм F удовлетворяет всем условиям предложения 35, то при помощи малого возмущения можно получить сильно диссипативное седло $\tilde{p}_{n,\mu(\nu)}$, гетероклинически зацепленное с гиперболическим продолжением исходного седла. Ввиду предложения 34 мы также можем предполагать, что у возмущенного диффеоморфизма также есть гомоклиническое касание для нового сильно диссипативного седла, так что, когда мы размыкаем это касание, мы можем гарантировать, что неустойчивые многообразия как нового седла, так и исходного (точнее говоря, их продолжений) пересекут бассейн некоторого стока.

Сейчас, однако, мы не предполагаем, что условия предложения 35 выполнены для рассматриваемого нами гомоклинического касания. Покажем, что при помощи малого возмущения можно получить диффеоморфизм с гомоклиническим касанием для седла $\hat{p}$, гетероклинически зацепленного с продолжением седла p, такой что к этому касанию применимо предложение 35. Для этого нам потребуется сначала доказать несколько вспомогательных утверждений.

Касания сверху и касания снизу

Пусть у F, как и раньше, есть невырожденное гомоклиническое касание для седла p в точке $q \in W^s(p)$. Рассмотрим связную компоненту Γ множества $W^u(p) \setminus \{p\}$, вовлеченную[19] в касание в точке q. Если растягивающее собственное значение σ седла p отрицательно, то вовлечены обе неустойчивых сепаратрисы и можно взять любую из них. Устойчивое многообразие $W^s(p)$ является инъективно погруженным отрытым диском размерности $m-1$ (или $\mathbb{R}^{m-1}$, если угодно). Назовем “сторону” многообразия $W^s(p)$, которая обращена к сепаратрисе Γ в точке p *верхней*, а противоположную “сторону” — *нижней*.

Точнее говоря, рассмотрим сначала локальное устойчивое многообразие точки p. Оно разбивает маленький шар B_0 с центром в точке p на две части; ту часть, которая соответствует сепаратрисе Γ, будем называть верхней. Теперь для произвольной точки $z \in W^s(p)$ возьмем четное число $k = 2l$, такое что $F^{2l\cdot \mathrm{per}(p)}(z) \in W^s_{loc}(p)$. Возьмем маленький шар $B \subset M$ с центром в точке z. Связная компонента точки z в множестве $W^s(p) \cap B$ разбивает шар B на две части. Будем называть верхней частью ту, которую

[19] Мы будем говорить, что связная компонента Γ (иногда мы будем называть ее для краткости сепаратрисой по аналогии с дифференциальными уравнениями) множества $W^u(p)\setminus\{p\}$ вовлечена в касание в точке q, если $q \in F^k(\Gamma)$ для некоторого k. Поскольку мы рассматриваем, на самом деле, гомоклинические точки седловых орбит, а не отдельных седел, точка q может быть точкой касания устойчивого и неустойчивого многообразий разных точек орбиты $O(p)$. Таким образом, точка q не обязана принадлежать Γ. Тем не менее, кажется естественным говорить о связной компоненте множества $W^u(p) \setminus \{p\}$, вовлеченной в касание. Заметим сразу, что в случае отрицательного растягивающего собственного значения обе неустойчивые сепаратрисы оказываются вовлеченными в касание. Это замечание целиком переносится и на случай трансверсальных гомоклинических точек.

отображение $F^{2l\cdot\mathrm{per}(p)}$ переводит внутрь верхней части шара B_0 (мы считаем, что шар B столь мал, что его образ под действием $F^{2l\cdot\mathrm{per}(p)}$ содержится в B_0). Заметим, что если собственное значение σ отрицательно, то $F^{\mathrm{per}(p)}$ меняет местами верхнюю и нижнюю “стороны” устойчивого многообразия $W^s(p)$.

Таким образом, внутри малого шара с центром в точке q, в которой происходит невырожденное касание, неустойчивое многообразие орбиты $O(p)$ подходит к $W^s(p)$ либо сверху, либо снизу. А значит, мы можем естественным образом определить касания *сверху* и *снизу* (или *верхние* и *нижние* касания). Любое невырожденное касание для 2-сжимающего седла таким образом становится касанием сверху или касанием снизу после того, как выбрана сепаратриса, вовлеченная в касание, причем, если неустойчивое собственное значение седла отрицательно, любое квадратичное касание становится касанием снизу при правильном выборе неустойчивой сепаратрисы, поэтому в этом случае мы будем считать любое квадратичное касание касанием снизу.

Предложение 36. *Пусть у диффеоморфизма $F \in \mathrm{Diff}^\infty(M)$ есть 2-сжимающее периодическое седло p, для которого в точке q имеет место (невырожденное) гомоклиническое касание сверху. Предположим также, что связная компонента множества $W^u(p) \setminus \{p\}$, вовлеченная в это касание, также вовлечена в трансверсальное гомоклиническое пересечение. Тогда при помощи сколь угодно C^∞-малого возмущения отображения F можно получить диффеоморфизм G с гомоклиническим касанием снизу для некоторого 2-сжимающего седла $\hat{p}$, гетероклинически зацепленного с продолжением седла p. Если исходное седло имело единственное слабое устойчивое собственное значение, то можно взять $\hat{p}$ с тем же свойством.*

Доказательство. Будем рассматривать случай, когда неустойчивое собственное значение σ седла p положительно, потому что в противном случае любое квадратичное касание является касанием снизу. Как бы то ни было, если бы мы не придерживались этого соглашения, рассуждение, которое мы приводим ниже, можно было бы оставить почти без изменений.

Как и выше, мы будем предполагать без ограничения общности, что отображение $F^{\mathrm{per}(p)}$ линеаризуется в области $R_0 \ni p$, и притом линеаризующие координаты и точки r, q таковы, как описано в разделе 2.7 (q из формулировки данного предложения можно при необходимости заменить на $F^{2l\cdot\mathrm{per}(p)}(q)$ для подходящего $l > 0$).

Пусть точки $\tilde{r} = (0, y_{\tilde{r}}) \in W^u_{loc}(p) \cap R_0$, $y_{\tilde{r}} \in [0, 1/2]$ и $\tilde{q} = (x_{\tilde{q}}, 0) \in W^s_{loc}(p) \cap R_0$, $\|x_{\tilde{q}}\| < 1$, $\tilde{q} = F^{\tilde{N}}(\tilde{r})$, принадлежат трансверсальной гомоклинической орбите, в которую вовлекается та же связная компонента множества $W^u(p) \setminus \{p\}$, что и в касание в точке q. Без ограничения общности мы можем считать, что число $\tilde{N}$ делится на $\mathrm{per}(p)$ (а следовательно, $\tilde{q} \in W^u(p)$): если это не так, то нетрудно показать[20] при помощи λ-леммы, что есть другая трансверсальная гомоклиническая орбита, для которой аналогичное утверждение верно. Из существования такой трансверсальной гомоклинической орбиты следует (см., например, [25], Теорема 6.5.5, а также главу 3 статьи [37]; это утвер-

[20] Если неустойчивая сепаратриса Γ седла p трансверсально пересекает $W^s(F^k(p))$, то Γ, согласно λ-лемме, накапливается к $W^u(F^k(p))$. Поскольку $W^u(F^k(p))$ трансверсально пересекает $W^s(F^{2k}(p))$, то Γ тоже трансверсально пересекает $W^s(F^{2k}(p))$. Продолжая в том же духе, заключаем, что Γ трансверсально пересекается с $W^s(F^{k\cdot\mathrm{per}(p)}(p)) = W^s(p)$.

ждение также известно как теорема Биркгофа-Смейла) существование нетривиального базисного множества $\Lambda \ni p$.

Это базисное множество Λ может быть получено следующим образом. Возьмем малое $\delta > 0$ и рассмотрим цилиндр

$$V_\delta = \{(x, y) \in R_0 \colon \|x\| \le 1, |y| \le \delta\}.$$

Предположим, что число δ подобрано так, что для некоторого $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ множество $F^{\tilde{n}\cdot \mathrm{per}(p)}(V_\delta)$ является цилиндром, близким к отрезку $\{0\} \times [-2y_{\tilde{r}}, 2y_{\tilde{r}}] \subset W^u_{loc}(p)$, а следовательно, $F^{\tilde{n}\cdot \mathrm{per}(p)+\tilde{N}}(V_\delta) \cap V_\delta$ имеет как минимум две связных компоненты: одна из них — цилиндр $\Delta_p \ni p$, близкий к $\{0\} \times [-\delta, \delta]$, а другая компонента $\Delta_{\tilde{q}}$ содержит точку $\tilde{q}$. Обозначим отображение $F^{\tilde{n}\cdot \mathrm{per}(p)+\tilde{N}}$ через H; тогда $H|_{\Delta_p \cup \Delta_{\tilde{q}}}$ — отображение подковы (если число δ достаточно мало), а $\hat{\Lambda} = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} H^k(\Delta_p \cup \Delta_{\tilde{q}})$ — его максимальное инвариантное множество. В таком случае $\Lambda = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F^k(\hat{\Lambda})$ — нужное нам базисное множество отображения F. Мы дали эскиз этой конструкции, чтобы указать на два важных обстоятельства. Во-первых, в силу того, что точка $\tilde{r}$ имеет положительную y-координату, в достаточно малой окрестности точки p любая точка $\xi \in \Lambda$ лежит либо на $W^s_{loc}(p)$, либо выше этого многообразия (направление вверх совпадает, как обычно, с направлением оси y). Во-вторых, множество $F^{-\tilde{N}}(\Delta_{\tilde{q}})$ содержится в малой окрестности точки $\tilde{r}$, когда δ мало.

Таким образом, из построения базисного множества Λ следует существование последовательности $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ седел $p_j \in \Lambda$, таких что:

a) $\mathrm{per}(p_j) = n_j \cdot \mathrm{per}(p) + \tilde{N}$ (а следовательно, $\mathrm{per}(p_j)$ делится на $\mathrm{per}(p)$),

b) $p_j \to p$ и $n_j \to \infty$ при $j \to \infty$,

c) каждое седло p_j лежит выше $W^s_{loc}(p)$,

d) существует точка $r_j \in O(p_j)$, близкая к $\tilde{r}$ и такая, что $F^{\tilde{N}}$ переводит r_j в точку q_j, близкую к $\tilde{q}$, $F^{l\cdot \mathrm{per}(p)}(q_j) \in R_0$ для $l = 1, \dots, n_j$ и, наконец, $F^{n_j\cdot \mathrm{per}(p)}(q_j) = r_j$.

e) Все орбиты $O(p_j)$ равномерно далеки от точки $F^{-1}(q)$.

Прежде всего заметим, что из свойств b) и d) следует, что для больших j седла p_j являются 2-сжимающими. Действительно, покажем, что в наших координатах они сжимают двумерный объем, и воспользуемся замечанием 7). Так как седло p является 2-сжимающим, мы можем считать, что в линеаризующих координатах на R_0 выполнено неравенство $\sigma\|\lambda\| < 1$, где норма порождена евклидовой векторной нормой. Тогда в этих координатах $dF^{\mathrm{per}(p)}$ сжимает двумерный объем.[21] Из b) и d) следует, что для $r_j \in O(p_j)$ выполнено

$$dF^{\mathrm{per}(p_j)}(r_j) = dF^{n_j\cdot \mathrm{per}(p)}(q_j) \circ dF^{\tilde{N}}(r_j).$$

[21] Чтобы это проверить, можно не мудрствуя лукаво рассмотреть произвольную пару векторов $(v_i = u_i + s_i \mid u_i \in E^u_p, s_i \in E^s_p)_{i=1,2}$ и сравнить определители Грама для этой пары и для её образа под действием $L = dF^{\mathrm{per}(p)}$, выраженные через $u_i, s_i, \sigma, \lambda$:

$$\begin{vmatrix} |v_1|^2 & v_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot v_1 & |v_2|^2 \end{vmatrix} = (|u_1|^2 + |s_1|^2)(|u_2|^2 + |s_2|^2) - (u_1 \cdot u_2 + s_1 \cdot s_2)^2 =$$

$$= (|u_1|s_2 - \mathrm{sgn}(u_1 \cdot u_2)|u_2|s_1)^2 + (|s_1|^2|s_2|^2 - (s_1 \cdot s_2)^2);$$

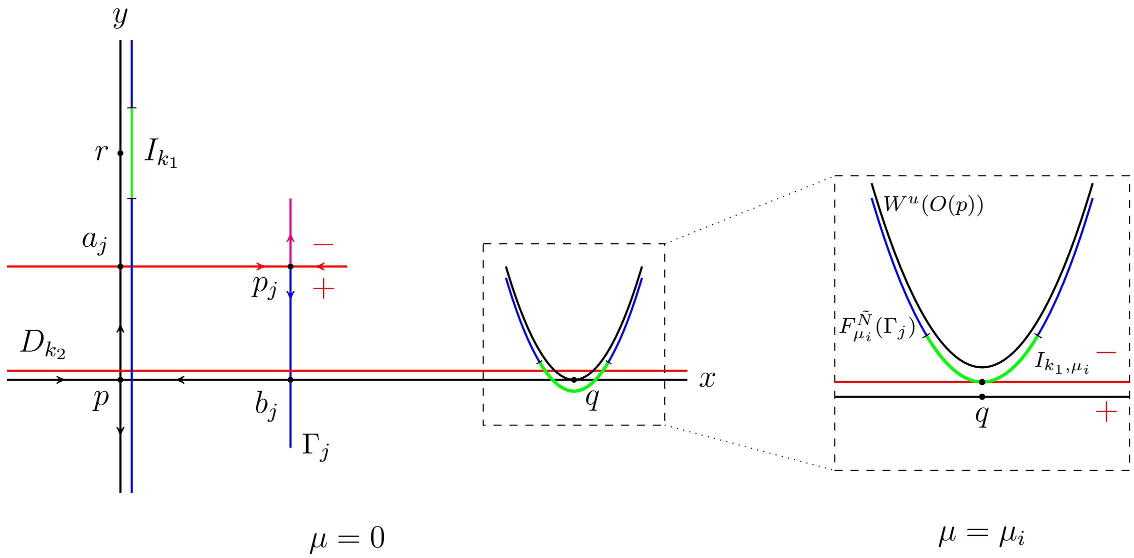


Рис. 2: Переход к касанию снизу.

Здесь $\tilde{N}$ фиксировано, так что норма $dF^{\tilde{N}}(r_j)$ равномерно ограничена, в то время как $dF^{n_j \cdot \mathrm{per}(p)}(q_j)$ совпадает в наших координатах с $\left(dF^{\mathrm{per}(p)}(p)\right)^{n_j}$ и, следовательно, сжимает двумерный объем экспоненциально по n_j. Таким образом, для достаточно больших значений j линейные отображения $dF^{\mathrm{per}(p_j)}(r_j)$ сжимают двумерные объемы, что доказывает, что седла p_j тоже 2-сжимающие.

Далее, если j достаточно велико, то в силу локальной структуры прямого произведения на Λ локальное устойчивое многообразие $W^s_{loc}(p_j)$ является маленьким почти горизонтальным диском, лежащим над гиперплоскостью $\{y = 0\}$ и трансверсально пересекающим $W^u_{loc}(p)$ в некоторой точке a_j. Аналогично $W^u_{loc}(p_j)$ является почти вертикальным отрезком, трансверсально пересекающим $W^s_{loc}(p)$ в точке b_j. Обозначим через Γ_j неустойчивую сепаратрису седла p_j, содержащую последнее пересечение. Продолжение именно этой сепаратрисы Γ_j будет вовлечено в новое касание, которое мы собираемся построить. Как и раньше, мы можем рассмотреть "сторону" устойчивого многообразия $W^s(p_j)$, которая обращена к Γ_j в точке p_j. Назовем эту "сторону" *положительной*, потому что в данном случае название "верхняя" не совсем удачно: положительная "сторона" многообразия $W^s_{loc}(p_j)$ обращена вниз (в смысле вертикального направления, заданного осью Oy, см. рисунок 2).

Так как $W^s_{loc}(p_j)$ трансверсально пересекает $W^u_{loc}(p)$ в точке a_j, из λ-леммы следует, что существует последовательность дисков $D_k \subset W^s(p_j),\ k \in \mathbb{N}$, такая что:

$$\begin{vmatrix} |Lv_1|^2 & Lv_1 \cdot Lv_2 \\ Lv_2 \cdot Lv_1 & |Lv_2|^2 \end{vmatrix} = (\sigma^2|u_1|^2 + |\lambda(s_1)|^2)(\sigma^2|u_2|^2 + |\lambda(s_2)|^2) - (\sigma u_1 \cdot \sigma u_2 + \lambda(s_1)\cdot\lambda(s_2))^2 =$$

$$= (\sigma\lambda(|u_1|s_2 - \mathrm{sgn}(u_1\cdot u_2)|u_2|s_1))^2 + (|\lambda(s_1)|^2|\lambda(s_2)|^2 - (\lambda(s_1)\cdot\lambda(s_2))^2).$$

Так как $\sigma\|\lambda\| < 1$, имеем $(|u_1|s_2 - \mathrm{sgn}(u_1\cdot u_2)|u_2|s_1)^2 > (\sigma\lambda(|u_1|s_2 - \mathrm{sgn}(u_1\cdot u_2)|u_2|s_1))^2$. Наконец, оператор λ — сжимающий, а вторые слагаемые в правых частях — определители Грама для пар s_1, s_2 и $\lambda(s_1), \lambda(s_2)$, так что для вторых слагаемых выполнено такое же неравенство.

1) диск D_k является $F^{2k\cdot \mathrm{per}\, p_j}$-прообразом маленькой окрестности $\hat{D}_k$ точки a_j в $W^s_{loc}(p_j)$, а следовательно, все образы наших дисков под действием итераций отображения F равномерно удалены от точки $F^{-1}(q)$;

2) эти диски стремятся к диску $D_0 = \{(x, y) \colon y = 0, \|x\| \leq 1\} \subset W^s(p)$ как C^∞-вложенные диски;

3) положительные "стороны" дисков D_k смотрят вниз.

Заметим, что из 1) следует 3). Действительно, рассмотрим ориентированный вертикальный отрезок $I = Oy \cap R_0$, направленный вверх. Он пересекает $W^s_{loc}(p_j)$ в точке a_j с положительной стороны на отрицательную. С другой стороны, его прообраз $F^{-2k\cdot \mathrm{per}(p_j)}(I)$ — тоже вертикальный отрезок, направленный вверх (т.к. $2k \cdot \mathrm{per}(p_j) = 2k \cdot l \cdot \mathrm{per}(p)$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$). С другой стороны, любая кривая (в том числе отрезок I с натуральной параметризацией), подходящая к $W^s(p_j)$ с положительной стороны в точке a_j, переводится отображением $F^{-2k\cdot \mathrm{per}(p_j)}$ в кривую, которая делает то же самое в точке $F^{-2k\cdot \mathrm{per}(p_j)}(a_j)$. Следовательно, положительная сторона любого диска D_k обращена вниз.

Аналогично получаем последовательность отрезков $I_k \subset F^{k\cdot \mathrm{per}(p)}(\Gamma_j),\ k \in \mathbb{N}$, накапливающихся к отрезку $I_0 \ni r$ (напомним, что $r = (0, 1)$) и таких, что их прообразы под действием итераций отображения F равномерно удалены от $F^{-1}(q)$.

Теперь зафиксируем седло p_j с достаточно большим номером j и рассмотрим специальное семейство F_μ, описанное в разделе 2.7. Напомним, что отображения этого семейства отличаются от диффеоморфизма $F_0 = F$ только внутри малой окрестности точки $F^{-1}(q)$. Если эта окрестность достаточно мала, точка p_j является периодическим седлом для F_μ при всех $\mu \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, диски D_k лежат в устойчивом многообразии этого седла, а отрезки I_k содержатся в неустойчивом многообразии орбиты этого седла. Вспомним[22], что для любого k при изменении параметра μ пересечение $F^N_\mu(I_k)$ с достаточно малой окрестностью точки q движется по вертикали, в то время как диск D_k остается неподвижным. Таким образом, существует последовательность значения параметра $\mu_i \to 0$ (при $i \to \infty$), таких что для каждого μ_i найдутся k_1 и k_2, для которых дуга $F^N_{\mu_i}(I_{k_1}) =\colon I_{k_1,\mu_i}$ касается диска D_{k_2} в некоторой точке $\hat{q} = \hat{q}(i)$. Более того, при больших i это касание невырождено и является касанием с отрицательной стороны (см. рисунок 2). Другими словами, мы получили возмущение отображения F с касанием снизу для седла $\hat{p} = p_j$.

Докажем теперь второе утверждение предложения: если у седла p слабое сжимающее собственное значение единственно, можно взять $\hat{p}$ с тем же свойством. Пусть образ плоскости $E^{ss}_{\tilde{q}}$ под действием $dF^{-\tilde{N}}(\tilde{q})$ трансверсален плоскости $E^{uw}_{\tilde{r}}$. Выполнения этого условия можно добиться при помощи малого возмущения, сохраняющего все остальные важные для нас свойства отображения, так что мы можем читать, что оно выполнено для F с самого начала.

Для произвольного $\alpha > 0$ и $z \in R_0$ обозначим α-конус вокруг плоскости E^{ss}_z через $C^{ss}_\alpha(z)$:

$$C^{ss}_\alpha(z) = \{v \in T_zM \mid v = v_{uw} + v_{ss},\ v_{uw} \in E^{uw}_z,\ v_{ss} \in E^{ss}_z,\ \|v_{uw}\| \leq \alpha \|v_{ss}\|\}.$$

[22]См. свойства специального семейства в разделе 2.7.

Рассмотрим опять точку $q_j \in O(p_j)$ (определенную выше в пункте **d)**) и узкий α-конус $C^{ss}_\alpha(q_j)$, $\alpha \ll 1$. Поскольку все точки q_j, $j \in \mathbb{N}$, близки к точке $\tilde{q}$, мы можем предполагать, что дифференциалы $dF^{-\tilde{N}}(q_j)$ равномерно близки к $dF^{-\tilde{N}}(\tilde{q})$. Так как плоскость $dF^{-\tilde{N}}(\tilde{q})E^{ss}_{\tilde{q}}$ трансверсальна плоскости $E^{uw}_{\tilde{r}}$, мы можем также предполагать, что для любого j конус $dF^{-\tilde{N}}(q_j)(C^{ss}_\alpha(q_j))$ содержится в конусе $C^{ss}_\beta(r_j)$, где β — некоторое большое число, не зависящее от j.

Отображение $F^{\mathrm{per}(p)}$ линеаризуется в области R_0, так что мы можем считать, что это отображение и его дифференциал в каждой точке $z \in R_0$ совпадают с линейным отображением L, для которого E^{ss} является сильно-устойчивым расслоением. Вспомним теперь (см. пункт **d)**), что $q_j = F^{-n_j \cdot \mathrm{per}(p)}(r_j)$. Дифференциал $dF^{-n_j \cdot \mathrm{per}(p)}(r_j)$ совпадает с L^{-n_j}. Если j велико, число n_j также велико, а если n_j достаточно велико, то L^{-n_j} переводит конус $C^{ss}_\beta(r_j)$ внутрь конуса $C^{ss}_\alpha(q_j)$ и значительно растягивает при этом все векторы в $C^{ss}_\beta(r_j)$, так что $C^{ss}_\alpha(q_j)$ становится инвариантным вперед растягивающимся конусом для $dF^{-(n_j\,\mathrm{per}(p)+\tilde{N})}(q_j)$. В таком случае внутри этого конуса есть единственная инвариантная $(m-2)$-мерная плоскость, и эта плоскость может быть только инвариантной плоскостью, отвечающей сильным устойчивым собственным значениям седла q_j. Итак, слабое устойчивое собственное значение седла p_j единственно, по крайней мере для больших j, и то же самое имеет место для его гиперболического продолжения, для которого мы выше получили гомоклиническое касание.

□

Замечание 37. Если $q \in W^s(p) \cap W^u(p)$ для F, то можно добиться того, чтобы $\hat{q} \in W^u(\hat{p}, G) \cap W^s(\hat{p}, G)$.

Действительно, можно рассуждать следующим образом. Точка $\hat{q}$ всегда лежит в $W^s(\hat{p}, G)$ по построению. Если $q \in W^s(p, F) \cap W^u(p, F)$, то $\mathrm{per}(p)$ делит N. Пусть $N_1 \geq 0$ — остаток от деления N на $\mathrm{per}(p_j)$. Так как период $\mathrm{per}(p)$ делит $\mathrm{per}(p_j)$ и N, он также делит N_1. Будем рассматривать отрезки $I_k \subset F^{k\cdot\mathrm{per}(p)}(\Gamma_j)$, как в доказательстве предложения, для $k = \frac{l\cdot\mathrm{per}(p_j) - N_1}{\mathrm{per}(p)}$, где $l \in \mathbb{N}$. Для таких k имеем:

$$F^N_\mu(I_k) \subset F^N_\mu\left(W^u(F^{l\cdot\mathrm{per}(p_j)-N_1}(p_j), F_\mu)\right) = W^u(F^{l\cdot\mathrm{per}(p_j)-N_1+N}(p_j), F_\mu) = W^u(p_j, F_\mu).$$

Последнее равенство выполнено в силу того, что $N_1 \equiv N \pmod{\mathrm{per}(p_j)}$. Если новое касание получено с использованием такого I_k, это касание между инвариантными многообразиями седла $\hat{p} = p_j$.

Замечание 38. Мы можем также предполагать, что у отображения G из заключения предложения 36 есть трансверсальные гомоклинические точки, принадлежащие тем же связным компонентам множеств $W^u(\hat{p}) \setminus \{\hat{p}\}$ и $W^s(\hat{p}) \setminus W^{ss}(\hat{p})$, что и полученное нами новое касание. Действительно, после того, как мы зафиксировали седло p_j, чье гиперболическое продолжение будет играть роль $\hat{p}$, мы можем при помощи малого возмущения гарантировать, что точка $a_j \in W^s_{loc}(p_j) \cap W^u_{loc}(p)$ не лежит на $W^{ss}(p_j)$. Тогда для больших k_2 диск $D_{k_2} \subset W^s(p_j)$ не будет пересекать $W^{ss}(p_j)$, потому что D_{k_2} есть далекий прообраз малой окрестности точки a_j. Однако этот диск определенно трансверсально пересечет сепаратрису Γ_j в некоторой точке, близкой к b_j. Это трансверсальное пересечение сохраняется при малом возмущении. Кроме того, в него вовлечена та же неустойчивая сепаратриса, что вовлечена в новое касание, и, наконец, как точка касания, так и точка трансверсального пересечения лежат в диске D_{k_2}, не пересекающем сильно устойчивое многообразие седла p_j.

От касаний снизу к условию (17)

Предложение 39. *Если у диффеоморфизма $F \in \mathrm{Diff}^\infty(M)$ есть (невырожденное) касание снизу для 2-сжимающего периодического седла p, то сколь угодно C^∞-малым возмущением отображения F можно получить диффеоморфизм G с невырожденным гомоклиническим касанием для гиперболического продолжения седла p, удовлетворяющим условию (17).*

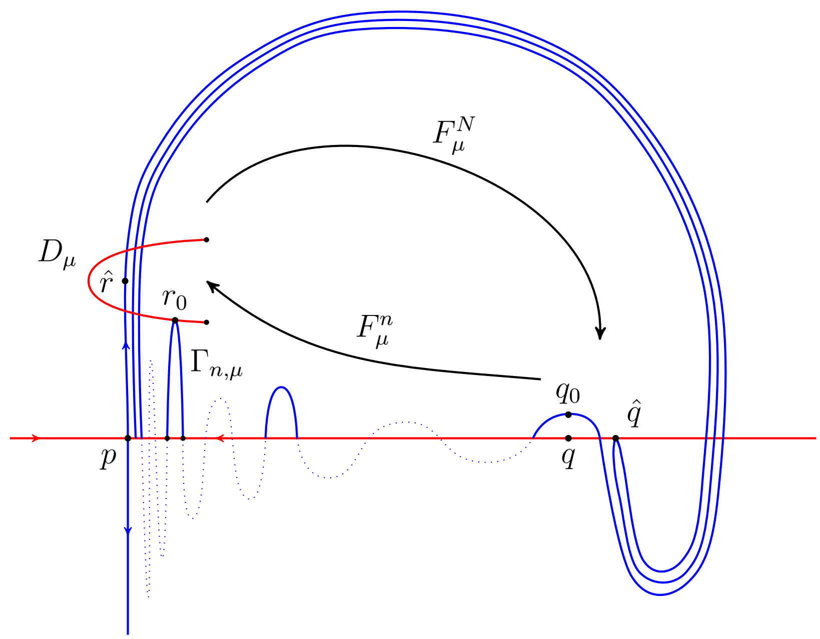
Доказательство. Как и раньше, предполагаем, что $F^{\mathrm{per}(p)}$ линеаризуется в области $R_0 \ni p$ и линеаризующие координаты и точки r, q орбиты касания такие, как описано в части “Линеаризующие координаты” раздела 2.7: если точка q не принадлежит $W^s_{loc}(p)$, заменим её на $F^{2k\cdot\mathrm{per}(p)}(q)$ для подходящего k. Мы также предполагаем, что точка r лежит на неустойчивой сепаратрисе седла p, которая определяет касание снизу: если растягивающее собственное значение σ положительно, это всегда так; в противном случае заменим q на $F^{\mathrm{per}(p)}(q)$ при необходимости. Теперь мы можем считать, что в окрестности точки q дуга $W^u(p)$, касающаяся $W^s(p)$ в q, лежит в нижнем полупространстве $\{(x, y)\colon y \le 0\}$.

Если касание в точке q удовлетворяет условию (17), можно положить $G = F$, так что в дальнейшем мы будем предполагать, что это не так. Если $\det(\pi \circ dF^N(r)|_{E^{uw}_r}) = 0$, то этот определитель можно сделать ненулевым при помощи малого возмущения, сохраняющего касание в точке q, так что далее мы будем считать, что он отрицателен.

Для того, чтобы получить новое касание, мы воспользуемся идеей доказательства теоремы Теоремы 1 из §3.2 книги Дж. Палиса и Ф. Такенса [38]. А именно, рассмотрим специальное[23] однопараметрическое семейство $(F_\mu)_{\mu\in[-\varepsilon,\varepsilon]}$, описанное в разделе 2.7. Пусть $D \ni q$ — маленький диск в $W^s_{loc}(p)$, такой что диск $D_0 := F^{-N}(D)$ содержится в R_0 и δ-далек от ∂R_0 и в то же время граница D_0 отстоит от $W^u_{loc}(p)$ как минимум на δ, где δ — некоторое малое положительное число. Пусть $I_0 = \{0\} \times [1-\varepsilon_1, 1+\varepsilon_1]$ — малая окрестность точки r в локальном устойчивом многообразии $W^u_{loc}(p)$. Тогда для малых положительных значений параметра μ дуга $F^N_\mu(I_0)$ имеет две точки $z_1(\mu), z_2(\mu) \in D$ трансверсального пересечения с $W^s_{loc}(p)$. Обозначим Γ_μ отрезок этой дуги, лежащий над $W^s_{loc}(p)$. Заметим, что $D_\mu := F^{-N}_\mu(D)$ трансверсально пересекает $W^u_{loc}(p)$ в точках $w_i(\mu) = F^{-N}_\mu(z_i(\mu)),\ i = 1, 2$, близких к точке r. Когда μ достаточно мало, можно предполагать, что граница ∂D_μ δ-далека от $W^u_{loc}(p)$, а сам диск D_μ δ-далек от ∂R_0.

Из λ-леммы следует, что для достаточно больших четных $n \in \mathbb{N}$ дуга $\Gamma_{n,\mu} := F^{n\cdot\mathrm{per}(p)}_\mu(\Gamma_\mu)$ имеет точки трансверсального пересечения с диском D_μ. Зафиксируем такое n, при котором, во-первых, выполнено это, а во-вторых, справедливо неравенство $\|\lambda^n(e)\| < \delta/2$ (где e — x-координата точки q). Положим $\hat{z}_i(\mu) = F^{n\cdot\mathrm{per}(p)}_\mu(z_i(\mu)),\ i = 1, 2,$

[23] На самом деле, это рассуждение можно провести для любого однопараметрического семейства, в котором касание в точке q размыкается невырожденным образом.



$\mu = \mu_n$

Рис. 3: The new tangency.

и обозначим через $\gamma_i(\mu)$ связную компоненту точки $\hat{z}_i(\mu)$ в $\Gamma_{n,\mu} \cap R_0$. Заметим, что $\gamma_1(\mu)$ совпадает с $\gamma_2(\mu)$, если $\Gamma_{n,\mu}$ содержится в R_0.

Для каждой точки дуги Γ_μ её x-координата близка к x-координате точки $q = (e, 0)$, а следовательно, x-координата всякой точки, принадлежащей объединению $\gamma_1(\mu) \cup \gamma_2(\mu)$, близка к $\lambda^n(e)$. Другими словами, $\gamma_1(\mu) \cup \gamma_2(\mu)$ содержится в малой окрестности многообразия $W^u_{loc}(p)$. Это свойство сохраняется, когда μ убывает до нуля, а кривая $\Gamma_{n,\mu}$ сжимается к точке $(\lambda^n(e), 0) = F^n(q)$. В то же время диск D_μ остается в малой окрестности точки r вдали от $\partial R_0 \cup W^s_{loc}(p)$, а ∂D_μ остается δ-далеко от $W^u_{loc}(p)$. Таким образом, когда мы уменьшаем μ, кривые $\gamma_1(\mu)$ и $\gamma_2(\mu)$ не могут пересечь границу ∂D_μ, потому что последняя δ-далека от $W^u_{loc}(p)$, а диск D_μ не может пересечь $\partial(\gamma_1(\mu) \cup \gamma_2(\mu)) \subset \partial R_0 \cup W^s_{loc}(p)$. Тем не менее, для достаточно малых μ дуга $\gamma_1(\mu)$ совпадает с $\gamma_2(\mu)$ и не пересекает диск D_μ. Следовательно, для некоторого $\mu_n > 0$ существует точка r_0, в которой одна из дуг $\gamma_i(\mu_n)$ касается диска D_{μ_n}. Заметим, что это построение позволяет взять значение параметра μ_n сколь угодно близко к нулю, а точку r_0 — сколь угодно близко к точке r. Положим $G = F_{\mu_n}$. Как всегда, мы можем считать без ограничения общности, что касание в точке r_0 для G — невырожденное.

Пусть $q_0 = G^{-n\cdot\mathrm{per}(p)}(r_0)$, $\hat{r} = G^{-N}(q_0)$ и $\hat{q} = G^N(r_0) = G^{n\cdot\mathrm{per}(p)+2N}(\hat{r})$. Точка $\hat{r}$ лежит в $W^u_{loc}(p)$ и близка к точке r. Точки q_0 и $\hat{q}$ близки к q, причем $\hat{q} \in W^s_{loc}(p)$ (см. рис. 3). Покажем, что для касания в точке $\hat{q}$ выполнено условие (17). Точка $\hat{r}$ играет для касания в точке $\hat{q}$ ту же роль, что r играла для q, так что условие (17) принимает следующий вид:

$$\Delta := \det(\pi \circ dG^{n\cdot\mathrm{per}(p)+2N}(\hat{r})|_{E^{uw}_{\hat{r}}}) > 0. \tag{18}$$

Поскольку $dG^{n\cdot \mathrm{per}(p)+2N}(\hat{r}) = dG^N(r_0)\circ dG^{n\cdot \mathrm{per}(p)}(q_0)\circ dG^N(\hat{r})$, нужно доказать, что

$$\operatorname{sgn}\det\left(\pi\circ dG^N(r_0)\circ dG^{n\cdot \mathrm{per}(p)}(q_0)\circ dG^N(\hat{r})\big|_{E^{uw}_{\hat{r}}}\right) = 1.$$

Вспомним, что $dG^{n\cdot \mathrm{per}(p)}(q_0) = dF^{n\cdot \mathrm{per}(p)}_{\mu_n}(q_0) = L^n$. Введем следующие краткие обозначения:

$$\Xi = dG^N(r_0), \quad \Theta = dG^N(\hat{r}).$$

Заметим, что Ξ и Θ оба близки к $dF_0^N(r)$ в силу того, что точки r_0 и $\hat{r}$ близки к r, а параметр μ_n близок к нулю.

Замечание. Разберемся сначала с двумерным случаем. Если $\dim M = 2$, (18) сводится к неравенству $\det(\Xi\circ L^n\circ\Theta) > 0$. Справедливость этого неравенства вытекает из следующих двух наблюдений. Во-первых, так как $\Xi \approx dF_0^N(r) \approx \Theta$, имеем $\operatorname{sgn}\det(\Xi) = \operatorname{sgn}\det(\Theta)$. Во-вторых, поскольку n четно, $\det(L^n) > 0$. В общем случае мы будем рассуждать аналогичным образом.

Будем предполагать, что $dF^N(r)(E^{uw}_r)$ трансверсально подпространству E^{ss}_q: это условие выполняется типичным образом и совместимо с касанием в точке q. Так как отображение Θ близко к $dF^N(r)$, мы можем считать, что подпространство $\Theta(E^{uw}_{\hat{r}})$ трансверсально к $E^{ss}_{q_0}$. Если n велико, то $L^n\circ\Theta(E^{uw}_{\hat{r}})$ (обозначим это подпространство для краткости E_0) близко к $E^{uw}_{r_0}$. В случае, если эти два подпространства достаточно близки, имеем

$$\operatorname{sgn}\Delta = \operatorname{sgn}\det\left(\pi\circ\Xi\circ L^n\circ\Theta|_{E^{uw}_{\hat{r}}}\right) = \operatorname{sgn}\det\left(\pi\circ\Xi|_{E^{uw}_{r_0}}\right)\cdot\operatorname{sgn}\det\left(\pi\circ L^n\circ\Theta|_{E^{uw}_{\hat{r}}}\right).$$

Так как отображение Ξ близко к $dF^N(r)$, имеем также

$$\operatorname{sgn}\det\left(\pi\circ\Xi|_{E^{uw}_{r_0}}\right) = \operatorname{sgn}\det\left(\pi\circ dF^N(r)\big|_{E^{uw}_r}\right) = -1.$$

Далее, поскольку расслоение E^{uw} инвариантно для L^n, мы можем написать

$$\operatorname{sgn}\det\left(\pi\circ L^n\circ\Theta|_{E^{uw}_{\hat{r}}}\right) = \operatorname{sgn}\det\left(\pi\circ L^n|_{E^{uw}_{q_0}}\circ\pi\circ\Theta|_{E^{uw}_{\hat{r}}}\right) =$$

$$= \operatorname{sgn}\det\left(\pi\circ L^n|_{E^{uw}_{q_0}}\right)\cdot\operatorname{sgn}\det\left(\pi\circ\Theta|_{E^{uw}_{\hat{r}}}\right).$$

Наконец, $\operatorname{sgn}\det\left(\pi\circ L^n|_{E^{uw}_{q_0}}\right) = 1$, поскольку n четно, а

$$\operatorname{sgn}\det\left(\pi\circ\Theta|_{E^{uw}_{\hat{r}}}\right) = \operatorname{sgn}\det\left(\pi\circ dF^N(r)\big|_{E^{uw}_r}\right) = -1.$$

Таким образом, $\operatorname{sgn}\Delta = -1\cdot 1\cdot(-1) = 1$, что доказывает предложение. □

Замечание 40. Заметим, что для новой точки касания выполнено

$$\hat{q}\in W^u(G^{2N+n\cdot \mathrm{per}(p)}(p))\cap W^s(p) = W^u(G^{2N}(p))\cap W^s(p)$$

(здесь мы обозначаем продолжение исходного седла p диффеоморфизма F тем же символом). Если $q\in W^u(p,F)\cap W^s(p,F)$, то N делится на $\mathrm{per}(p)$ и, следовательно, $\hat{q}\in W^u(p,G)\cap W^s(p,G)$.

От касаний к трансверсальным пересечениям

Предложение 41. *Пусть у диффеоморфизма F есть гомоклиническое касание для 2-сжимающего седла p. Если у этого диффеоморфизма нет трансверсальных гомоклинических орбит, в которые вовлечена*[24] *та же связная компонента множества $W^u(p) \setminus \{p\}$, что и в касание, то такие пересечения могут быть получены при помощи сколь угодно малого возмущения вместе с новой орбитой гомоклинического касания.*

Доказательство. Как и раньше, будем считать, что диффеоморфизм F — C^∞-гладкий, $F^{\mathrm{per}(p)}$ линеаризуется в окрестности седла p, а касание невырожденное. Обозначим точку касания через q.

Если касание в точке q является касанием снизу, то, рассуждая как в первой части доказательства предложения 39, получим новое касание и трансверсальные гомоклинические пересечения, которые нам нужны, независимо от того, были ли такие трансверсальные пересечения до возмущения.

Предположим теперь, что в точке q имеет место касание сверху. Обозначим Γ связную компоненту множества $W^u(p) \setminus \{p\}$, вовлеченную в касание. Предположим, что у диффеоморфизма F нет трансверсальных пересечений между $F^k(\Gamma)$ и $W^s(p)$ ни при каком $k \in \mathbb{Z}$. Если есть орбита гомоклинического касания, отличная от орбиты точки q, мы можем возмутить одну из этих орбит и получить трансверсальное пересечение, оставив отображение в окрестности другой орбиты неизменным.

Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда у многообразий $\bigcup_k F^k(\Gamma)$ и $W^s(p)$ нет точек пересечения, кроме тех, что принадлежат орбите $O(q)$. В этом случае можно рассуждать аналогично первой части доказательства предложения 39 и даже несколько проще.

А именно, будем рассматривать линеаризующую окрестность R_0 и предполагать, что $q \in W^s_{loc}(p) \subset R_0$ и $r = F^{-N}(q) \in W^u_{loc}(p) \subset R_0$, так же, как в доказательстве предложения 39. Рассмотрим вновь маленький диск $D\colon q \in D \subset W^s_{loc}(p)$ и его F^N-прообраз D_0, содержащийся в окрестности точки $r \in \Gamma$. Мы предполагаем, что граница ∂D_0 находится δ-далеко от $W^u_{loc}(p)$, а сам диск D_0 δ-далек от множества $\partial R_0 \cup W^s_{loc}(p)$.

Рассмотрим специальное однопараметрическое семейство (F_μ), в котором разрушается касание в точке q. Пусть $D_\mu := F_\mu^{-N}(D)$. Поскольку при $\mu = 0$ мы имеем касание сверху в точке q, для малых по модулю $\mu < 0$ мы будем наблюдать два трансверсальных пересечения между $F_\mu^N(W^u_{loc}(p))$ и $W^s_{loc}(p)$ в точках $z_1(\mu), z_2(\mu)$, близких к q. Зафиксируем малое $\mu_0 < 0$ и обозначим через Γ_{μ_0} какую-нибудь маленькую дугу в $W^u(O(p))$, начинающуюся в точке $z_1(\mu_0)$ и идущую вверх. Для достаточно большого четного числа n ее образ $F_{\mu_0}^{n\cdot\mathrm{per}(p)}(\Gamma_{\mu_0})$ имеет точки трансверсального пересечения с диском D_{μ_0} вблизи r.

Пусть R — пересечение R_0 с верхним полупространством, а $\gamma(\mu)$, $\mu < 0$, — связная компонента множества $W^u(O(p)) \cap R$, содержащая точку $\hat{z}_1 = F_\mu^{n\cdot\mathrm{per}(p)}(z_1(\mu))$. Тогда для больших n и малых отрицательных μ компонента $\gamma(\mu)$ непрерывно зависит от μ. Определим дугу $\gamma(0)$ по непрерывности. Если n достаточно велико, то для любого $\mu \in [\mu_0, 0]$ обе краевые точки дуги $\gamma(\mu)$ расположены далеко от диска D_μ, в то время как сама дуга $\gamma(\mu)$

[24] См. сноску 19

$\delta/2$-близка к $W^u_{loc}(p)$. Одновременно мы можем предполагать, что граница ∂D_μ находится δ-далеко от $W^u_{loc}(p)$. Вспомним, что при $\mu = 0$ у дуги $\gamma(\mu)$ и диска D_μ не могло быть пересечений, но при $\mu = \mu_0$ есть трансверсальное пересечение. Так как при $\mu \in [\mu_0, 0]$ дуга $\gamma(\mu)$ и диск D_μ могут пересекаться только по внутренним своим точкам, найдется значение параметра μ, при котором имеет место касание между соответствующими дугой и диском. Таким образом, мы получили требуемые трансверсальные пересечения и касание.

$\square$

Замечание 42. Если для F точка касания q не лежит в $W^{ss}(p)$, то то же самое рассуждение показывает, что либо у нашего диффеоморфизма уже есть трансверсальные гомоклинические орбиты, вовлекающие те же связные компоненты множеств $W^u(p)\setminus\{p\}$ и $W^s(p) \setminus W^{ss}(p)$, что и касание, либо такие пересечения можно получить вместе с новым касанием (в которое вовлечены все те же компоненты связности, а точнее говоря, их продолжения). Достаточно заметить, что новое касание и новые трансверсальные пересечения были построены вблизи точки q в смысле метрики на $W^s(p)$.

Кроме того, если $q \in W^u(p) \cap W^s(p)$, то полученное трансверсальное пересечение тоже принадлежит $W^u(p) \cap W^s(p)$ (поскольку в этом случае $\mathrm{per}(p)$ делит N).

Касания устойчивого и неустойчивого многообразий одного и того же седла

Предложение 43. *Если у диффеоморфизма F есть гомоклиническое касание снизу между $W^s(p)$ и $W^u(F^N(p))$, где p — 2-сжимающее периодическое седло, то при помощи сколь угодно малого C^∞-возмущения можно получить диффеоморфизм G с гомоклиническим касанием между устойчивым и неустойчивым многообразиями гиперболического продолжения седла p.*

Доказательство. Рассмотрим диффеоморфизм G и точку $\hat{q}$ как в доказательстве предложения 39. Заметим, что для G также имеют место трансверсальные пересечения между $W^u(p)$ и $W^s(G^{-N}(p))$ (в точках $w_i(\mu_n)$, рассматриваемых в доказательстве). Из λ-леммы следует, что $W^u(p)$ накапливается к $W^u(G^{-N}(p))$, а следовательно, трансверсально пересекает также $G^{-N}(W^s(G^{-N}(p))) = W^s(G^{-2N}(p))$. Рассуждая далее аналогично, получаем, что для любого $k \in \mathbb{N}$ неустойчивое многообразие $W^u(p)$ трансверсально пересекает $W^s(G^{-kN}(p))$ и накапливается к $W^u(G^{-kN}(p))$. Положим $k = 3\,\mathrm{per}(p) - 2 > 0$, тогда получим, что $W^u(p)$ накапливается к $W^u(G^{2N}(p))$. Вспомним, что $\hat{q}$ — точка касания между $W^u(G^{2N}(p))$ и $W^s(p)$. Поскольку $W^u(p)$ трансверсально пересекает $W^s(G^{2N}(p))$ и накапливается к $W^u(G^{2N}(p))$, касание между $W^u(p)$ и $W^s(p)$ можно получить при помощи малого возмущения, рассуждая как в доказательстве предложения 36. $\square$

Предложение 44. *Пусть у диффеоморфизма F есть 2-сжимающее периодическое седло p, такое что $W^s(p)$ касается $W^u(F^N(p))$ в точке q. Тогда при помощи сколь угодно C^∞-малого возмущения диффеоморфизма F можно получить диффеоморфизм G с гомоклиническим касанием между устойчивым и неустойчивым многообразиями гиперболического продолжения седла p.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что касание в точке q невырожденное, потому что этого можно добиться сколь угодно малым возмущением. Поскольку случай касания снизу уже был рассмотрен в предыдущем предложении, мы будем предполагать, что в точке q имеет место касание сверху. Мы также будем предполагать без ограничения общности, что $q \notin W^{ss}(p)$, а для седла p существуют трансверсальные гомоклинические орбиты, в которые вовлечены те же связные компоненты множеств $W^u(p) \setminus \{p\}$ и $W^s(p) \setminus W^{ss}(p)$, что вовлечены в рассматриваемое касание (см. предложение 41 и замечание 42).

Итак, поскольку касание в точке q есть касание сверху, предложение 36 предоставляет возможность перейти к гетероклинически зацепленному с p седлу и получить после малого возмущения диффеоморфизма F касание снизу для этого нового седла. Обозначим возмущенное отображение $\hat{F}$, а новое седло — $\hat{p}$ и сохраним обозначение p для гиперболического продолжения исходного седла. Заметим, что $\hat{p}$ может быть выбрано таким образом, что $\mathrm{per}(\hat{p}) = l \cdot \mathrm{per}(p)$, $W^u(p,\hat{F}) \pitchfork W^s(\hat{p},\hat{F}) \neq \emptyset$ и $W^s(p,\hat{F}) \pitchfork W^u(\hat{p},\hat{F}) \neq \emptyset$, как в доказательстве предложения 36.

Применяя предложение 43 к $\hat{F}$, получим диффеоморфизм $\hat{G}$, для которого существует касание между устойчивым и неустойчивым многообразиями гиперболического продолжения седла $\hat{p}$. Как и раньше, сохраним обозначения $p, \hat{p}$ для продолжений наших седел.

Так как $W^u(p,\hat{G}) \pitchfork W^s(\hat{p},\hat{G}) \neq \emptyset$ и $\mathrm{per}(p)$ делит $\mathrm{per}(\hat{p})$, мы можем заключить, что $W^u(p,\hat{G})$ накапливается к $W^u(\hat{p},\hat{G})$. Аналогично, из того, что $W^s(p,\hat{G}) \pitchfork W^u(\hat{p},\hat{G}) \neq \emptyset$, заключаем, что $W^s(p,\hat{G})$ накапливается к $W^s(\hat{p},\hat{G})$. Теперь, рассуждая как в доказательстве предложения 36, мы можем при помощи малого возмущения получить диффеоморфизм G с касанием между устойчивым и неустойчивым многообразиями продолжения седла p, что и требовалось доказать.

$\square$

Конец доказательства

Вспомогательные утверждения доказаны, и мы можем вернуться к доказательству леммы о захвате. В текущий момент мы предполагаем, что у диффеоморфизма $F \in \mathrm{Diff}^\infty(M)$ есть 2-сжимающее седло p, такое что $W^s(p)$ и $W^u(F^N(p))$ имеют точку невырожденного касания q. Наша цель состоит в том, чтобы добиться выполнения всех условий предложения 35 и получить с его помощью сильно диссипативное седло, гетероклинически зацепленное с продолжением седла p и имеющее орбиту гомоклинического касания. Однако, пока что мы не предполагаем, что предложение 35 применимо к F.

Мы совершим несколько возмущений, каждое из которых может быть выбрано сколь угодно малым в C^∞-метрике, и получим в итоге диффеоморфизм, седло и касание, к которым применимо предложение 35. Чтобы не перегружать обозначения, мы будем последовательно заменять F на возмущенное отображение. При этом на каждом шаге мы заменяем седло p либо на его гиперболическое продолжение, либо на другое седло, гетероклинически зацепленное с этим продолжением, и находим новую точку гомоклинического касания, которую каждый раз обозначаем q, хотя это новая точка касания, отвечающая новому седлу p.

1. Сначала, пользуясь предложением 44, получим при помощи малого возмущения, касание между устойчивым и неустойчивым многообразиями продолжения седла p. Заменим диффеоморфизм F на модифицированное отображение, а старые седло и точку касания — на новые. Если у нас уже было касание между устойчивым и неустойчивым многообразиями седла p, этот шаг можно пропустить.

2. Теперь мы предполагаем, что диффеоморфизм F имеет невырожденное касание между $W^u(p)$ и $W^s(p)$ в точке q, где седло p, как всегда, 2-сжимающее. В разделе 5 статьи [37] Дж. Палис и М. Виана показывают, что в этом случае при помощи малого возмущения можно получить другое 2-сжимающее седло $\tilde{p}$, имеющее единственное слабо сжимающее собственное значение и гетероклинически зацепленное с исходным, а также гомоклиническое касание между устойчивым и неустойчивым многообразиями этого нового седла.

В рассуждении Дж. Палиса и М. Вианы может быть небольшой пробел, который, однако, легко устранить. Для доказательства результата, которым мы хотим воспользоваться, они сначала налагают на диффеоморфизм F некоторое условие типичности[25], а затем рассматривают однопараметрическое семейство $(F_\mu),\ F_0 = F$, в котором касание размыкается невырожденным образом. Их рассуждение предполагает, что для $\mu > 0$ касание размыкается с образованием трансверсального пересечения и что в то же время есть последовательность значений параметра $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}},\ \mu_j > 0,\ \mu_j \to 0$ при $j \to \infty$, таких что отображения F_{μ_j} имеют новые гомоклинические касания для продолжения седла p. Может случиться, однако, что это не так и новые касания возникают лишь для отрицательных значений μ. Тем не менее, это всегда верно в случае касания снизу, как можно видеть из первой части доказательства предложения 39. Таким образом, можно сначала воспользоваться предложением 41 и замечанием 42, чтобы получить трансверсальную гомоклиническую орбиту на той же неустойчивой сепаратрисе, а потом использовать предложение 36 (вместе с замечанием 37), чтобы перейти к гетероклинически зацепленному седлу с гомоклиническим касанием снизу, и, наконец, применить рассуждение Дж. Палиса и М. Вианы.

Как и прежде, заменим F на новое отображение, а седло p заменим на $\tilde{p}$, сохранив прежнее обозначение.

3. Теперь мы предполагаем, что седло p имеет единственное слабое сжимающее собственное значение и что для этого седла имеется невырожденное гомоклиническое касание в точке $q \in W^u(p) \cap (W^s(p) \setminus W^{ss}(p))$.[26] Используя предложение 41 и замечание 42, мы можем предполагать, что имеются также трансверсальные гомоклинические пересечения между теми же связными компонентами множеств $W^u(p) \setminus \{p\}$ и $W^s(p) \setminus W^{ss}(p)$.

Если касание в точке q является касанием сверху, можно применить предложение 36 (вместе с замечанием 37), чтобы получить касание снизу между $W^u(p)$ и $W^s(p) \setminus W^{ss}(p)$. В этом случае мы опять заменяем отображение, седло и касание на новые. Согласно замечанию 38, мы можем по-прежнему считать, что имеются трансверсальные гомоклинические пересечения между связными компонентами множеств $W^u(p) \setminus \{p\}$ и $W^s(p) \setminus W^{ss}(p)$, участвующими в касании. Если мы случайно потеряли линеаризуемость отображения $F^{\mathrm{per}(p)}$ в окрестности седла p, ее можно восстановить малым возмущением, сохраняющим все остальные интересующие нас свойства нашего отображения.

4. Теперь мы предполагаем, что касание в точке q является касанием снизу. Если

[25] Они предполагают, что линейное отображение Φ (входящее, по существу, в условие (17)) является изоморфизмом.

[26] Чтобы сделать касание невырожденным и убрать точку касания с $W^{ss}(p)$, может потребоваться еще одна малая модификация отображения.

это касание не удовлетворяет условию (17), применим предложение 39 с замечанием 40, чтобы получить при помощи малого возмущения новое касание, удовлетворяющее условию (17). Линеаризуемость при применении предложения 39 сохраняется. Как обычно, заменяем отображение и касание на новые с сохранением обозначений. Точка нового касания принадлежит тем же связным компонентам множеств $W^u(p)\setminus\{p\}$ и $W^s(p)\setminus W^{ss}(p)$, что и точка старого касания (в доказательстве пред. 39 точка $\hat{q}$ близка к q), следовательно, мы по-прежнему имеем трансверсальные гомоклинические точки, как требует условие c) предложения 35. Значит, предложение 35 применимо к нашему новому F.

5. Из предложения 35 следует, что при помощи еще одного возмущения мы можем, наконец, получить сильно диссипативное седло, гетероклинически зацепленное с продолжением исходного седла p. Используя предложние 34, мы также можем предполагать, что для нового отображения имеется гомоклиническое касание для этого сильно диссипативного седла.

На каждом шаге этого рассуждения мы могли заменить седло p либо на его гиперболическое продолжение, либо на гетероклинически зацепленное с этим продолжением седло, так что полученное в конце сильно диссипативное седло оказалось гетероклинически зацепленным с продолжением исходного седла p, существовавшего прежде всякого возмущения. Применяя лемму о захвате к касанию, связанному с сильно диссипативным седлом, мы заключаем, что после подходящего возмущения неустойчивые многообразия продолжений как нового сильно диссипативного, так и старого седла пересекают бассейн притяжения стока. Таким образом, лемма о захвате доказана.

3 Расщепление с доминированием или неустойчивость

3.1 Формулировка и план доказательства

Прежде всего дадим определение расщепления с доминированием.

Определение 45. Пусть Λ — F-инвариантное подмножество многообразия M, а $T_\Lambda M = E \oplus G$ — dF-инвариантное расщепление TM над Λ с не зависящими от точки базы размерностями слоев расслоений E и G. Расщепление $E \oplus G$ называется *расщеплением с доминированием* (англ. dominated splitting), если существует $n \in \mathbb{N}$, такое что для любой точки $x \in \Lambda$ и любых векторов $u \in E(x), v \in G(x)$ выполнено неравенство

$$\frac{\|dF^n(x)u\|}{\|u\|} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\|dF^n(x)v\|}{\|v\|}.$$

Можно рассматривать существование расщепления с доминированием как слабый аналог гиперболического поведения. Если добавить к этому определению требование, что в ограничении на E (для некоторой римановой метрики на M) имеет место сжатие (или в ограничении на G дифференциал растягивает), получим определение частичной гиперболичности, а если предположить еще, что на G имеет место чистое растяжение, получим определение гиперболического множества.

C. Bonatti, L. J. Díaz и E. R. Pujals установили в работе [13] следующую дихотомию для C^1-типичных диффеоморфизмов компактных многообразий: гомоклинический класс любого периодического гиперболического седла либо допускает расщепление с доминированием, либо содержится в замыкании объединения бесконечного множества источников или стоков.[27] В этом разделе мы выведем из результатов статьи [13]) теорему B. Прежде всего напомним для удобства формулировку теоремы B.

Теорема B. *Для топологически типичного диффеоморфизма $F \in \mathrm{Diff}^1(M)$ замкнутого многообразия M выполняется одна из следующих двух возможностей: или любой гомоклинический класс допускает расщепление с доминированием, или аттрактор Милнора неустойчив по Ляпунову для F или F^{-1}.*

Заметим, что две возможности, рассматриваемые в теореме B, не являются взаимоисключающими. Действительно, можно взять локально типичные диффеоморфизмы с неустойчивыми по Ляпунову аттракторами из предыдущих разделов и рассмотреть их прямое произведение с северо-южным диффеоморфизмом окружности, например. Аттрактором Милнора в этом случае будет произведение аттракторов множителей. Если аттрактор северо-южного отображения сжимает достаточно сильно, мы будем иметь расщепление с доминированием на аттракторе Милнора этого прямого произведения, но при этом аттрактор все равно будет неустойчивым по Ляпунову. На самом деле суть теоремы B состоит в том, что отсутствие расщепления с доминированием на каком-либо гомоклиническом классе приводит в топологически типичном случае к неустойчивости аттрактора (быть может, для обратного отображения).

[27] Эти две возможности не исключают друг друга, так что термин “дихотомия”, быть может, не вполне оправдан.

Нам потребуется следующий факт, который доказывается в работе [13], хотя и не сформулирован там в виде отдельного предложения.

Теорема 46 ([13], Lemma 1.9 + Lemma 1.10 + Prop. 2.1). *Пусть p — периодическое гиперболическое седло диффеоморфизма $F \in \mathrm{Diff}^1(M)$ и гомоклинический класс $H(p,F)$ не допускает расщепления с доминированием. Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ в любой окрестности седла p можно найти периодическое седло q, обладающее следующими свойствами:*

- *седло q гетероклинически зацеплено с седлом p,*
- *существуют линейные отображения A_j, ε-близкие к дифференциалам $dF(F^{j-1}(q))$, $j = 1, \ldots, \mathrm{per}\,(q)$, и такие, что композиция $A = A_{\mathrm{per}\,(q)} \circ \cdots \circ A_1$ является либо растяжением, либо сжатием.*[28]

Замечание 47. Из замечаний 5.5 и 5.6 в [13] следует, что если $H(p,F)$ содержит диссипативное седло p_1, гетероклинически зацепленное с седлом p, то можно выбрать такое q, что композицию A из формулировки теоремы можно сделать сжатием. Соответственно, если существует зацепленное с p анти-диссипативное седло p_2, то в условиях теоремы можно предполагать, что A — растяжение.

Согласно лемме Франкса [20, Lemma 1.1], ε-возмущение дифференциала dF над конечным множеством $B \subset M$ может быть реализовано диффеоморфизмом G, отстоящим от F на 10ε (в смысле естественной метрики на $\mathrm{Diff}^1(M)$) и совпадающим с F на самом множестве B и вне некоторой его окрестности, которая может быть предварительно выбрана сколь угодно малой. Таким образом, теорема 46 в сочетании с леммой Франкса может рассматриваться как способ создавать стоки вблизи (гиперболического продолжения) седла p посредством малого возмущения.

Для того, чтобы доказать теорему B, мы сначала выведем из теоремы 46 аналог леммы о захвате: если есть седло $q \in H(p,F)$, которое можно превратить в сток малым возмущением диффеоморфизма, то найдется также и другое седло $Q \in H(p,F)$, которое не только становится стоком при подходящем возмущении, но и захватывает часть неустойчивого многообразия гиперболического продолжения седла p.

Далее мы докажем локальную версию теоремы B: мы будем рассматривать гомоклинический класс гиперболического продолжения одного диссипативного седла в малой окрестности некоторого диффеоморфизма, и докажем, что для типичного диффеоморфизма из этой окрестности либо рассматриваемый гомоклинический класс допускает расщепление с доминированием, либо аттрактор Милнора неустойчив по Ляпунову. Доказательство по существу аналогично доказательству теоремы A, единственное отличие состоит в том, что новые стоки нужно получать с помощью комбинации теоремы 46 и леммы Франкса, а вместо старой леммы о захвате (леммы C) использовать новую.

Глобальная версия теоремы B получается из локальной рассуждением типа Купки-Смейла, по существу повторяющим доказательство Cor 0.3 из [13].

[28] В этом контексте под сжатием (растяжением) подразумевается линейное отображение, у которого модули собственных значений меньше (больше) единицы. При этом мы не предполагаем, что норма этого отображения меньше (больше) единицы. Поскольку ε произвольно, нам, на самом деле, не обязательно уточнять, какую именно норму мы используем, когда говорим об ε-возмущении дифференциала dF. Как бы то ни было, по умолчанию мы будем подразумевать операторную норму, которая соответствует векторной норме, порожденной римановой структурой.

3.2 Вторая лемма о захвате

Лемма D (вторая лемма о захвате)**.** *Для любого $\varepsilon_0 > 0$ существует $\varepsilon < \varepsilon_0$, такое что выполнено следующее. Предположим, что $H(p, F)$ не допускает расщепления с доминированием, а седло q, полученное для данного ε при помощи теоремы 46, можно превратить в сток. Тогда при помощи ε_0-возмущения диффеоморфизма F в $\mathrm{Diff}^1(M)$ можно получить диффеоморфизм G, для которого точка p является гиперболическим седлом[29], а ее неустойчивое многообразие $W^u(p, G)$ пересекает бассейн притяжения некоторого стока.*

Идея доказательства

Рассмотрим седло q, полученное при помощи теоремы 46. Поскольку это седло гетероклинически зацеплено с p, существует трансверсальная гетероклиническая орбита $O(z)$, которая накапливается к $O(p)$ в прошлом и к $O(q)$ в будущем. Когда мы возмущаем отображение в окрестности орбиты $O(q)$ с целью превратить седло q в сток, мы не можем априори быть уверены в том, что точка z после возмущения окажется в бассейне нашего стока. Говоря неформально, может случиться так, что орбита точки z покинет окрестность, где мы поменяли отображение, всего лишь через несколько итераций, задолго до того, как почувствует какое бы то ни было притяжение со стороны нового стока.

Для того, чтобы обойти эту трудность, мы найдем другое седло Q, гетероклинически зацепленное с p и такое, что орбита Q делает k витков вблизи орбиты q, где k может быть выбрано сколь угодно большим, а затем замыкается спустя несколько итераций. Обозначим через x гетероклиническую точку, которая “идет” от $O(p)$ к $O(Q)$. Мы будем модифицировать отображение в окрестности орбиты $O(Q)$ следующим образом. Во-первых, орбита самой точки Q останется прежней (как в лемме Франкса). Во-вторых, в течение первых k_1 витков отображение также будет совпадать с исходным: таким образом мы позволим соответствующему образу точки x приблизиться к орбите точки Q, как это происходит для невозмущенного отображения F. Нам нужно, чтобы этот образ оказался столь близок к $O(Q)$, что, когда мы наконец модифицируем отображение в окрестности $(k_1 + 1)$-ого витка, соответствующие точки орбиты точки x оставались в этой окрестности в течение всего витка. Поскольку весь виток близок к $O(q)$, возмущение может быть выбрано таким образом, что в конце витка мы обнаружим, что соответствующий образ точки x притянулся к $O(Q)$ за этот виток. Тогда ту же самую процедуру можно будет повторить для всех оставшихся витков.

Мы позаботимся о том, чтобы $k_2 = k - k_1$ было достаточно велико (намного больше, чем k_1). Тогда Q станет стоком несмотря на то, что в течение первых k_1 витков не было сделано никакой модификации, а также не будет модификации в окрестности тех нескольких точек орбиты Q, которые находятся вдали от орбиты точки q. Более того, мы увидим, что если k_2 достаточно велико, то будущая полуорбита точки x будет притянута орбитой стока, в который превратилась точка Q. Тогда доказательство будет завершено, поскольку $x \in W^u(O(p))$.

[29] точнее, является гиперболическим продолжением седла p диффеоморфизма F.

Седло Q

Поскольку $q \in H(p, F)$, у седла q есть трансверсальные гомоклинические орбиты, а следовательно, существует также нетривиальное базисное множество $\Lambda \subset H(p, F) = H(q, F)$, такое что $q \in \Lambda$ (см., например, [25], Теорема 6.5.5). Для фиксированного $\delta > 0$ и произвольного $k \in \mathbb{N}$ найдется периодическое седло $Q \in \Lambda$, такое что орбита Q делает как минимум k витков δ-близко к орбите точки q, а затем замыкается спустя некоторое число итераций, ограниченное сверху не зависящей от k константой.

Действительно, любое базисное множество допускает марковские разбиения сколь угодно малого диаметра (см. [25], §18.7). Возьмем для множества Λ марковское разбиение диаметра меньше δ и рассмотрим соответствующую[30] транзитивную марковскую цепь (Σ_A, σ_A), полусопряженную динамике на Λ. Рассмотрим конечное слово w, которое определяется по тому, какие прямоугольники разбиения последовательно посещает орбита точки q; затем возьмем k-ю степень $[w]^k$ этого слова (в смысле конкатенации) и припишем к ней другое конечное допустимое в смысле марковской цепи слово w_0, так, чтобы, во-первых, слово $[w]^k w_0$ было допустимым, во-вторых, чтобы оно не было степенью никакого слова, а в-третьих, чтобы наша марковская цепь допускала бы переход от последней буквы слова w_0 к первой букве слова w. Заметим, что w_0 может быть выбрано независимо от k, по крайней мере, если мы предполагаем, что существует прямоугольник марковского разбиения, который не посещает орбита $O(q)$. В таком случае периодическая бесконечная в обе стороны последовательность $\omega \in \Sigma_A$, определяемая по слову-периоду $[w]^k w_0$, существует и переводится в интересующее нас периодическое седло Q отображением, которое осуществляет полусопряжение марковской цепи и динамики на базисном множестве Λ.

Когда мы говорим о витках орбиты $O(Q)$ вокруг орбиты $O(q)$, мы имеем в виду, что точка Q δ-близка к точке q и то же самое имеет место для $F^j(Q)$ и $F^j(q)$ при $j = 1, 2, \ldots, kn$, где n — период седла q. Каждый виток — это подмножество орбиты $O(Q)$, состоящее из n последовательных точек орбиты, а именно точек $F^{n(j-1)+i}(Q)$, $i = 0, \ldots, n-1$, в случае j-го витка. Обозначим период Q через N. Очевидно, $N > kn$.

Взяв достаточно малое δ, можно гарантировать, что дифференциалы в точках орбиты $O(Q)$, принадлежащих виткам, ε-близки к дифференциалам в соответствующих точках орбиты $O(q)$. Следовательно, композиция дифференциалов вдоль любого витка может быть превращена в сжатие A при помощи 2ε-возмущения дифференциалов. Поскольку число итераций, которое $O(Q)$ проводит вдали от $O(q)$, ограничено, в то время как k может быть выбрано сколь угодно большим, мы можем заключить, что композиция дифференциалов вдоль всей орбиты $O(Q)$ также может быть превращена в линейное сжатие.

В дальнейшем мы будем для простоты предполагать, что для каждой точки орбиты $O(Q)$ мы зафиксировали локальные координаты с началом в этой точке и всегда, когда мы рассматриваем ограничение F на малую окрестность орбиты $O(Q)$, мы пользуемся этими координатами. Тогда мы можем (неформально) говорить, к примеру, о линейном (или, лучше сказать, аффинном) отображении из окрестности Q в окрестность $F(Q)$ или даже об отображении, совпадающем (в координатной записи) с $dF(Q)$ или C^1-близком

[30] См. снова [25], Теорема 18.7.4.

к этому дифференциалу. Формальный способ сказать тоже самое состоит в том, чтобы взять экспоненциальное отображение (которое определяется римановой метрикой), а затем рассматривать композиции вида $\exp \circ dF(Q) \circ \exp^{-1}$. Кроме того, мы далее будем пользоваться евклидовой метрикой и векторной нормой, которые естественно возникают в наших фиксированных системах координат, предполагая, что новые метрика и норма эквиваленты ограничениям исходной метрики и нормы на соответствующую окрестность точки орбиты $O(Q)$. Когда мы меняем норму, ε-возмущения дифференциалов могут стать $C\varepsilon$-возмущениями, где C — положительная константа (из определения эквивалентность норм), поэтому переопределим ε, чтобы не нужно было каждый раз писать эту константу.

Точки p и Q гетероклинически зацеплены (поскольку p зацеплено с q, а q зацеплено с Q и в силу λ-леммы отношение зацепленности является транзитивным). Следовательно, $W^u(O(p))$ трансверсально пересекает $W^s(O(Q))$ в некоторой точке x. Заменив при необходимости точки p, Q, x их образами под действием подходящей итерации отображения F, мы можем подобрать число $r < \min(\delta, \varepsilon)$, такое что r-окрестность W орбиты $O(Q)$ обладает следующими четырьмя свойствами:

- W является объединением непересекающихся шаров B_j, $j = 1, \dots, N$ радиуса r с центрами в точках орбиты $O(Q)$;
- В каждом шаре B_j отображение F в C^1-метрике $\varepsilon/10$-близко к линейному отображению, совпадающему (в фиксированных нами координатах) с дифференциалом в центре шара, т.е. с $dF(F^{j-1}(Q))$;
- $x \in W$, но прошлая полуорбита x не пересекает W;
- $x \in W^s_{loc,r}(Q) \cap W^u(p)$.

В дальнейшем мы не будем возмущать диффеоморфизм F вне множества W, так что точка x останется на неустойчивом многообразии седла p.

Модификация отображения F внутри W будет произведена в два шага.

Шаг 1: k_1 витков без возмущения

Первый шаг состоит в том, чтобы выбрать натуральное число $k_1 < k$ и оставить отображение F прежним в окрестности первых k_1 витков орбиты $O(Q)$ вокруг $O(q)$. Число k_1 должно быть столь велико, чтобы было выполнено условие:

$$\frac{\operatorname{dist}\left(F^{nk_1}(x), F^{nk_1}(Q)\right)}{\operatorname{dist}(x, Q)} < \frac{1}{10(L+1)^{n-1}}, \tag{19}$$

где L — константа Липшица для F. Расстояние между образами точек x и Q уменьшается в силу того, что $Q \in \Lambda$ и $x \in W^s_{loc,r}(Q)$. Действительно, из определения гиперболического множества следует, что существуют константы $c > 0$ и $\lambda \in (0, 1)$, такие что для любой точки $z \in \Lambda$ и любой точки $y \in W^s_{loc,r}(z)$, если число r достаточно мало, то имеет место следующее неравенство:

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{dist}(F^j(y), F^j(z)) \le c\lambda^j \cdot \operatorname{dist}(y, z).$$

Из этого неравенства следует, что (19) выполнено для достаточно больших значений k_1.[31]

Обозначим $x_1 = F^{nk_1}(x)$ и $Q_1 = F^{nk_1}(Q)$. Так как $\operatorname{dist}(x, Q) \leq r$, из неравенства (19) следует, что $\operatorname{dist}(x_1, Q_1) < r/(10(L+1)^{n-1})$.

Шаг 2: собственно возмущение

Второй шаг состоит в том, чтобы модифицировать отображение F в окрестности оставшихся $k_2 = k - k_1$ витков, причем так, чтобы после модификации точка x оказалась в бассейне притяжения стока, в который превратится точка Q.

Теорема 46 дает нам n линейных отображений $A_1, \dots, A_n$, являющихся ε-возмущениями дифференциалов отображения F в точках орбиты седла q и таких, что композиция $A = A_n \circ \dots \circ A_1$ является сжатием. Предположим для простоты, что A сжимает евклидову норму. В общем случае это верно для некоторой степени A и рассуждение нужно изменить соответственно (либо перейти к другой норме, которую A сжимает).

Рассмотрим (k_1+1)-ый виток орбиты $O(Q)$ вокруг орбиты $O(q)$, начинающийся в точке Q_1 и продолжающийся до точки $Q_n := F^{n-1}(Q_1)$. Вспомним, что точка Q_1 δ-близка к $F^{nk_1}(q) = q$ и число δ столь мало, что отображение A_1 является 2ε-возмущением дифференциала в точке Q_1 и аналогично для всех j отображение A_j является 2ε-возмущением дифференциала отображения F в соответствующей точке витка.

Рассмотрим шар $B(Q_1, \frac{r}{10})$ радиуса $\frac{r}{10}$ с центром в точке Q_1 и в десять раз больший шар $B(Q_1, r)$ с тем же центром (этот больший шар, на самом деле, совпадает с уже рассматривавшимся ранее шаром B_j для $j = nk_1 + 1$). Мы можем изменить F внутри $B(Q_1, r)$ таким образом, что внутри $B(Q_1, \frac{r}{10})$ новое отображение будет совпадать с отображением A_1. Этого можно добиться при помощи $(c_1 \cdot 2\varepsilon)$-возмущения, где константа $c_1 \geq 1$ зависит от радиусов шаров, но не зависит от ε.

Аналогично для любого $j \in \{2, \dots, n\}$ мы можем рассмотреть шары радиусов $\frac{r}{10}$ и r с центрами в точке $Q_j := F^{j-1}(Q_1)$ и модифицировать F внутри большего шара таким образом, чтобы ограничение нового отображения на меньший шар совпало с A_j. Поскольку для разных j большие шары не пересекаются, все эти модификации вместе требуют всего лишь $(c_1 \cdot 2\varepsilon)$-возмущения исходного отображения.

Мы сохраним обозначение F для модифицированного отображения. Важно заметить, что после проделанной нами модификации точка x в общем случае не принадлежит устойчивому многообразию точки Q. Однако, как мы сейчас убедимся, в конце витка соответствующий образ точки x оказывается внутри шара $B(Q_n, r)$.

Действительно, пусть $\operatorname{dist}(x_1, Q_1) = d$. Очевидно, расстояние между $x_2 = F(x_1)$ и $Q_2 = F(Q_1)$ меньше, чем $d \cdot (L+1)$, где L — константа Липшица для исходного отображения F: мы предполагаем, что число ε мало, и добавляем к L единицу, чтобы учесть

[31] Заметим, что мы не можем гарантировать такого же поведения для орбит на устойчивом многообразии произвольного седла. Можно представить себе ситуацию, когда вдоль почти всей орбиты периодического седла имеет место слабое растяжение (и, следовательно, точка на устойчивом многообразия седла на самом деле отталкивается от орбиты седла в течение этих итераций), а на последней итерации сильное сжатие в некотором направлении приводит к тому, что у дифференциала за период появляется собственное значение, по модулю меньшее единицы.

возмущение. Аналогично для $x_j = F^{j-1}(x_1)$ получаем, что $\mathrm{dist}(x_j, Q_j) < d \cdot (L+1)^{j-1}$. Из неравенства (19) следует неравенство $d \cdot (L+1)^{n-1} < r/10$. Оно означает, что в течение всего рассматриваемого витка точки $O(x)$ остаются внутри объединения малых шаров, внутри которых исходное отображение было заменено отображениями $A_1, \ldots, A_n$.

Мы предполагаем, что $A = A_n \circ \cdots \circ A_1$ сжимает в евклидовой метрике. Тогда для некоторого $\lambda_1 \in (0,1)$ имеем:

$$\mathrm{dist}(F^n(x_1), F^n(Q_1)) \le \lambda_1 \cdot d < d.$$

Это означает, что мы можем повторить ту же процедуру модификации на следующем витке и далее вплоть до последнего k-го витка.

Притяжение к стоку

Если число k_2 достаточно велико, по завершении второго шага точка Q становится стоком, а x оказывается в бассейне притяжения этого стока. Действительно, покажем, что для достаточно больших k_2 любая точка y, находящаяся на расстоянии не больше, чем d, от Q_1 (в частности, точка $x_1 \in O(x)$) притягивается к стоку. Напомним, что $N = \mathrm{per}\,(Q) = (k_1 + k_2)n + r_0$, где $r_0 = \mathrm{length}(w_0)$ ограничено сверху константой, в то время как k_1 и k_2 могут быть взяты сколь угодно большими, и притом k_1 мы уже выбрали в шаге 1. Имеем

$$\mathrm{dist}\,(F^N(y), Q_1) = \mathrm{dist}\,(F^N(y), F^N(Q_1)) \le \left(\lambda_1^{k_2} \cdot (L+1)^{k_1 n + r_0}\right) \cdot \mathrm{dist}\,(y, Q_1).$$

Для больших k_2 выполнено неравенство $\lambda_1^{k_2} \cdot (L+1)^{k_1 n + r_0} < \frac{1}{2}$. Тогда получаем, что

$$\mathrm{dist}\,(F^N(y), Q_1) \le \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}\,(y, Q_1).$$

Отсюда следует, что точка x_1, равно как и ее прообраз x, притягиваются к орбите нового стока.

Таким образом, после $2c_1\varepsilon$-модификации исходного отображения внутри области W мы видим, что:

- прошлая полуорбита точки x не изменилась, а следовательно, точка x по-прежнему принадлежит $W^u(p)$;
- орбита точки Q не изменилась, но точка Q стала стоком, а точка x оказалась в бассейне притяжения этого стока.

Если ε достаточно мало, то справедливо неравенство $2c_1\varepsilon < \varepsilon_0$. В таком случае мы построили ε_0-модификацию исходного отображения F с требуемым свойством. Доказательство леммы завершено.

3.3 Локальная версия теоремы B

Следующее утверждение можно считать локальной версией теоремы B.

Теорема 48. *Предположим, что у диффеоморфизма* $F \in \mathrm{Diff}^1(M)$ *есть окрестность* U*, в которой определено гиперболическое продолжение периодического седла* p *диффеоморфизма* F*, и притом для каждого* $G \in U$ *это седло является диссипативным. Тогда для топологически типичного диффеоморфизма* $G \in U$ *либо* $H(p(G), G)$ *допускает расщепление с доминированием, либо* $A_M(G)$ *неустойчив по Ляпунову.*

Доказательство. Покажем для типичного $G \in U$, что если $H(p(G), G)$ не допускает расщепления с доминированием, то G удовлетворяет обоим предположениям предложения 14, т.е., во-первых, существует последовательность стоков, сходящаяся к седлу $p(G)$, и, во-вторых, неустойчивое многообразие седла $p(G)$ пересекает бассейн притяжения некоторого стока. Тогда из предложения 14 будет следовать, что аттрактор Милнора $A_M(G)$ неустойчив по Ляпунову.

Обозначим через $DS(U)$ подмножество окрестности U, состоящее из диффеоморфизмов G, для которых $H(p(G), G)$ допускает расщепление с доминированием. Рассмотрим внутренность множества $DS(U)$ и обозначим через V дополнение в U до замыкания этой внутренности: $V = U \setminus \overline{\mathrm{Int}(DS(U))}$. Из определения V следует, что V содержит плотное подмножество диффеоморфизмов, для которых $H(p(G), G)$ не допускает расщепления с доминированием. Если V пусто, доказывать нечего: гомоклинический класс $H(p(G), G)$ допускает расщепление с доминированием для топологически типичного диффеоморфизма $G \in U$.

Если $V \neq \emptyset$, из теоремы 46 (при помощи леммы Франкса) следует, что любой диффеоморфизм $G \in V$ может быть приближен диффеоморфизмом, у которого есть источник или сток s вблизи гиперболического продолжения седла p. Поскольку мы предполагаем, что $p(G)$ диссипативно, замечание 47 позволяет нам также предполагать, что s является стоком.

Теперь мы можем использовать рассуждение Ньюхауса как в доказательстве теоремы A (см раздел 2.5). Единственное различие состоит в том, что мы используем теорему 46, чтобы получать новые стоки, в то время как в доказательстве теоремы A мы для этого размыкали гомоклинические касания. Это рассуждение показывает, что топологически типичным образом в V стоки накапливаются к гиперболическому продолжению седла p.

Заметим далее, что к любому диффеоморфизму $G \in V$, для которого $H(p(G), G)$ не допускает расщепления с доминированием, можно применить лемму D, а такие диффеоморфизмы плотны в V. Тогда существует открытое и плотное подмножество в V, где для любого диффеоморфизма G неустойчивое многообразие $W^u(p(G), G)$ пересекает бассейн стока. Таким образом, найдется остаточное подмножество R множества V, такое что в нем к любому диффеоморфизму применимо предложение 14, а значит, у любого диффеоморфизма аттрактор Милнора неустойчив по Ляпунову.

Остается только заметить, что объединение $R \cup DS(U)$ является остаточным подмножеством в U. □

3.4 Глобальная версия теоремы B

Оставшаяся часть доказательства теоремы B по существу совпадает с доказательством следствия 0.3. из [13].

Доказательство теоремы B. Диффеоморфизмы, для которых все периодические точки периода меньше n гиперболические, образуют открытое и плотное множество U_n в $\mathrm{Diff}^1(M)$. Представим U_n в виде объединения открытых подмножеств $U_{n,\alpha}$, таких что для $F \in U_{n,\alpha}$ число седел периода меньше n постоянно и равно $k(\alpha)$ и притом эти седла непрерывно зависят от отображения. Зафиксируем одно из множеств $U_{n,\alpha}$ и обозначим соответствующие седла через $p_1, \ldots, p_k$ (зависимость седел от отображения опускаем).

Для каждого j рассмотрим множество $DS(p_j) \subset U_{n,\alpha}$, состоящее из отображений, для которых $H(p_j(G), G)$ допускает расщепление с доминированием. Теперь зафиксируем j и рассмотрим открытое множество $V_j = U_{n,\alpha} \setminus \overline{\mathrm{Int}\,(DS(p_j))}$. Обозначим через V_j^+ (соотв., V_j^-) открытое подмножество в V_j, состоящее из диффеоморфизмов, для которых седло p_j диссипативно (соотв., анти-диссипативно). Объединение $V_j^+ \cup V_j^-$ плотно в V_j. Применяя теорему 48 к V_j^+, получаем остаточное подмножество $R_j^+ \subset V_j^+$, где все диффеоморфизмы имеют неустойчивые аттракторы Милнора. Аналогичное рассуждение для V_j^- в обращенном времени дает остаточное подмножество $R_j^- \subset V_j^-$, такое что для любого F в этом множестве обратный диффеоморфизм F^{-1} имеет неустойчивый аттрактор Милнора. Тогда $R_j = R_j^- \cup R_j^+$ есть остаточное подмножество в V_j. Объединение R_j и $DS(p_j)$ является остаточным подмножеством в $U_{n,\alpha}$. Пересекая множества $R_j \cup DS(p_j)$, получаем остаточное подмножество $R_{n,\alpha}$ в $U_{n,\alpha}$. Для каждого $F \in R_{n,\alpha}$ или гомоклинические классы всех седел p_j допускают расщепления с доминированием, или аттрактор Милнора неустойчив по Ляпунову для F или F^{-1}. Наконец, $R = \bigcap_n \bigcup_\alpha R_{n,\alpha}$ — это остаточное подмножество в $\mathrm{Diff}^1(M)$, такое что для любого $F \in R$ либо каждый гомоклинический класс допускает расщепление с доминированием, либо $A_M(F)$ неустойчив по Ляпунову для F, либо $A_M(F^{-1})$ неустойчив для F^{-1}. $\square$

4 Аттракторы Милнора гиперболических диффеоморфизмов

4.1 Определения, результаты и открытые вопросы

В этом разделе мы будем рассматривать диффеоморфизмы гладких замкнутых многообразий. Диффеоморфизм называется *равномерно гиперболическим* (или просто гиперболическим), если он удовлетворяет Аксиоме А, т.е. его неблуждающее множество гиперболично и содержит плотное подмножество, состоящее из периодических точек.

По *теореме о спектральном разложении*, неблуждающее множество каждого такого диффеоморфизма представляется в виде конечного объединения базисных множеств:

$$\Omega(F) = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_n. \tag{20}$$

Диффеоморфизм называется *Ω-устойчивым*, если при малых возмущениях динамика на неблуждающем множестве возмущенного диффеоморфизма остается сопряжена динамике на неблуждающем множестве исходного. Диффеоморфизм является Ω-устойчивым тогда и только тогда, когда он удовлетворяет аксиоме А и не имеет циклов между базисными множествами разложения (20) (см. [36]). Циклом в данном контексте называется последовательность $\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_k}$ базисных множеств из спектрального разложения, такая что для некоторых $a_1, b_1 \in \Lambda_{i_1}, \dots, a_k, b_k \in \Lambda_{i_k}$ выполнено $W^s(a_1) \cap W^u(b_2) \neq \emptyset, \ \dots, \ W^s(a_{k-1}) \cap W^u(b_k) \neq \emptyset, \ W^s(a_k) \cap W^u(b_1) \neq \emptyset$.

Если базисное множество Λ диффеоморфизма F является максимальным аттрактором в некоторой своей поглощающей окрестности U, будем называть это множество *гиперболическим аттрактором* или *аттракторным гиперболическим множеством*. Мы докажем следующее утверждение.

Теорема E. *Аттрактор Милнора топологически типичного Ω-устойчивого C^1-диффеоморфизма есть объединение всех его аттракторных гиперболических базисных множеств.*

Поскольку гиперболические аттракторы асимптотически устойчивы, в этом случае аттрактор Милнора также асимптотически устойчив.

У топологически типичного C^1-диффеоморфизма нет циклов между гомоклиническими классами (п. 6 теоремы А и замечание 1.3 в [19]), поэтому для топологически типичного C^1-диффеоморфизма из равномерной гиперболичности следует (в соответствии с приведенным выше критерием) Ω-устойчивость. Поэтому теорему E можно переформулировать следующим образом.

Теорема E′. *Для топологически типичного C^1-диффеоморфизма из гиперболичности следует, что аттрактор Милнора есть объединение аттракторных гиперболических базисных множеств.*

Замечание 49. Теорема E в отношении как формулировки, так и доказательства является обобщением аналогичного (неопубликованного) результата для транзитивных диффеоморфизмов Аносова, который получил А. В. Окунев. Позже А. В. Окунев и автор совместно обнаружили, что по существу теорема E является простым следствием Thm. 3 из [9] и основного результата статьи [39].

Есть, однако, несколько препятствий на пути к короткому доказательству теоремы по модулю этих результатов. В [9, Thm 3] речь идет о секционно-гиперболических[32] потоках, а не о диффеоморфизмах, в формулировке и доказательстве присутствуют неточности[33], а также в заключении теоремы выделен случай потоков Аносова. Эти проблемы можно обойти, однако проще и естественнее вывести теорему E из классических результатов об SRB-мерах. Это будет сделано в разделе 4.3.

Естественным образом возникает вопрос, что можно сказать про гиперболические диффеоморфизмы, для которых не выполнено заключение теоремы E. С одной стороны, легко видеть, что среди диффеоморфизмов Морса–Смейла таких быть не может. С другой стороны, их можно найти среди гиперболических диффеоморфизмов, у которых в спектральном разложении (20) есть базисное множество седлового типа (т.е. не являющееся гиперболическим аттрактором для прямого или обратного отображения). Тут можно воспользоваться конструкцией толстой подковы из работы Р. Боуэна [17] или же конструкцией из работы [40], где показано, как модифицировать линейный диффеоморфизм Аносова на двумерном торе, чтобы получить диффеоморфизм Аносова с толстой подковой. Метод работы [40] можно применить к любому диффеоморфизму (двумерного многообразия) с подковой, чтобы получить C^0-близкое отображение с толстой подковой.[34] Для наших целей, однако, достаточно было бы достроить пример Боуэна до гиперболического диффеоморфизма произвольного двумерного многообразия. Если у гиперболического диффеоморфизма в спектральном разложении присутствует множество седлового типа положительной меры, заключение нашей теоремы, очевидно, не выполняется.

Открытым остается вопрос, как обстоят в этом отношении дела с гиперболическими диффеоморфизмами без базисных множеств седлового типа. К примеру, автору неизвестно, можно ли C^1-малым возмущением примера Р. В. Плыкина из [5] добиться того, чтобы аттрактор Милнора стал собственным подмножеством (единственного) гиперболического аттрактора.

Непосредственное отношение к этому кругу вопросов имеет следующий результат, полученный совместно с К. Бонатти, А. В. Окуневым и С. С. Минковым.

Теорема F. *Существует C^1-гладкий диффеоморфизм Аносова двумерного тора, для которого аттрактор Милнора имеет меру ноль.*

[32]Калька с англ. sectionally hyperbolic / sectional axiom A; общепринятого русского термина, по-видимому, нет. Мы не приводим определение, т.к. оно нам не понадобится. Отметим только, что из определений легко следует, что гиперболические потоки являются секционно гиперболическими.

[33]Неточность в формулировке отнюдь не бросается в глаза. В [9, Thm 3] утверждается, что для топологически типичного C^1-гладкого секционно-гиперболического векторного поля или поле является аносовским, или объединение бассейнов притяжения топологических аттракторов имеет полную меру. Доказано, однако, другое: для топологически типичного C^1-гладкого поля из секционной гиперболичности следует, что или поле является аносовским, или объединение бассейнов притяжения топологических аттракторов имеет полную меру. Почувствуйте разницу!

[34]Этот факт отмечен в статье [35] M. J. Pacifico и J. L. Vieitez. Там же утверждается, что в [40] возмущенное отображение C^1-близко к невозмущенному, что неверно: в конструкции из [40] в каждой точке толстой подковы производная в неустойчивом направлении ровно 2, а производная в устойчивом — $1/2$, чего не может случиться C^1-близко к линейному диффеоморфизму Аносова на торе — ведь его матрица имеет *целый* след. Таким образом, остается открытым вопрос, нельзя ли произвольную подкову сделать толстой C^1-возмущением.

Мы лишь анонсируем этот результат, не приводим доказательство и не выносим результат на защиту. Выведем, однако, простое следствие, которое может указать направление для дальнейших исследований.

Следствие 50. *Существует состоящее из диффеоморфизмов Аносова открытое подмножество в* $\mathrm{Diff}^1(\mathbb{T}^2)$*, в котором в* C^0*-топологии плотны диффеоморфизмы с аттракторами Милнора нулевой меры.*

Доказательство. Пусть F — диффеоморфизм из теоремы F. Поскольку диффеоморфизмы Аносова структурно устойчивы, множество U топологически сопряженных с F диффеоморфизмов Аносова открыто. Возьмем произвольный диффеоморфизм $G \in U$ и обозначим через H гомеоморфизм тора, сопрягающий F с G: $G = H \circ F \circ H^{-1}$. Пусть $\hat{H}$ — C^0-близкий к H диффеоморфизм.[35] Тогда отображение $\hat{G} := \hat{H} \circ F \circ \hat{H}^{-1}$ гладко сопряжено с F и C^0-близко к G. Из гладкой сопряженности $\hat{G}$ и F следует, что $A_M(\hat{G}) = \hat{H}(A_M(F))$. Таким образом, $\mu(A_M(\hat{G})) = 0$. Поскольку $G \in U$ был выбран произвольно, мы показали, что U обладает заявленным в формулировке свойством. $\square$

Естественным образом возникает следующий вопрос, на который мы пока не умеем отвечать.

Проблема. *Существует ли (локально) плотное подмножество* C^1*-диффеоморфизмов Аносова (на торе), для которых аттракторы Милнора не совпадают со всем фазовым пространством?*

4.2 Аттракторы гиперболических C^2-диффеоморфизмов

Вспомним, как получается аналог Теоремы E для произвольного гиперболического C^2-диффеоморфизма (см. [3]).

В случае C^2-диффеоморфизма бассейн притяжения базисного множества имеет положительную меру тогда и только тогда, когда это множество является гиперболическим аттрактором (см. [16]). Это означает, что почти все по мере μ точки принадлежат объединению бассейнов гиперболических аттракторов. С другой стороны, гиперболический аттрактор C^2-диффеоморфизма является носителем SRB-меры, в соответствии с которой распределены положительные полуорбиты почти всех точек из бассейна аттрактора: доля времени, которое орбита проводит внутри открытого множества, равна SRB-мере этого множества (см. [41]). Таким образом, орбита почти любой точки x бассейна посещает сколь угодно малую окрестность любой точки соответствующего гиперболического аттрактора, а следовательно, ω-предельное множество точки x совпадает с гиперболическим аттрактором.

В совокупности это означает, что аттрактор Милнора гиперболического C^2-диффеоморфизма совпадает с объединением его гиперболических аттракторов.

[35] Гомеоморфизмы многообразий размерности ≤ 3 сколь угодно точно приближаются диффеоморфизмами, [29].

4.3 Доказательство Теоремы E

Локальная версия теоремы

Достаточно доказать утверждение Теоремы E локально в окрестности произвольного Ω-устойчивого диффеоморфизма. Действительно, если в окрестности $\mathcal{U}$ произвольного Ω-устойчивого диффеоморфизма F остаточное подмножество образуют диффеоморфизмы, у которых аттрактор Милнора есть объединение аттракторных базисных множеств из спектрального разложения, то взяв объединение таких локально остаточных подмножеств, получим остаточное подмножество в множестве Ω-устойчивых диффеоморфизмов. Таким образом, теорема сводится к следующему утверждению.

Предложение 51. *У любого Ω-устойчивого диффеоморфизма F есть C^1-окрестность $\mathcal{U}$, такая что у топологически типичного диффеоморфизма из этой окрестности аттрактор Милнора совпадает с объединением аттракторных гиперболических базисных множеств.*

Рассмотрим произвольный Ω-устойчивый диффеоморфизм F. Обозначим через H_i, $i = 1, \ldots, k$, его гиперболические аттракторы. У диффеоморфизма F есть C^1-окрестность $\mathcal{U} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$, такая что:

- любой диффеоморфизм $G \in \mathcal{U}$ Ω-сопряжен с F,
- У каждого H_i есть поглощающая окрестность U_i, такая что для любого $G \in \mathcal{U}$ множество U_i является поглощающей окрестностью гиперболического аттрактора $H_i(G)$, являющегося гиперболическим продолжением H_i.

Второе требование выполняется для достаточно малой окрестности $\mathcal{U}$ в силу теоремы о (сильной) структурной устойчивости гиперболических множеств. Из этого требования следует, в частности, что на $\mathcal{U}$ определено гиперболическое продолжение любой периодической точки из любого H_i.

Для любого диффеоморфизма $G \in \mathcal{U}$ любая точка, попавшая в множество U_i, притянется к $H_i(G)$. Бассейн B_i множества H_i есть объединение всех прообразов множества U_i:

$$B_i = \bigcup_{n \geq 0} C_{i,n}(G), \text{ где } C_{i,n}(G) = G^{-n}(U_i).$$

Поскольку U_i является поглощающей окрестностью, для любых i, n, G имеем $C_{i,n}(G) \subset C_{i,n+1}(G)$.

Пусть у нас есть зависящее от диффеоморфизма измеримое множество $A(G)$, то есть, строго говоря, функция $A\colon \mathcal{U} \to \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ — это сигма-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств фазового пространства. Тогда можно рассматривать меру множества $A(G)$ как функцию от диффеоморфизма:

$$\mu_A\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+, \ \mu_A(G) := \mu(A(G)).$$

Мы опускаем зависимость множества A от диффеоморфизма в нижнем индексе, чтобы не перегружать обозначения.

Легко видеть, что для фиксированных i и n функции $\mu_{C_{i,n}}(\cdot)$ непрерывно зависят от диффеоморфизма. Дело в том, что сами открытые множества $C_{i,n}(\cdot)$ непрерывно зависят от диффеоморфизма в следующем смысле: для достаточно малого C^1-возмущения G диффеоморфизма F множество $C_{i,n}(G)$ лежит в ε-окрестности множества $C_{i,n}(F)$, а ε-внутренность[36] множества $C_{i,n}(F)$ лежит в $C_{i,n}(G)$. Эта непрерывная зависимость прямо следует из непрерывной зависимости конечных отрезков траекторий от начальной точки и от диффеоморфизма. Заметим также, что аналогичное утверждение справедливо для любых множеств, полученных из $C_{i,n}$ при помощи конечного числа операций объединения и пересечения.

Нам нужно доказать, что для топологически типичного диффеоморфизма из $\mathcal{U}$, во-первых, почти все точки фазового пространства притягиваются к одному из гиперболических аттракторов, т.е. что аттрактор Милнора лежит в объединении аттракторных базисных множеств, а во-вторых, что каждая точка каждого гиперболического аттрактора принадлежит аттрактору Милнора.

Лемма о полунепрерывности

Лемма 52. *Пусть функции $\mu_{A_i}(F) = \mu(A_i(F))$, $i \in \mathbb{N}$, непрерывно зависят от F. Пусть также при любых F и i выполнено $A_i(F) \subset A_{i+1}(F)$. Тогда функция $\mu_{\cup A_i}(\cdot)$ полунепрерывна снизу. Если же всегда имеет место включение $A_{i+1}(F) \subset A_i(F)$, то функция $\mu_{\cap A_i}(\cdot)$ полунепрерывна сверху.*

В данном случае несущественно, является ли F диффеоморфизмом; с тем же успехом это может быть просто параметр, от которого зависят множества A_i. Заметим также, что в лемме зависимость этих множеств от F не предполагается непрерывной (в какой бы то ни было естественной топологии).

Доказательство леммы. Пусть для любого F множества $A_i(F)$ образуют возрастающую последовательность. Введем обозначение $A_\infty(F) := \cup A_i(F)$ и докажем полунепрерывность снизу функции $\mu_{A_\infty}(\cdot)$ в произвольной точке F_0. Зафиксируем малое $\varepsilon > 0$ и найдем такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что мера $A_\infty(F_0) \setminus A_{N(\varepsilon)}(F_0)$ не превосходит ε. По условию, мера $A_{N(\varepsilon)}(F)$ непрерывно зависит от F, поэтому для G, достаточно близкого к F_0, имеем $\mu_{A_{N(\varepsilon)}}(G) \geq \mu_{A_{N(\varepsilon)}}(F_0) - \varepsilon$. Тогда для $\mu_{A_\infty}(G)$ получаем следующую оценку:

$$\mu_{A_\infty}(G) \geq \mu_{A_{N(\varepsilon)}}(G) \geq \mu_{A_{N(\varepsilon)}}(F_0) - \varepsilon \geq \mu_{A_\infty}(F_0) - 2\varepsilon.$$

Поскольку число ε может быть выбрано произвольно малым, эта оценка доказывает полунепрерывность снизу функции $\mu_{\cup A_i}(\cdot)$ в точке F_0. Вторая часть леммы доказывается аналогично. □

Гиперболические аттракторы притягивают почти все точки

Предложение 53. *Для диффеоморфизмов из остаточного подмножества $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{U}$ аттрактор Милнора содержится в объединении гиперболических аттракторов.*

[36] ε-внутренность множества состоит из точек, лежащих в этом множестве вместе со своей ε-окрестностью.

Доказательство. Поскольку множества $C_{i,n}$ вложены: $C_{i,n} \subset C_{i,n+1}$, из леммы 52 следует, что функция $\mu_{B_i}(\cdot)$ полунепрерывна снизу на $\mathcal{U}$. Функция $\sum_i \mu_{B_i}(\cdot)$ также полунепрерывна снизу на $\mathcal{U}$, а значит, непрерывна на остаточном подмножестве $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{U}$. Но в силу теоремы Боуэна на плотном в $\mathcal{U}$ подмножестве C^2-диффеоморфизмов эта функция принимает значение 1. Тогда из непрерывности следует, что она тождественно равна единице на $\mathcal{R}_0$. □

Гиперболические аттракторы содержатся в аттракторе Милнора

Осталось доказать, что для топологически типичного диффеоморфизма из $\mathcal{U}$ гиперболические аттракторы целиком лежат в аттракторе Милнора.

Предложение 54. *Для любого диффеоморфизма G из некоторого остаточного подмножества $\mathcal{R} \subset \mathcal{U}$ объединение $\cup_i H_i(G)$ содержится в аттракторе Милнора.*

Это утверждение нетрудно вывести из основного результата работы H. Qiu [39]. Однако прежде нужно напомнить одно определение.

Определение 55. Пусть ν — вероятностная мера на M, эргодическая для отображения F. *Бассейном* меры ν называется подмножество в M, состоящее из точек x, для которых нормированные суммы δ-мер вдоль конечных отрезков положительной полуорбиты сходятся в $*$-слабой топологии к мере ν, т.е.

$$B(\nu) = \left\{ x \in M \colon \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{F^j(x)} = \nu \right\}.$$

Мера ν называется SRB-мерой, если её бассейн имеет положительную меру Лебега.

Теорема 56 (H. Qiu, [39])**.** *Для топологически типичного C^1-гладкого диффеоморфизма любой гиперболический аттрактор является носителем единственной SRB-меры, бассейн которой совпадает с бассейном притяжения этого аттрактора с точностью до множества нулевой меры Лебега.*

Поскольку для ограничения отображения на поглощающую окрестность гиперболического аттрактора SRB-мера является хорошей (см. определение минимального аттрактора), из этой теоремы следует, что в типичном случае любой гиперболический аттрактор содержится в минимальном аттракторе. Вспоминая об иерархии аттракторов, мы можем заключить, что в данном случае минимальный, статистический и Милноровский аттракторы равны между собой и совпадают с объединением всех аттракторных базисных множеств.

Таким образом, мы одновременно доказали теорему E также для минимальных и статистических аттракторов.

Приведем альтернативное доказательство предложения 54, которое автор придумал до того, как узнал про результат H. Qiu. Недостатком этого рассуждения является то, что оно доказывает предложение 54 только для аттрактора Милнора, но не для статистического или минимального.

Альтернативное доказательство предложения 54. Вспомним, что в каждом гиперболическом аттракторе $H_i = H_i(F)$ плотны периодические точки. Далее, из выбора области $\mathcal{U}$ следует, что гиперболическое продолжение каждой периодической орбиты из $H_i(F)$ определено на всём $\mathcal{U}$. Занумеруем периодические точки в H_i, возьмем первую точку $p_1^i \in H_i$ и рассмотрим для каждого $G \in \mathcal{U}$ множество $T^i(p_1^i(G), G)$, состоящее из точек, ω-предельные множества которых содержат гиперболическое продолжение $p_1^i(G)$ точки p_1^i. Имеем:

$$T^i(p_1^i(G), G) = \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq 0} T^i_{m,n}(p_1^i(G), G), \tag{21}$$

где $T^i_{m,n}(p_1^i(G), G)$ есть n-й G-прообраз $\frac{1}{m}$-окрестности точки $p_1^i(G)$ (вспомним, что орбита накапливается по подпоследовательности к некоторой точке тогда и только тогда, когда пересекает любую окрестность этой точки). Далее зависимость рассматриваемых множеств от $p_1^i(G)$ и G мы будем иногда опускать.

Мы хотим применить лемму 52 к внутреннему объединению в правой части (21), но пока что не можем, потому что нет вложенности объединяемых множеств. Однако мы можем переписать это объединение в следующем виде:

$$\cup_{n\geq 0} T^i_{m,n} = \cup_{N\geq 0} \cup_{j=1}^N T^i_{m,j}.$$

В нашем случае меры $\mu(\cup_{j=1}^N T^i_{m,j})$ непрерывно зависят от отображения, так что первая часть леммы 52 применима. Получаем, что функция $f^i_m(G) := \mu(\cup_n T^i_{m,n}(p_1^i(G), G))$ полунепрерывна снизу на $\mathcal{U}$, а следовательно непрерывна на некотором остаточном подмножестве в $\mathcal{U}$. Пересекая все такие остаточные подмножества, соответствующие разным $i \in \{1, \dots, k\}$ и $m \in \mathbb{N}$, получим остаточное в $\mathcal{U}$ подмножество $\mathcal{R}_1$, на котором все функции f^i_m непрерывны. Получаем, что на этом множестве $\mathcal{R}_1$ можно применить (для любого i) вторую часть леммы 52 к внешнему пересечению из правой части (21) (вложенность на этот раз очевидна).

Таким образом лемма позволяет нам заключить, что функция $f_1(G) := \sum_i \mu(T^i(p_1^i(G), G))$ полунепрерывна **сверху** на остаточном подмножестве $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{U}$. Заметим, что $f_1(G) = 1$ тогда и только тогда, когда для каждого $i = 1, \dots, k$ ω-предельные множества почти всех точек из бассейна гиперболического аттрактора $H_i(G)$ содержат точку p_i^1.

Рассмотрим последовательность C^2-диффеоморфизмов, сходящуюся к некоторому $G \in \mathcal{R}_1$. На каждом из этих диффеоморфизмов рассматриваемая функция принимает значение единица. Действительно, для произвольного C^2-диффеоморфизма $G_0 \in \mathcal{U}$ каждый гиперболический аттрактор $H_i(G_0)$ является носителем SRB-меры, в соответствии с которой распределены орбиты почти всех по мере μ точек из бассейна $H_i(G_0)$, а значит, почти все точки бассейна посещают любую окрестность точки $p_1^i(G_0)$. Теперь из непрерывности функции f_1 на $\mathcal{R}_1$ следует, что она принимает значение единица на всем множестве $\mathcal{R}_1$.

Проделаем аналогичное рассуждение для седел p_j^i с j-м номером, $j \geq 2$, и получим остаточные множества $\mathcal{R}_j$ с аналогичным свойством. Обозначим $\mathcal{R} = \cap_j \mathcal{R}_j$. Это остаточное множество состоит из диффеоморфизмов, для которых каждая периодическая точка гиперболического аттрактора лежит в ω-предельных множествах почти всех точек бассейна этого аттрактора. Поскольку периодические орбиты плотны в гиперболических аттракторах, это означает, что для любого $G \in \mathcal{R}$ выполнено $\cup_i H_i(G) \subset A_M(G)$. □

5 Аттракторы Милнора ступенчатых косых произведений

5.1 Предварительные сведения

Прежде всего, приведем основные определения, следуя [26] и [25].

Пусть $\Sigma^s = \{1, \dots, s\}^{\mathbb{Z}}$ — множество бесконечных в обе стороны последовательностей $\omega = \dots \omega_{-1}\omega_0\omega_1 \dots$, составленных из символов $1, \dots, s$. Для двух различных последовательностей $\omega, \tilde{\omega} \in \Sigma^s$ расстояние между ними определяется следующим образом:

$$d(\omega, \tilde{\omega}) = 2^{-\min\{|n| :\, \omega_n \neq \tilde{\omega}_n\}}. \tag{22}$$

По набору из m различных целых чисел $n_1, \dots, n_m$ и m символов $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ можно задать *цилиндрическое подмножество* пространства Σ^s (или просто *цилиндр*):

$$C^{n_1,\dots,n_m}_{\alpha_1,\dots,\alpha_m} = \{\omega \in \Sigma^s \mid \omega_j = \alpha_j,\ j = 1, \dots, m\}.$$

Цилиндрические множества порождают ту же топологию на Σ^s, что и указанная выше метрика.

Будем считать, что на Σ^s фиксирована $(1/s, \dots, 1/s)$-мера Бернулли, которая определяется следующим образом. Положим меру μ_{Σ^s} цилиндров вида $C^{n_1,\dots,n_m}_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}$ равной $\frac{1}{s^m}$, затем продолжим эту меру на борелевскую σ-алгебру, которая, как нетрудно видеть, порождается множеством всех цилиндров, и, наконец, проведем пополнение полученной борелевской меры.

Замечание 57. В общем случае мера Бернулли на Σ^s характеризуется упорядоченным набором из s чисел, в сумме дающих единицу. Эти числа суть вероятности встретить соответствующий символ из $\{1, \dots, s\}$ на фиксированном месте в случайной последовательности.

Сдвигом Бернулли называется отображение

$$\sigma \colon \Sigma^s \to \Sigma^s,\ (\sigma\omega)_n = \omega_{n+1},$$

сдвигающее последовательности влево на одну позицию.

Определение 58. *Ступенчатым косым произведением* (далее СКП) над сдвигом Бернулли (Σ^s, σ) со слоем M и послойными отображениями $f_1, \dots, f_s \colon M \to M$ называется отображение пространства $X = \Sigma^s \times M$ в себя, имеющее следующий вид:

$$F : X \to X,\ (\omega, p) \to (\sigma\omega, f_{\omega_0}(p)),$$

где ω_0 — символ на нулевом месте в последовательности ω.

Сделаем несколько замечаний, касающихся этого определения.

1. Пространство Σ называется *базой* СКП, а M называется *слоем.* Далее M будет компактным римановым многообразием (возможно, с краем).
2. Расстояние на X вводится как сумма расстояний вдоль слоя и вдоль базы.

3. На пространстве X можно ввести вероятностную меру μ_X, равную произведению меры μ_{Σ^s} на базе и меры Лебега μ_M на слое.
4. СКП задается своими послойными отображениями. СКП с базой Σ^s, слоем M и C^r-гладкими послойными отображениями в совокупности образуют метрическое пространство $(C^r(M))^s$. Если кроме того потребовать, чтобы послойные отображения были диффеоморфизмами, получится пространство $(\mathrm{Diff}^r(M))^s$ (топология наследуется с $(C^r(M))^s$).

С учетом этих замечаний можно говорить о милноровском (а также статистическом и минимальном) аттракторе ступенчатого косого произведения.

В разделе 5.2 мы будем рассматривать более широкий класс СКП, а именно СКП над транзитивными топологическими цепями Маркова.

Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^s$ — матрица размера $s \times s$, составленная из нулей и единиц. Рассмотрим множество $\Sigma = \Sigma_A \subset \Sigma^s$ бесконечных в обе стороны последовательностей $\omega = (\omega_n)_{-\infty}^{+\infty}$ из символов $1, \dots, s$, таких что для любых двух подряд идущих символов ω_i, ω_{i+1} выполнено $a_{\omega_i \omega_{i+1}} = 1$. Таким образом, матрица A задает разрешенные переходы между символами в нашем множестве последовательностей.

Ограничение сдвига Бернулли в Σ^s на Σ_A называется *сдвигом Маркова*, а динамическая система (Σ_A, σ) целиком называется *топологической цепью Маркова*. Заметим, что σ является гомеоморфизмом метрического пространства Σ_A.

Топологическая цепь Маркова называется *транзитивной*, если для некоторого натурального m у матрицы A^m все элементы положительны.

Естественными инвариантными мерами на (Σ_A, σ) являются так называемые *марковские меры*, которые задаются следующим образом. Рассмотрим матрицу $\Pi = (\pi_{ij})$ размера $N \times N$, где $\pi_{ij} \in [0, 1]$ и для любого i выполнено $\sum_j \pi_{ij} = 1$, — такие матрицы называются стохастическими. Любая стохастическая матрица обладает левым инвариантным вектором $p = (p_1, \dots, p_N)$ с неотрицательными компонентами.[37] Нормируем вектор p так, чтобы $\sum p_i = 1$. Определим меру $\mu_{\Sigma_A} = \mu_{\Sigma_A, \Pi}$ на цилиндрах следующим образом:

$$\mu_{\Sigma_A}(C^{n_1, \dots, n_2}_{\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_2}}) = p_{n_1} \cdot \prod_{j=n_1}^{n_2 - 1} \pi_{\alpha_j \alpha_{j+1}},$$

а затем продолжим на всю σ-алгебру.

Мы будем рассматривать случай, когда $\pi_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0$. В этом случае из транзитивности цепи Маркова следует, что вектор p единственен (с точностью до нормировки), а мера $\mu_{\Sigma_A, \Pi}$ — эргодическая. Легко видеть, что в этом случае все непустые цилиндры имеют положительную меру, откуда следует, что носитель меры совпадает с Σ_A.

[37] Доказательства этого и других утверждений о марковских мерах можно найти, например, в [25, §4.2f].

5.2 Теорема Клепцына-Волка и аттракторы Милнора СКП со слоем отрезок

Рассмотрим ступенчатое косое произведение F над транзитивной топологической цепью Маркова (Σ, σ) с конечным числом состояний и со слоем отрезок:

$$F\colon X = \Sigma \times I \to X,\ (\omega, x) \mapsto (\sigma\omega, f_{\omega_0}(x)). \tag{23}$$

Все f_{ω_0} суть диффеоморфизмы отрезка на образ, сохраняющие ориентацию. Мы предполагаем, что в базе фиксирована эргодическая марковская мера μ_Σ.

Определение 59. Замкнутое подмножество $K \subset X$ называется *костистым графиком*, если оно пересекает почти все в смысле меры μ_Σ слои по одной точке, а остальные — по отрезку (такие отрезки называются *костями*).

Заметим, что костистый график представляется в виде объединения своих костей и графика некоторой определенной почти всюду функции из базы в слой, чем и объясняется название. Из теоремы Фубини следует, что μ_X-мера костистого графика нулевая.

Теорема 60 (Д. С. Волк, В. А. Клепцын, [26])**.** *Для типичного ступенчатого косого произведения F вида (23) выполнено следующее:*

1) *фазовое пространство покрывается объединением конечного числа строго поглощающих и строго выталкивающих полос, ограниченных графиками непрерывных функций из базы в слой;*
2) *максимальный аттрактор каждой из поглощающих полос — костистый график; то же справедливо для репеллеров в выталкивающих полосах;*
3) *в каждой из поглощающих и выталкивающих полос имеется ровно одна эргодическая инвариантная мера, проецирующаяся в меру Маркова в базе. Это мера, полученная подъемом меры Маркова на максимальный аттрактор (или репеллер) полосы, рассматриваемый как график измеримой определенной почти всюду функции. Эта мера является SRB-мерой в своей полосе[38];*
4) *показатели Ляпунова вдоль слоя для этих мер отличны от нуля: отрицательны для поглощающих областей и положительны для выталкивающих;*

СКП, для которых выполнено заключение теоремы 60, образуют открытое всюду плотное множество в соответствующем пространстве. Точные условия типичности даны в разделе 5 статьи [26].

Если для СКП F выполнено заключение теоремы 60, будем обозначать через Π_i ($i = 1, \ldots, l$) поглощающие полосы, а через $\Gamma_i \subset \Pi_i$ ($i = 1, \ldots, l$) — графики почти всюду определенных функций из базы в слой, образующие в объединении с соответствующими костями максимальные аттракторы поглощающих полос.

[38] Т.е. для почти любой по мере μ_X точки p из соответствующей полосы положительная полуорбита распределена в соответствии с этой мерой: $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\delta_{F^j(p)} \to \mu_{SRB}$.

Теорема G. *В условиях теоремы 60 аттрактор Милнора СКП F есть объединение замыканий графиков Γ_i.*

Все точки любой выталкивающей полосы, кроме точек соответствующего репеллерного костистого графика, под действием итераций F покидают эту полосу и оказываются в какой-то поглощающей полосе. Поскольку костистые графики имеют нулевую меру, для почти всех точек фазового пространства положительная полуорбита входит в одну из поглощающих полос. Поэтому достаточно рассмотреть произвольную поглощающую полосу $\Pi \in \{\Pi_i\}_{i=1}^n$, внутри которой находится "аттракторный" график $\Gamma \in \{\Gamma_i\}$ почти всюду определенной функции ϕ из базы в слой, и доказать следующее утверждение.

Лемма 61. *В условиях теоремы 60 аттрактор Милнора ограничения $F|_\Pi$ есть замыкание графика Γ.*

Идея доказательства

Покажем, что замыкание графика Γ лежит в аттракторе Милнора. Согласно пункту 3) теоремы 60, замыкание графика Γ является носителем SRB-меры, в соответствии с которой распределены орбиты почти всех точек полосы. Отсюда следует, что для почти всех $x \in \Pi$ выполнено $\omega_{stat}(x) = \overline{\Gamma}$, а значит, $\overline{\Gamma} = A_{stat} \subset A_M$.

Осталось показать, что почти все точки полосы притягиваются к графику Γ. Казалось бы, можно рассуждать следующим образом. Обозначим через $\tilde{\Pi}$ пересечение нашей полосы Π с объединением слоев, в которых есть точки графика. Максимальным аттрактором ограничения нашей динамической системы на $\tilde{\Pi}$ является график Γ. Все точки из $\tilde{\Pi}$ притягиваются к максимальному аттрактору, следовательно почти все точки из Π притягиваются к графику.

К сожалению, это рассуждение не работает: нельзя утверждать, что все точки из $\tilde{\Pi}$ притягиваются к графику. Рассмотрим поучительный контрпример, принадлежащий А. В. Окуневу.

Пример 62. Пусть $F\colon X = \Sigma^2 \times [-1,1] \to X$ — СКП над сдвигом Бернулли, послойные отображения которого удовлетворяют следующим условиям:

- Оба отображения переводят отрезок $[-1,1]$ строго внутрь себя;
- Для f_1 ноль является единственной неподвижной точкой.
- $f_1(0) = f_2(0) = 0,\ f_2'(0) = 2,\ f_1'(0) = 1/2;$
- в ограничении на некоторый отрезок $[-\varepsilon,\varepsilon]$ отображения f_1, f_2 линейны;

В таком случае $A_{max}(F,X)$ является костистым графиком, состоящим из сечения $\Gamma = \{(\omega,x) \mid x = 0\}$ и некоторого множества костей, имеющего нулевую меру. Кроме того, существует SRB-мера, в соответствии с которой распределена орбита почти любой точки. Это мера $\mu_{\Sigma^2} \times \delta(0)$, равная произведению меры Бернулли в базе и дельта-меры в нуле в слое. Ее носитель совпадает с $A_{stat}(F)$ и равен $\overline{\Gamma}$. Однако $A_M(F) \neq \overline{\Gamma}$.

С разрешения А. В. Окунева мы приводим подробный план доказательства.

- Покажем, что $A_M(F) \not\subset \Gamma$. В логарифмических картах на промежутках $(0,\varepsilon]$ и $[-\varepsilon,0)$ наша система выглядит как симметричное случайное блуждание. Из свойств такого блуждания легко следует, что орбиты почти всех точек полосы $\Pi_0 = \Sigma^2 \times [-\varepsilon,\varepsilon]$ покидают эту полосу как в прямом, так и в обратном времени (нас не интересует, возвращаются ли они обратно). Поэтому множество B_0 точек из Π_0, которые не покидают Π_0 **и** притягиваются к Γ под действием итераций F, имеет нулевую меру. Значит, весь бассейн притяжения сечения Γ имеет нулевую меру, так как он равен $\cup_{n\in\mathbb{N}} F^{-n}(B_0)$.

- Вложение $\Gamma \subset A_{max}(F,X)$ очевидно.

  Чтобы доказать, что $A_{max}(F,X)$ — костистый график, достаточно показать, что $\mu_X(A_{max}(F,X)) = 0$. Заметим, что точка $p \in X$ принадлежит $A_{max}(F,X)$ тогда и только тогда, когда прообраз $F^{-n}(p)$ определен для любого $n > 0$. С другой стороны, существует $n_0 > 0$, т.ч. $f_1^{n_0}$-прообраз не определен для всех точек слоя вне отрезка $[-\varepsilon,\varepsilon]$. Поэтому для случайной точки $p \in X \setminus \Pi_0$ прообраз $F^{-n_0}(p)$ не определен с вероятностью не меньше 2^{-n_0}. Так как почти все точки рано или поздно покидают полосу Π_0 при взятии F-прообразов, отсюда нетрудно вывести, что для почти всех точек из X некоторый F-прообраз не определен, а следовательно, $\mu_X(A_{max}(F,X)) = 0$.

- Докажем от противного, что мера δ_0 — единственная вероятностная стационарная мера на I для отображений f_1, f_2, применяемых равновероятно.[39] Пусть есть стационарная мера ν, такая что $\mathrm{supp}(\nu) \neq \{0\}$. Так как ее носитель $\mathrm{supp}(\nu)$ инвариантен вперед под действием f_1, он должен пересекаться с $[-\varepsilon,\varepsilon] \setminus \{0\}$. Тогда найдется отрезок $J \subset [-\varepsilon,\varepsilon] \setminus \{0\}$, такой что $\nu(J) > 0$, $J \cap f_1(J) = \emptyset$. Так как мера ν стационарна, а $f_1 = f_2^{-1}$ на $[-\varepsilon,\varepsilon]$, для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем $\nu(f_1^j(J)) = \frac{1}{2}\Big(\nu(f_1^{j-1}(J)) + \frac{1}{2}\nu(f_1^{j+1}(J))\Big)$, т.е. $\Big(\nu(f_1^j(J))\Big)_{j\in\mathbb{N}}$ — арифметическая прогрессия. Поскольку ν вероятностна, все члены этой арифметической прогрессии неотрицательны, а ее сумма не больше 1. Значит, это прогрессия из одних нулей, что противоречит неравенству $\nu(J) > 0$.

- Для всех $x \in I$ для μ_{Σ^2}-почти любой $\omega \in \Sigma^2$ любой частичный предел (в $*$-слабой топологии) последовательности $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f_{\omega_j}\circ\dots\circ f_{\omega_0}(x)}$ является стационарной вероятностной мерой (это следует из [21, Lem. 2.5]).

- Так как $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{\sigma^j(\omega)} \to \mu_{\Sigma^2}$ для почти всех ω, из предыдущих двух пунктов следует, что для СКП F положительные полуорбиты почти всех точек из X распределены в соответствии с мерой $\mu_{\Sigma^2} \times \delta(0)$. Значит, $A_{stat}(F) = \Gamma$.

Вернемся к плану доказательства леммы 61. Сначала, пользуясь отрицательностью показателя Ляпунова вдоль слоя (пункт 4) теоремы 60), мы найдем множество $V \subset \Pi$

[39] Напомним, что мера ν *стационарна*, если для любого измеримого $A \subset I$ выполнено $\nu(A) = \frac{1}{2}(\nu(f_1^{-1}(A)) + \nu(f_2^{-1}(A)))$.

положительной меры, все точки из которого притягиваются к графику (лемма 63). Множество V строится с помощью теоремы Егорова, поэтому мы будем называть его егоровским множеством. Мы будем рассматривать подмножества $U_\alpha \subset \Pi$, которые заметаются, если двигать график Γ вдоль слоя в обе стороны на расстояние не более α. Множество V будет иметь вид $V = U_\alpha \cap (B \times I)$, где α достаточно мало, а $B \subset \Sigma$ — множество меры $1 - \delta$.

Затем мы покажем, что почти все точки полосы Π посещают множество V такого вида (предложение 65). Это доказывается следующим образом. Проекция B множества V на Σ имеет меру $1 - \delta$; кроме того, над некоторым множеством $C \subset \Sigma$ меры $1 - \delta$ образы границ поглощающей полосы равномерно сходятся друг к другу. Почти все точки полосы Π посещают $((B \cap C) \times I) \cap \Pi$ бесконечное число раз, и если номер итерации, при которой происходит очередное посещение, достаточно велик, точка попадает в V, потому что над множеством C на этой итерации расстояние между образами границ полосы меньше α. Значит, почти любая точка полосы Π притягивается к замыканию графика Γ, то есть $A_M(F|_\Pi) \subset \overline{\Gamma}$. Обратное включение было доказано выше, поэтому $A_M(F|_\Pi) = \overline{\Gamma}$. Перейдем к подробному доказательству.

Построение егоровского множества V

Обозначим через X_Γ объединение слоев, содержащих точки графика Γ. Пусть ρ — определенная на X_Γ функция, которая возвращает расстояние от точки-аргумента до графика вдоль слоя:

$$\text{для } p = (\omega, x) \in X_\Gamma \quad \rho(p) := \operatorname{dist}(p, \Gamma \cap (\{\omega\} \times I)).$$

Можно рассматривать ρ как почти всюду определенную функцию на X.

Рассмотрим семейство множеств $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}_+}$, где множество U_α определяется следующим образом:

$$U_\alpha = \{p \in X_\Gamma \mid \rho(p) \le \alpha\}.$$

Другими словами, множество U_α заметается, если двигать график Γ вдоль слоя в обе стороны не более чем на α. Мы далее будем рассматривать только малые α, при которых $U_\alpha \subset \Pi$.

Лемма 63. *Для сколь угодно малого $\delta > 0$ найдутся множество $B \subset \Sigma$ меры $1 - \delta$ и число $\gamma > 0$, такие что для любой точки p множества $V = U_\gamma \cap (B \times I)$ выполнено $\omega(p) \subset \overline{\Gamma}$.*

Доказательство. Согласно пункту 4) из теоремы 60, послойный показатель Ляпунова L "аттракторной" SRB-меры, сидящей на $\overline{\Gamma}$, отрицателен. Так как эта мера получается поднятием меры μ_Σ на Γ, выполнено равенство

$$L = \int\limits_\Sigma \ln f'_\omega(x_A(\omega)) d\mu_\Sigma,$$

где через $x_A(\omega)$ обозначена x-координата точки графика Γ в слое $\{\omega\} \times I$. Заметим, что подынтегральная функция определена почти всюду на Σ и ограничена, поэтому ее можно интегрировать.

Зафиксируем малое число $\varepsilon > 0$, для которого выполнено

$$L_\varepsilon := \int\limits_\Sigma \ln(f'_\omega(x_A(\omega)) + \varepsilon) d\mu_\Sigma < 0.$$

Положим $g_\varepsilon(\omega) := f'_\omega(x_A(\omega)) + \varepsilon$. Обозначим временные средние функции $\ln g_\varepsilon$ в точке $\omega \in \Sigma$ через $K_n(\omega)$:

$$K_n(\omega) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln g_\varepsilon(\sigma^k\omega) = \frac{1}{n}\ln\prod_{k=0}^{n-1} g_\varepsilon(\sigma^k\omega).$$

Так как слой компактен, все послойные отображения равномерно непрерывны. Их конечное число, поэтому по фиксированному выше ε можно определить число $\beta = \beta(\varepsilon) > 0$, такое что для любых $x_1, x_2 \in I$ и j выполнена импликация

$$\operatorname{dist}(x_1, x_2) < \beta \;\Rightarrow\; |f'_j(x_1) - f'_j(x_2)| < \varepsilon. \tag{24}$$

Зафиксируем β и рассмотрим множество $U_\beta \in \mathcal{U}$. Если положительная полуорбита некоторой точки фазового пространства лежит в U_β, мы имеем возможность оценивать скорость ее приближения к графику.

Предложение 64. *Если точка $p = (\omega, x)$ и ее образы при $n-1$ положительных итерациях F лежат в U_β, то*

$$\rho(F^n(p)) \leq \rho(p) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} g_\varepsilon(\sigma^k\omega) = \rho(p) \cdot \exp(nK_n(\omega)). \tag{25}$$

Доказательство. Пусть точка $p = (\omega, x)$ принадлежит U_β. Пусть $x_A(\omega)$, как и раньше, обозначает x-координату точки графика Γ в слое над ω. Тогда в силу импликации (24) для $t \in [x_A(\omega) - \beta,\ x_A(\omega) + \beta]$ выполнено $f'_{\omega_0}(t) < f'_{\omega_0}(x_A(\omega)) + \varepsilon$, так что мы можем оценить расстояние от $F(p)$ до графика следующим образом:

$$\rho(F(p)) = |f_{\omega_0}(x) - f_{\omega_0}(x_A(\omega))| \leq |x - x_A(\omega)| \cdot (f'_{\omega_0}(x_A(\omega)) + \varepsilon) = \rho(p) \cdot g_\varepsilon(\omega).$$

Аналогично, если для каждого $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ выполнено $F^j(p) \in U_\beta$, имеем оценку:

$$\rho(F^n(p)) \leq \rho(F^{n-1}(p)) \cdot g_\varepsilon(\sigma^{n-1}\omega) \leq$$

$$\leq \rho(F^{n-2}(p)) \cdot g_\varepsilon(\sigma^{n-2}\omega) \cdot g_\varepsilon(\sigma^{n-1}\omega) \leq \cdots \leq \rho(p) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} g_\varepsilon(\sigma^k\omega).$$

$\square$

Теперь мы можем завершить доказательство леммы 63.

По теореме Биркгофа, для почти всех по мере μ_Σ точек $\omega \in \Sigma$ выполнено $K_n(\omega) \to L_\varepsilon$ при $n \to \infty$. Возьмем произвольное $\delta \in (0, \frac{1}{2})$. Применим теорему Егорова[40] к последовательности K_n и получим множество $B \subset \Sigma$ меры $1-\delta$, на котором эта последовательность сходится равномерно. Это множество — то самое, которое фигурирует в формулировке леммы 63. Из равномерной на B сходимости K_n к L_ε и неравенства $L_\varepsilon < 0$ следует, что найдется номер $M \in \mathbb{N}$, такой что при любых $n \geq M$, $\omega \in B$ выполнено $K_n(\omega) < 0$.

Пусть λ — такая константа, что все послойные отображения λ-липшицевы. Выберем γ настолько малым, что $\gamma \cdot \lambda^M < \beta$. Теперь покажем, что для любой точки $p \in V = U_\gamma \cap (B \times I)$ выполнено $\omega(p) \subset \overline{\Gamma}$.

Действительно, для точки $p = (\omega, x) \in V$ имеем $\rho(p) < \gamma$. Тогда при $n \leq M$ выполнено

$$\rho(F^n(p)) < \gamma \cdot \lambda^M < \beta.$$

Это означает, что за первые M итераций образы точки p не покинут U_β. В таком случае можно использовать оценку (25). Так как $K_M(\omega) < 0$ при $\omega \in B$, имеем:

$$\rho\left(F^M(p)\right) \leq \rho(p) \cdot \exp(M \cdot K_M(\omega)) \leq \rho(p),$$

то есть M−й образ точки p тоже лежит в U_γ. Поскольку при любых $n \geq M$ выполнено $K_n(\omega) < 0$, при последующих итерациях образы точки p также остаются в U_γ, где применима оценка (25). Таким образом, при любом $n > 0$ имеем $\rho(F^n(p)) \leq \rho(p) \cdot \exp(n \cdot K_n(\omega))$. Так как $K_n(\omega) \to L_\varepsilon < 0$ при $n \to \infty$, имеем сходимость $\rho(F^n(p)) \to 0$. Это означает, что $\omega(p) \subset \overline{\Gamma}$.

Доказательство леммы 63 завершено. □

Почти все точки попадают в егоровское множество V

Предложение 65. *Для почти любой точки $x \in \Pi$ найдется такое натуральное n, что $F^n(x) \in V$.*

Доказательство. Пусть поглощающая полоса Π ограничивается графиками непрерывных отображений ψ_1 и ψ_2 из базы в слой. Тогда множество $F^n(\Pi)$ заключено между n-ми образами графиков функций ψ_1, ψ_2. Эти образы являются графиками непрерывных отображений $\psi_{1,n}$, $\psi_{2,n}$ из базы в слой. При $n \to \infty$ разность $\psi_{1,n} - \psi_{2,n}$ почти всюду по мере μ_Σ стремится к нулю, иначе максимальный аттрактор полосы Π имел бы положительную меру.

Согласно теореме Егорова, на некотором множестве $C \subset \Sigma$ меры $1-\delta$ эта сходимость равномерная, а значит, можно найти такое N, что при $n \geq N$

$$\|(\psi_{1,n} - \psi_{2,n})|_C\|_{C^0} < \gamma. \tag{26}$$

Обозначим $D = B \cap C$ (напомним, B используется в определении V). Так как $\mu_\Sigma(B) = \mu_\Sigma(C) = 1-\delta$, мера D не меньше $1-2\delta$. Так как мера μ_Σ эргодична для сдвига σ, почти

[40] Теорема Егорова: если на пространстве Σ с вероятностной мерой задана почти всюду сходящаяся последовательность измеримых функций, то для любого $\delta > 0$ найдется множество $B \subset \Sigma$ меры не меньше $1-\delta$, на котором последовательность сходится равномерно.

любая по мере μ_Σ точка $\omega \in \Sigma$ бесконечное число раз посещает D под действием σ. Но если для точки $p \in \Pi$ ее образ $F^n(p)$ попал в множество $D \times I$ и притом $n \geq N$, то из неравенства (26) следует, что $F^n(p) \in V$. Значит, почти любая точка поглощающей полосы под действием некоторой итерации попадет в множество V, что мы и хотели доказать. □

Лемма 63 и предложение 65 вместе доказывают лемму 61: предложение 65 утверждает, что почти все орбиты пересекают V, а лемма 63 говорит, что все точки из V притягиваются к графику Γ. Вместе с леммой 61 доказана и теорема G. Таким образом, для типичных СКП из рассматриваемого класса статистический и милноровский аттракторы совпадают с объединением замыканий "аттракторных" графиков Γ_j.

Замечание 66. Аналогично лемме 61 доказывается, что если для СКП F справедлива теорема 60, то для любой выталкивающей полосы Π аттрактор $F^{-1}|_\Pi$ совпадает с замыканием соответствующего графика $\tilde{\Gamma}_j$. Если под репеллером Милнора для F понимать наименьшее замкнутое множество, содержащее α-предельные множества почти всех точек, для которых эти множества определены, то репелер Милнора будет объединением замыканий "репеллерных" графиков $\tilde{\Gamma}_j$.

5.3 Лемма об устойчивости проекции аттрактора

Рассмотрим ступенчатое косое произведение над сдвигом Бернулли

$$X = \Sigma^s \times M; \ F : X \to X, \ (\omega, p) \mapsto (\sigma\omega, f_{\omega_0}(p)), \tag{27}$$

где M — компактное риманово многообразие (с краем или без), а послойные отображения $f_1, \ldots, f_k$ — C^r-диффеоморфизмы ($r \geq 1$) многообразия M (если у M есть край, речь будет идти об отображениях M внутрь себя, являющихся диффеоморфизмами на образ). Пусть $\pi_M : X \to M$ — отображение проекции на слой.

Определение 67. Замкнутое множество $B \subset M$ мы будем называть *устойчивым по Ляпунову* (под действием послойных отображений $\{f_i\}$), если для любой его окрестности U_M найдется меньшая его окрестность V_M, такая что все начинающиеся в $\Sigma^s \times V_M$ траектории не покидают $\Sigma^s \times U_M$.

Предложение 68 (А. Окунев)**.** *Вместе с каждой точкой $p = (\omega, x)$ аттрактор Милнора (а также статистический аттрактор) косого произведения (27) содержит любую точку $p' = (\omega', x)$, для которой левая половина (прошлое) последовательности $\omega' \in \Sigma^s$ совпадает с левой половиной последовательности ω, т.е. $\omega_j = \omega'_j \ \forall j < 0$.*

Лемма H. *Аттрактор Милнора ступенчатого косого произведения (27) устойчив по Ляпунову тогда и только тогда, когда его проекция на слой устойчива.*

Доказательство. Пусть проекция $B = \pi_M(A_M)$ устойчива в смысле данного выше определения. Докажем устойчивость аттрактора.

По произвольному Δ мы укажем δ, такое что образы точек, отстоящих от аттрактора не более чем на δ, никогда не покинут его Δ-окрестности.

Сначала по Δ мы определим $N \in \mathbb{N}$, такое что за N шагов точки базы с одинаковым будущим сближаются на расстояние $\Delta/2$. А именно:

$$N = \left[-\log_2 \frac{\Delta}{2} \right] + 1,$$

но точное значение не будет использоваться. Введем обозначение:

$$\lambda = \max_i \operatorname{Lip} f_i.$$

Теперь возьмем $\varepsilon > 0$, чтобы выполнялось условие $\varepsilon \cdot \lambda^N < \frac{\Delta}{2}$. Наконец, в силу устойчивости проекции аттрактора найдется такое $\delta > 0$, что для любой точки $p \in X$ из $\operatorname{dist}_M(\pi_M(A_M), \pi_M(p)) < \delta$ следует $\operatorname{dist}_M(\pi_M(A_M), \pi_M(F^n(p))) < \varepsilon$ при любом $n > 0$.

Теперь рассмотрим точку $p = (\omega_p | \omega_f, x) \in X$, которая δ-близка к A_M. Ее проекция $\pi_M(p)$, следовательно, отстоит от $\pi_M(A_M)$ менее, чем на δ. По предложению 68, в аттракторе Милнора найдется точка q с будущим ω_f, таким же, как у p, и с координатой по слою, δ-близкой к координате точки p.

Рассмотрим $F^N(p)$ и $F^N(q)$. Так как $\operatorname{dist}_M(\pi_M(q), \pi_M(p)) < \delta < \varepsilon$, имеем $\operatorname{dist}_M(\pi_M F^N(q), \pi_M F^N(p)) < \Delta/2$, поскольку мы потребовали, чтобы $\varepsilon \cdot \lambda^N < \frac{\Delta}{2}$. Число N было выбрано так, что расстояние между проекциями точек $F^N(p)$ и $F^N(q)$ на Σ^s меньше $\Delta/2$. Но тогда

$$\operatorname{dist}_X(F^N(p), F^N(q)) < \Delta,$$

поскольку расстояние в косом произведении — сумма расстояний вдоль слоя и вдоль базы.

Рассмотрим теперь $p_i = F^i(p), \ \ i \in \mathbb{N}$. К p_i можно применить то же самое рассуждение. По устойчивости проекции, $\pi_M(F^i(p))$ лежит в ε-окрестности проекции аттрактора. Следовательно, найдется точка $q_i \in A_M$ с таким же, как у $F^i(p)$, будущим, такая что

$$\operatorname{dist}_M \big(\pi_M(q_i), \pi_M(F^i(p)) \big) < \varepsilon.$$

За N итераций расстояние между проекциями не слишком возрастёт:

$$\operatorname{dist}_M(\pi_M F^N(q_i), \pi_M F^N(p_i)) < \Delta/2,$$

поскольку мы потребовали, чтобы $\varepsilon \cdot \lambda^N < \frac{\Delta}{2}$. Но тогда

$$\operatorname{dist}_X(F^{N+i}(p), A_M) \leq \operatorname{dist}_X(F^{N+i}(p), F^N(q_i)) < \Delta.$$

Таким образом, мы доказали, что образы точек из δ-окрестности аттрактора после $k > N$ итераций лежат в его Δ-окрестности (k произвольно). Заменяя при необходимости δ на δ/λ^N, получим то же утверждение и для $k < N$.

Пусть теперь аттрактор устойчив по Ляпунову. Докажем устойчивость его проекции. Это делается аналогично предыдущему рассуждению, но несколько проще.

Будем считать, как и раньше, что $\varepsilon \cdot \lambda^N < \frac{\Delta}{2}$. Пусть из δ-близости точки слоя к аттрактору следует $\Delta/2$-близость к аттрактору элементов её положительной полуорбиты. Рассмотрим точку x, такую что $\operatorname{dist}_M(x, \pi_M(A_M)) < \min(\delta, \varepsilon)$. Зафиксируем произвольное $\omega \in \Sigma^s$ и рассмотрим точку $(\omega, x) \in X$. Эта точка может лежать далеко от аттрактора, однако, пользуясь предложением 68, можно найти последовательность $\tilde{\omega}$ с тем же будущим, для которой $\operatorname{dist}_X((\tilde{\omega}, x), A_M) < \delta$. Тогда при $i \in [0, N]$ выполнено $\operatorname{dist}_M(\pi_M F^i(\omega, x), \pi_M A_M) < \Delta/2$ в силу условия на ε, а при любом $i > N$ справедливы неравенства

$$\operatorname{dist}_X\left(F^i(\omega, x), F^i(\tilde{\omega}, x)\right) \leq \Delta/2,$$
$$\operatorname{dist}_X\left(F^i(\tilde{\omega}, x), A_M\right) < \Delta/2.$$

Таким образом, $F^i(\omega, x)$ при $i > N$ находится в Δ-окрестности аттрактора, а значит, проекция $\pi_M(F^i(\omega, x))$ находится в Δ-окрестности проекции аттрактора. Наконец, для $i \in [0, N] \cap \mathbb{N}$ последнее выполнено в силу того, что $\operatorname{dist}_M(x, \pi_M(A_M)) < \varepsilon$. Лемма доказана. □

Лемма H интересна не столько сама по себе, сколько потому, что она используется в доказательстве следующей теоремы, принадлежащей А. В. Окуневу.

Теорема 69 (А. В. Окунев)**.** *Топологически типичное ступенчатое косое произведение над сдвигом Бернулли со слоем окружность (или отрезок), чьи послойные отображения являются сохраняющими ориентацию C^r-диффеоморфизмами ($r \geq 1$), имеет устойчивый по Ляпунову статистический аттрактор, который совпадает с аттрактором Милнора.*

Эти результаты изложены в совместной статье [7], которая подана в “Известия РАН”.

5.4 Неустойчивые аттракторы Милнора в косых произведениях

5.4.1 “Стандартный” неустойчивый аттрактор

Пусть F — ступенчатое косое произведение над сдвигом Бернулли в Σ^2 со слоем M, где M — гладкое связное замкнутое многообразие размерности k, и послойные отображения f_0 и f_1 обладают следующими свойствами:

1) отображение f_0 имеет гиперболический сток a_0, к которому притягиваются все точки многообразия M, за исключением точек стратифицированного многообразия S размерности не выше $k-1$;
2) отображение f_1 имеет гиперболический источник $r_0 = a_0$;
3) выполняется неравенство
$$\|df_0(a_0)\| \|df_1(a_0)\| < 1; \tag{28}$$
4) для любой точки $q \in S$ существует конечное слово w, такое, что соответствующая ему композиция послойных отображений $f_w = f_{w_{|w|-1}} \circ \cdots \circ f_{w_0}$ переводит q в точку вне S.

Замечание 70. Например, в качестве f_0 может выступать северо-южное отображение окружности (единственный сток обозначим a_0), а в качестве f_1 — гиперболический диффеоморфизм окружности с четырьмя неподвижными точками (двумя стоками и двумя источниками), такими что выполняются условия 2)–4).

Будем считать, что на фазовом пространстве $\Sigma^2 \times M$ фиксирована мера, являющаяся произведением меры Бернулли P_2 (с равными вероятностями нуля и единицы) на Σ_2 и меры Лебега на M.

Теорема I (о "стандартном" неустойчивом аттракторе)**.** *Пусть для косого произведения*

$$F : \Sigma^2 \times M \to \Sigma^2 \times M, \ (\omega, x) \mapsto (\sigma\omega, f_{\omega_0}(x)),$$

послойные отображения f_0 и f_1 обладают свойствами 1)–4). Тогда отображение F имеет аттрактор Милнора

$$A_M(F) = \Sigma^2 \times \{a_0\},$$

неустойчивый по Ляпунову.

Этот результат, хотя и изложен в самом конце диссертации, был получен раньше результатов разделов 2 и 3. Тогда рассматриваемый в текущем разделе способ получения отображений с неустойчивыми по Ляпунову аттракторами Милнора — а именно, взять косое произведение с двумя послойными отображениями, такими что сток первого совпадает с более сильным источником второго, — казался самым естественным и перспективным в отношении исследования вопроса о типичности отображений с неустойчивыми аттракторами. Потому рассмотренный выше пример получил от Ю. С. Ильяшенко название "стандартного" неустойчивого аттрактора. План дальнейших исследований состоял в том, чтобы обобщить механизм, лежащий в основе этого примера, с тем чтобы обобщенный механизм "работал" для открытого множества динамических систем. О продвижении в этом направлении мы поговорим в разделе 5.4.3.

5.4.2 Доказательство теоремы I

Аттрактор Милнора лежит в A

Покажем, что множество $A = \Sigma^2 \times \{a_0\}$ содержит аттрактор Милнора. Для этого достаточно установить, что бассейн притяжения A имеет меру не меньше $1 - \delta$, где δ может быть сколь угодно малым положительным числом.

Как и раньше, правой половиной (или будущим) последовательности $\omega = \ldots\omega_{-n}\ldots\omega_0\ldots\omega_n\ldots \in \Sigma^2$ будем называть последовательность $\omega_0\omega_1\ldots$, а левой половиной (прошлым) — последовательность $\ldots\omega_{-2}\omega_{-1}$.

Лемма 71 (С.С. Минков)**.** *Для любого $\delta \in (0,1)$ и любой окрестности $U_0 \subset M$ точки a_0 найдется множество $B \subset \Sigma^2$ меры $1 - \delta$ и окрестность $U \subset U_0$ точки a_0, такие что любая точка из множества $B \times U$ притягивается к A под действием итераций F. Кроме того, множество B вместе с каждой последовательностью ω содержит все последовательности с такой же, как у ω, правой половиной.*

Это утверждение принадлежит С. С. Минкову. Курсовая работа, в которой оно было доказано, не опубликована, однако в [6] приведено доказательство, в деталях отличающееся от оригинального рассуждения С. С. Минкова, но повторяющее его по существу. Заметим также, что эта лемма является многомерным вариантом леммы 63 из раздела 5.2.

Предложение 72. *Аттрактор Милнора отображения F лежит в A.*

Доказательство. В доказательстве этого предложения использован метод, предложенный Ю. Г. Кудряшовым в [4].

Пусть U — окрестность точки a_0, как в лемме 71, являющаяся одновременно поглощающей областью для f_0. По свойству 4), для любой точки $q \in M$ существует конечное слово $w(q)$ из нулей и единиц, такое, что образ q под действием соответствующей композиции $f_{w(q)}$ послойных отображений не лежит в S; если $q \notin S$, в качестве $w(q)$ можно взять пустое слово или слово произвольной длины, состоящее из одних нулей.

По условию 1), точку $t = f_{w(q)}(q) \notin S$ можно перевести в точку окрестности U, последовательно применяя отображение f_0. Следовательно, любую точку слоя можно перевести в точку, принадлежащую множеству U, при помощи композиции послойных отображений. В U точка q переводится вместе с некоторой своей окрестностью. Рассмотрим объединение таких окрестностей по всем точкам слоя: объединение покрывает M, а в силу компактности M можно выбрать конечное подпокрытие.

Таким образом, найдется $N > 0$, такое что для каждой точки $q \in M$ существует слово $\tilde{w}(q)$ длины не больше N, такое что $f_{\tilde{w}(q)}$ переводит q в точку множества U. Будем считать, что длина любого слова $\tilde{w}(q)$ в точности равна N: поскольку U — поглощающая область для f_0, можно дополнить справа нулями те слова $\tilde{w}(q)$, длина которых меньше N.

Зафиксируем теперь некоторую точку $p \in M$ и оценим меру множества

$$G(p) = \{\omega \in \Sigma^2 \mid \operatorname{dist}[F^n(\omega, p), A] \to 0 \ (n \to \infty)\}.$$

Множество $G(p)$ состоит из последовательностей ω, для которых точка (ω, p) притягивается к A под действием итераций F.

Рассмотрим произвольную последовательность $\eta = ...\eta_{-m} \dots \eta_m...$ из Σ^2, ее правую половину разобьем на непересекающиеся блоки длины N: первый блок начинается с нулевой позиции. Будем говорить, что m-й блок является хорошим для точки слоя p и последовательности η, если образ точки p под действием композиции послойных отображений, отвечающей слову $\eta_0 \dots \eta_{Nm-1}$, принадлежит U.

Предложение 73. *Мера множества $H(p)$ последовательностей, в которых есть хотя бы один хороший для точки p блок, равна единице.*

Доказательство. Оценим меру дополнения к $H(p)$. Для каждой последовательности из $\Sigma^2 \setminus H(p)$ первый блок должен быть плохим, для него есть не более $2^N - 1$ вариантов слов; какое бы из этих слов мы не выбрали, для второго блока будет тоже не более $2^N - 1$ вариантов, но каких именно — зависит от того, куда точку p переводит композиция, отвечающая первому блоку. Аналогичным образом получаем, что для каждого блока есть по крайней мере одно слово длины N, которое бы сделало блок хорошим, при условии, что предыдущие блоки известны. Так как $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{2^N-1}{2^N}\right)^m = 0$, множество $\Sigma^2 \setminus H(p)$ имеет меру ноль. Заметим также, что свойство блока быть или не быть хорошим зависит от того, какие блоки ему предшествуют, но не зависит от символов, которые стоят правее блока. Предложение доказано. $\square$

Множество $H(p)$ можно представить в виде дизъюнктного объединения:

$$H(p) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} H_i,$$

где H_i — это множество последовательностей, у которых первый по счету хороший блок занимает i-е место. Введем теперь множества H_i', которые получаются из множеств H_i следующим образом: после i-го блока в последовательности из H_i' вправо идет правая половина некоторой последовательности из множества B. Иными словами, $H_i' = H_i \cap \sigma^{-iN}(B)$.

Так как принадлежность к H_i есть условие на символы, которые стоят в последовательности левее iN-й позиции, а принадлежность к $\sigma^{-iN}(B)$ — условие на правый "хвост" последовательности, начинающийся с этой позиции, $P_2(H_i') = P_2(B) \cdot P_2(H_i) = (1-\delta)P_2(H_i)$. Объединение $H'(p) = \bigsqcup\limits_{i \in \mathbb{N}} H_i'$ дизъюнктно, а $P_2(H(p)) = 1$, поэтому $P_2(H'(p)) = 1 - \delta$. Поскольку $H'(p) \subset G(p)$, получаем оценку:

$$P_2(G(p)) \geq 1 - \delta.$$

Интегрируя по p с помощью теоремы Фубини, получим аналогичную оценку для меры бассейна притяжения множества A. Поскольку δ в лемме может быть выбрано сколь угодно близким к нулю, этот бассейн притяжения имеет полную меру. Следовательно, $A_M \subset A$. $\square$

Аттрактор Милнора совпадает с A и неустойчив по Ляпунову

Аттрактор Милнора не может быть собственным подмножеством в A. Заметим, что для сдвига Бернулли ω-предельное множество почти любой последовательности из Σ^2 совпадает с Σ^2. Только что было доказано, что для почти любой точки фазового пространства расстояние между ее образами под действием итераций F и проекциями этих образов на A стремится к нулю. Из этих двух утверждений следует, что A есть ω-предельное множество для почти всех точек, а значит $A_M = A$.

Обозначим через (1) последовательность, состоящую только из единиц. Тогда в инвариантном слое $\{(1)\} \times M$ точки отталкиваются от $\{(1)\} \times \{a_0\}$ под действием итераций F, так как a_0 — репеллер для f_1, и удаляются от $A = A_M(F)$. Это делает аттрактор Милнора неустойчивым. Теорема I доказана.

5.4.3 Условно неустойчивые аттракторы

В этом разделе мы коротко опишем принадлежащую Ю. С. Ильяшенко конструкцию косых произведений с так называемыми условно неустойчивыми аттракторами, и покажем, как в ней работает теорема I.

Будем говорить, что гомеоморфизм F метрического пространства X с мерой μ_X имеет *условно неустойчивый аттрактор*, если для некоторой степени отображения F найдется инвариантное подмножество, такое что ограничение этой степени на него имеет неустойчивый аттрактор Милнора. Чтобы это определение имело смысл, надо еще уточнить, как именно задается мера на инвариантном подмножестве, тем более что инвариантные подмножества, которые будут рассматриваться далее, будут иметь нулевую меру μ_X.

Пусть F — СКП над сдвигом Бернулли в Σ^{k+2} со слоем M, где M — произвольное гладкое замкнутое связное многообразие размерности k. Таким образом, $X = \Sigma^{k+2} \times M$. Пусть послойные отображения f_j, $j = 0, \dots, k+1$ — C^r-диффеоморфизмы M, $r \geq 1$, а мера на X является произведением $(\frac{1}{k+2}, \dots, \frac{1}{k+2})$ меры Бернулли на базе и меры Лебега μ_M на слое.

Пространство таких косых произведений мы отождествляем с пространством $(\mathrm{Diff}^r(M))^{k+2}$, т.е. с пространством упорядоченных наборов C^r-диффеоморфизмов с топологией произведения.

Пусть Ξ — замкнутое подмножество Σ^{k+2}, инвариантное относительно l-й степени сдвига Бернулли, где l — некоторое натуральное число. Цилиндром в множестве Ξ назовем пересечение цилиндра в множестве Σ^{k+2} с множеством Ξ. Для произвольного подмножества $A \subset \Sigma^{k+2}$ будем обозначать через A^ε его ε-окрестность в Σ^{k+2}. Для любого цилиндра $C \subset \Xi$ определим его условную меру как

$$\mu_\Xi(C) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu_{\Sigma^{k+2}}(C^\varepsilon)}{\mu_{\Sigma_{k+2}}(\Xi^\varepsilon)}.$$

Будем считать, что Ξ таково, что для любого C этот предел существует. Продолжим условную меру с цилиндров на σ-алгебру подмножеств пространства Ξ, порожденную ими.

Положим $Y = \Xi \times M$. Метрика на Y индуцируется с X, а мера задается как прямое произведение: $\mu_Y = \mu_\Xi \times \mu_M$. Множество Y инвариантно относительно F^l, и для $F^l|_Y$ корректно определен аттрактор Милнора в смысле зафиксированной нами метрики и меры. Итак, мы будем говорить, что СКП F имеет условно неустойчивый аттрактор Милнора, если для некоторого подмножества Y такого вида $F^l|_Y$ имеет неустойчивый по Ляпунову аттрактор Милнора.

Теорема 74 (Ю.С. Ильяшенко, [6]). *Для любого замкнутого риманова многообразия M размерности k и любого $r \geq 1$ существует область в пространстве $(\mathrm{Diff}^r(M))^{k+2}$ и в ней всюду плотное подмножество $\mathcal{N}$, такое что для любого набора послойных отображений $f \in \mathcal{N}$ соответствующее СКП имеет условно неустойчивый аттрактор Милнора.*

Идея доказательства. Рассмотрим два диффеоморфизма Морса–Смейла $f_0, f_1 \in \mathrm{Diff}^r(M)$, удовлетворяющие условиям 1)–4) из раздела 5.4.1. Пусть V — достаточно малая окрестность набора $(f_0, f_1, f_1, \dots, f_1)$ в пространстве $(C^r(M))^{k+2}$. Обозначим через U открытое подмножество V, состоящее из наборов $(\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{k+2}) \in V$, для которых выполнены следующие условия:

a) существует область $\Omega_0 \in M$, такая что для $j = 1, ..., k+1$ отображение $\hat{f}_j^{-1}$ сжимает на Ω_0 и $\hat{f}_j^{-1}(\Omega_0) \subset \Omega_0$.

b) для некоторой области $\Omega_1 \subset \Omega_0$ выполнено

$$a_0 \in \Omega_1 \subset \cup_1^{k+1} \hat{f}_j^{-1}(\Omega_1),$$

где a_0, как и раньше, аттрактор отображения f_0, к которому притягиваются почти все точки.[41]

Из a),b) можно вывести, что в U оказываются плотны наборы, для которых неподвижный источник некоторой конечной композиции элементов $\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_{k+2}$ совпадает с близким к точке a_0 стоком нулевого элемента набора. Рассмотрим один из таких наборов $(\hat{f}_0, \hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_{k+2})$ и соответствующее косое произведение $\hat{F}$.

Пусть для определенности речь идет о композиции $\hat{f}_w = \hat{f}_{w_{l-1}} \circ \cdots \circ \hat{f}_{w_0}$, отвечающей слову $w = w_0 \ldots w_{l-1}$ длины l, где все символы w_j ненулевые: источник диффеоморфизма $\hat{f}_w$ совпадает со стоком диффеоморфизма $\hat{f}_0$.

Определим вложение $\zeta : \Sigma^2 \to \Sigma^{k+2}$ следующим образом: в последовательности $\omega \in \Sigma^2$ каждую единицу заменяем словом w, а каждый ноль — словом из l нулей. Положим $\Xi = \zeta(\Sigma^2)$. Это σ^l-инвариантное замкнутое множество, на котором условная мера корректно определена и совпадает с $\zeta_*(P_2)$, где P_2 — $(1/2, 1/2)$ мера Бернулли.

Слегка пошевелив при необходимости послойные отображения (не разрушая при этом совпадения стока и источника), добьемся того, чтобы пара $\hat{f}_0^l, \hat{f}_w$ удовлетворяла условию теоремы I. Тогда $\hat{F}^l|_{\Xi \times M}$ будет иметь неустойчивый аттрактор Милнора в смысле условной меры, а значит, $\hat{F}$ будет иметь условно неустойчивый аттрактор. $\square$

[41] Чтобы это условие гарантированно было открытым, нам как раз и нужны $k+1$ отображений, близких к f_1.

6 Заключение

В диссертации даны достаточные условия того, чтобы топологически типичные диффеоморфизмы из $\mathrm{Diff}^1(M)$ или из некоторой области в $\mathrm{Diff}^r(M)$ имели неустойчивые по Ляпунову глобальные аттракторы; показано, что неустойчивость аттракторов по Ляпунову не наблюдается среди типичных C^1-гладких гиперболических систем; исследована структура аттракторов Милнора для типичных ступенчатых косых произведений со слоем отрезок и разобран пример нетипичного ступенчатого косого произведения с неустойчивым по Ляпунову глобальным аттрактором.

Подводя итоги, можно сказать, что достаточные условия локальной топологической типичности неустойчивости аттракторов по Ляпунову, представленные в этой работе, являются в некотором смысле низковисящими плодами, случайно до сих пор незамеченными. По-прежнему остается открытым вопрос, существуют ли в пространстве диффеоморфизмов открытые области, где все отображения имеют неустойчивые по Ляпунову аттракторы Милнора (или статистические, или минимальные). Также неизвестно, могут ли отображения с неустойчивыми аттракторами быть локально превалентны. Чтобы ответить на эти вопросы, потребуются, по-видимому, какие-то новые методы.

Что касается возможных обобщений и приложений результатов и конструкций этой работы, в первую очередь надо сказать, что результаты раздела 2 должны несложно обобщаться на случай потоков. Например, существование локально топологически типичных потоков с неустойчивыми аттракторами доказывается следующим образом. Возьмем диффеоморфизм F из области $U \in \mathrm{Diff}^r(M)$, где локально топологически типичны отображения с неустойчивыми аттракторами. Пользуясь стандартной конструкцией надстройки, получим поток на $M \times \mathbb{R}/\sim$, где под $\sim$ понимается отношение $(p, x) \sim (F(p), x + 1)$. Для близких потоков определено глобальное отображение Пуанкаре, причем если трансверсаль выбрана правильно, все отображения Пуанкаре будут принадлежать U. Аттрактором для потока является, говоря неформально, насыщение аттрактора соответствующего отображения Пуанкаре траекториями потока. Если аттрактор отображения Пуанкаре неустойчив по Ляпунову, то же верно и для аттрактора потока. Наконец, отображение, сопоставляющее потоку его отображение Пуанкаре, непрерывно и открыто, поэтому прообразом остаточного множества является остаточное множество. Отсюда можно заключить, что в окрестности построенного потока топологически типичны потоки с неустойчивыми по Ляпунову аттракторами.

Далее, П. Берже в [11] построил локально топологически типичные конечно-параметрические семейства диффеоморфизмов, для которых точкам из единичного шара в пространстве параметров соответствуют отображения с бесконечным числом стоков. Эти стоки образуются при размыкании гомоклинических касаний неподвижного седла, а точнее говоря, одного из конечного числа неподвижных седел. Можно показать, что в случае, когда стоков бесконечное число, конструкция Берже гарантирует, что они накапливаются к седлу, а затем при помощи леммы о захвате, либо модификации конструкции добиться того, чтобы неустойчивые многообразия неподвижных седел пересекались с бассейнами стоков. Таким образом можно получить локально топологически типичные конечно-параметрические семейства диффеоморфизмов, в которых единичный шар в пространстве параметров соответствует диффеоморфизмам с неустойчивыми по Ляпунову аттракторами.

7 Список литературы

[1] *Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П.* Теория бифуркаций // Динамические системы – 5. М.:ВИНИТИ, 1986. (Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления ; 5). С. 5–218.

[2] *Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П.* О существовании областей Ньюхауса в окрестности систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре (многомерный случай) // Доклады Акад. Наук. 1993. Т. 329, № 4, С. 404–407.

[3] *Городецкий А.С.* Иерархия аттракторов для диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме А. // Вестн. Моск. ун-та. 1996. № 1. С. 84–86.

[4] *Кудряшов Ю.Г.* Костистые аттракторы // Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44, № 3. С. 73–76.

[5] *Плыкин Р.В.* Источники и стоки A-диффеоморфизмов поверхностей // Матем. сб. 1974. Т. 94(136), № 2(6). С. 243–264.

[6] *Ильяшенко Ю.С., Шилин И.С.* Условно неустойчивые аттракторы // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 91–100.

[7] *Окунев А.В., Шилин И.С.* О ступенчатых косых произведениях над сдвигом Бернулли с одномерным слоем. Статья подана в Известия РАН 31.03.16.

[8] *Шилин И.С.* Неустойчивые по Ляпунову аттракторы Милнора. // Доклады Акад. Наук. 2016. Т. 469. № 3. С. 287–290.

[9] *Arbieto A., Obata D.* On attractors and their basins // Involve. 2015. V. 8, № 2. Pp. 195–209.

[10] *Asaoka M.* Hyperbolic sets exhibiting C^1-persistent homoclinic tangency for higher dimensions // Proc. Amer. Math. Soc. 2008. V. 136, № 2. Pp. 667–686.

[11] *Berger, P.* Generic family with robustly infinitely many sinks. arXiv:1411.6441, 2014. URL: http://arxiv.org/abs/1411.6441 (дата обращения: 12.05.16).

[12] *Bonatti C.* Towards a global view of dynamical systems, for the C^1-topology // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 2011. V. 31, №04. Pp. 959–993.

[13] *Bonatti C., Díaz L., Pujals E.R.* A C^1-generic dichotomy for diffeomorphisms: weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources // Ann. of Math. 2003. V. 158. Pp. 355–418.

[14] *Bonatti C., Díaz L.R., Viana M.* Dynamics beyond uniform hyperbolicity. A global geometric and probabilistic perspective. Berlin: Springer-Verlag, 2005. xviii+384 pp. (Encyclopaedia of Mathematical Sciences ; 102. Mathematical Physics ; III).

[15] *Bonatti C., Li M., Yang D.* On the existence of attractors // Trans. Amer. Math. Soc. 2013. V. 365, № 3. Pp. 1369–1391.

[16] *Bowen R.* Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms. Berlin: Springer-Verlag, 1975. (Lect. notes in Math. ; V. 470).

[17] *Bowen R.* A horseshoe of positive measure // Inventiones math. 1975. V. 29, № 3. Pp. 203–204.

[18] *Crovisier S.* Dynamics of C^1-diffeomorphisms: global description and prospects for classification. arXiv:1405.0305, 2014. URL: http://arxiv.org/abs/1405.0305 (дата обращения: 10.03.16).

[19] *Carballo C.M., Morales C.A., Pacifico M.J.* Homoclinic classes for generic C^1 vector fields // Ergod. Th. & Dynam. Sys. 2003. V. 23, № 2, 403–415.

[20] *Franks J.* Necessary conditions for the stability of diffeomorphisms // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 158, № 2. Pp. 301–308.

[21] *Furstenberg H.* Noncommuting random products // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 108, Pp. 377–428.

[22] *Gorodetski A., Ilyashenko Yu.* Minimal and strange attractors // Internat. J. Bifur. Chaos. 1996. V.6, № 6. Pp. 1177–1183.

[23] *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1985.

[24] *Ilyashenko Yu.* Minimal Attractors // EQUADIFF 2003. World Scientific Publ., 2005. Pp. 421-428.

[25] *Katok A., Hasselblatt B.* Introduction to the modern theory of dynamical systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[26] *Kleptsyn V., Volk D.* Physical measures for nonlinear random walks on interval // Mosc. Math. J. 2014. V. 14, № 2, Pp. 339–365.

[27] *Milnor J.* On the concept of attractor. // Comm. Math. Phys. 1985. V. 99. Pp. 177–195.

[28] *Morales C., Pacifico M.* Lyapunov stability of ω-limit sets. // Disc. Cont. Dyn. Sys. 2002. V. 8, № 3. Pp. 671–674.

[29] *Munkres J.* Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms // Ann. of Math. 1960. V. 72. Pp. 521–554.

[30] *Newhouse S.* Non-density of Axiom A(a) on S^2 // Global Analysis. Proc. Symp. in Pure Math. Vol. XIV. A.M.S., 1970. Pp. 191–203.

[31] *Newhouse S.* Diffeomorphisms with infinitely many sinks // Topology. 1974. V. 13. Pp. 9–18.

[32] *Newhouse S.* The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 1979. V. 50. Pp. 101–151.

[33] *Newhouse S.* Lectures on dynamical systems // Dynamical Systems. Berlin: Springer-Verlag, 2010. (Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Ed. Liguori, Napoli & Birkhäuser, 1980). Pp. 209–312.

[34] *Newhouse S.* New phenomena associated with homoclinic tangencies // Ergod. Th. Dynam. Systems. 2004. V. 24, № 5. Pp. 1725–1738.

[35] *Pacifico M.J., Vieitez J. L.* On measure expansive diffeomorphisms // Proc. Amer. Math. Soc. 2015. V. 143, № 2. Pp. 811–819.

[36] *Palis J.* On the C^1 Ω-stability conjecture // Publications Mathématiques de l'I.H.É.S. 1987. T. 66. P. 211–215.

[37] *Palis J., Viana M.* High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many periodic attractors // Ann. of Math. 1994. V. 140, № 1. Pp. 207–250.

[38] *Palis J., Takens F.* Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics ; 35).

[39] *Qiu H.* Existence and Uniqueness of SRB Measure on C^1 Generic Hyperbolic Attractors // Commun. Math. Phys. 2011. V. 302. Pp. 345–357.

[40] *Robinson C., Young L.S.* Nonabsolutely continuous foliations for an Anosov diffeomorphism // Inventiones Math. 1980. V. 61. Pp. 159–176.

[41] *Ruelle D.* A measure associated with Axiom A attractors // Amer. J. Math. 1976. V. 98, № 3. Pp. 619–654.

[42] *Shilin I.* Locally topologically generic diffeomorphisms with Lyapunov unstable Milnor attractors. Препринт. arXiv:1604.02437, 2016. URL: https://arxiv.org/abs/1604.02437 (дата обращения: 11.04.2016).

[43] *Sternberg S.* On the Structure of Local Homeomorphisms of Euclidean n-Space, II. // Amer. J. Math. 1958. V. 80, № 3. Pp. 623–631.

[44] *Tatjer J.C., Simó C.* Basins of attraction near homoclinic tangencies // Ergod. Th. Dynam. Systems. 1994. V. 14, № 2. Pp. 351–390.