

**Отзыв официального оппонента о диссертации И. С. Шилина
“Аттракторы Милнора и их устойчивость”, представленной на
соискание ученой степени кандидата физико-математических
наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные
уравнения, динамические системы и оптимальное управление**

В диссертации Ивана Шилина изучается вопрос устойчивости по Ляпунову аттракторов Милнора. Понятие аттрактора описывает множество, к которому притягиваются все или хотя бы многие траектории. В случае аттрактора Милнора предполагается, что к нему притягиваются почти все (по отношению к некоторой инвариантной мере) траектории.

Априори непонятно как часто аттракторы Милнора устойчивы по Ляпунову. С одной стороны следует ожидать, что аттракторы устойчивы, поскольку притягивают большинство траекторий. С другой стороны в определении не указано, что к аттрактору притягиваются все траектории, поэтому логично ожидать, что будет “небольшое” множество траекторий не удовлетворяющих условиям устойчивости. Ситуация усугубляется тем, что достаточно легко построить пример аттрактора Милнора, у которого почти все траектории покидают его малую окрестность. В диссертации изучается сколь типична (в различных смыслах) эта ситуация.

Актуальность диссертационной темы

Понятия аттрактора и устойчивости по Ляпунову играют важную роль как в качественной теории динамических систем так и в приложениях. Установление связей между ними несет большой интерес. В диссертации рассмотрен широкий класс аттракторов. В последнее время понятие C^1 -типичности и косых произведений стали играть все большую и большую роль в современной теории динамических систем. Именно в этом контексте автор и проводит свои исследования. Таким образом тема диссертации, безусловно, актуальна.

Научная новизна и оригинальность

В диссертации установлены новые взаимосвязи между широким классом аттракторов и устойчивостью по Ляпунову. Результаты носят неожиданный характер. Используемая техника нова и оригинальна. Научный ин-

терес представляют как результаты сами по себе так и используемая техника, особое внимание следует уделить лемме о захвате.

Краткое содержание работы

Во введении автор приводит все необходимые определения и краткую историю вопроса. Так же автор приводит краткое содержание диссертации, включая формулировки основных теорем. Это существенно упрощает чтение работы. Среди прочего автор формулирует 4-ре основных свойства аттрактора, активно используемые в дальнейшем:

1. аттрактор существует для любого отображения из рассматриваемого класса,
2. аттрактор замкнут,
3. аттрактор содержится в неблуждающем множестве,
4. любой гиперболический сток содержится в аттракторе.

Глава 2 посвящена доказательству первого основного результата диссертации: Теорема А, которая неформально может быть сформулирована следующим образом: в области Ньюхауса, относящейся к “сильно” сжимающему периодическому седлу у C^1 -типичного диффеоморфизма аттрактор Милнора неустойчив по Ляпунову.

Центральную роль в доказательстве играет Лемма о захвате (Лемма С), утверждающая, что в малой окрестности диффеоморфизмов с гомоклиническим касанием очень часто встречаются диффеоморфизмы, у которых неустойчивое многообразие периодической точки пересекается с бассейном притяжения стока. Это технически самое сложное утверждение доказательства.

В **главе 3** автор развивает результаты и технику предыдущей главы и доказывает следующую дихотомию для гомоклинических классов C^1 -типичного диффеоморфизма F :

- наличие расщепления с доминированием (dominated splitting)
- или аттрактор Милнора неустойчив по Ляпунову для F или F^{-1} .

Этот результат следует духу знаменитой статьи Бонатти, Диаз, Пужале [Ann. Math. 2003 (158) 355–418]. Отметим, что в доказательстве используется очень существенное усиление леммы о захвате, которое еще более сложно доказывается.

Следует отметить очень высокий, выдающийся уровень Теоремы В.

В главе 4 автор изучает аттракторы Милнора Ω -устойчивых диффеоморфизмов. В Теореме Е доказано, что для C^1 -типичного Ω -устойчивого диффеоморфизма аттрактор Милнора есть объединение притягивающих гиперболических базисных множеств. Этот результат развивает результаты Городецкого, полученные для C^2 -диффеоморфизмов.

В главе 5 автор описывает аттрактор Милнора в двух важных классах косых произведений (Теоремы G, I). Следует отметить, что косые произведения в последние годы стали полигоном для изучения свойств неравномерно гиперболических систем. В особенности, они являются источником контрпримеров. Поэтому описание аттракторов косых произведений играет важную роль в теории динамических систем.

В заключении автор дает очень краткое описание результатов в высоком литературном стиле и описывает возможные направления дальнейшего развития этой тематики.

Обоснованность научных положений, выводов и рекомендаций

Все результаты снабжены подробными доказательствами, достоверность которых не вызывает сомнений.

Основные результаты своевременно опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных журналов и изданий. Автореферат соответствует содержанию работы.

Рекомендации по дальнейшей разработке и внедрению

Результаты и методы приведенные в диссертации Ивана Шилина могут быть использованы в фундаментальных и прикладных исследованиях в теории динамических систем. Они могут быть использованы в работе следующих научных институтов и университетов: МИАН, ПОМИ, Московский государственный университет, Санкт-Петербургский Госу-

дарственный Университет, Нижегородский Государственный Университет, Высшая Школа Экономики и многих других.

Некоторые замечания

1. В главе 4 автор часто называет Ω -устойчивые диффеоморфизмы “гиперболическими”. Такой жаргон действительно часто употребляется в общении, но затрудняет общее прочтение текста.
2. В формулировке Теоремы G автор использует оборот “в условиях теоремы Клепцына-Волка”. При этом эти условия нигде в диссертации не сформулированы. Это не нарушает математической строгости, но затрудняет прочтение.
3. Также в диссертации есть ряд незначительных опечаток, не сказывающихся на строгости и общем восприятии: стр. 23 должно быть включение $y \in [-r_\nu, r_\nu)$, стр. 27 AU следует заменить на YA .

Эти недостатки не влияют на общую положительную оценку диссертации.

Резюме

Диссертация И. С. Шилина представляет собой научную квалификационную работу по теории аттракторов и типичности, содержащую решение нескольких важных задач теории динамических систем, разработку новых оригинальных методов исследования.

Тема диссертации соответствует специальности 01.01.02, по которой она представлена к защите.

Считаю, что диссертация И.С. Шилина “Аттракторы Милнора и их устойчивость” несомненно удовлетворяет требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор заслуживает присвоения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Доктор физ.-мат. наук,
доцент программы “Математика”,
Университетская наб., 7/9, Санкт-Петербург
s.tikhomirov@spbu.ru, +79213387396,
С. Б. Тихомиров +7(812)3282000

spbu@spbu.ru

ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Личную подпись заверяю
Начальник отдела кадров №3
Н. И. МАШТЕПА



Документ подготовлен
в порядке исполнения
трудовых обязанностей