

ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации
Шилина Ивана Сергеевича

«Аттракторы Милнора и их устойчивость»,

представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические
системы и оптимальное управление

Диссертация И.С. Шилина посвящена изучению введенных в 1985 г. Дж. Милнором типов аттракторов итераций гладких диффеоморфизмов. Известно, что к настоящему времени имеются несколько различных неэквивалентных понятий аттрактора – инвариантного множества динамической системы, к которому притягиваются траектории всех или почти всех точек из окрестности этого множества. Тип глобальных аттракторов Милнора является весьма общим, т.к. допускает существование траекторий, у которых ω -предельное множество не принадлежит аттрактору, но множество таких траекторий должно иметь нулевую лебегову меру (порожденную, например, римановой метрикой). Ввиду возможного присутствия таких «плохих» траекторий понятно, что эти аттракторы могут быть устроены весьма сложно и вопрос о том, насколько сложной является динамика на аттракторе и вблизи него представляется весьма интересным. Поэтому тема диссертации несомненно актуальна, она дает возможность ставить новые вопросы, связанные со сложностью поведения динамической системы. Следует отметить, что различные аспекты поведения системы на самом аттракторе Милнора и около него давно изучаются в работах научного руководителя диссертанта и его учеников. Кроме того, тема диссертации тесно связана с другим направлением исследований в теории динамических систем, которое началось с работ Ньюхауса локальной плотности систем с гомоклиническим касанием и локальной типичности систем с бесконечным множеством стоков (источников) в пространстве динамических систем. Исследование гомоклинических касаний и рождения бесконечного множества стоков также восходит к работам Гаврилова-Шильникова, затем было продолжено в работах Палиса-Такенса и сейчас является одной из основных тем в теории динамических систем, в частности, в школе Шильникова (Гонченко, Тураев).

Диссертация И.С. Шилина состоит из введения, четырех разделов (их можно было бы назвать главами), заключения, списка литературы из 44 наименований и содержит 81 страницу. Во введении даются основные определения, постановки задач, кратко описываются имеющиеся к настоящему времени результаты и даются формулировки основных результатов диссертации, а также приводятся данные о публикациях и публичном представлении ее результатов на конференциях и семинарах.

Первый раздел диссертации посвящен доказательству локальной топологической типичности систем с неустойчивыми по Ляпунову аттракторами Милнора. Построение открытого множества в пространстве диффеоморфизмов соответствующей гладкости, в котором доказывалось существование бэровского множества диффеоморфизмов с неустойчивыми аттракторами Милнора, опирается на явление Ньюхауса и использует устойчивое существование 2-сжимающих седел с гомоклиническим касанием. Эта глава является наиболее объемной и занимает более половины текста диссертации. Связано это с довольно тонкими построениями т.н. «леммы о захвате», позволяющей получать из данного 2-сжимающего седла с гомоклиническим касанием связанное с ним гетероклинической связью другое сильно 2-сжимающее седло со специальным гомоклиническим касанием, при разрушении касания для которого доказывалось, что его неустойчивое многообразие (кривая) пересекает область притяжения устойчивой периодической точки, возникающей при разрушении гомоклинической траектории. Наличие такого пересечения препятствует устойчивости по Ляпунову аттрактора Милнора соответствующего диффеоморфизма.

Во втором разделе, опираясь на известный результат Бонатти-Диаса-Пужалса о дихотомии C^1 -типичных диффеоморфизмов, а именно: гомоклинический класс такого диффеоморфизма либо допускает расщепление с доминированием, либо принадлежит замыканию бесконечного множества устойчивых или неустойчивых периодических точек, автор доказывает такую альтернативу: C^1 -типичный диффеоморфизм либо допускает расщепление с доминированием, либо имеет неустойчивый по Ляпунову аттрактор Милнора или неустойчивый по Ляпунову репеллер Милнора для обратных итераций. Конструкции здесь похожи на конструкции предыдущего раздела и опираются на возможность получения стока из точки гомоклинического класса некоторого диссипативного седла, если гомоклинический класс не допускает расщепления с доминированием, но используют другие методы (лемму Франкса и результат Бонатти-Диаса-Пужалса), а также другой вариант леммы о захвате.

Третий раздел диссертации посвящен доказательству теоремы о том, что для C^1 -типичного Ω -устойчивого диффеоморфизма его аттрактор Милнора просто совпадает с объединением притягивающих базисных множеств. Тонкость здесь в том, что рассматривается типичность в C^1 -топологии, т.к. для C^2 -топологии это следует из результатов Боуэна и Рюэля. Поскольку на компактном многообразии множество C^2 -диффеоморфизмов плотно в пространстве C^1 -диффеоморфизмов, то нужный результат получается применением одной теоремы Н. Циу и доказательством некоторой леммы о полунепрерывности. Кроме этой теоремы, в третьем разделе дается обсуждение нерешенных вопросов о взаимоотношении аттрактора Милнора

и базисных множеств в том случае, когда условия типичности для гиперболического диффеоморфизма нарушаются.

Четвертый раздел диссертации посвящен изучению аттракторов Милнора специальных динамических систем, называемых ступенчатыми косыми произведениями над транзитивной марковской цепью со слоем отрезок или окружность. Этот класс отображений был введен и изучался в работах Ильяшенко и его учеников. Он представляет несомненный интерес, т.к. позволяет строить отображения с различными интересными, часто неожиданными, свойствами. В диссертации получены два результата для таких систем. Первый из них описывает аттрактор Милнора в случае типичного ступенчатого косоугольного произведения, когда справедлива теорема Волка-Клепцына, описывающая структуру таких систем. Фазовое пространство системы распадается на конечное число поглощающих и притягивающих «полос», в притягивающей полосе максимальным аттрактором является график некоторой измеримой, определенной почти всюду функции, дополненный отрезками над некоторым множеством меры нуль. Кстати, такие инвариантные множества встречаются и для косых произведений над иррациональным сдвигом окружности со слоем окружность (Лерман). Доказано, что в случае Волка-Клепцына аттрактор Милнора совпадает с замыканием графика этой функции в каждой поглощающей полосе. Другой результат для ступенчатых косых произведений – построение примера ступенчатого косоугольного произведения с явно указанными свойствами, для которого аттрактор Милнора неустойчив.

В кратком заключении дается обсуждение возможных направлений дальнейших исследований.

В целом работа производит хорошее впечатление: автор хорошо владеет материалом, умеет применять достаточно разработанные технические средства теории динамических систем, дифференциальной топологии, теории меры. Доказательства теорем весьма нетривиальны, местами даже изоцены, опираются на большой фактический материал, проводятся с достаточными деталями и не вызывают сомнений. Результаты диссертации являются новыми, интересными, они своевременно опубликованы в журналах из списка ВАК и неоднократно обсуждались на различных конференциях и семинарах.

Тем не менее, имеются замечания. К недостаткам диссертационной работы И.С. Шилина я бы отнес некоторую поспешность изложения и апелляцию к результатам, про которые сам автор пишет: «не сформулирован в виде отдельного предложения». Объем диссертации позволил бы дать более развернутые формулировки и обсуждения, что улучшило бы изложение. Читатель, в частности – оппонент, вынужден искать статьи в иностранных журналах (что не совсем просто), искать там нужный результат

и сравнивать его с тем, на что ссылается автор. И так делается в нескольких местах. Другие, более мелкие недостатки, из той же серии: на стр. 39 подпись приведена на английском языке. В некоторых местах ссылки на нужные результаты даются не на исходные работы, например, ренормализация для гомоклинического касания впервые сделана не у Палиса-Такенса. Также можно указать, что представление текста диссертации могло бы быть сделано более качественно: нужно было сделать четкое разделение по главам, нумерацию утверждений, замечаний и пр. сделать не сплошной, а по главам, что смотрелось бы лучше, и т.д.

Однако эти недостатки не являются критическими и не искажают общего благоприятного впечатления от работы. Диссертация И.С. Шилина является законченной научно-исследовательской работой, выполненной автором самостоятельно на достаточно высоком научном уровне. Полученные автором результаты достоверны, выводы и заключения обоснованы. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Все вышеизложенное позволяет заключить, что диссертационная работа Шилина Ивана Сергеевича «Аттракторы Милнора и их устойчивость» отвечает требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней», а ее автор Шилин Иван Сергеевич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент,
профессор кафедры дифференциальных
уравнений, математического и численного
анализа Нижегородского национального
исследовательского государственного
университета им. Н.И. Лобачевского,
доктор физико-математических наук,
профессор


Лев Михайлович
Лерман

22.11.2016

Телефон: (831) 462-33-63
e-mail: lermanl@mm.unn.ru

Подпись официального оппонента заверяю:

Ученый секретарь ННГУ  Л.Ю. Черноморская

