МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
кафедра теории функций и функционального анализа

На правах рукописи

УДК 517.982.256

Чеснокова Ксения Васильевна

КОЭФФИЦИЕНТ ЛИНЕЙНОСТИ МЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	**Бородин Петр Анатольевич**, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Балашов Максим Викторович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ФГАОУ ВПО "Московский физико-технический институт (государственный университет)"
	Дружинин Юрий Юрьевич, кандидат физико-математических наук преподаватель математики в ГБОУ "Лицей № 1158" г. Москвы
Ведущая организация:	ФГБУН **"Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук"**

Защита диссертации состоится 9 декабря 2016 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе ФГБОУ ВО "Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова", по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО "МГУ имени М. В. Ломоносова" по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А и на сайте механико-математического факультета http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi

Автореферат разослан   октября 2016 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 на базе МГУ
доктор физико-математических
наук, профессор **В. В. Власов**

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена вопросам теории приближений в нормированных пространствах, которые связаны с коэффициентом линейности оператора метрического проектирования на подпространство.

Актуальность темы. Пусть X — нормированное пространство, M — непустое подмножество X, $\rho(x, M) := \inf\{\|x-y\| : y \in M\}$ — расстояние от элемента $x \in X$ до M. Множество $P_M(x) = \{y \in M : \|x - y\| = \rho(x, M)\}$ называется множеством ближайших к x элементов из M, или *метрической проекцией* элемента x на M. Множество M называется *множеством существования*, если для любого $x \in X$ множество $P_M(x)$ содержит хотя бы один элемент, и *множеством единственности*, если для любого $x \in X$ множество $P_M(x)$ состоит из не более чем одного элемента. Если M является одновременно и множеством существования и множеством единственности, то есть для любого $x \in X$ в M существует ровно один элемент наилучшего приближения $P_M(x)$, то M называется *чебышевским*[1] множеством. Оператор $P_M : x \to P_M(x)$ $(x \in X)$ называется *оператором метрического проектирования.*

Теория приближений в нормированных пространствах, или геометрическая теория приближений, берет свое начало в классической работе П.Л.Чебышева[2], в которой, в частности, доказана однозначность метрической проекции на множество P_n алгебраических многочленов степени не выше n и множество R_{mn} рациональных функций со степенью числителя не выше m и степенью знаменателя не выше n в пространстве $C[a, b]$ действительнозначных функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. В этой же работе П.Л.Чебышев описал оператор метрического проектирования на множества P_n и R_{mn} (теорема об альтернансе).

В дальнейшем геометрические вопросы теории приближений в пространстве C изучались А.Хааром (1918), А.Н.Колмогоровым (1948), Е.Я.Ремезом (1953).

Окончательное становление геометрической теории приближений как самостоятельной ветви теории приближений произошло в 60-е годы прошлого века благодаря работам, в первую очередь, В. Кли, Н.В. Ефимова и С.Б. Стечкина, а затем В.И. Бердышева, Л.П. Власова, А.Л. Гаркави, Е.В. Ошмана, С.Я. Хавинсона, Е. Асплунда, А. Брауна, А. Брендстеда, Д. Вул-

---

[1] *Ефимов Н. В., Стечкин С. Б.* Некоторые свойства чебышевских множеств // ДАН СССР, **118**:1 (1958), 17–19.

[2] *Чебышев П.Л.* Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций // 1859. в кн.: Чебышев П.Л. Полн. собр. соч., Т.2, М.-Л., АН СССР, 1947, 151–235.

берта, Ф. Дойча, И. Зингера, Б. Крипке, Дж. Линденштраусса, П. Морриса, Т. Ривлина, У. Рудина, Р. Фелпса, Р. Холмса, Э. Чини, М. Эдельштейна и др.

В дальнейшем исследования по геометрической теории приближений в нашей стране вели главным образом представители научной школы С.Б. Стечкина: А.Р. Алимов, П.В. Альбрехт, В.И. Андреев, В.С. Балаганский, А.А. Васильева, В.И. Иванов, М.И. Карлов, С.В. Конягин, В.А. Кощеев, Е.Д. Лившиц, Ю.В. Малыхин, А.В. Маринов, К.С. Рютин, Г.Ф. Устинов, И.Г. Царьков и др., а также М.В. Балашов, П.А. Бородин, С.И. Дудов, Г.Е. Иванов, Е.М. Семенов, В.П. Фонф и многие другие математики.

В современном понимании геометрическая теория приближений изучает взаимосвязи между различными аппроксимативными свойствами множеств (чебышевость, единственность, существование, аппроксимативная компактность, солнечность, антипроксиминальность и т.д.) с их тополого-геометрическими свойствами (линейность, выпуклость, разного рода связность, гладкость и т.д.) при различных условиях (строгая выпуклость, равномерная выпуклость, гладкость и т.д.) на нормированное пространство.

Одно из классических направлений геометрической теории приближений — исследование свойств операторов P_Y метрического проектирования на линейные подпространства $Y \subset X$. Первичной здесь является задача описания всех чебышевских подпространств в заданном банаховом пространстве X. В случае чебышевского подпространства Y, когда оператор P_Y однозначен, исследуются свойства его самого; в случае же нечебышевского Y речь обычно идет о наличии выборок из P_Y с теми или иными свойствами.

Хорошо известно, что одновременные рефлексивность и строгая выпуклость банахова пространства необходимы и достаточны для того, чтобы все его замкнутые линейные подпространства были чебышевскими (например, такими являются пространства L_p, $1 < p < \infty$). Поэтому особый интерес представляет задача описания чебышевских подпространств в нерефлексивных пространствах (прежде всего в пространствах L_1 и C). В пространстве C конечномерные чебышевские подпространства описаны А. Хааром[3] и Дж. Мэйрхьюбером[4], а чебышевские подпространства конечной коразмерности — А.Л. Гаркави[5]. Соответствующие результаты для

[3] *Haar A.* Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen // Math. Ann., 1918, **78**:1–4, 294-311.

[4] *Mairhuber J.C.* On Haar's theorem concerning Chebyshev approximation problems having unique solutions // Proc.Amer.Math.Soc., 1956, **7**:4, 609-615.

[5] *Гаркави А.Л.* Задача Хелли и наилучшее приближение в пространстве непрерывных функций // Известия АН СССР. Сер. матем., 1967, **31**:3, 641-656.

пространства L_1 получены Р. Фелпсом[6] и А.Л. Гаркави[7]. Однако даже в самых простых нерефлексивных банаховых пространствах о чебышевских подпространствах с бесконечными размерностью и коразмерностью известно очень мало (неизвестно, существуют ли такие подпространства в пространстве $C[0,1]$ и пространстве $\mathbf{c}$ сходящихся последовательностей). Имеются и другие давно стоящие не решенные проблемы в этой области[8].

Оператор метрического проектирования P_Y на чебышевское подпространство Y бывает разрывным[9,10], бывает непрерывным, но не липшицевым (например, для подпространства $Y = \mathcal{P}_n$ многочленов степени не выше $n \geqslant 2$ в $C[0,1]$[11]), и уж совсем редко бывает линейным, как показывают теоремы Рудина–Смита[12] и Зингера[13]. Полные описания чебышевских подпространств с линейным оператором метрического проектирования в пространствах C и L_1 получены П.А. Бородиным[14]. В частности, набор чебышевских подпространств с линейным оператором метрического проектирования в пространстве $C[0,1]$ исчерпывается минимумом, необходимым для всякого банахова пространства: нулевое подпространство, все пространство и чебышевские подпространства коразмерности 1.

А. Клайн [15] доказал, что если K — бесконечный компакт, Y — чебышевское подпространство в $C(K)$ с $2 \leqslant \dim Y < \infty$, то оператор метрического проектирования P_Y не является липшицевым. В случае же одномерного чебышевского подпространства В.И. Бердышев[16] доказал липшицевость оператора метрического проектирования.

Для подпространства существования Y банахова пространства X

---

[6] *Phelps R.R.* Chebyshev subspaces of finite dimension in L_1 // Proc.Amer.Math.Soc., 1966, **17**:3, 646-652.

[7] *Гаркави А.Л.* Характеристика чебышевских подпространств конечной коразмерности в L_1 // Матем. заметки, 1970, **7**:2, 155-163.

[8] *Гаркави А.Л.* Теория наилучшего приближения в линейных нормированных пространствах // Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал. 1967, ВИНИТИ, М., 1969, 75-132.

[9] *Cheney E.W., Wulbert D.E.* The existence and unicity of best approximation // Math. Scand., 1969, **24**:1, 113-140.

[10] *Singer I.* Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces. Acad. SRR, Bucharest; Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[11] См., например, Изложение лекций С.Б. Стечкина по теории приближений. Изд-во УрО РАН, Екатеринбург, 2010.

[12] *Rudin W., Smith K.T.* Linearity of best approximation: a characterization of ellipsoids // Indagationes Mathematicae, 1961, **23**:1, 97-103.

[13] *Singer I.* Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces. Acad. SRR, Bucharest; Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[14] *Бородин П.А.* О линейности оператора метрического проектирования на чебышевские подпространства в пространствах L_1 и C // Матем. заметки, 1998, **63**:6, 812-820.

[15] *Cline A.K.* Lipschitz conditions on uniform approximation operators // J. Approx. Theory, 1973, **8**:2, 160-172.

[16] *Бердышев В.И.* Метрическая проекция на конечномерные подпространства из C и L // Матем. заметки, 1975, **18**:4, 473-488.

Ф. Дойч, В. Ли, С. Парк[17] доказали, что многозначный оператор P_Y липшицев тогда и только тогда, когда P_Y равномерно непрерывен (относительно хаусдорфова расстояния), и получили условия, необходимые или достаточные для существования липшицевой выборки из P_Y. Следующий результат, отмеченный в той же работе, является простым следствием теорем Й. Линденштраусса и Л. Цафрири: если рефлексивное банахово пространство X не изоморфно гильбертову пространству, то в X есть подпространство Y, для которого оператор P_Y не имеет липшицевой выборки.

В частности, в каждом из пространств $L_p[0,1]$, $p \in (1,2) \cup (2,\infty)$, должно быть подпространство с нелипшицевым оператором метрического проектирования. Такое подпространство (именно, подпространство констант) было обнаружено П.В. Альбрехтом[18]. Ю.Ю. Дружинин[19] доказал, что в пространстве $L_p(M,\Sigma,\mu)$, $p > 1, p \neq 2$, оператор P_Y нелипшицев для одномерных подпространств, порожденных функциями, носители которых содержат безатомную часть положительной меры.

Свойствам оператора метрического проектирования на чебышевские подпространства посвящены также работы П. Морриса[20,21], Р. Холмса и Б. Крипке[22], Ж.-П. Кахана[23], П.-К. Лина[24], В. Ли[25], Ф. Дойча и В. Ли[26], М. Бартельта и В. Ли[27], А.Л. Гаркави[28,29], А.В. Маринова[30],

---

[17] *Deutsch F., Li W., Park S.-H.* Characterization of continuous and Lipschitz continuous metric selections in normed linear spaces // J. Approxim. Theory, 1989, **58**:3, 297-314.

[18] *Альбрехт П.В.* Порядки модулей непрерывности операторов почти наилучшего приближения // Матем. сб., 1994, **185**:9, 3-25.

[19] *Дружинин Ю.Ю.* Свойства операторов метрического проектирования и выборок из чебышевских центров в банаховых пространствах : дисс. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01; [Место защиты: Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова]. - Москва, 2013. - 70 с.

[20] *Morris P.D.* Metric projections onto subspaces of finite codimension // Duke Math. J., 1968, **35**:4, 799-808.

[21] *Morris P.D.* Chebyshev subspaces of L_1 with linear metric projection // J. Approx. Theory, 1980, **29**:3, 231-234.

[22] *Holmes R., Kripke B.* Smoothness of approximation // Michigan Math. J., 1968, **15**:2, 225-248.

[23] *Kahane J.-P.* Best approximation in $L^1(T)$ // Bull. Amer. Math. Soc., 1974, **80**:5, 788-804.

[24] *Pei-Kee Lin.* Remarks on linear selections for the metric projection // J. Approx. Theory, 1985, **43**:1, 64-74.

[25] *Li W.* Lipschitz continuous metric selections in $C_0(T)$ // SIAM J. Math. Anal., 1990, **21**:1, 205-220.

[26] *Deutsch F., Li W.* Strong uniqueness, Lipschitz continuity, and continuous selections for metric projections in L_1 // J. Approx. Theory, 1991, **66**:2, 198-224.

[27] *Bartelt M., Li W.* Characterization of Generalized Haar Spaces // J. Approx. Theory, 1998, **92:**1, 101-115.

[28] *Гаркави А.Л.* Теория наилучшего приближения в линейных нормированных пространствах // Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал. 1967, ВИНИТИ, М., 1969, 75-132.

[29] *Гаркави А.Л., Шматков В.А.* О точке Ламе и ее обобщениях в нормированном пространстве // Матем. сб., 1974, **95(137)**:2(10), 272-293.

[30] *Маринов А.В.* О равномерных константах сильной единственности в чебышевских приближениях и основополагающих результатах Н. Г. Чеботарева // Изв. РАН. Сер. матем., 2011, **75**:3, 61–188 .

Ю.Ю. Дружинина[31] и др.

Удобным инструментом для исследования липшицевости и линейности оператора метрического проектирования на чебышевское подпространство оказался введенный П.А. Бородиным коэффициент линейности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Коэффициентом линейности* оператора метрического проектирования P_Y на чебышевское подпространство $Y \subset X$ называется величина

$$\lambda(P_Y) = \inf \left\{ \frac{\rho(q_1 + q_2, Y)}{\|q_1 + q_2\|} : q_1 + q_2 \neq 0, q_1, q_2 \in Q(Y) \right\},$$

где $Q(Y) = \{q : P_Y(q) = 0\}$ — *квазиортогональное* множество к подпространству Y.

Связь между величиной коэффициента линейности и липшицевостью оператора P_Y показывает

ТЕОРЕМА А [32]. *Для любого чебышевского подпространства Y справедливы следующие утверждения:*

(1) $0 \leqslant \lambda(P_Y) \leqslant 1$, $\lambda(P_Y) = 1$ *тогда и только тогда, когда оператор P_Y линеен;*

(2) *если оператор P_Y удовлетворяет условию Липшица с константой k: $\|P_Y(x_1) - P_Y(x_2)\| \leqslant k\|x_1 - x_2\|$ $(x_1, x_2 \in X)$, то $\lambda(P_Y) \geqslant \frac{1}{k+1}$;*

(3) *если $\lambda(P_Y) > 0$, то P_Y удовлетворяет условию Липшица с константой $k = \frac{1}{\lambda(P_Y)} + 1$.*

Таким образом, $\lambda(P_Y) = 0$ тогда и только тогда, когда оператор P_Y не является липшицевым.

Неравенства в утверждениях (2) и (3) этой теоремы, связывающие коэффициент линейности $\lambda(P_Y)$ и липшицеву константу $k = k(P_Y)$, могут оба обращаться в равенства.

Кроме того, П.А. Бородин доказал, что как в действительном пространстве $C[K]$ непрерывных функций на хаусдорфовом компакте K, так и в действительном пространстве L_1 суммируемых функций для всякого чебышевского подпространства Y имеет место либо равенство $\lambda(P_Y) = 1$, либо неравенство $\lambda(P_Y) \leqslant 1/2$ (причем в обоих пространствах последнее неравенство является точным).

---

[31] *Дружинин Ю.Ю.* О линейности оператора метрического проектирования на подпространства в пространствах L_p // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1 Матем. Мех., 2010, 1, 30-36.

[32] *Бородин П.А.* Коэффициент линейности оператора метрического проектирования на чебышевское подпространство // Матем. заметки, 2009, **85**:2, 180-188.

В случае пространства $C[K]$ с бесконечным K для конечномерных чебышевских подпространств Y размерности не меньше 2 можно утверждать даже равенство $\lambda(P_Y) = 0$: еще в 1973 г. А. Клайн[33] доказал, что у таких подпространств оператор P_Y не липшицев.

Для одномерных чебышевских подпространств $Y \subset C[K]$ это уже неверно, и в I главе диссертации коэффициент $\lambda(P_Y)$ для таких подпространств вычислен точно через специальные характеристики порождающей функции; показано также, что он может принимать все значения из промежутка $(0; 1/2]$. В качестве следствия получены оценки константы Липшица оператора P_Y для таких Y. Эти оценки уточняют результаты В.И. Бердышева[34].

Именно исследование липшицевости оператора метрического проектирования или выборок из него может служить основным приложением коэффициента линейности.

Во II главе диссертации коэффициент линейности применяется к исследованию существования липшицевых выборок из отображения Штейнера. При этом теорема A обобщается на выборки из оператора метрического проектирования.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — элементы банахова пространства X. Множество $\mathrm{St}(x_1, \ldots, x_n) = \left\{ s \in X \colon \sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k - s\| = \inf_{x \in X} \sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k - x\| \right\}$ называется множеством Штейнера набора $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Всякий элемент этого множества называется точкой Штейнера. *Отображение Штейнера* St_n есть отображение пространства $X \oplus \cdots \oplus X$ (n раз) с нормой $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i\|$ в пространство 2^X подмножеств пространства X, сопоставляющее набору $\{x_1, \ldots, x_n\}$ множество $\mathrm{St}(x_1, \ldots, x_n)$.

В случае гильбертова пространства $X = H$ точка Штейнера для всякого набора x_1, x_2, x_3 существует и единственна [35]: она лежит в плоскости точек x_1, x_2, x_3 и либо совпадает с одной из них (если в треугольнике $x_1x_2x_3$ есть угол, не меньший $120°$), либо совпадает с точкой Торричелли (из которой все стороны треугольника видны под углом $120°$).

В бесконечномерном банаховом пространстве X уже для трехточечных наборов M_3 множества $\mathrm{St}(M_3)$ могут быть пустыми. Первый пример та-

[33] *Cline A.K.* Lipschitz conditions on uniform approximation operators // J. Approx. Theory, 1973, **8**:2, 160-172.

[34] *Бердышев В.И.* Метрическая проекция на конечномерные подпространства из C и L // Матем. заметки, 1975, **18**:4, 473-488.

[35] См., например, *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? РХД, М.; Ижевск, 2001, гл. 7, § 5

ких X и M_3 построил А.Л. Гаркави[36] в 1974 г. Имеются и другие примеры[37,38,39,40].

В диссертации рассматриваются только такие пространства X, в которых множества $\mathrm{St}(x_1, \ldots, x_n)$ непусты для всякого набора $\{x_1, \ldots, x_n\}$, в основном конечномерные или рефлексивные пространства. Основным предметом исследования является вопрос о существовании липшицевой выборки из отображения St_n при фиксированном $n \geqslant 3$. Отправной точкой для этого исследования послужила

Теорема B (Ж.-П. Кахан, 1974)[41]. *Для отображения Штейнера в евклидовой плоскости выполнено:*

(*a*) (*однозначное*) *отображение* St_3 *удовлетворяет условию Липшица с точной константой* $2/\sqrt{3}$*;*

(*b*) *для нечетных* $n \geqslant 5$ (*однозначное*) *отображение* St_n *не липшицево.*

Во II главе диссертации пункт (a) теоремы B обобщается на произвольные гладкие строго выпуклые нормированные плоскости, пункт (b) теоремы B обобщается на некоторый класс (в том числе и бесконечномерных) банаховых пространств. Рассматривается также и случай четного n. При этом существенно используется коэффициент линейности специального оператора метрического проектирования, связанного с St_n.

Цель работы: вычисление и оценка коэффициента линейности оператора метрической проекции в различных пространствах, применение коэффициента линейности к исследованию существования липшицевых выборок из отображения Штейнера.

Научная новизна работы. Все результаты работы являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Для одномерных чебышевских подпространств в пространстве $C[K]$ вычислен коэффициент линейности оператора метрической проекции через характеристики порождающей функции. Как следствие получена но-

[36] *Гаркави А.Л., Шматков В.А.* О точке Ламе и ее обобщениях в нормированном пространстве // Матем. сб., 1974, **95(137)**:2(10), 272-293.

[37] *Veselý L.* A characterization of reflexivity in the terms of the existence of generalized centers // Extracta Mathematicae, 1993, **8**:2–3, 125-131.

[38] *Baronti M., Casini E., Papini P.L.* Equilateral sets and their central points // Rend. Mat. Appl., 1993, **13**:1, 133-148.

[39] *Papini P.L.* Two new examples of sets without medians and centers// Sociedad de Estadística e Investigación Operativa Top, 2005, **13**:2, 315-320.

[40] *Бородин П.А.* Пример несуществования точки Штейнера в банаховом пространстве// Матем. заметки, 2010, **87**:4, 514-518.

[41] *Kahane J.-P.* Best approximation in $L^1(T)$ // Bull. Amer. Math. Soc., 1974, **80**:5, 788-804.

вая оценка константы Липшица оператора.

2. Для диагональных подпространств l_1-сумм $X \oplus \cdots \oplus X$ банаховых пространств X из различных классов получены оценки коэффициента линейности (в нескольких случаях найдены точные его значения).

3. Для одномерных подпространств в пространстве l_p^n, $1 < p < \infty, p \neq 2$, исследовано поведение коэффициента линейности в зависимости от вида порождающего элемента. Как следствие получен критерий липшицевости оператора метрической проекции на одномерное подпространство в пространстве l^p, $1 < p < \infty, p \neq 2$.

4. Доказано, что на гладком строго выпуклом двумерном пространстве (однозначное) отображение Штейнера трех точек липшицево, причем условие гладкости пространства существенно.

5. В случае нечетного n доказано, что в рефлексивных локально равномерных выпуклых пространствах с локально равномерно выпуклым сопряженным (однозначное) отображение Штейнера n точек нелипшицево.

6. В случае четного n получено условие, достаточное для несуществования липшицевых выборок из отображения Штейнера n точек, а также доказано, что в конечномерном пространстве X липшицева выборка из отображения Штейнера n точек существует тогда и тогда, когда X — полиэдральное пространство.

Методы исследования. В работе используются методы функционального анализа, методы современной геометрической теории приближении, геометрии банаховых пространств, топологии.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории функций, функциональном анализе и геометрии.

Апробация работы. Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

- семинар по геометрической теории приближений в МГУ под руководством профессора П. А. Бородина (неоднократно, 2010–2016);

- семинар “Теория приближений” в МГУ под руководством профессора И. Г. Царькова, доцента А. С. Кочурова, д.ф.-м.н., научного сотрудника А. Р. Алимова и д.ф.-м.н., доцента А. А. Васильевой (2016);

- семинар по теории приближений в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук под руководством профессора С. А. Теляковского (2016);

- научный семинар кафедры высшей математики Московского физико-технического института (государственного университета) под руководством профессора Е. С. Половинкина (2016);

- семинар "Тригонометрические и ортогональные ряды" в МГУ под руководством профессора М. К. Потапова, профессора В. А. Скворцова, профессора Т. П. Лукашенко и профессора М. И. Дьяченко (2016).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях:

- школа С. Б. Стечкина по теории функций в г. Миасс (2013–2015);

- Воронежская зимняя математическая школа "Современные методы теории функций и смежные проблемы" (2015);

- XII Казанская летняя школа-конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (2015);

- XVIII Международная Саратовская зимняя школа "Современные проблемы теории функций и их приложения" (2016);

- международная конференция "Анализ, вероятность и геометрия" в МГУ (2016);

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в пяти работах автора (две из них — в журналах из перечня ВАК), список которых приведён в конце автореферата. В работах [4] и [5] опубликованы теоремы 2.5 и 2.6 диссертации. Они доказаны совместно с Б. Б. Бедновым.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы из 60 наименований. Общий объем диссертации — 78 страниц.

Краткое содержание диссертации

Во введении дан исторический обзор по тематике работы, обоснована актуальность и сформулированы цели исследования, а также изложены основные результаты диссертации.

В главе I вычисляется коэффициент линейности метрических проекций на некоторые чебышевские подпространства и, как следствие, получаются оценки на константы Липшица этих метрических проекций.

В пространстве $C[K]$ действительнозначных функций, непрерывных на хаусдорфовом компакте K, с равномерной нормой, для одномерных чебышевских подпространств (а именно подпространств $\langle\varphi\rangle \subset C[K]$, порожденных функциями φ, которые не обращаются в ноль на компакте K) получена формула для коэффициента линейности через следующие параметры функции φ:

$$\alpha := \frac{\max|\varphi| - \min|\varphi|}{\max|\varphi| + \min|\varphi|}; \quad \varepsilon := \frac{1}{\max|\varphi| + \min|\varphi|} \cdot \left(\inf_{K\setminus\{t_{\min}\}} |\varphi| - \min|\varphi| \right),$$

где $t_{\min}$ — произвольная точка минимума функции $|\varphi|$.

Теорема 1.1. *Пусть компакт K содержит не менее 3 точек, функция φ не обращается в ноль на K. Коэффициент линейности оператора метрического проектирования на подпространство $\langle\varphi\rangle$ удовлетворяет равенству*

$$\lambda(P_{\langle\varphi\rangle}) = \frac{1-\alpha+\varepsilon}{2+\varepsilon}.$$

Следствие 1.1. *Если функция φ достигает своего минимума на неодноточечной компоненте связности компакта K или в нескольких точках, в частности, если K есть отрезок действительной оси, то* $\lambda(P_{\langle\varphi\rangle}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$.

Следствие 1.3. *Для липшицевой константы $k(\langle\varphi\rangle)$ оператора $P_{\langle\varphi\rangle}$ справедлива оценка*

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha+\varepsilon} \leqslant k(\langle\varphi\rangle) \leqslant \frac{3-\alpha+2\varepsilon}{1-\alpha+\varepsilon}.$$

Верхняя оценка в этом следствии в ряде случаев улучшает оценку В.И. Бердышева[42] для $k(\langle\varphi\rangle)$.

Для пространства $l_1^3(\mathbb{C})$ векторов (z_1, z_2, z_3) с нормой $\|(z_1, z_2, z_3)\|_3 = |z_1| + |z_2| + |z_3|$ в теореме 1.2 посчитано точное значение коэффициента линейности оператора метрической проекции на подпространство констант $D = \{(d, d, d)\colon d \in \mathbb{C}\}$. Заметим, что для вектора $z = (z_1, z_2, z_3)$ ближайшим элементом в подпространстве D является в точности такой вектор

[42] *Бердышев В.И.* Метрическая проекция на конечномерные подпространства из C и L // Матем. заметки, 1975, **18**:4, 473-488.

(s, s, s), что s есть точка Штейнера для точек z_1, z_2, z_3 на плоскости $\mathbb{C}$. Результат теоремы 1.2 тесно связан со II главой диссертации.

Для одномерных подпространств в действительном пространстве l_p^n, $1 < p < \infty, p \neq 2$, $n \geqslant 2$ в теореме 1.3 доказываются оценки коэффициента линейности через характеристики порождающего элемента, а для подпространства констант в пространстве l_p^n получены оценки, асимптотически точные при $n \to \infty$.

Следствие 1.4. *Пусть $Y = \langle y \rangle$ — одномерное подпространство в пространстве l_p, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, порожденное элементом $y \in l_p$. Оператор метрического проектирования P_Y липшицев тогда и только тогда, когда элемент y имеет конечное число ненулевых компонент.*

В главе II коэффициент линейности применяется для исследования вопроса существования липшицевой выборки из отображения St_n при $n \geqslant 3$ в различных банаховых пространствах X. Показывается, что этот вопрос равносилен вопросу о существовании липшицевой выборки из оператора P_D метрического проектирования пространства $\underbrace{X \oplus \cdots \oplus X}_{n}$ с нормой $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_n = \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|$ на его диагональное подпространство $D = \{(x, \ldots, x) \colon x \in X\}$.

В начале II главы вводится коэффициент линейности $\lambda(p)$ выборки p из оператора метрического проектирования на произвольное замкнутое (не обязательно чебышевское) подпространство $Y \subset X$. Напомним, что отображение $f \colon X \to X$ называется *однородным*, если для произвольного числа $r \in \mathbb{R}$ и элемента $x \in X$ выполнено $f(rx) = rf(x)$, и *аддитивным по модулю подпространства* $Y \subset X$, если для произвольных элементов $x \in X$, $y \in Y$ справедливо равенство $f(x + y) = f(x) + y$. В случае однородной и аддитивной по модулю Y выборки для выборочного коэффициента линейности доказывается аналог теоремы А.

Далее получены оценки коэффициента линейности $\lambda(p)$ выборки p из метрической проекции P_D для случая $n = 3$ в зависимости от свойств пространства X, а также оценка константы Липшица однозначного отображения Штейнера трех точек в некотором классе пространств.

Теорема 2.2. *Пусть X — банахово пространство со свойством существования точки Штейнера для всякой тройки его точек. Тогда для всякой выборки p из отображения P_D, соответствующего отображению Штейнера* St_3, *выполнено неравенство $\lambda(p) \leqslant 1/2$.*

Пусть $S(X) = \{x \in X \colon \|x\| = 1\}$ есть единичная сфера пространства X. Пространство X называется *локально равномерно выпуклым*, если для любого $x \in S(X)$ из $x_n \in S(X)$ и $\|x+x_n\| \to 2$ при $n \to \infty$ следует $x_n \to x$.

Теорема 2.3. *Пусть X — рефлексивное локально равномерно выпуклое пространство с локально равномерно выпуклым сопряженным пространством X^*, $\dim X \geqslant 2$. Тогда для однозначного отображения P_D, соответствующего отображению Штейнера St_3, выполнено неравенство $\lambda(P_D) \leqslant 1/3$.*

Следствие 2.1. *Пусть X — рефлексивное локально равномерно выпуклое пространство с локально равномерно выпуклым сопряженным пространством X^*, $\dim X \geqslant 2$. Тогда для константы Липшица k отображения St_3 справедливо неравенство $k \geqslant 2/3$.*

Также получены результаты о существовании липшицевых выборок из отображения Штейнера в зависимости от свойств пространства X, обобщающие теорему B. Следующая теорема почти полностью проясняет этот вопрос для $n = 3$ и двумерных строго выпуклых (а значит, обладающих однозначным оператором St_3) пространств.

Напомним, что пространство X называется *строго выпуклым*, если его единичная сфера $S(X)$ не содержит отрезков. Функционал $f \in S(X^*)$ называется *опорным* к единичному шару $B(X)$ пространства X в точке x единичной сферы $S(X)$, если $f(x) = 1$. Множество всех функционалов из $S(X^*)$, опорных в точке $x \in S(X)$, то есть достигающих своей нормы на элементе x, назовем $J(x)$. Банахово пространство X называется *гладким*, если для всех точек на $S(X)$ множество $J(x)$ одноточечно.

Теорема 2.4. a) *Для строго выпуклого гладкого двумерного пространства отображение St_3 является липшицевым.*

b) *Для всякого $M > 0$ существует такое двумерное гладкое строго выпуклое пространство, что константа Липшица отображения St_3 в этом пространстве больше M.*

c) *Существует двумерное строго выпуклое негладкое пространство, для которого St_3 не липшицево.*

Точка $x \in S(X)$ называется *достижимой точкой*, если найдется такой функционал $f \in J(x)$, что $\{y : f(y) = 1\} \cap S(X) = \{x\}$.

Теорема 2.5. *Пусть X — банахово пространство, $\dim X \geqslant 2$, $\varepsilon > 0$. Если сфера $S(X)$ содержит две различные достижимые точки на расстоянии не больше ε, то для каждого чётного $n \geqslant 4$ и для всякой выборки p из отображения $P_D : X^n \to D$ верна оценка $\lambda(p) \leqslant 2\varepsilon/n$. Как следствие, всякая липшицева выборка из отображения St_n имеет константу Липшица не меньше $1/(8\varepsilon) - 3/(2n)$.*

Следствие 2.2. *В строго выпуклом пространстве X с $\dim X \geqslant 2$ не существует липшицевой выборки из отображения St_n при четном $n \geqslant 4$.*

Конечномерное нормированное пространство X называется *полиэдральным*, если его единичный шар является выпуклой оболочкой конечного числа точек. В случае конечномерного пространства X и четного $n \geqslant 4$ найден критерий существования липшицевой выборки из отображения Штейнера.

Следствие 2.3. *Пусть пространство X конечномерно, $n \geqslant 4$ — четное число. Отображение St_n имеет липшицеву выборку тогда и только тогда, когда X — полиэдральное пространство.*

Следствие 2.3 получилось аналогичным критерию существования липшицевой выборки из чебышевских центров на классе ограниченных множеств в конечномерном нормированном пространстве, доказанному Ю.Ю. Дружининым[43].

Теорема 2.6. *Пусть X — рефлексивное локально равномерно выпуклое банахово пространство с локально равномерно выпуклым сопряжённым X^*, $\dim X \geqslant 2$. Тогда для всякого нечётного $n \geqslant 5$ (однозначное) отображение St_n не является липшицевым.*

В заключении диссертационной работы намечены направления дальнейших исследований. Ориентирами могут служить следующие задачи.

1) Ввести локальный коэффициент линейности метрической проекции и оценить с его помощью локальные константы Липшица в случае конечномерных чебышевских подпространств в $C(K)$ (оценки этих локальных констант получены в работе Фройда[44]).

2) Доказано, что в каждом конечномерном банаховом пространстве есть чебышевские подпространства всех размерностей[45]. Во всяком ли банаховом пространстве размерности n найдется чебышевское подпространство заданной размерности $k \leqslant n-2$, метрическая проекция на которое липшицева?

3) Существует ли липшицева выборка из отображения St_n в пространстве C при $n \geqslant 4$? (При $n = 3$ существует[46].) Липшицево ли отображение

[43] *Дружинин Ю.Ю.* О существовании липшицевой выборки из чебышевских центров // Матем. сб., 2013, **204**:5, 25-44.

[44] *Freud G.* Eine Ungleichung für Tschebysheffsche Approximations–polynome // Acta Scientiarum Mathematicarum, 1958, **19**, 162–164. См. также *Blatt H.-P.* Lipschitz continuity and strong unicity in G. Freud's work // J. Approx. Theory, 1986, **46**:1, 25-31.

[45] *Залгаллер В.А.* О k-мерных направлениях, особых для выпуклого тела F в $\mathbb{R}^n$ // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 6, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1972, **27**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 67–72.

[46] *Беднов Б.Б.* О точках Штейнера в пространстве непрерывных функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Матем. Механ., 2011, 6, С. 26-31.

St_n в пространстве L_p при $n \geqslant 3$, $p \neq 1, 2$?

4) Найти необходимые или достаточные условия существования липшицевой выборки из St_3 для трехмерных пространств.

Благодарности

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю Петру Анатольевичу Бородину за постановку задач, их обсуждение и постоянную поддержку в работе.

Автор благодарен д.ф.-м.н. А. Р. Алимову, профессору И. Г. Царькову, академику РАН, профессору В. И. Бердышеву, профессору Н. И. Черныху за ценные замечания.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации из официального перечня ВАК:

[1] *Чеснокова К. В.* Коэффициент линейности оператора метрического проектирования для одномерных чебышевских подпространств в пространстве C // Матем. заметки, **96**:4 (2014), 588-595.

[2] *Чеснокова К. В.* Об отображении, сопоставляющем тройке точек банахова пространства их точку Штейнера // Вестник Моск. ун-та, Сер. 1, Матем. Механ., 2016, 2, 40-44.

Прочие публикации:

[3] *Чеснокова К. В.* Об отображении Штейнера для трех точек // Современные методы теории функций и смежные проблемы, материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа, ВГУ Воронеж, 2015, 151-152.

[4] *Беднов Б. Б., Чеснокова К. В.* О выборках из отображения Штейнера // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского, **51**, Материалы Двенадцатой международной Казанской летней научной школы-конференции “Теория функций, её приложения и смежные вопросы”, Казанское математическое общество, Казань, 2015, 63-65.

[5] *Беднов Б. Б., Чеснокова К. В.* Липшицевы выборки из отображения Штейнера // Современные проблемы теории функций и их приложения, материалы 18-й междунар. Сарат. зимней школы., “Научная книга” Саратов, 2016, 56-57.