Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

кафедра теории функций и функционального анализа

На правах рукописи

УДК 517.982.256

Чеснокова Ксения Васильевна

Коэффициент линейности метрической проекции и его приложения

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,

профессор П.А. Бородин

Москва 2016

Оглавление

Введение.

Диссертация посвящена вопросам теории приближений в нормированных пространствах, которые связаны с коэффициентом линейности оператора метрического проектирования на подпространство. В ней вычисляется и оценивается коэффициент линейности для различных чебышевских подпространств, исследуется существование липшицевых выборок у операторов метрического проектирования на различные подпространства, оцениваются соответствующие константы Липшица. В частности, исследуется существование липшицевых выборок из отображений Штейнера.

Теория приближений в нормированных пространствах, или геометрическая теория приближений, берет свое начало в классической работе П.Л.Чебышева [30] (1859), в которой, в частности, доказана однозначность метрической проекции на множество P_n алгебраических многочленов степени не выше n и множество R_{mn} рациональных функций со степенью числителя не выше m и степенью знаменателя не выше n в пространстве $C[a, b]$ действительнозначных функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. В этой же работе П.Л.Чебышев описал оператор метрического проектирования на множества P_n и R_{mn} (теорема об альтернансе). В дальнейшем геометрические вопросы теории приближений в пространстве C изучались А.Хааром (1918), А.Н.Колмогоровым (1948), Е.Я.Ремезом (1953). Окончательное становление геометрической теории приближений как самостоятельной ветви теории приближений произошло в 60-е годы прошлого века благодаря работам, в первую очередь, В. Кли, Н.В. Ефимова и С.Б. Стечкина, а затем В.И. Бердышева, Л.П. Власова, А.Л. Гаркави, Е.В. Ошмана, С.Я. Хавинсона, Е. Асплунда, А. Брауна, А. Брендстеда, Д. Вулберта, Ф. Дойча, И. Зингера, Б. Крипке, Дж. Линденштраусса, П. Морриса, Т. Ривлина, У. Рудина, Р. Фелпса, Р. Холмса, Э. Чини, М. Эдельштейна и др. В дальнейшем исследования по геометрической теории приближений в нашей стране вели главным образом представители научной школы С.Б. Стечкина: А.Р. Алимов, П.В. Альбрехт, В.И. Андреев, В.С. Балаганский, А.А. Васильева, В.И. Иванов, М.И. Карлов, С.В. Конягин, В.А. Кощеев, Е.Д. Лившиц, Ю.В. Малыхин, А.В. Маринов, К.С. Рютин, Г.Ф. Устинов, И.Г. Царьков и др., а также М.В. Балашов, П.А. Бородин, С.И. Дудов, Г.Е. Иванов, Е.М. Семенов, В.П. Фонф и многие другие математики.

В современном понимании геометрическая теория приближений изучает взаимосвязи между различными аппроксимативными свойствами множеств (чебышевость, единственность, существование, аппроксимативная компактность, солнечность, антипроксиминальность и т.д.) с их тополого-геометрическими свойствами (линейность, выпуклость, разного рода связность, гладкость и т.д.) при различных условиях (строгая выпуклость, равномерная выпуклость, гладкость и т.д.) на нормированное пространство.

Наиболее полно геометрическая теория приближений отражена в обзорах [15], [12], [53], [6], [23], [2], [29], [3], [4].

Пусть X — нормированное пространство, M — непустое подмножество X, $\rho(x, M) := \inf\{\|x-y\| : y \in M\}$ — расстояние от элемента $x \in X$ до M. Множество $P_M(x) = \{y \in M : \|x-y\| = \rho(x, M)\}$ называется множеством ближайших к x элементов из M, или *метрической проекцией* элемента x на M. Множество M называется *множеством существования*, если для любого $x \in X$ множество $P_M(x)$ содержит хотя бы один элемент, и *множеством единственности*, если для любого $x \in X$ множество $P_M(x)$ состоит из не более чем одного элемента. Если M является одновременно и множеством существования и множеством единственности, то есть для любого $x \in X$ в

M существует ровно один элемент наилучшего приближения $P_M(x)$, то M называется *чебышевским* множеством. Оператор $P_M : x \to P_M(x)$ $(x \in X)$ называется *оператором метрического проектирования.*

Свойства множества быть множеством существования, единственности или чебышевским множеством относятся к числу основных *аппроксимативных* свойств.

Одно из классических направлений геометрической теории приближений — исследование свойств операторов P_Y метрического проектирования на линейные подпространства $Y \subset X$. Первичной здесь является задача описания всех чебышевских подпространств в заданном банаховом пространстве X. В случае чебышевского подпространства Y, когда оператор P_Y однозначен, исследуются свойства его самого; в случае же нечебышевского Y речь обычно идет о наличии выборок из P_Y с теми или иными свойствами.

Хорошо известно, что одновременные рефлексивность и строгая выпуклость банахова пространства необходимы и достаточны для того, чтобы все его замкнутые линейные подпространства были чебышевскими (например, такими являются пространства L_p, $1 < p < \infty$). Поэтому особый интерес представляет задача описания чебышевских подпространств в нерефлексивных пространствах (прежде всего в пространствах L_1 и C). В пространстве C конечномерные чебышевские подпространства описаны А. Хааром [40] (1918) и Дж. Мэйрхьюбером [44] (1956), а чебышевские подпространства конечной коразмерности — А.Л. Гаркави [14] (1967). Описание конечномерных чебышевских подпространств в пространстве сходящихся к нулю последовательностей c_o принадлежит также А. Хаару [40] (1918) и Р. Фелпсу [49] (1960), а результаты Р. Фелпса [49] (1960) и А.Л. Гаркави [13] (1964) показывают, что бесконечномерных чебышевских подпространств в c_0 не существует. Соответствующие результаты для пространства L_1 получены Р. Фелпсом [50] (1966) и А.Л. Гаркави [16] (1970). Однако даже в самых простых нерефлексивных банаховых пространствах о чебышевских подпространствах с бесконечными размерностью и коразмерностью известно очень мало (неизвестно, существуют ли такие подпространства в пространстве $C[0,1]$ и пространстве **c** сходящихся последовательностей). Обзор теории чебышевских подпространств и многих до сих пор не решенных проблем в этой теории см. в [15].

Оператор метрического проектирования P_Y на чебышевское подпространство Y бывает разрывным [35, 53] (1969, 1970), бывает непрерывным, но не липшицевым (например, для подпространства $Y = \mathcal{P}_n$ многочленов степени не выше $n \geqslant 2$ в $C[0,1]$ — см., напр., [28]), и уж совсем редко бывает линейным, как показывают теоремы Рудина–Смита [51] (1961) и Зингера [53] (1970). Полные описания чебышевских подпространств с линейным оператором метрического проектирования в пространствах C и L_1 получены П.А. Бородиным в работе [9] (1998). В частности, набор чебышевских подпространств с линейным оператором метрического проектирования в пространстве $C[0,1]$ исчерпывается минимумом, необходимым для всякого банахова пространства: нулевое подпространство, все пространство и чебышевские подпространства коразмерности 1.

А.К. Клайн [36] (1973) доказал, что если K — бесконечный компакт, Y — чебышевское подпространство в $C(K)$ с $2 \leqslant \dim Y < \infty$, то оператор метрического проектирования P_Y не является липшицевым.

В работе В. Ли [43] (1990) для произвольных конечномерных подпространств Y в пространстве $C_0[T]$ действительнозначных непрерывных функций, определенных на локально компактном хаусдорфовом пространстве T, получено условие, необходимое и достаточное для того, чтобы многозначный оператор P_Y был липшицев относительно хаусдорфова расстояния (при этом показано, что липшицевость P_Y равносильна существованию липишицевой выборки из P_Y). В частном случае $c_0 = C[\mathbb{N}]$ это условие означает, что для всякого нетривиального собственного чебышевского подпространства $Y \subset c_0$ оператор P_Y не липшицев. При этом, как показано в работе Бартельта и Ли [31] (1998), условие *локальной липшицевости* для оператора метрической проекции P_Y на произвольное чебышевское подпространство $Y \subset c_0$ выполнено в каждой точке $z \in c_0$: существует такое число $k(z) > 0$, что неравенство $\|P_Y(z) - P_Y(x)\| \leqslant k(z)\|z - x\|$ верно для любого элемента $x \in c_0$.

Для подпространства существования Y банахова пространства X Ф. Дойч, В. Ли, С. Парк [38] (1989) доказали, что многозначный оператор P_Y липшицев тогда и только тогда, когда P_Y равномерно непрерывен (относительно хаусдорфова расстояния), и получили условия, необходимые или достаточные для существования липшицевой выборки из P_Y.

Следующий результат, отмеченный в [38], является простым следствием теорем Й. Линденштраусса и Л. Цафрири: если рефлексивное банахово пространство X не изоморфно гильбертову пространству, то в X есть подпространство Y, для которого оператор P_Y не имеет липшицевой выборки.

В частности, в каждом из пространств $L_p[0,1]$, $p \in (1,2) \cup (2,\infty)$, должно быть подпространство с нелипшицевым оператором метрического проектирования. Такое подпространство (именно, подпространство констант) было обнаружено П.В. Альбрехтом [5] (1994). Ю.Ю. Дружинин [21] (2013) доказал, что в пространстве $L_p(M,\Sigma,\mu)$, $p > 1, p \neq 2$, оператор P_Y нелипшицев для таких одномерных подпространств $Y = \langle y \rangle$, что $\operatorname{supp} y$ содержит безатомную часть положительной меры.

Свойствам оператора метрического проектирования на чебышевские подпространства посвящены также работы П. Морриса [45], [46], Э. Чини и Д. Вулберта [35], П.-К. Лина [48], Ж.-П. Кахана [42], Ф. Дойча и В. Ли [37], Р. Холмса и Б. Крипке [41], В.И. Бердышева [8], А.Л. Гаркави [15, 17], А.В. Маринова [26], Ю.Ю. Дружинина [19] и др.

Удобным инструментом для исследования липшицевости и линейности оператора метрического проектирования на чебышевское подпространство оказался введенный П.А. Бородиным [10] коэффициент линейности.

Определение. *Коэффициентом линейности* оператора метрического проектирования P_Y на чебышевское подпространство $Y \subset X$ называется величина

$$\lambda(P_Y) = \inf \left\{ \frac{\rho(q_1 + q_2, Y)}{\|q_1 + q_2\|} : q_1 + q_2 \neq 0, q_1, q_2 \in Q(Y) \right\},$$

где $Q(Y) = \{q : P_Y(q) = 0\}$ — *квазиортогональное* множество к подпространству Y.

Произвольный элемент q из множества $Q(Y)$ называется *квазиортогональным элементом.*

Связь между величиной коэффициента линейности и липшицевостью оператора P_Y показывает

Теорема А ([10]). *Для любого чебышевского подпространства Y справедливы следующие утверждения:*

(1) $0 \leqslant \lambda(P_Y) \leqslant 1$, $\lambda(P_Y) = 1$ *тогда и только тогда, когда оператор P_Y линеен;*

(2) *если оператор P_Y удовлетворяет условию Липшица с константой k: $\|P_Y(x_1) - P_Y(x_2)\| \leqslant k\|x_1 - x_2\|$ $(x_1, x_2 \in X)$, то $\lambda(P_Y) \geqslant \frac{1}{k+1}$;*

(3) *если $\lambda(P_Y) > 0$, то P_Y удовлетворяет условию Липшица с константой $k = \frac{1}{\lambda(P_Y)} + 1$.*

Таким образом, $\lambda(P_Y) = 0$ тогда и только тогда, когда оператор P_Y не является липшицевым.

Неравенства в утверждениях (2) и (3) этой теоремы, связывающие коэффициент линейности $\lambda(P_Y)$ и липшицеву константу $k = k(P_Y)$, могут оба обращаться в равенства.

Кроме того, в работе [10] доказано, что как в действительном пространстве $C[K]$ непрерывных функций на хаусдорфовом компакте K, так и в действительном пространстве L_1 суммируемых функций для всякого чебышевского подпространства Y имеет место либо равенство $\lambda(P_Y) = 1$, либо неравенство $\lambda(P_Y) \leqslant 1/2$ (причем в обоих пространствах последнее неравенство является точным).

В случае пространства $C[K]$ с бесконечным K для конечномерных чебышевских подпространств Y размерности не меньше 2 можно утверждать даже равенство $\lambda(P_Y) = 0$: еще в 1973 г. А. Клайн [36] доказал, что у таких подпространств оператор P_Y не липшицев.

Для одномерных чебышевских подпространств $Y \subset C[K]$ это уже неверно, и в I главе настоящей работы коэффициент $\lambda(P_Y)$ для таких подпространств вычислен точно через специальные характеристики порождающей функции; показано также, что он может принимать все значения из промежутка $(0; 1/2]$. В качестве следствия получены оценки константы Липшица оператора P_Y для таких Y. Эти оценки уточняют результаты В.И. Бердышева [8] (1975).

Именно исследование липшицевости оператора метрического проектирования или выборок из него может служить основным приложением коэффициента линейности.

Во II главе диссертации коэффициент линейности применяется к исследованию существования липшицевых выборок из отображения Штейнера. При этом теорема А обобщается на выборки из оператора метрического проектирования.

Определение. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — элементы банахова пространства X. *Точкой Штейнера* $s(x_1, \ldots, x_n)$ набора

$\{x_1,\dots,x_n\}$ называется всякий элемент множества $\mathrm{St}(x_1,\dots,x_n) = \{s\in X\colon \sum_{k=1}^n\|x_k-s\| = \inf_{x\in X}\sum_{k=1}^n\|x_k-x\|\}$. Множество $\mathrm{St}(x_1,\dots,x_n)$ называется *множеством Штейнера* набора $\{x_1,\dots,x_n\}$.

Определение. *Отображение Штейнера* St_n есть отображение пространства $X\times\dots\times X$ (n раз) с нормой $\|(x_1,\dots,x_n)\|_n = \sum\limits_{i=1}^n\|x_i\|$ в пространство 2^X подмножеств пространства X, сопоставляющее набору $\{x_1,\dots,x_n\}$ множество $\mathrm{St}(x_1,\dots,x_n)$.

В случае гильбертова пространства $X=H$ точка Штейнера $s(x_1,x_2,x_3)$ существует и единственна (см., например, [24], гл. 7, § 5): она лежит в плоскости точек x_1, x_2, x_3 и либо совпадает с одной из них (если в треугольнике $x_1x_2x_3$ есть угол, не меньший $120°$), либо совпадает с точкой Торричелли (из которой все стороны треугольника видны под углом $120°$).

В бесконечномерном банаховом пространстве X уже для трехточечных наборов M_3 множества $\mathrm{St}(M_3)$ могут быть пустыми. Первый пример таких X и M_3 построил А.Л. Гаркави [17] в 1974 г. Имеются и другие примеры [54, 32, 47, 11].

В диссертации рассматриваются только такие пространства X, в которых множества $\mathrm{St}(x_1,\dots,x_n)$ непусты для всякого набора $\{x_1,\dots,x_n\}$, в основном конечномерные или рефлексивные пространства. Основным предметом исследования является вопрос о существовании липшицевой выборки из отображения St_n при фиксированном $n\geqslant 3$. Отправной точкой для этого исследования послужила

Теорема B (Ж.-П.Кахан, 1974) [42]. *Для отображения Штейнера в евклидовой плоскости выполнено:*

(*a*) (*однозначное*) *отображение* St_3 *удовлетворяет условию Липшица с точной константой* $2/\sqrt{3}$*;*

(b) *для нечетных* $n \geqslant 5$ (*однозначное*) *отображение* St_n *не липшицево.*

Во II главе диссертации пункт (a) теоремы B обобщается на произвольные гладкие строго выпуклые нормированные плоскости, пункт (b) теоремы B обобщается на некоторый класс (в том числе и бесконечномерных) банаховых пространств. Рассматривается также и случай четного n. При этом существенно используется коэффициент линейности специального оператора метрического проектирования, связанного с St_n.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы из 60 наименований. Общий объем диссертации — 78 страниц. В каждой главе принята сквозная нумерация теорем, лемм, предложений, определений и рисунков.

Перейдем к обзору результатов по главам.

В I главе вычислен коэффициент линейности метрических проекций на некоторые чебышевские подпространства и, как следствие, получены оценки на константы Липшица этих метрических проекций.

Рассмотрим пространство $C[K]$ действительнозначных функций, непрерывных на хаусдорфовом компакте K, с равномерной нормой. Ранее А. Клайн [36] доказал нелипшицевость оператора метрического проектирования (то есть равенство $\lambda(P_Y) = 0$) в случае бесконечного компакта K и чебышевского подпространства $Y \subset C[K]$ с $2 \leqslant \dim Y < \infty$.

Для одномерных чебышевских подпространств (а именно подпространств $\langle\varphi\rangle \subset C[K]$, порожденных функцией φ, которая не обращается в ноль на компакте K) получена формула для коэффициента линейности через следующие параметры функции φ:

$$\alpha := \frac{\max|\varphi| - \min|\varphi|}{\max|\varphi| + \min|\varphi|},$$

$$\varepsilon := \frac{1}{\max|\varphi| + \min|\varphi|} \cdot \left(\inf_{K\setminus\{t_{\min}\}} |\varphi| - \min|\varphi| \right),$$

где $t_{\min}$ — произвольная точка минимума функции $|\varphi|$.

Теорема 1.1. *Пусть компакт K содержит не менее 3 точек, функция φ не обращается в ноль на K. Коэффициент линейности оператора метрического проектирования на подпространство $\langle\varphi\rangle$ удовлетворяет равенству*

$$\lambda(P_{\langle\varphi\rangle}) = \frac{1-\alpha+\varepsilon}{2+\varepsilon}.$$

В случае простого компакта, в частности для отрезка действительной оси, формула упрощается.

Следствие 1.1. *Если функция φ достигает своего минимума на неодноточечной компоненте связности компакта K или в нескольких точках, в частности, если K есть отрезок действительной оси, то $\lambda(P_{\langle\varphi\rangle}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$.*

Следствие 1.2. *В условиях теоремы $\lambda(P_{\langle\varphi\rangle}) = \dfrac{1}{2}$ тогда и только тогда, когда $\varphi \equiv \mathrm{const} \neq 0$.*

Следствие 1.3. *Для липшицевой константы $k(\langle\varphi\rangle)$ оператора $P_{\langle\varphi\rangle}$ справедлива оценка*

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha+\varepsilon} \leqslant k(\langle\varphi\rangle) \leqslant \frac{3-\alpha+2\varepsilon}{1-\alpha+\varepsilon}.$$

Верхняя оценка в этом следствии в ряде случаев улучшает оценку В.И. Бердышева [8] для $k(\langle\varphi\rangle)$.

Для пространства $l_1^3(\mathbb{C})$ векторов (z_1, z_2, z_3) с нормой $\|(z_1, z_2, z_3)\|_3 = |z_1| + |z_2| + |z_3|$ в теореме 1.2 посчитано точное значение коэффициента линейности оператора метрической проекции на подпространство констант

$D = \{(d,d,d)\colon d \in \mathbb{C}\}$. Заметим, что для вектора $z = (z_1, z_2, z_3)$ ближайшим элементом в подпространстве D является в точности такой вектор (s,s,s), что s есть точка Штейнера для точек z_1, z_2, z_3 на плоскости $\mathbb{C}$. Результат теоремы 1.2 тесно связан со II главой диссертации.

Для одномерных подпространств в действительном пространстве l_p^n, $1 < p < \infty, p \neq 2$, $n \geqslant 2$, с нормой $\|x\|_p = \|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p}$ в теореме 1.3 приводятся оценки коэффициента линейности через характеристики порождающего элемента, а для подпространства констант в пространстве l_p^n получены асимптотически точные оценки.

С помощью теоремы 1.3 найден критерий липшицевости оператора метрической проекции в действительном пространстве l_p, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$.

Следствие 1.4. *Пусть $Y = \langle y \rangle$ — одномерное подпространство в пространстве l_p, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, порожденное элементом $y \in l_p$. Оператор метрического проектирования P_Y липшицев тогда и только тогда, когда элемент y имеет конечное число ненулевых компонент.*

В главе II коэффициент линейности применяется для исследования вопроса существования липшицевой выборки из отображения St_n при $n \geqslant 3$ в различных банаховых пространствах X. Показывается, что этот вопрос равносилен вопросу о существовании липшицевой выборки из оператора P_D метрического проектирования пространства $\underbrace{X \times \cdots \times X}_{n}$ с нормой $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_n = \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|$ на его диагональное подпространство $D = \{(x, \ldots, x)\colon x \in X\}$. Заметим, что для всякого n подпространство D и отображение P_D свое, индекс n опущен во избежание громоздких обозначений.

В начале II главы вводится коэффициент линейности $\lambda(p)$ выборки p из оператора метрического проектирования на произвольное замкнутое (не обязательно чебышевское) подпространство $Y \subset X$. Напомним, что отображение $f\colon X \to X$ называется *однородным*, если для произвольного числа $r \in \mathbb{R}$ и элемента $x \in X$ выполнено $f(rx) = rf(x)$, и *аддитивным по модулю подпространства* $Y \subset X$, если для произвольных элементов $x \in X$, $y \in Y$ справедливо равенство $f(x+y) = f(x) + y$. В случае однородной и аддитивной по модулю Y выборки для выборочного коэффициента линейности доказывается аналог теоремы A:

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть Y — подпространство существования в банаховом пространстве X, p — однородная и аддитивная по модулю Y выборка из оператора P_Y: $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, $p(x+y) = p(x) + y$ ($x \in X$, $y \in Y$, $\alpha \in \mathbb{R}$). Справедливы следующие утверждения:*

(1) $\lambda(p) > 0$ *тогда и только тогда, когда выборка p липшицева;*

(2) *если $\lambda(p) > 0$, то выборка p липшицева и ее константа Липшица* $K = \sup\{\|p(x) - p(z)\|/\|x - z\| : x, z \in X, x \neq z\}$ *удовлетворяет неравенствам $K \leqslant 1/\lambda(p) + 1$.*

(3) *если выборка p липшицева с константой K, то $\lambda(p) > 0$ и $K \geqslant 1/\lambda(p) - 1$.*

Далее получены оценки коэффициента линейности $\lambda(p)$ выборки p из метрической проекции P_D для случая $n = 3$ в зависимости от свойств пространства X, а также оценки константы Липшица для соответствующих выборок st_3 из отображения Штейнера трех точек.

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть X — банахово пространство со свойством существования точки Штейнера для всякой тройки его точек. Тогда для всякой выборки p из отображения P_D, соответствующего отображению Штейнера St_3, выполнено неравенство $\lambda(p) \leqslant 1/2$.*

Множество $S(X) := \{x \in X\colon \|x\| = 1\}$ есть *единичная сфера* пространства X. Пространство X называется *локально равномерно выпуклым*, если для любого $x \in S(X)$ из $x_n \in S(X)$ и $\|x + x_n\| \to 2$ при $n \to \infty$ следует $x_n \to x$.

Теорема 2.3. *Пусть X — рефлексивное локально равномерно выпуклое пространство с локально равномерно выпуклым сопряженным пространством X^*, $\dim X \geqslant 2$. Тогда для однозначного отображения P_D, соответствующего отображению Штейнера St_3, выполнено неравенство $\lambda(P_D) \leqslant 1/3$.*

Следствие 2.1. *Пусть X — рефлексивное локально равномерно выпуклое пространство с локально равномерно выпуклым сопряженным пространством X^*, $\dim X \geqslant 2$. Тогда для константы Липшица k отображения St_3 справедливо неравенство $k \geqslant 2/3$.*

Также получены результаты о существовании липшицевых выборок из отображения Штейнера в зависимости от свойств пространства X, обобщающие теорему B. Следующая теорема почти полностью проясняет этот вопрос для $n = 3$ и двумерных строго выпуклых (а значит, обладающих однозначным оператором St_3) пространств.

Напомним, что пространство X называется *строго выпуклым*, если его единичная сфера $S(X)$ не содержит отрезков. Функционал $f \in S(X^*)$ называется *опорным* к единичному шару $B(X)$ пространства X в точке x единичной сферы $S(X)$, если $f(x) = 1$. Множество всех функционалов из $S(X^*)$, опорных в точке $x \in S(X)$, то есть достигающих своей нормы на элементе x, назовем $J(x)$. Банахово пространство X называется *гладким*, если для всех точек на $S(X)$ множество $J(x)$ одноточечно.

Теорема 2.4. *а) Для строго выпуклого гладкого двумерного пространства отображение St_3 является липшицевым.*

b) Для всякого $M > 0$ существует такое двумерное гладкое строго выпуклое пространство, что константа Липшица отображения St_3 в этом пространстве больше M.

c) Существует двумерное строго выпуклое негладкое пространство, для которого St_3 не липшицево.

Точка $x \in S(X)$ называется *достижимой точкой*, если найдется такой функционал $f \in J(x)$, что $\{y : f(y) = 1\} \cap S(X) = \{x\}$.

Теорема 2.5. *Пусть X — банахово пространство, $\dim X \geqslant 2$, $\varepsilon > 0$. Если сфера $S(X)$ содержит две различные достижимые точки на расстоянии не больше ε, то для каждого чётного $n \geqslant 4$ и для всякой выборки p из отображения $P_D : X^n \to D$ верна оценка $\lambda(p) \leqslant 2\varepsilon/n$. Как следствие, всякая липшицева выборка из отображения St_n имеет константу Липшица не меньше $1/(8\varepsilon) - 3/(2n)$.*

Следствие 2.2. *В строго выпуклом пространстве X с $\dim X \geqslant 2$ не существует липшицевой выборки из отображения St_n при четном $n \geqslant 4$.*

Конечномерное нормированное пространство X называется *полиэдральным*, если его единичный шар является выпуклой оболочкой конечного числа точек. В случае конечномерного пространства X и четного $n \geqslant 4$ найден критерий существования липшицевой выборки из отображения Штейнера.

Следствие 2.3. *Пусть пространство X конечномерно, $n \geqslant 4$ — четное число. Отображение St_n имеет липшицеву выборку тогда и только тогда, когда X — полиэдральное пространство.*

Следствие 2.3 получилось аналогичным критерию существования липшицевой выборки из чебышевских центров на классе ограниченных множеств в конечномерном нормированном пространстве, доказанному Ю.Ю. Дружининым [20].

Теорема 2.6. *Пусть X — рефлексивное локально равномерно выпуклое банахово пространство с локально равномерно выпуклым сопряжённым X^*, $\dim X \geqslant 2$. Тогда для всякого нечётного $n \geqslant 5$ (однозначное) отображение $\mathrm{St_n}$ не является липшицевым.*

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [56] — [60] автора, приведенных в конце списка литературы. Теоремы 2.5 и 2.6 получены совместно с Б.Б. Бедновым.

Результаты диссертации докладывались на семинаре по теории приближений в МГУ под руководством профессора И.Г. Царькова, доцента А.С. Кочурова, д.ф.-м.н., научного сотрудника А.Р. Алимова и доцента А.А. Васильевой (2016), на семинаре по геометрической теории приближений в МГУ под руководством профессора П.А. Бородина (2010–2016), на школе С.Б. Стечкина по теории функций в г. Миасс (2013–2015), на Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (2015), на XII Казанской летней школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (2015) и на 18-й международной Саратовской зимней школе «Современные проблемы теории функций и их приложения» (2016).

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю Петру Анатольевичу Бородину за постановку задач, их обсуждение и постоянную поддержку в работе.

Автор благодарен д.ф.-м.н. А.Р. Алимову, профессору И.Г. Царькову, профессору В.И. Бердышеву, профессору Н.И. Черныху за ценные замечания.

Глава I. Вычисление коэффициента линейности.

§1. Чебышевские подпространства в $C[K]$.

Рассмотрим пространство $C[K]$ действительнозначных функций, непрерывных на хаусдорфовом компакте K, с равномерной нормой. П.А. Бородин [10] доказал, что для любого чебышевского подпространства $Y \subset C[K]$ справедливо либо равенство $\lambda(P_Y) = 1$ (то есть оператор метрического проектирования линеен), либо неравенство $\lambda(P_Y) \leqslant 1/2$ (у подпространства констант коэффициент линейности равняется в точности $1/2$). Ранее А. Клайн [36] доказал нелипшицевость оператора метрического проектирования (то есть равенство $\lambda(P_Y) = 0$) в случае бесконечного компакта K и чебышевского подпространства $Y \subset C[K]$ с $2 \leqslant \dim Y < \infty$.

В данном параграфе вычисляется коэффициент линейности оператора метрического проектирования на произвольное одномерное чебышевское подпространство пространства $C[K]$.

Пусть $\langle\varphi\rangle \subset C[K]$ — подпространство, порожденное функцией φ, которая не обращается в ноль на компакте K. По теореме Хаара [40] такое и только такое одномерное подпространство является чебышевским в $C[K]$. Введем следующие обозначения:

$$\alpha := \frac{\max|\varphi| - \min|\varphi|}{\max|\varphi| + \min|\varphi|},$$
$$\varepsilon := \frac{1}{\max|\varphi| + \min|\varphi|} \cdot \left(\inf_{K \setminus \{t_{\min}\}} |\varphi| - \min|\varphi| \right),$$

где $t_{\min}$ — произвольная точка минимума функции $|\varphi|$ (если φ имеет не одну точку минимума на K, то $\varepsilon = 0$). Имеем $0 \leqslant \alpha < 1$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \alpha$.

Теорема 1.1. *Пусть компакт K содержит не менее 3 точек, функция φ не обращается в ноль на K. Коэффициент линейности оператора метри-*

ческого проектирования на подпространство $\langle\varphi\rangle$ удовлетворяет равенству

$$\lambda(P_{\langle\varphi\rangle}) = \frac{1-\alpha+\varepsilon}{2+\varepsilon}.$$

Доказательство. 1. Без ограничения общности можно считать, что функция φ положительна на компакте K и $\max\varphi + \min\varphi = 2$. Тогда

$$\alpha = \frac{\max\varphi - \min\varphi}{2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}\left(\inf_{K\setminus\{t_{\min}\}} \varphi - \min\varphi\right).$$

Квазиортогональным множеством для подпространства $\langle\varphi\rangle$ является множество $Q(\langle\varphi\rangle) = \{q \in C[K] : \exists t_1, t_2 \in K : q(t_1) = -q(t_2) = \|q\|\}$.

2. Построим сначала специальные q_1, $q_2 \in Q(\langle\varphi\rangle)$, дающие оценку сверху для $\lambda(P_{\langle\varphi\rangle})$. Обозначим точку максимума функции φ за t_1, $t_2 := t_{\min}$. Заметим, что $\varphi(t_1) = 1+\alpha$, $\varphi(t_2) = 1-\alpha$. Для некоторой малой окрестности $\widehat{U}$ точки t_2, выберем какую-нибудь точку $t_3 \in K' = K \setminus \widehat{U}$, в которой функция достигает своего минимума на K'. Пусть $\varphi(t_3) = 1-\alpha+2\hat{\varepsilon}$, $\varepsilon \leqslant \hat{\varepsilon} \leqslant \alpha$, $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(\widehat{U})$. Поскольку компакт K содержит не меньше трех точек, при надлежащем выборе $\widehat{U}$ точки t_1, t_2, t_3 попарно различны.

Пусть U_1, U_2, U_3 — попарно не пересекающиеся окрестности точек t_1, t_2, t_3 соответственно. По лемме Урысона [1, гл. 4, § 8] найдутся такие функции u_1, u_2, $u_3 \in C[K]$, что $u_i(t_i) = 1$, $u_i(t) = 0$ на $K \setminus U_i$, $0 \leqslant u_i(t) \leqslant 1$ при $t \in U_i$, $i = 1, 2, 3$.

Построим квазиортогональные элементы q_1, q_2 следующего вида:

$$q_1 = \frac{\varphi}{2} + \frac{1-\alpha+2\hat{\varepsilon}}{2}\cdot u_1 - \frac{3-\alpha+2\hat{\varepsilon}}{2}\cdot\Phi\cdot u_2 + \frac{1+\alpha}{2}\cdot(1-2|\varphi-\varphi(t_3)|)\,u_3,$$

$$q_2 = \frac{\varphi}{2} + \frac{1-\alpha}{2}\cdot u_1 + \frac{1+\alpha}{2}\cdot\Phi\cdot u_2 - \frac{3-\alpha+2\hat{\varepsilon}}{2}\cdot(1-2|\varphi-\varphi(t_3)|)\,u_3,$$

где функция $\Phi = \begin{cases} \dfrac{\sup_{U_2}\varphi - \varphi}{\sup_{U_2}\varphi - (1-\alpha)}, & \text{если } \sup_{U_2}\varphi \neq 1-\alpha, \\ 1, & \text{если } \sup_{U_2}\varphi = 1-\alpha, \end{cases}$ $\quad 0 \leqslant \Phi \leqslant 1.$

В окрестности U_1 имеем

$$\frac{\varphi}{2} \leqslant q_1 \leqslant \frac{\max\varphi}{2} + \frac{1-\alpha+2\hat{\varepsilon}}{2} \leqslant 1+\hat{\varepsilon}, \qquad q_1(t_1) = 1+\hat{\varepsilon};$$
$$\frac{\varphi}{2} \leqslant q_2 \leqslant \frac{\max\varphi}{2} + \frac{1-\alpha}{2} \leqslant 1, \qquad q_2(t_1) = 1.$$

В окрестности U_2 при $\sup_{U_2}\varphi \neq 1-\alpha$ имеем

$$q_1 = \frac{\varphi}{2} - \frac{3-\alpha+2\hat{\varepsilon}}{2}\cdot\Phi\cdot u_2 \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\varphi}{2} - \frac{3-\alpha+2\hat{\varepsilon}}{2}\cdot\Phi \geqslant \frac{\varphi}{2} - \frac{3-\alpha+2\hat{\varepsilon}}{2} \geqslant \frac{\min\varphi}{2} - \frac{3-\alpha+2\hat{\varepsilon}}{2} = -1-\hat{\varepsilon};$$

$$q_2 = \frac{\varphi}{2} + \frac{1+\alpha}{2}\cdot\Phi\cdot u_2 \leqslant \frac{\varphi}{2} + \frac{1+\alpha}{2}\cdot\Phi \text{ — линейная функция от } \varphi.$$

Подставив верхнюю и нижнюю грань функции φ в окрестности U_2 в правую часть неравенства, получим $q_2 \leqslant 1$. При этом в точке t_2 эти неравенства для функций q_1 и q_2 обращаются в равенства. Поэтому в U_2 выполнены неравенства

$$\frac{\varphi}{2} \geqslant q_1 \geqslant q_1(t_2) = -1-\hat{\varepsilon}, \qquad \frac{\varphi}{2} \leqslant q_2 \leqslant q_2(t_2) = 1.$$

В случае $\sup_{U_2}\varphi = 1-\alpha$ в окрестности U_2 имеем

$$q_1 = \frac{\varphi}{2} - \frac{3-\alpha+2\hat{\varepsilon}}{2}\cdot u_2 \geqslant \frac{\varphi}{2} - \frac{3-\alpha+2\hat{\varepsilon}}{2} \geqslant \frac{\min\varphi}{2} - \frac{3-\alpha+2\hat{\varepsilon}}{2} = -1-\hat{\varepsilon};$$
$$q_2 = \frac{\varphi}{2} + \frac{1+\alpha}{2}\cdot u_2 \leqslant \frac{\varphi}{2} + \frac{1+\alpha}{2} \leqslant \frac{\sup_{U_2}\varphi}{2} + \frac{1+\alpha}{2} = 1;$$
$$q_1(t_2) = -1-\hat{\varepsilon}; \quad q_2(t_2) = 1.$$

Получаем такие же оценки, как в предыдущем случае.

Выберем окрестность U_3 такой, чтобы выполнялось $1 - 2|\varphi - \varphi(t_3)| \geqslant 0$. Тогда в окрестности U_3 имеем

$$q_1 = \frac{\varphi}{2} + \frac{1+\alpha}{2}\cdot\left(1-2|\varphi-\varphi(t_3)|\right)u_3 \leqslant \frac{\varphi}{2} + \frac{1+\alpha}{2}\cdot\left(1-2|\varphi-\varphi(t_3)|\right),$$

$$q_2 = \frac{\varphi}{2} - \frac{3-\alpha+2\hat{\varepsilon}}{2} \cdot (1 - 2|\varphi - \varphi(t_3)|)\, u_3$$
$$\geqslant \frac{\varphi}{2} - \frac{3-\alpha+2\hat{\varepsilon}}{2} \cdot (1 - 2|\varphi - \varphi(t_3)|)\,.$$

Оценки имеют вид $a\varphi + b + c|\varphi - d|$, где $|a| < |c|$, точки экстремума подобных выражений совпадают с точками экстремума модуля $c|\varphi - d|$. Поэтому

$$q_1 \leqslant \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1+\alpha}{2} \cdot (1 - 2|\varphi - \varphi(t_3)|)\right)(t_3) = \frac{\varphi(t_3)+1+\alpha}{2} = 1 + \hat{\varepsilon},$$
$$q_2 \geqslant \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{3-\alpha+2\hat{\varepsilon}}{2} \cdot (1 - 2|\varphi - \varphi(t_3)|)\right)(t_3) = \frac{\varphi(t_3)-3+\alpha-2\hat{\varepsilon}}{2} = -1;$$
$$\frac{\varphi}{2} \leqslant q_1 \leqslant 1 + \hat{\varepsilon} = q_1(t_3); \quad \frac{\varphi}{2} \geqslant q_2 \geqslant -1 = q_2(t_3).$$

Вне окрестностей U_1, U_2, U_3 функции q_i совпадают с $\varphi/2$, следовательно, не превосходят $\max\varphi/2 = (1+\alpha)/2 < 1$ и не опускаются ниже $\min\varphi/2 = (1-\alpha)/2 > 0$. Получаем, что $\|q_1\| = 1+\hat{\varepsilon}$, $\|q_2\| = 1$, и q_1, q_2 — действительно элементы квазиортогонального множества.

Для суммы

$$q_1+q_2 = \varphi + (1-\alpha+\hat{\varepsilon})\, u_1 - (1-\alpha+\hat{\varepsilon})\, \Phi \cdot u_2 - (1-\alpha+\hat{\varepsilon})\,(1 - 2|\varphi - \varphi(t_3)|)\, u_3$$

имеем $\|q_1 + q_2\| = 2 + \hat{\varepsilon}$ и

$$\lambda(\langle\varphi\rangle) \leqslant \frac{\rho(q_1+q_2, \langle\varphi\rangle)}{\|q_1+q_2\|} \leqslant \frac{\|q_1+q_2-\varphi\|}{\|q_1+q_2\|} =$$
$$= \frac{\max\left\{(1-\alpha+\hat{\varepsilon})\,\|u_1\|,\ \ (1-\alpha+\hat{\varepsilon})\,\|u_2\|,\ \ (1-\alpha+\hat{\varepsilon})\,\|u_3\|\right\}}{\|q_1+q_2\|} = \frac{1-\alpha+\hat{\varepsilon}}{2+\hat{\varepsilon}}.$$

При уменьшении окрестности $\widehat{U}$ число $\hat{\varepsilon}$ стремится к ε, и получается $\lambda(P_{\langle\varphi\rangle}) \leqslant \dfrac{1-\alpha+\varepsilon}{2+\varepsilon}$.

3. Покажем теперь, что $\lambda(P_{\langle\varphi\rangle}) \geqslant \dfrac{1-\alpha+\varepsilon}{2+\varepsilon}$, то есть что $\dfrac{\rho(q_1+q_2, \langle\varphi\rangle)}{\|q_1+q_2\|} \geqslant \dfrac{1-\alpha+\varepsilon}{2+\varepsilon}$ для $q_1, q_2 \in Q(\langle\varphi\rangle)$, $q_1+q_2 \neq 0$.

Можно рассматривать множество $Q_{1,+}$ только тех сумм $q_1 + q_2$, $q_1, q_2 \in Q(\langle\varphi\rangle)$, для которых $\max(q_1+q_2)+\min(q_1+q_2) > 0$ и $\|q_1+q_2\| = 1$, поскольку

$$\begin{gathered}\inf\left\{\frac{\rho(q_1+q_2,\langle\varphi\rangle)}{\|q_1+q_2\|} : \max(q_1+q_2)+\min(q_1+q_2) > 0\right\} = \\ = \inf\left\{\frac{\rho(q_1+q_2,\langle\varphi\rangle)}{\|q_1+q_2\|} : \max(q_1+q_2)+\min(q_1+q_2) < 0\right\} < \\ < \inf\left\{\frac{\rho(q_1+q_2,\langle\varphi\rangle)}{\|q_1+q_2\|} : \max(q_1+q_2)+\min(q_1+q_2) = 0\right\} = 1.\end{gathered}$$

Выберем произвольные q_1, q_2, сумма которых принадлежит $Q_{1,+}$. Пусть $s_{\min}$, $s_{\max}$ — соответственно различные точки минимума и максимума функции $q_1 + q_2$. Докажем, что на компакте K найдется такая отличная от $s_{\min}$ и $s_{\max}$ точка t, что $(q_1 + q_2)(t) \leqslant -\min(q_1 + q_2)$. Без ограничения общности считаем $\|q_1\| \geqslant \|q_2\|$. Для точки $t_{\min q_1}$ минимума q_1 и точки $t_{\min q_2}$ минимума q_2 справедливы неравенства

$$\begin{gathered}(q_1+q_2)(t_{\min q_1}) = q_2(t_{\min q_1}) - \|q_1\| \leqslant \|q_2\| - \|q_1\|, \\ (q_1+q_2)(t_{\min q_2}) = q_1(t_{\min q_2}) - \|q_2\| \leqslant \|q_1\| - \|q_2\|.\end{gathered}$$

С другой стороны, верно

$$\min(q_1+q_2) \leqslant \min q_1 + q_2(t_{\min q_1}) \leqslant \|q_2\| - \|q_1\| \leqslant 0, \tag{1}$$

и $(q_1+q_2)(t_{\min q_1}) \leqslant -\min(q_1+q_2)$, $(q_1+q_2)(t_{\min q_2}) \leqslant -\min(q_1+q_2)$. Заметим, что на множестве $Q_{1,+}$ в силу неравенства $\max(q_1 + q_2) + \min(q_1 + q_2) > 0$ точки $t_{\min q_1}$, $t_{\min q_2}$ различны, поскольку иначе $(q_1 + q_2)(t_{\min q_1}) = (q_1 + q_2)(t_{\max q_1}) = -\|q_1\| - \|q_2\| = = \min\|q_1+q_2\|$ и тогда $\max\|q_1+q_2\| + \min\|q_1 + q_2\| \leqslant 0$. В силу того же неравенства точка $s_{\max}$ не удовлетворяет условию на точку t. Значит, одну из точек $t_{\min q_1}$, $t_{\min q_2}$ можно выбрать в качестве t.

Рассмотрим теперь компакт $K_0 = \{s_{\max},\ \ s_{\min},\ \ t\}$, где t — выбранная точка компакта, для которой справедливо неравенство $(q_1 + q_2)(t) \leqslant$

$-\min(q_1+q_2)$. Обозначим $(q_1+q_2)|_{K_0}$ за z:

$$z(s_{\max}) = 1, \quad z(s_{\min}) = -\beta, \quad z(t) = \gamma;$$

$$0 \leqslant \beta < 1, \quad \gamma \leqslant \beta,$$

β неотрицательно в силу неположительности минимума q_1+q_2, см. неравенство (1). Функция $\varphi|_{K_0}$ имеет новые параметры α_0 и ε_0. Выразим их через α и ε. Имеем $\min\varphi|_{K_0} = \min\varphi + m$, $m \geqslant 0$, $\max\varphi|_{K_0} = \max\varphi - M$, $M \geqslant 0$.

$$\alpha_0 := \frac{\max\varphi|_{K_0} - \min\varphi|_{K_0}}{\max\varphi|_{K_0} + \min\varphi|_{K_0}} = \frac{2\alpha - (M+m)}{2-M+m}.$$

Пусть τ — точка минимума функции φ на компакте K_0. Положим

$$\varepsilon_0 := \frac{\inf_{K_0\setminus\{\tau\}}\varphi|_{K_0} - \min\varphi|_{K_0}}{\max\varphi|_{K_0} + \min\varphi|_{K_0}} =$$
$$= \frac{1}{2-M+m}\left(\left(\inf_{K\setminus\{t_{\min}\}}\varphi + E\right) - (\min\varphi + m)\right) = \frac{2\varepsilon + E - m}{2-M+m}, \quad E \geqslant 0.$$

Нормируем функцию $\varphi|_{K_0}$ так, чтобы сумма ее максимума и минимума равнялась двум, и назовем ее ψ. Запишем вектор ее значений — $(1+\alpha_0, \quad 1-\alpha_0+2\varepsilon_0, \quad 1-\alpha_0)$. Тем самым мы как-то занумеровываем три точки компакта K_0. Имеем

$$\frac{\rho(q_1+q_2,\langle\varphi\rangle)}{\|q_1+q_2\|} = \rho(q_1+q_2,\langle\varphi\rangle) \geqslant \rho\left((q_1+q_2)|_{K_0}, \langle\varphi|_{K_0}\rangle\right) = \rho(z,\langle\psi\rangle). \tag{2}$$

Покажем, что имеет место неравенство

$$\rho_z := \rho(z,\langle\psi\rangle) \geqslant \frac{1-\alpha_0+\varepsilon_0}{2+\varepsilon_0}. \tag{3}$$

Для доказательства рассмотрим несколько функционалов из аннулятора $\langle\psi\rangle^\perp \subset (C(K_0))^*$:

$$f_1 = \left(1-\alpha_0, \quad 0, \quad -(1+\alpha_0)\right), \quad \|f_1\| = 2;$$
$$f_2 = \left(1-\alpha_0+2\varepsilon_0, \quad -(1+\alpha_0), \quad 0\right), \quad \|f_2\| = 2+2\varepsilon_0;$$

$$f_3 = (-(1-\alpha_0), \quad -(1-\alpha_0), \quad 2+2\varepsilon_0)\,, \quad \|f_3\| = 4-2\alpha_0+2\varepsilon_0;$$

$$f_4 = (-(1-\alpha_0+2\varepsilon_0), \quad 2, \quad -(1-\alpha_0+2\varepsilon_0))\,, \quad \|f_4\| = 4-2\alpha_0+4\varepsilon_0.$$

Для всякого $f \in \langle\psi\rangle^\perp$, $f \neq 0$, справедливо неравенство $\rho_z \geqslant f(z)/\|f\|$:

$$\rho_z = \|z - P_{\langle\psi\rangle}(z)\| \geqslant \frac{f(z - P_{\langle\psi\rangle}(z))}{\|f\|} = \frac{f(z)}{\|f\|}.$$

Используя это неравенство, рассмотрим все случаи возможного распределения трех указанных выше значений z по уже занумерованным точкам компакта K_0.

Если $z = (1, \gamma, -\beta)$, то

$$\begin{aligned}
\rho_z &\geqslant \max\left\{\frac{f_1(z)}{\|f_1\|}, \frac{f_2(z)}{\|f_2\|}\right\} \\
&= \max\left\{\frac{1-\alpha_0+\beta(1+\alpha_0)}{2}, \frac{1-\alpha_0+2\varepsilon_0-(1+\alpha_0)\gamma}{2+2\varepsilon_0}\right\} \\
&\geqslant \begin{cases}
\dfrac{1-\alpha_0+\frac{\varepsilon_0}{2+\varepsilon_0}(1+\alpha_0)}{2} = \dfrac{1-\alpha_0+\varepsilon_0}{2+\varepsilon_0}, & \beta \geqslant \dfrac{\varepsilon_0}{2+\varepsilon_0} =: \beta^* \\[3ex]
\dfrac{1-\alpha_0+2\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{2+\varepsilon_0}(1+\alpha_0)}{2+2\varepsilon_0} = \dfrac{1-\alpha_0+\varepsilon_0}{2+\varepsilon_0}, & 0 \leqslant \beta \leqslant \beta^*.
\end{cases}
\end{aligned}$$

Если $z = (1, -\beta, \gamma)$, то

$$\rho_z \geqslant \frac{f_2(z)}{\|f_2\|} = \frac{1-\alpha_0+2\varepsilon_0+(1+\alpha_0)\beta}{2+2\varepsilon_0} \geqslant \frac{1-\alpha_0+2\varepsilon_0}{2+2\varepsilon_0} \geqslant \frac{1-\alpha_0+\varepsilon_0}{2+\varepsilon_0}.$$

Если $z = (\gamma, -\beta, 1)$ или $z = (-\beta, \gamma, 1)$, то

$$\rho_z \geqslant \frac{f_3(z)}{\|f_3\|} = \frac{2+2\varepsilon_0+(1-\alpha_0)(\beta-\gamma)}{4-2\alpha_0+2\varepsilon_0} \geqslant \frac{1+\varepsilon_0}{2-\alpha_0+\varepsilon_0} \geqslant \frac{1-\alpha_0+\varepsilon_0}{2+\varepsilon_0}.$$

Если $z = (\gamma, 1, -\beta)$ или $z = (-\beta, 1, \gamma)$, то

$$\rho_z \geqslant \frac{f_4(z)}{\|f_4\|} = \frac{2+(1-\alpha_0+2\varepsilon_0)(\beta-\gamma)}{4-2\alpha_0+4\varepsilon_0} \geqslant \frac{1}{2-\alpha_0+2\varepsilon_0} \geqslant \frac{1-\alpha_0+\varepsilon_0}{2+\varepsilon_0}.$$

Таким образом, (3) доказано.

Следуя неравенствам (2), (3) и выражениям для α_0 и ε_0, получаем

$$\frac{\rho(q_1+q_2,\langle\varphi\rangle)}{\|q_1+q_2\|} \geqslant \frac{1-\alpha_0+\varepsilon_0}{2+\varepsilon_0} = \\ = \frac{(2-M+m)-(2\alpha-(M+m))+(2\varepsilon+E-m)}{2(2-M+m)+(2\varepsilon+E-m)} = \\ = \frac{2-2\alpha+2\varepsilon+E+m}{4+2\varepsilon+E+m-2M} \geqslant \frac{1-\alpha+\varepsilon}{2+\varepsilon}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1.1. *Если функция φ достигает своего минимума на неодноточечной компоненте связности компакта K или в нескольких точках, в частности, если K есть отрезок действительной оси, то* $\lambda(P_{\langle\varphi\rangle}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$.

Следствие 1.2. *В условиях теоремы* $\lambda(P_{\langle\varphi\rangle}) = \dfrac{1}{2}$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi \equiv \mathrm{const} \neq 0$.

Из теоремы 1.1 и теоремы A из введения получаем

Следствие 1.3. *Для липшицевой константы $k(\langle\varphi\rangle)$ оператора $P_{\langle\varphi\rangle}$ справедлива оценка*

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha+\varepsilon} \leqslant k(\langle\varphi\rangle) \leqslant \frac{3-\alpha+2\varepsilon}{1-\alpha+\varepsilon}.$$

Ранее оценка сверху липшицевой константы оператора метрического проектирования на одномерное чебышевское подпространство пространства $C[K]$ была получена В.И. Бердышевым [8]. В наших обозначениях оценка Бердышева имеет вид

$$k(\langle\varphi\rangle) \leqslant 2\cdot\frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$

Оценка из следствия 1.3 улучшает эту оценку при $\alpha > \dfrac{1}{3}$. При $\varepsilon = 0$ и $\alpha \to 1$

(то есть когда $\langle\varphi\rangle$ "стремится стать" нечебышевским подпространством) получаем, что $k(\langle\varphi\rangle)$ асимптотически ведет себя как $\dfrac{2}{1-\alpha}$.

§2. Подпространство констант в $l_1^3(\mathbb{C})$.

Рассмотрим пространство $l_1^3(\mathbb{C})$ векторов (z_1, z_2, z_3) с нормой $\|(z_1, z_2, z_3)\|_3 = |z_1| + |z_2| + |z_3|$. Заметим, что для вектора $z = (z_1, z_2, z_3)$ ближайшим элементом в подпространстве констант $D = \{(d, d, d)\colon d \in \mathbb{C}\}$ является в точности такой вектор (s, s, s), что s есть точка Штейнера для точек z_1, z_2, z_3 на плоскости $\mathbb{C}$: *точкой Штейнера* (или *точкой Торричелли*) называется всякий элемент $s \in \mathbb{C}$, такой что $|z_1 - s| + |z_2 - s| + |z_3 - s| = \inf_{z\in\mathbb{C}}\{|z_1 - z| + |z_2 - z| + |z_3 - z|\}$. Действительно, $\rho(z, D) = \inf_{z\in\mathbb{C}}\{|z_1 - z| + |z_2 - z| + |z_3 - z|\}$. Для всякой тройки z_1, z_2, z_3 в пространстве $\mathbb{C}$ точка Штейнера существует и единственна (см., например, [24], гл. 7, § 5), значит на пространстве $l_1^3(\mathbb{C})$ корректно определен однозначный оператор метрической проекции P_D.

Теорема 1.2. *В пространстве $l_1^3(\mathbb{C})$ векторов (z_1, z_2, z_3) с нормой $\|(z_1, z_2, z_3)\|_3 = |z_1| + |z_2| + |z_3|$ оператор метрического проектирования P_D на подпространство констант $D = \{(d, d, d)\colon d \in \mathbb{C}\}$ имеет коэффициент линейности $\lambda(P_D) = \sqrt{21}/14$.*

Доказательство. Если точки z_1, z_2, z_3 образуют на плоскости $\mathbb{C}$ треугольник с углами, меньшими $2\pi/3$, тогда точка Штейнера s расположена так, что все углы $\angle z_i s z_j$ равны между собой и составляют каждый $2\pi/3$. В остальных случаях точкой Штейнера является одна из точек z_1, z_2, z_3, а именно — либо вершина тупого угла в треугольнике $z_1 z_2 z_3$, либо средняя из трех точек z_1, z_2, z_3, лежащих на одной прямой. Таким образом, можно явно указать все элементы квазиортогонального множества $Q(D) =$

$\{q \in l_1^3(\mathbb{C})\colon P_D(q) = 0\}$. С точностью до перестановок координат, это векторы вида $(r_1 e^{i\varphi}, r_2 e^{i(\varphi+\frac{2\pi}{3})}, r_3 e^{i(\varphi+\frac{4\pi}{3})})$, $(r_1 e^{i\varphi}, r_2 e^{i\psi}, 0)$; $r_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3; \varphi, \psi \in [0, 2\pi], 2\pi/3 \leqslant |\varphi - \psi| \leqslant 4\pi/3$.

Покажем, что сумма квазиортогональных элементов $q^1 + q^2 = (Z_1, Z_2, Z_3)$, таких что Z_1, Z_2, $Z_3 \neq 0$, не укладывается в угол, меньший $\pi/3$, т.е. точки Z_1, Z_2, Z_3 на плоскости $\mathbb{C}$ нельзя накрыть сектором раствора $\pi/3$ с вершиной в нуле.

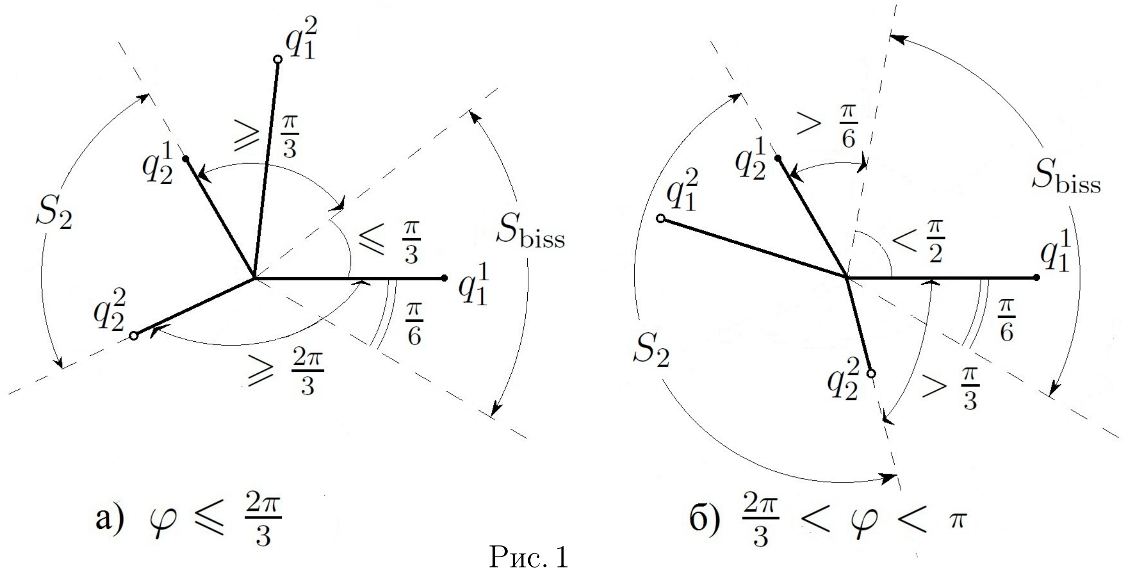

Рис. 1

1. Пусть $q^1 = \left(r_1, r_2 e^{i\frac{2\pi}{3}}, r_3 e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)$, $q^2 = \left(s_1 e^{i\varphi}, s_2 e^{i(\varphi+\frac{2\pi}{3})}, s_3 e^{i(\varphi+\frac{4\pi}{3})}\right)$, где $\varphi \in [0, \pi]$ и $r_j, s_j > 0$, $j = 1, 2, 3$. Рассмотрим случаи:

1) $\varphi \in [0, \pi)$. Предположим, что есть сектор S_1 раствора $\pi/3$ с вершиной в 0, в котором лежит компонента Z_1 вектора $q^1 + q^2$, и его биссектриса, не ограничивая общности, образует с компонентой q_1^1 вектора q^1 меньший евклидов угол, чем с компонентой q_1^2 вектора q^2. Значит, биссектриса сектора S_1 лежит в секторе S_{biss} (рис. 1). Действительно, в случае а) биссектриса не может опуститься вниз от компоненты q_1^1 больше чем на $\pi/6$ (иначе S_1 не пересекается с сектором $\widehat{q_1^1 0 q_1^2}$ и не содержит $q_1^1 + q_1^2$) и не может подняться вверх от q_1^1 больше чем на $\pi/3$ (иначе ее угол с компонентой q_1^2 меньше, чем с

q_1^1). В случае б) по тем же самым причинам биссектриса не может опуститься вниз от компоненты q_1^1 больше чем на $\pi/6$ и подняться вверх от q_1^1 больше чем на $\pi/2$. Компонента же Z_2 суммы $q^1 + q^2$ попадает в сектор $S_2 = \widehat{q_2^1 0 q_2^2}$, отделенный от сектора S_{biss} углом больше $\pi/6$. Поэтому компонента Z_2 не лежит в секторе S_1.

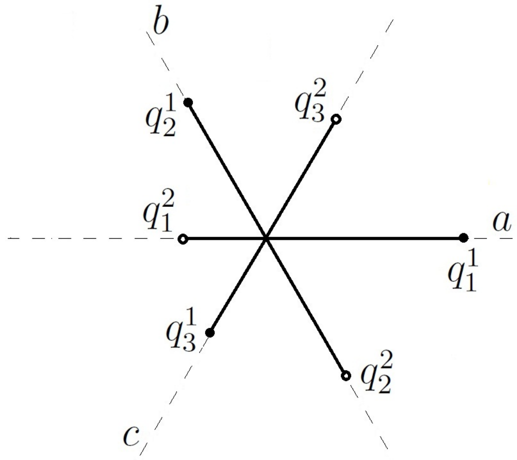

Рис. 2

2) $\varphi = \pi$. Тогда ненулевые компоненты Z_1, Z_2, Z_3 суммы квазиортогональных элементов $q^1 + q^2$ лежат на прямых a, b и c соответственно (рис. 2), и их невозможно накрыть сектором раствора $\pi/3$ с вершиной в нуле.

2. Пусть $q^1 = \left(r_1, r_2 e^{i\frac{2\pi}{3}}, r_3 e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)$, $q^2 = \left(s_1 e^{i\varphi}, s_2 e^{i(\varphi+\frac{4\pi}{3})}, s_3 e^{i(\varphi+\frac{2\pi}{3})}\right)$, где $\varphi \in [0, \pi]$ и $r_j, s_j > 0$, $j = 1, 2, 3$.

Предположим, что есть сектор S_1 раствора $\pi/3$ с вершиной в 0, в котором лежит компонента Z_1 вектора $q^1 + q^2$. При этом биссектриса сектора S_1 лежит в секторе S_{biss} (рис. 3). Действительно, как в случае а), так и в случае б) биссектриса не может опуститься вниз от компоненты q_1^1 и подняться вверх от компоненты q_1^2 больше чем на $\pi/6$ (иначе S_1 не пересекается с сектором $\widehat{q_1^1 0 q_1^2}$ и не содержит $q_1^1 + q_1^2$). Компонента же Z_3 суммы $q^1 + q^2$ попадает в открытый сектор $S_3 = \widehat{q_3^1 0 q_3^2}$, отделенный от сектора S_{biss} по крайней мере углом $\pi/6$. Поэтому компонента Z_3 не лежит в секторе S_1.

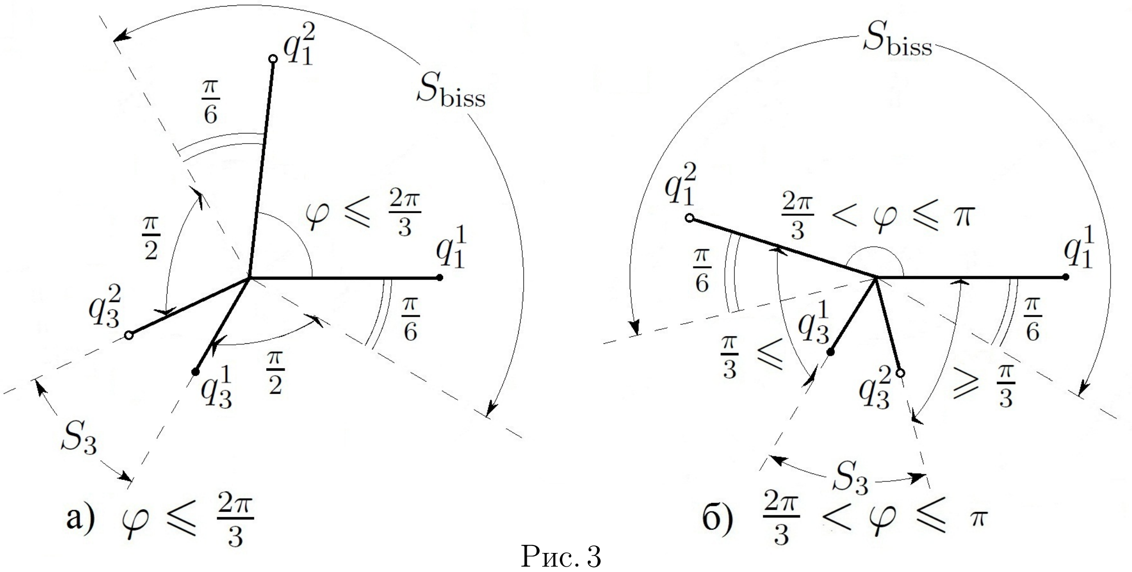

Рис. 3

3. Пусть $q^1 = \left(r_1, r_2 e^{i\frac{2\pi}{3}}, r_3 e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)$, $q^2 = \left(s_1 e^{i\varphi}, s_2 e^{i(\varphi \pm \psi)}, 0\right)$, где $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\psi \in [2\pi/3, \pi]$ и $r_j, s_1, s_2 > 0$, $j = 1, 2, 3$. Возможны случаи:

1) $\varphi \in [0, \pi) \cap (\pi, 2\pi)$. Предположим, что есть сектор S_3 раствора $\pi/3$ с вершиной в 0, в котором лежит компонента Z_3 вектора $q^1 + q^2$. На рисунке 4 обозначен сектор S_{biss}, в котором лежит биссектриса сектора S_3.

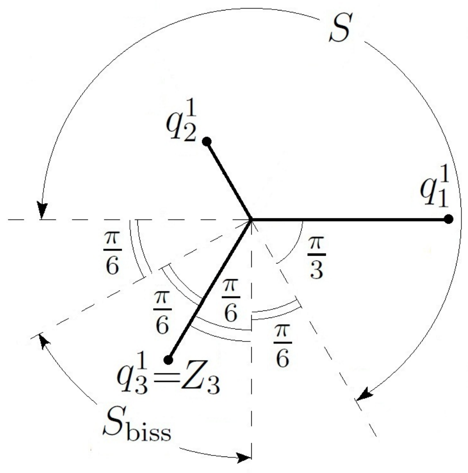

Рис. 4

Если $\varphi \in [0, \pi) \cap [5\pi/3, 2\pi)$, то сумма компонент q_1^1 и q_1^2 лежит в открытом секторе S и отделена от сектора S_{biss} углом, большим чем $\pi/6$. В этом случае компонента Z_1 вектора q^1+q^2 не попадает в сектор S_3. Если же $\varphi \in (\pi, 5\pi/3)$, то в открытом секторе S лежит компонента q_2^2, а значит, — и компонента Z_2 суммы квазиортогональных элементов $q^1 + q^2$. Тогда Z_2 отделена от сектора S_{biss} углом, большим $\pi/6$, и не попадает в сектор S_3.

2) $\varphi = \pi$. В этом случае компонента Z_1 суммы $q^1 + q^2$ лежит на прямой a, компонента Z_2 лежит в секторе S_2, а Z_3 — на луче b (см. рис. 5), $Z_j \neq 0, j = 1, 2, 3$. Поэтому Z_1, Z_2 и Z_3 нельзя накрыть сектором раствора $\pi/3$ с вершиной в начале координат.

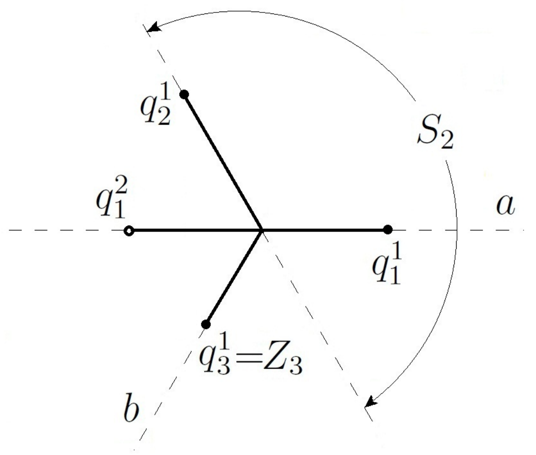

Рис. 5

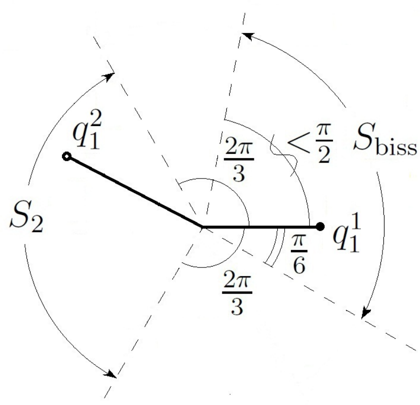

Рис. 6

4. Пусть $q^1 = \big(r_1, r_2 e^{\pm i\psi}, 0\big)$, $q^2 = \big(s_1 e^{i\varphi}, 0, s_3 e^{i(\varphi\pm\xi)}\big)$, где $\psi \in [2\pi/3, \pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$, $\xi \in [2\pi/3, \pi]$ и $r_1, r_2, s_1, s_3 > 0$. Рассмотрим случаи:

1) $\varphi \in [0, \pi)$. Предположим, что есть сектор S_1 раствора $\pi/3$ с вершиной в 0, в котором лежит компонента Z_1 суммы $q^1 + q^2$. Без ограничения общности, биссектриса этого сектора образует с компонентой q_1^1 меньший евклидов угол, чем с компонентой q_1^2. На рисунке 6 обозначен сектор S_{biss}, в котором лежит биссектриса сектора S_1. Действительно, биссектриса не может опуститься вниз от компоненты q_1^1 больше чем на $\pi/6$ (иначе S_1 не пересекается

с сектором $\widehat{q_1^1 0 q_1^2}$ и не содержит $q_1^1 + q_1^2$) и не может подняться вверх от q_1^1 больше чем на $\pi/2$ (иначе ее угол с компонентой q_1^2 меньше, чем с q_1^1). Тогда компонента $Z_2 = q_2^1$ вектора $q^1 + q^2$ отделена от сектора S_{biss} углом, большим $\pi/6$, а значит, Z_2 не попадает в сектор S_1.

2) $\varphi = \pi$. Тогда ненулевые компоненты вектора $q^1 + q^2 = (r_1 - s_1, r_2 e^{\pm i\psi}, -s_3 e^{\pm i\xi})$, очевидно, не попадают в один сектор раствора $\pi/3$ с вершиной в нуле.

5. Пусть $q^1 = (q_1^1, q_2^1, q_3^1)$ — квазиортогональный элемент, $q^2 = (s_1, 0, 0)$, где $s_1 \geqslant 0$.

Поскольку сумма $q^1 + q^2 = (s_1 + q_1^1, q_2^1, q_3^1) = (Z_1, Z_2, Z_3)$ не содержит нулевых компонент, то q_2^1, q_3^1 не равны нулю. При этом угол между направлениями q_2^1 и q_3^1 составляет по крайней мере $2\pi/3$, а значит, Z_1, Z_2, Z_3 нельзя накрыть сектором раствора $\pi/3$ с вершиной в нуле.

Рассмотренные случаи охватывают все возможные комбинации квазиортогональных элементов q^1 и q^2 с точностью до поворота вокруг начала координат, перестановки компонент местами, симметрии относительно горизонтальной оси, замены q^1 на q^2 и наоборот. Поэтому для ненулевых компонент Z_1, Z_2, Z_3 суммы $q^1 + q^2$ справедливо, что точки Z_1, Z_2, Z_3 невозможно покрыть сектором раствора $\pi/3$ с вершиной в начале координат.

Оценим снизу коэффициент линейности оператора P_D. Для этого разберем различные случаи строения вектора $q^1 + q^2 = (Z_1, Z_2, Z_3)$, применяя неравенство $\rho(q^1 + q^2, D)/\|q^1 + q^2\|_3 \geqslant f(q^1 + q^2)/\left(\|q^1 + q^2\|_3 \|f\|_\infty\right)$, справедливое для всякого функционала f из аннулятора $D^\perp \subset l_\infty^3$. Точки на плоскости $\mathbb{C}$ ниже будем рассматривать как радиус–векторы, исходящие из начала координат.

I. У вектора $q^1 + q^2$ есть 2 компоненты, угол между которыми на

плоскости $\mathbb{C}$ больше либо равен $2\pi/3$.

Не ограничивая общности, угол $\alpha := \angle Z_1 Z_2 \geqslant 2\pi/3$. Найдется такой функционал $f = (f_1, f_2, f_3)$, $f_i \in \mathbb{C}$, $|f_i| = 1$, $f_1 + f_2 + f_3 = 0$, что каждый из углов $\angle f_i Z_i$ меньше либо равен $\pi/3$. На рисунке 7 показаны возможные конфигурации функционала f в случае, если компонента Z_3 составляет с компонентой (без ограничения общности) Z_1 угол не более $2\pi/3$ и лежит в секторе S_3.

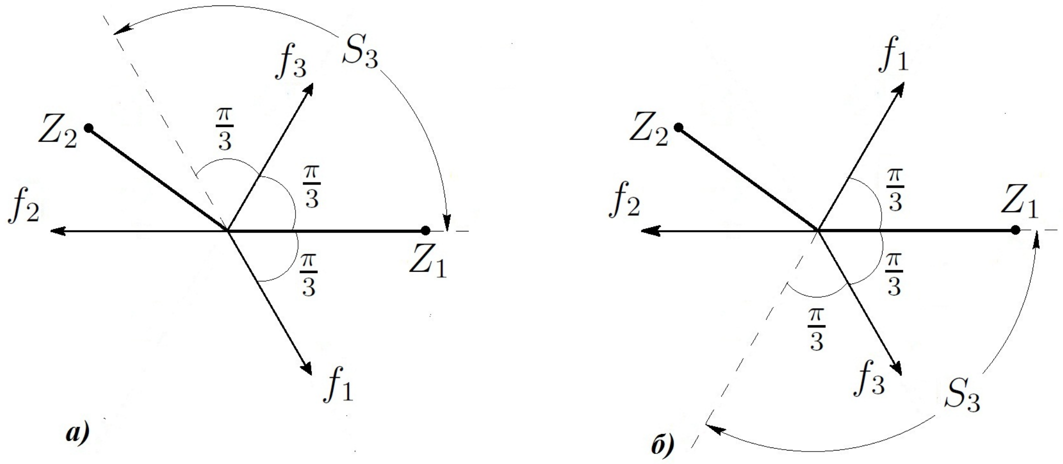

Рис. 7

Тогда

$$\frac{\rho(q^1+q^2,D)}{\|q^1+q^2\|_3} \geqslant \frac{f(q^1+q^2)}{\|q^1+q^2\|_3\|f\|_\infty} \geqslant \frac{\cos(\pi/3)\cdot(|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|)}{(|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|)\cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

II. Все компоненты вектора $q^1 + q^2$ на плоскости $\mathbb{C}$ лежат внутри угла $2\pi/3$.

Пусть компоненты Z_1, Z_2, Z_3 суммы $q^1 + q^2$ упорядочены по невозрастанию модулей, $|Z_1| \geqslant |Z_2| \geqslant |Z_3|$, без ограничения общности. При этом, по доказанному, угол между какими-то двумя компонентами вектора $q^1 + q^2$ не меньше $\pi/3$. Разберем три случая взаимного расположения радиус−векторов Z_1, Z_2, Z_3.

а) $\angle Z_1 Z_2 \geqslant \pi/3$. Найдется такой функционал $f = (f_1, f_2, 0)$, $f_i \in \mathbb{C}$,

$|f_i| = 1, f_1 = -f_2$, что $\angle f_1 Z_1 = \pi/3$, $\angle f_2 Z_2 \leqslant \pi/3$ (рис. 8). Тогда

$$\frac{\rho(q^1+q^2, D)}{\|q^1+q^2\|_3} \geqslant \frac{f(q^1+q^2)}{\|q^1+q^2\|_3 \|f\|_\infty} \geqslant \frac{\cos(\pi/3)(|Z_1|+|Z_2|)}{(|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|)\cdot 1} \geqslant \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

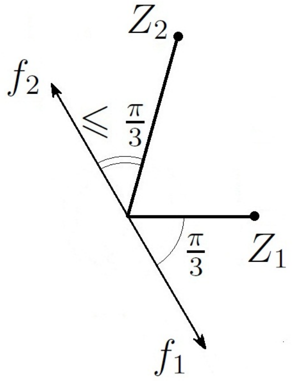

Рис. 8

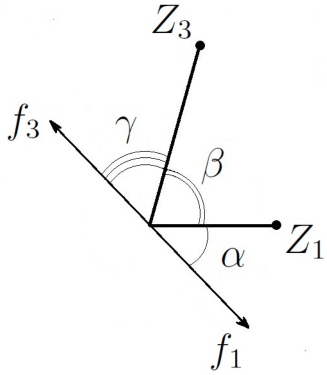

Рис. 9

b) $\angle Z_1 Z_3 \geqslant \pi/3$. Пусть $\beta := \angle Z_1 Z_3$. Рассмотрим семейство функционалов $\{f_\alpha = (f_1^\alpha, 0, f_3^\alpha)\colon\ f_i^\alpha \in \mathbb{C},\ |f_i^\alpha| = 1,\ f_1^\alpha = -f_3^\alpha,\ \angle f_1^\alpha Z_1 = \alpha, \angle f_3^\alpha Z_3 = \gamma\}$, где $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, $\pi/6 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi/3, 0 \leqslant \gamma \leqslant \pi/2$ (рис. 9).

$$\frac{\rho(q^1+q^2, D)}{\|q^1+q^2\|_3} \geqslant \frac{f_\alpha(q^1+q^2)}{\|q^1+q^2\|_3 \|f_\alpha\|_\infty} \geqslant \frac{\cos\alpha|Z_1| + \cos\gamma|Z_3|}{(|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|)\cdot 1}$$

$$\geqslant \frac{\cos\alpha|Z_1| + \cos(2\pi/3-\alpha)|Z_3|}{|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|} = \frac{\cos\alpha|Z_1| - \frac{1}{2}\cos\alpha|Z_3| + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha|Z_3|}{|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|}.$$

Исследуем функцию $g(t) := \cos t|Z_1| - \frac{1}{2}\cos t|Z_3| + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t|Z_3|$ на максимум на отрезке $[\pi/6, 2\pi/3]$.

$$g'(t) = -\sin t|Z_1| + \frac{1}{2}\sin t|Z_3| + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t|Z_3| = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin t(|Z_1| - \frac{1}{2}|Z_3|) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t|Z_3|.$$

Получаем, что для точки экстремума $\hat{t}$ функции $g(t)$ выполнено $\dfrac{\sin\hat{t}}{\cos\hat{t}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot \dfrac{1}{|Z_1|/|Z_3| - 1/2} \leqslant \sqrt{3}$, а значит на отрезке $[\pi/6, 2\pi/3]$ угол $\hat{t}$ меньше либо равен $\pi/3$. Вообще, для угла $\hat{t}$ справедливы равенства:

$$\begin{cases} \sin\hat{t} = m \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}|Z_3|, \\ \\ \cos\hat{t} = m \cdot \left(|Z_1| - \dfrac{1}{2}|Z_3|\right), \quad m := \dfrac{1}{\sqrt{|Z_1|^2 - |Z_1||Z_3| + |Z_3|^2}}. \end{cases}$$

Поскольку на отрезке $[\pi/2, 2\pi/3]$ функция $g(t)$ монотонно убывает, и на отрезке $[\pi/6, 2\pi/3]$ точка экстремума функции единственна, то $\hat{t}$ и есть точка максимума $g(t)$. Поэтому среди семейства $\{f_\alpha\}$ найдется такой функционал $f_{\hat{t}}$, что

$$\frac{f_{\hat{t}}(q^1+q^2)}{\|q^1+q^2\|_3 \cdot \|f_{\hat{t}}\|_\infty} \geqslant \frac{g(\hat{t})}{|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|} = \frac{m \cdot \left(|Z_1| - \frac{1}{2}|Z_3|\right)^2 + m \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|Z_3|\right)^2}{|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|}$$

$$= \frac{m \cdot \left(|Z_1|^2 - |Z_1||Z_3| + |Z_3|^2\right)}{|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|} = \frac{\sqrt{|Z_1|^2 - |Z_1||Z_3| + |Z_3|^2}}{|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|}.$$

Оценим снизу величину $\sqrt{|Z_1|^2 - |Z_1||Z_3| + |Z_3|^2}/\left(|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|\right)$ по всем векторам $(Z_1, Z_2, Z_3)\,, |Z_1| \geqslant |Z_2| \geqslant |Z_3|$:

$$\frac{\sqrt{|Z_1|^2 - |Z_1||Z_3| + |Z_3|^2}}{|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|}$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{|Z_1|^2 - |Z_1||Z_3| + |Z_3|^2}}{2|Z_1|+|Z_3|} = \frac{\sqrt{\left(|Z_1/Z_3|\right)^2 - |Z_1/Z_3| + 1}}{2|Z_1/Z_3|+1}.$$

Обозначим $|Z_1/Z_3|$ за r, $r \geqslant 1$, и найдем минимум функции $G(r) = \sqrt{r^2-r+1}/(2r+1)$ на интервале $[1, +\infty)$.

$$G'(r) = \frac{(2r-1)(2r+1)/(2\sqrt{r^2-r+1}) - \sqrt{r^2-r+1} \cdot 2}{(2r+1)^2}$$

$$= \frac{4r-5}{2\sqrt{r^2-r+1}(2r+1)^2} = 0.$$

Поскольку производная $G'(r)$ в точке $\hat{r} = 5/4$ меняет знак с минуса на плюс, то $\hat{r}$ — точка минимума функции $G(r)$. Тогда

$$\frac{\rho(q^1 + q^2, D)}{\|q^1 + q^2\|_3} \geqslant G(\hat{r}) = \frac{\sqrt{21}}{14}.$$

c) $\angle Z_2 Z_3 \geqslant \pi/3$, $\angle Z_1 Z_2 < \pi/3$, $\angle Z_1 Z_3 < \pi/3$.

Для оценки снизу отношения $\rho\left((Z_1, Z_2, Z_3), D\right)/\|(Z_1, Z_2, Z_3)\|_3$ можно считать, что в треугольнике $Z_1 Z_2 Z_3$ угол $\angle Z_2 Z_1 Z_3 \geqslant 2\pi/3$. Если $\angle Z_2 Z_1 Z_3 < 2\pi/3$, то для тройки Z_1, Z_2, Z_3 найдется точка Штейнера s, $s \neq Z_1$. Тогда

$$1 \geqslant \frac{\rho\left((Z_1, Z_2, Z_3), D\right)}{\|(Z_1, Z_2, Z_3)\|_3} = \frac{|Z_1 - s| + |Z_2 - s| + |Z_3 - s|}{|Z_1| + |Z_2| + |Z_3|}$$

$$\geqslant \frac{|Z_1 - s| + |Z_2 - s| + |Z_3 - s|}{|Z_1 - s| + |s| + |Z_2| + |Z_3|} \geqslant \frac{|Z_2 - s| + |Z_3 - s|}{|s| + |Z_2| + |Z_3|},$$

последнее неравенство выполнено в силу $|Z_2 - s| + |Z_3 - s| \leqslant |s| + |Z_2| + |Z_3|$ (это следует из того, что $|Z_1 - s| + |Z_2 - s| + |Z_3 - s| \leqslant |Z_1 - s| + |s| + |Z_2| + |Z_3|$). Поэтому

$$\frac{\rho\left((Z_1, Z_2, Z_3), D\right)}{\|(Z_1, Z_2, Z_3)\|_3} \geqslant \frac{\rho\left((s, Z_2, Z_3), D\right)}{\|(s, Z_2, Z_3)\|_3}, \qquad \angle Z_2 s Z_3 = 2\pi/3.$$

Если при этом $|s| \leqslant |Z_2|$, то вектор (s, Z_2, Z_3) удовлетворяет пункту II b) и верна оценка $\rho\left((s, Z_2, Z_3), D\right)/\|(s, Z_2, Z_3)\|_3 \geqslant \sqrt{21}/14$.

Итак, тройка Z_1, Z_2, Z_3 такова, что $\angle Z_2 Z_1 Z_3 \geqslant 2\pi/3$, $|Z_1| > |Z_2| \geqslant |Z_3|$, $\rho\left((Z_1, Z_2, Z_3), D\right)/\|(Z_1, Z_2, Z_3)\|_3 = \left(|Z_2 - Z_1| + |Z_3 - Z_1|\right)/|Z_1| + |Z_2| + |Z_3|$. Рассмотрим вектор:

$$(Z_1', Z_2', Z_3) := \left(\frac{|Z_1|}{|Z_2|} Z_2, \frac{|Z_2|}{|Z_1|} Z_1, Z_3\right).$$

Векторы с такой конфигурацией рассматривались в пункте II b), поэтому $\rho\left((Z_1', Z_2', Z_3), D\right)/\|(Z_1', Z_2', Z_3)\|_3 \geqslant \sqrt{21}/14$. Покажем, что

$$\frac{\rho\left((Z_1, Z_2, Z_3), D\right)}{\|(Z_1, Z_2, Z_3)\|_3} > \frac{\rho\left((Z_1', Z_2', Z_3), D\right)}{\|(Z_1', Z_2', Z_3)\|_3}.$$

Рассмотрим четырехугольник $OZ_1'Z_2'Z_3$ (рис. 10). Пусть $\angle Z_1'OZ_2' = \alpha$, $\angle Z_2'0Z_3 = \beta$, тогда $\alpha + \beta \geqslant \pi/3$. В треугольнике $OZ_2'Z_3$ угол $\angle 2 := \angle OZ_2'Z_3$ меньше либо равен угла $\angle 3 := \angle Z_2'Z_3 0$, поэтому $\angle 2 \leqslant (\pi - \beta)/2$. В треугольнике $OZ_2'Z_1'$ угол $\angle 1 := \angle OZ_2'Z_1'$ меньше $\pi - \alpha$. Получаем, что

$$\angle Z_1'Z_2'Z_3 = \angle 1 + \angle 2 \leqslant \pi - \alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} \leqslant \frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2} \leqslant \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}.$$

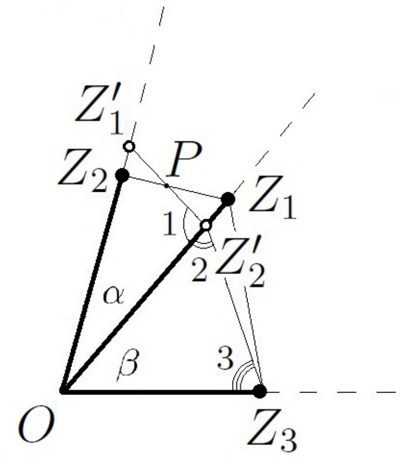

Рис. 10

Теперь рассмотрим четырехугольник $Z_1Z_3Z_2'P$(рис. 10). Угол $\angle PZ_1Z_3 \geqslant 2\pi/3$, поэтому внешний угол $\angle PZ_2'Z_3 = \angle Z_1'Z_2'Z_3 > 2\pi/3$. Поэтому тройка Z_1', Z_2', Z_3 составляет треугольник $Z_1'Z_2'Z_3$ с углом $\angle Z_2'$, большим $2\pi/3$, и для тройки Z_1', Z_2', Z_3 точкой Штейнера является точка Z_2', $\rho\left((Z_1', Z_2', Z_3), D\right) = |Z_1' - Z_2'| + |Z_3 - Z_2'|$.

В треугольнике $Z_1Z_2'Z_3$ угол $\angle Z_1Z_2'Z_3$ тупой (как смежный с острым углом $\angle 2$), а значит сторона Z_1Z_3 больше стороны Z_3Z_2'. Поэтому выполнена цепочка неравенств

$$\frac{\rho(q^1+q^2, D)}{\|q^1+q^2\|_3} = \frac{\rho\left((Z_1, Z_2, Z_3), D\right)}{\|(Z_1, Z_2, Z_3)\|_3}$$

$$= \frac{|Z_2 - Z_1| + |Z_3 - Z_1|}{|Z_1| + |Z_2| + |Z_3|} = \frac{|Z_2' - Z_1'| + |Z_3 - Z_1|}{|Z_1'| + |Z_2'| + |Z_3|}$$

$$> \frac{|Z_1' - Z_2'| + |Z_3 - Z_2'|}{|Z_1'| + |Z_2'| + |Z_3|} = \frac{\rho\left((Z_1', Z_2', Z_3), D\right)}{\|(Z_1', Z_2', Z_3)\|_3} \geqslant \frac{\sqrt{21}}{14}.$$

Из рассмотренных случаев получаем оценку снизу для коэффициента линейности,

$$\lambda(P_D) = \inf\left\{\frac{\rho(q^1+q^2, D)}{\|q^1+q^2\|_3} \colon q^1, q^2 \in Q(D), q^1+q^2 \neq 0\right\} \geqslant \frac{\sqrt{21}}{14}.$$

Построим теперь специальные квазиортогональные элементы $\hat{q}^1, \hat{q}^2$, чтобы оценить коэффициент линейности $\lambda(P_D)$ сверху. Пусть $\varepsilon > 0$ – некоторое малое число. Возьмем

$$\hat{q}^1 = \left(0, Re^{-i\frac{\pi}{3}}, \frac{4}{5}e^{i\frac{\pi}{3}}\right), \qquad \hat{q}^2 = \left(e^{-i\varepsilon}, Se^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\varepsilon\right)}, 0\right),$$

где $R, S \in \mathbb{R}_+$, $Re^{-i\frac{\pi}{3}} + Se^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\varepsilon\right)} = 1$. Для суммы квазиортогональных элементов при этом выполнено равенство $\hat{q}^1 + \hat{q}^2 = \left(e^{-i\varepsilon}, 1, \frac{4}{5}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$. Тогда

$$\lambda(P_D) \leqslant \frac{\rho(\hat{q}^1+\hat{q}^2, D)}{\|\hat{q}^1+\hat{q}^2\|_3} \leqslant \frac{\|\left(e^{-i\varepsilon}, 1, \frac{4}{5}e^{i\frac{\pi}{3}}\right) - (1,1,1)\|_3}{\|\left(e^{-i\varepsilon}, 1, \frac{4}{5}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\|_3} \leqslant \frac{|e^{-i\varepsilon}-1| + \sqrt{21}/5}{14/5}.$$

В силу произвольности ε получаем $\lambda(P_D) \leqslant \sqrt{21}/14$.

Из верхней и нижней оценок $\lambda(P_D)$ следует утверждение теоремы.

Заметим, что результат теоремы 1.2 тесно связан со II главой диссертации.

§3. Одномерные подпространства в l_p^n.

Рассмотрим действительное пространство l_p^n, $1 < p < \infty, p \neq 2$, $n \geqslant 2$, с нормой $\|x\|_p = \|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p}$. Всякое линейное подпространство $Y \subset l_p^n$ является чебышевским в силу строгой выпуклости пространства l_p^n. Справедлив следующий критерий.

Лемма 1.A. [52, теорема 4.2.1] *Элемент $q = (q_1, \ldots, q_n) \in l_p^n$ является квазиортогональным к подпространству $Y \subset l_p^n$ тогда и только тогда,* *когда для любого элемента $y = (y_1, \dots, y_n) \in Y$ справедливо равенство*

$$\sum_{j=1}^{n} |q_j|^{p-1} \cdot \operatorname{sgn}(q_j) \cdot y_j = 0.$$

Теорема 1.3. 1) *Пусть $n \geqslant 3$ и $Y = \langle y \rangle$ — одномерное подпространство в пространстве l_p^n, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, порожденное элементом $y \in l_p^n$ вида $(y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0)$, $0 < |y_1| \leqslant |y_2| \leqslant \dots \leqslant |y_m|$, $3 \leqslant m \leqslant n$. Тогда*

$$\lambda(P_Y) \leqslant \left[\begin{array}{ll} \dfrac{1}{M^{1/p}}, & p \in (1,2), \quad \text{где } M = \sum_{j=2}^{m} (|y_j|/|y_1|)^p; \\[4ex] \dfrac{(1 + (|y_2|/|y_1|)^p)^{1/p}}{M_1^{1/p}}, & p \in (2,\infty), \quad \text{где } M_1 = \sum_{j=3}^{m} (|y_j|/|y_1|)^p. \end{array} \right.$$

2) *Для подпространства констант $I = \langle (1, \dots, 1) \rangle \subset l_p^n$ справедлива оценка*

$$\frac{1}{2^{1/q}(n-1)^{1/p}} \leqslant \lambda(P_I) \leqslant \left[\begin{array}{ll} \dfrac{1}{(n-1)^{1/p}}, & p \in (1,2), \\[4ex] \dfrac{2^{1/p}}{(n-2)^{1/p}}, & p \in (2,\infty), \end{array} \right. \qquad \text{где } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Доказательство. 1) Чтобы оценить $\lambda(P_Y)$ сверху, построим специальные квазиортогональные элементы q_1 и q_2, в зависимости от p. Не ограничивая общности, будем считать, что все компоненты вектора y неотрицательны, а также нормируем y таким образом, что $1 = y_1 \leqslant y_2 \leqslant \dots \leqslant y_m$. При этом $M = \sum_{j=2}^{m} y_j^p$, $M_1 = \sum_{j=3}^{m} y_j^p$.

1. Пусть $p \in (1,2)$. Возьмем вектор

$$q^1 = \left(0,\ \left(\frac{M_1}{y_2} \right)^{\frac{1}{p-1}},\ -y_3,\ \dots,\ -y_m,\ \underbrace{0,\ \dots,\ 0}_{n-m} \right).$$

Заметим, что q^1 — квазиортогональный элемент по лемме 1.A. Пусть δ — некоторое малое число, $0 < \delta < 1$, и параметр $u = u(\delta) \in (0, \delta]$ таков, что вектор

$$q^2(\delta) = \left(-\delta + u,\ \left(\frac{M_1}{y_2}\right)^{\frac{1}{p-1}} + uy_2,\ (-1+u)y_3,\ \ldots,\ (-1+u)y_m,\ \underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{n-m}\right)$$

квазиортогонален подпространству Y:

$$|-\delta+u|^{p-1}\cdot\operatorname{sgn}(-\delta+u) + \left|\left(\frac{M_1}{y_2}\right)^{\frac{1}{p-1}} + uy_2\right|^{p-1}\cdot\operatorname{sgn}\left(\left(\frac{M_1}{y_2}\right)^{\frac{1}{p-1}} + uy_2\right)\cdot y_2$$
$$+\sum_{j=3}^{m}|(-1+u)y_j|^{p-1}\cdot\operatorname{sgn}\left((-1+u)y_j\right)\cdot y_j = 0.$$

Преобразуем равенство:

$$-(\delta-u)^{p-1} + \left(\left(\frac{M_1}{y_2}\right)^{\frac{1}{p-1}} + uy_2\right)^{p-1} y_2 - M_1(1-u)^{p-1} = 0;$$

$$F(u) := M_1\left(1 + uy_2\left(\frac{y_2}{M_1}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} - M_1(1-u)^{p-1} - (\delta-u)^{p-1} = 0.$$

Докажем, что для всех достаточно малых δ одно из значений параметра $u = u(\delta)$, удовлетворяющее равенству $F(u) = 0$, лежит в малой окрестности числа δ. Действительно, с одной стороны, $F(\delta) = M_1\left(1 + \delta y_2\left(\frac{y_2}{M_1}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} - M_1(1-\delta)^{p-1} > 0$. Для всякого же числа α, $0 < \alpha < 1$, найдется такое достаточно малое $\delta = \delta(\alpha)$, что $F(\alpha\delta) < 0$:

$$F(\alpha\delta) = M_1\left(1 + \alpha\delta y_2\left(\frac{y_2}{M_1}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} - M_1(1-\alpha\delta)^{p-1} - (\delta-\alpha\delta)^{p-1}$$
$$= M_1\left(1 + (p-1)\alpha\delta y_2\left(\frac{y_2}{M_1}\right)^{\frac{1}{p-1}} + o(\delta)\right) - M_1(1-(p-1)\alpha\delta + o(\delta))$$
$$-(1-\alpha)^{p-1}\delta^{p-1} = M_1(p-1)\alpha\left(1 + y_2\left(\frac{y_2}{M_1}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right)\delta + o(\delta) - (1-\alpha)^{p-1}\delta^{p-1}$$

$$= o(\delta^{p-1}) - (1-\alpha)^{p-1}\delta^{p-1} < 0.$$

Поэтому подходящее значение параметра $u(\delta)$ лежит в пределах от $\alpha\delta(\alpha)$ до $\delta(\alpha)$.

Зафиксируем теперь некоторое число α, $0 < \alpha < 1$, и выберем в соответствии с ним значения $\delta = \delta(\alpha)$, $u = u(\delta) \in (\alpha\delta, \delta)$ и квазиортогональный элемент $q^2 = q^2(\delta)$. Разность $q^2 - q^1$ есть вектор $(-\delta+u,\ uy_2,\ \ldots,\ uy_m,\ \underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{n-m})$. Верна следующая цепочка неравенств:

$$\lambda(P_Y)^p \leqslant \frac{\rho(q^2-q^1, Y)^p}{\|q^2-q^1\|_p^p} \leqslant \frac{\|q^2-q^1-uy\|_p^p}{\|q^2-q^1\|_p^p}$$
$$\leqslant \frac{\delta^p}{(\delta-u)^p + \sum_{j=2}^m u^p \cdot y_j^p} \leqslant \frac{\delta^p}{u^p \sum_{j=2}^m y_j^p} < \frac{1}{\alpha^p M}.$$

Эта оценка верна для всякого $\alpha \in (0,1)$, а значит, $\lambda(P_Y)^p \leqslant 1/M$, и

$$\lambda(P_Y) \leqslant \frac{1}{M^{1/p}}.$$

2. Пусть $p \in (2,\infty)$. Возьмем квазиортогональный элемент $q^1 = \left(y_2^{\frac{1}{p-1}},\ -1,\ \underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{n-2}\right)$. Пусть δ — некоторое малое число, $0 < \delta < 1$, и параметр $u = u(\delta) \in (0, \delta]$ таков, что вектор

$$q^2(\delta) = \left(y_2^{\frac{1}{p-1}} + \delta - u,\ -1 + (\delta-u)y_2,\ -uy_3,\ \ldots,\ -uy_m,\ \underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{n-m}\right)$$

является квазиортогональным элементом:

$$\left|y_2^{\frac{1}{p-1}} + \delta - u\right|^{p-1} \cdot \operatorname{sgn}\left(y_2^{\frac{1}{p-1}} + \delta - u\right)$$
$$+|-1+(\delta-u)y_2|^{p-1}\cdot\operatorname{sgn}(-1+(\delta-u)y_2)\cdot y_2 + \sum_{j=3}^m |-uy_j|^{p-1}\cdot\operatorname{sgn}(-uy_j)\cdot y_j = 0.$$

Преобразуем равенство:

$$\left(y_2^{\frac{1}{p-1}}+\delta-u\right)^{p-1}-(1-(\delta-u)y_2)^{p-1}y_2-M_1u^{p-1}=0.$$

При стремлении δ к нулю выполнено следующее:

$$\left(1+(p-1)\frac{\delta-u}{y_2^{\frac{1}{p-1}}}+o(\delta)\right)y_2-(1-(p-1)(\delta-u)y_2+o(\delta))\,y_2-M_1u^{p-1}=0$$

$$\Leftrightarrow (p-1)\left(\frac{1}{y_2^{\frac{1}{p-1}}}+1\right)y_2(\delta-u)+o(\delta)=0,$$

а значит $u=\delta+o(\delta),\quad \delta\to 0.$

Разность q^2-q^1 есть вектор $(\delta-u,\ (\delta-u)y_2,\ -uy_3,\ \ldots,\ -uy_m,\ \underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{n-m})$. Верна следующая цепочка неравенств:

$$\lambda(P_Y)^p\leqslant\frac{\rho(q^2-q^1,Y)^p}{\|q^2-q^1\|_p^p}\leqslant\frac{\|q^2-q^1+uy)\|_p^p}{\|q^2-q^1\|_p^p}$$
$$\leqslant\frac{\delta^p+\delta^py_2^p}{(\delta-u)^p+(\delta-u)^py_2^p+\sum_{j=3}^m u^py_j^p}\leqslant\frac{(1+y_2^p)\delta^p}{M_1u^p}\to\frac{1+y_2^p}{M_1}\quad\text{при }\delta\to 0.$$

Поэтому

$$\lambda(P_Y)\leqslant\frac{(1+y_2^p)^{1/p}}{M_1^{1/p}}.$$

2) Верхние оценки величины $\lambda(P_I)$ следуют из пункта 1). Построим оценку снизу.

Для всякого ненулевого функционала f из аннулятора $I^\perp=\{f\in(l_p^n)^*\simeq l_q^n\colon\forall c\in I\quad f(c)=0\}$ подпространства I и произвольного вектора $v\in l_p^n$ справедливо равенство $\rho(v,I)\geqslant|f(v)|/\|f\|_q$. Возьмем функционал $f=(1,-1,0,\ldots,0)\in I^\perp$. Оценка снизу действия этого функционала на все возможные суммы элементов q^1,q^2 из квазиортогонального множества $Q(I)=\big\{w\in l_p^n\colon P_I(w)=(0,\ldots,0)\big\}$, $q^1+q^2\neq 0$, даст оценку снизу для коэффициента линейности оператора P_I:

$$\lambda(P_I) = \inf \frac{\rho(q^1+q^2, I)}{\|q^1+q^2\|_p} \geqslant \inf \frac{|f(q^1+q^2)|}{\|f\|_q \|q^1+q^2\|_p}.$$

Рассмотрим некоторые квазиортогональные элементы $q^1, q^2 \in Q(I)$, для которых $q^1+q^2 \neq 0$. Среди компонент суммы q^1+q^2 найдутся как неотрицательные, так и неположительные числа. Действительно, по критерию из леммы 1.A для q^1 и q^2 верны равенства:

$$\sum_{j=1}^{n} |q_j^1|^{p-1} \cdot \mathrm{sgn} q_j^1 = 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} |q_j^2|^{p-1} \cdot \mathrm{sgn} q_j^2 = 0,$$

а значит, выполнено

$$\sum_{j=1}^{n} \left(|q_j^1|^{p-1} \cdot \mathrm{sgn} q_j^1 + |q_j^2|^{p-1} \cdot \mathrm{sgn} q_j^2 \right) = 0.$$

Среди слагаемых суммы в левой части равенства найдутся неположительные и неотрицательные числа, их знаки совпадают со знаками компонент элемента q^1+q^2 с соответствующим номером.

Пусть теперь компоненты q^1+q^2 упорядочены так, что на первом месте стоит наибольшая по модулю компонента, без ограничения общности положительная, а на втором месте — произвольная неположительная компонента, $q^1+q^2 = (A, -B, \dots)$, $A > 0, A \geqslant B \geqslant 0$. Норма суммы q^1+q^2 удовлетворяет неравенству $\|q^1+q^2\|_p^p \leqslant (n-1)A^p + B^p$. Поэтому верна следующая цепочка неравенств:

$$\frac{|f(q^1+q^2)|^p}{\|f\|_q^p \|q^1+q^2\|_p^p} = \frac{(A+B)^p}{2^{p/q} \cdot \|q^1+q^2\|_p^p} \geqslant \frac{(A+B)^p}{2^{p/q} \cdot ((n-1)A^p + B^p)} =: \frac{F(B)}{2^{p/q}}.$$

Производная функции $F(B)$ на промежутке $[0, A]$ неотрицательна:

$$F'(B) = \left(\frac{(A+B)^p}{(n-1)A^p + B^p} \right)'$$
$$= \frac{p \cdot (A+B)^{p-1} \cdot ((n-1)A^p + B^p) - pB^{p-1}(A+B)^p}{((n-1)A^p + B^p)^2}$$

$$= \frac{p\,(A+B)^{p-1}}{\big((n-1)A^p + B^p\big)^2} \cdot \big((n-1)A^p + B^p - B^{p-1}A - B^p\big)$$
$$= \frac{p\,(A+B)^{p-1} \cdot A}{\big((n-1)A^p + B^p\big)^2} \cdot \big((n-1)A^{p-1} - B^{p-1}\big) \geqslant 0 \quad \text{при } 0 \leqslant B \leqslant A.$$

Поэтому $F(B) \geqslant F(0)$ на промежутке $[0, A]$,

$$\frac{|f(q^1+q^2)|^p}{\|f\|_q^p \|q^1+q^2\|_p^p} \geqslant \frac{A^p}{2^{p/q} \cdot (n-1)A^p} = \frac{1}{2^{p/q} \cdot (n-1)},$$

и для коэффициента линейности справедливо неравенство

$$\lambda(P_I) \geqslant \frac{1}{2^{1/q}(n-1)^{1/p}}.$$

Теорема доказана.

В соответствии с теоремой 1.3, в l_p^n при $n \geqslant 3$ и $p \neq 2$ есть одномерные подпространства со сколь угодно малым коэффициентом линейности операторов метрического проектирования на эти подпространства. По теореме А из введения, константа Липшица этих операторов может быть сколь угодно большой. При этом известно, что метрическая проекция на всякое подпространство в l_p^n при указанных p липшицева [41].

Рассмотрим также действительное пространство l_p, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ бесконечных последовательностей $(x_1, x_2, \dots)$ со свойством $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty$ и нормой $\|(x_1, x_2, \dots)\|_p = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\Big)^{1/p}$. С учетом теоремы 1.3 и теоремы А из введения получаем критерий липшицевости оператора метрической проекции на одномерные подпространства в l^p.

Следствие 1.4. *Пусть $Y = \langle y \rangle$ — одномерное подпространство в пространстве l_p, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, порожденное элементом $y \in l_p$. Оператор метрического проектирования P_Y липшицев тогда и только тогда, когда элемент y имеет конечное число ненулевых компонент.*

Доказательство. Достаточность следует из результатов работы [41].

Докажем необходимость. Пусть у элемента y бесконечное число ненулевых компонент. Тогда по п. 1) теоремы 1.3 $\lambda(P_Y) = 0$. В силу теоремы А из введения оператор P_Y не липшицев.

Следствие доказано.

Следствие 1.4 интересно соотносится со следующим результатом Ю.Ю. Дружинина [21]: во всяком пространстве $L_p(X, \mu)$, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, с безатомной мерой μ оператор метрического проектирования на всякое одномерное подпространство Y не является липшицевым, т.е. $\lambda(P_Y) = 0$. Из следствия 1.4 получаем, что счетного числа атомов у меры μ, на которые попадает носитель элемента y, также достаточно, чтобы оператор $P_{\langle y \rangle}$ был нелипшицев.

Глава II. Исследование свойств отображения Штейнера с помощью коэффициента линейности.

§1. Коэффициент линейности выборки из метрической проекции.

Пусть в банаховом пространстве X определен оператор метрической проекции P_Y на замкнутое линейное подпространство Y, причем для всякого элемента $x \in X$ множество $P_Y(x)$ непусто. Множество $S(X) := \{x \in X \colon \|x\| = 1\}$ есть *единичная сфера* пространства X. Однозначное отображение $p : X \to X$, такое, что $p(x) \in P_Y(x)$ для любого $x \in X$, есть *выборка* из оператора P_Y. Для выборки p можно ввести понятие *коэффициента линейности выборки из метрической проекции* или *выборочного коэффициента линейности*, аналогичное понятию коэффициента линейности (однозначного) оператора метрического проектирования на чебышевское подпространство [10]:

$$\lambda(p) := \inf \left\{ \frac{\|q_1 + q_2 - p(q_1 + q_2)\|}{\|q_1 + q_2\|} \colon q_{1,2} \in X, p(q_1) = p(q_2) = 0, q_1 + q_2 \neq 0 \right\}.$$

Отображение $f \colon X \to X$ называется *однородным*, если для произвольного числа $r \in \mathbb{R}$ и элемента $x \in X$ выполнено $f(rx) = rf(x)$, и *аддитивным по модулю подпространства* $Y \subset X$, если для произвольных элементов $x \in X$, $y \in Y$ справедливо равенство $f(x+y) = f(x)+y$. В случае однородной и аддитивной по модулю подпространства Y выборочный коэффициент линейности обладает сходными свойствами с коэффициентом линейности.

Теорема 2.1. *Пусть Y — подпространство существования в банаховом пространстве X, p — однородная и аддитивная по модулю Y выборка из оператора P_Y: $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, $p(x + y) = p(x) + y$ ($x \in X$, $y \in Y$, $\alpha \in \mathbb{R}$). Справедливы следующие утверждения:*

(1) $\lambda(p) > 0$ *тогда и только тогда, когда выборка* p *липшицева;*

(2) *если* $\lambda(p) > 0$, *то выборка* p *липшицева и ее константа Липшица* $K = \sup\{\|p(x) - p(z)\|/\|x - z\| : x, z \in X, x \neq z\}$ *удовлетворяет неравенствам* $K \leqslant 1/\lambda(p) + 1$.

(3) *если выборка* p *липшицева с константой* K, *то* $\lambda(p) > 0$ *и* $K \geqslant 1/\lambda(p) - 1$.

Доказательство. Утверждение (1) следует из утверждений (2) и (3).

Докажем (2). Пусть коэффициент линейности $\lambda(p) > 0$. Для произвольных $x_1, x_2 \in X$ выполнено $x_1 = q_1 + p(x_1)$, $p(q_1) = 0$, $x_2 = q_2 + p(x_2)$, $p(q_2) = 0$. Тогда

$$\|p(x_1) - p(x_2)\| = \|(x_1 - q_1) - (x_2 - q_2)\|$$
$$\leqslant \|x_1 - x_2\| + \|q_1 - q_2\| \leqslant \|x_1 - x_2\| + \frac{\rho(q_1 - q_2, Y)}{\lambda(p)}$$
$$\leqslant \|x_1 - x_2\| + \frac{\|q_1 - q_2 + p(x_1) - p(x_2)\|}{\lambda(p)} = \|x_1 - x_2\| \left(1 + \frac{1}{\lambda(p)}\right).$$

Получается, что константа Липшица выборки p оценивается сверху величиной $1/\lambda(p) + 1$.

Докажем (3). Для произвольных $q_1, q_2 \in p^{-1}(0)$, $q_1 + q_2 \neq 0$, и $y = p(q_1 + q_2) \in Y$ построим цепочку неравенств:

$$\|q_1 + q_2\| \leqslant \|q_1 + q_2 - y\| + \|y\| = \|q_1 + q_2 - y\| + \|p(q_1 - y) - p(-q_2)\|$$

$$\leqslant \|q_1 + q_2 - y\| + K\|q_1 - y - (-q_2)\| = (1 + K)\|q_1 + q_2 - p(q_1 + q_2)\|.$$

Отсюда следует, что $\lambda(p) \geqslant 1/(1 + K)$, т.е. $K \geqslant 1/\lambda(p) - 1$.

Теорема доказана.

Заметим, что в работе автора [57], где была сформулирована данная теорема (без доказательства), была допущена ошибка — утверждение распространялось на произвольные выборки, а также был приведен неверный критерий: $\lambda(p) = 1$ тогда и только тогда, когда выборка p линейна. В отличие от случая однозначного оператора P_Y этот критерий неверен в одну сторону: из линейности однородной и аддитивной по модулю Y выборки p следует $\lambda(p) = 1$ (поскольку тогда для любых квазиортогональных элементов q_1, g_2 выполнено $\|q_1+q_2-p(q_1+q_2)\|/\|q_1+q_2\| = \|q_1+q_2-p(q_1)-p(q_2)\|/\|q_1+q_2\| = \|q_1 + q_2\|/\|q_1 + q_2\| = 1$), а обратное, вообще говоря, неверно. Построим соответствующий пример.

Пусть в трехмерном координатном пространстве $Oxyz$ задан единичный шар B в виде цилиндра, ось которого совпадает с осью Oz. Построим на боковой поверхности цилиндра замкнутую гладкую центрально-симметричную кривую L, пересекающую каждую образующую ровно в одной точке и не лежащую в плоскости. Пусть также угол наклона к плоскости Oxy всякого радиус-вектор элемента на кривой L и всякого касательного вектора к кривой L ограничен некоторым малым углом α.

Для оператора метрической проекции на прямую $Z := \{x = y = 0\}$ определим однородную и аддитивную по модулю Z выборку p: сопоставим всякому элементу кривой L точку $(0, 0, 0)$ и доопределим отображение по однородности и аддитивности по модулю Z. В силу того, что кривая L не плоская, выборка p нелинейна. Чтобы коэффициент линейности выборки p был равен 1, необходимо и достаточно, чтобы для любых элементов $a, b \in p^{-1}((0, 0, 0))$ сумма $a + b$ попадала на боковую поверхность гомотетично раздутого цилиндра B, а значит длина проекции $a + b$ на прямую Z не превышала бы длины проекции $a+b$ на плоскость Oxy, умноженной на некоторую константу $M > 0$. Это равносильно тому, что на поверхности $W := p^{-1}((0, 0, 0))$ всякая хорда имеет не слишком большой угол наклона к горизонтальной плоскости.

Нетрудно видеть, что если хорда ab поверхности W не проходит над точкой $(0, 0, 0)$, то в некоторой точке на W найдется касательная плоскость, параллельная ab. В силу условий на кривую L угол между касательной плоскостью в произвольной точке поверхности W и плоскостью Oxy мал. Поэтому угол наклона хорды ab заведомо отделен от вертикального.

Если же хорда ab проходит над точкой $(0,0,0)$, то в силу центральной симметричности поверхности W точка $(0,0,0)$ принадлежит хорде, и угол наклона хорды совпадает с углом наклона некоторого радиус-вектора кривой L и, следовательно, ограничен.

Таким образом, из равенства единице коэффициента линейности однородной и аддитивной по модулю подпространства выборки не следует линейность этой выборки.

§2. Отображение St_n и соответствующий ему оператор метрического проектирования.

Будем говорить, что действительное банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$ обладает свойством существования точки Штейнера для заданного $n \geqslant 3$, если для произвольного набора $\{x_1, \dots, x_n\}$ *множество точек Штейнера*

$$\mathrm{St}(x_1, \dots, x_n) = \left\{ s \in X\colon \sum_{k=1}^{n} \|x_k - s\| = \inf_{x \in X} \sum_{k=1}^{n} \|x_k - x\| \right\}$$

непусто. Всякое рефлексивное (в частности, конечномерное) банахово пространство обладает этим свойством. Примеры несуществования точек Штейнера приведены в [17, 54, 32, 47, 11].

Следующая лемма дает критерий принадлежности элемента пространства X множеству $\mathrm{St}(x_1, \dots, x_n)$ точек Штейнера.

Лемма 2.A [27]. *Пусть $x_1, \dots, x_n \in X$. Элемент $y \in X$ принадлежит множеству $St(x_1, \dots, x_n)$ тогда и только тогда, когда найдутся такие функционалы $f_1, \dots, f_n \in X^*$, что*

1) $\sum_{k=1}^{n} f_k = 0$;

2) $\max \|f_k\| = 1$;

3) $f_k(x_k - y_0) = \|x_k - y\|$.

Рассмотрим отображение St_n пространства $X^n = X \times \cdots \times X$ (n раз) с нормой $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_n = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$, сопоставляющее набору $\{x_1, \ldots, x_n\}$ множество $\mathrm{St}(x_1, \ldots, x_n)$. Такое отображение будем называть *отображением Штейнера n точек.*

Отображение P_D, сопоставляющее набору $\{x_1, \ldots, x_n\}$ множество $P_D(x_1, \ldots, x_n) = \{(s, \ldots, s)\colon s \in \mathrm{St}(x_1, \ldots, x_n)\}$, является оператором метрического проектирования пространства X^n на его *диагональное подпространство* $D = \{(x, \ldots, x)\colon x \in X\}$, т.е. всякий элемент из $P_D(x_1, \ldots, x_n)$ — ближайший для набора $\{x_1, \ldots, x_n\}$ в D. Для каждого n диагональное подпространство D свое, и было бы правильнее писать D_n вместо D, но мы всюду в дальнейшем будем писать просто D во избежание громоздких обозначений (всякий раз будет ясно, о каком n идет речь).

Всякая выборка $\mathrm{st_n}\colon X^n \to X$ из отображения Штейнера ($\mathrm{st_n}(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{St}(x_1, \ldots, x_n)$ для любых $x_1, \ldots, x_n \in X$) порождает выборку p из отображения P_D: $p(x_1, \ldots, x_n) = (s, \ldots, s)$, где $s = \mathrm{st}_n(x_1, \ldots, x_n)$. Если выборка p удовлетворяет условию Липшица с константой K, то константа Липшица $k = \sup\{\|\mathrm{st_n}(x) - \mathrm{st_n}(y)\| / \|x - y\|_n\colon x, y \in X^n, x \neq y\}$ исходной выборки $\mathrm{st_n}$ не превосходит K/n.

Если множество $\mathrm{St}(x_1, \ldots, x_n)$ одноточечно для всякого набора $\{x_1, \ldots, x_n\}$, то диагональное подпространство D является чебышевским в X^n, метрическая проекция P_D однозначна, всякая выборка p совпадает с P_D и выборочный коэффициент линейности $\lambda(p)$ равен коэффициенту линейности $\lambda(P_D)$.

Пространство X называется *строго выпуклым*, если его единичная сфера $S(X)$ не содержит отрезков.

Лемма 2.В. [55, теорема 3.2] *В строго выпуклом пространстве* X *множество точек Штейнера для* $n = 2k+1$ *элементов* ($k \geqslant 1$) *содержит не более чем одну точку.*

Приведем доказательство леммы 2.В для полноты изложения.

Доказательство. Пусть для некоторого набора $\{z_1, \dots, z_n\} \subset X$ найдутся две различные точки Штейнера x_1 и x_2. Нетрудно показать, что тогда $z_1, \dots, z_n$ не лежат на одной прямой и весь отрезок $[x_1, x_2]$ включен во множество Штейнера $\mathrm{St}(z_1, \dots, z_{2k+1})$. Для всякой точки $t \in [x_1, x_2]$, $\|x_1 - t\| : \|t - x_2\| = \theta : (1-\theta)$, выполнено

$$\inf_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} \|x - z_i\| = \sum_{i=1}^{n} \|t - z_i\| \\ \leqslant \sum_{i=1}^{n} ((1-\theta)\|x_1 - z_i\| + \theta\|x_2 - z_i\|) = \inf_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} \|x - z_i\|,$$

поэтому справедливы равенства $\|t - z_i\| = (1-\theta)\|x_1 - z_i\| + \theta\|x_2 - z_i\|, i = 1, \dots, n$. Найдется элемент z_i, не лежащий на прямой x_1x_2. Не ограничивая общности, примем $i = 1$. Для числа θ, удовлетворяющего равенству $(1-\theta)\|x_1 - z_1\| = \theta\|x_2 - z_1\|$, выведенное выше равенство $\|t - z_1\| = (1-\theta)\|x_1 - z_1\| + \theta\|x_2 - z_1\|$ означает, что сумма норм одинаковых по норме, но не коллинеарных векторов равна норме их суммы, т.е. X не строго выпукло. Лемма доказана.

Таким образом, если строго выпуклое пространство X обладает свойством существования точки Штейнера, то отображение P_D однозначно.

Диагональное подпространство D *дополняемо* в пространстве X^n: оператор $L : X^n \to D$,

$$L : (x_1, \dots, x_n) \to \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \dots, \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)$$

есть линейный проектор нормы 1. Если при этом D является подпространством существования, то оператор P_D допускает липшицеву выборку тогда и только тогда, когда он допускает однородную и аддитивную по модулю D липшицеву выборку [38, теорема 3.5].

В дальнейшем будет полезен результат, который прослеживает связь между константой Липшица произвольной выборки из отображения St_n и коэффициентом линейности некоторой однородной и аддитивной по модулю D выборки из оператора P_D.

Лемма 2.1. *Если для банахова пространства X существует липшицева выборка из отображения St_n с константой Липшица k, то существует однородная и аддитивная по модулю D выборка из оператора P_D, коэффициент линейности которой не меньше $1/(4nk+6)$.*

Если отображение St_n однозначно и липшицево с константой Липшица k, то коэффициент линейности однозначного оператора P_D не меньше $1/(nk+1)$.

Доказательство. Отображение St_n допускает липшицеву выборку с константой k тогда и только тогда, когда оператор P_D допускает липшицеву выборку с константой nk. Последнее, в свою очередь, влечет существование однородной и аддитивной по модулю D липшицевой выборки p из P_D с константой Липшица не больше $4nk+5$ (лемма 3.1 и теорема 3.5 из [38] и их доказательства). Коэффициент линейности $\lambda(p)$ оценивается тогда снизу числом $1/(4nk+6)$ по утверждению (3) теоремы 2.1.

В случае однозначности St_n и P_D получаем, что оператор P_D липшицев с константой nk, и оценка сразу получается из теоремы 2.1. Лемма доказана.

§3. Отображение St_3 в общих банаховых пространствах.

Пусть X — банахово пространство, и на пространстве X^3 с нормой

$\|(x_1, x_2, x_3)\|_3 = \sum_{k=1}^{3} \|x_k\|$ задана метрическая проекция P_D на диагональное подпространство D. В этом параграфе оценивается коэффициент линейности $\lambda(p)$ выборки p из метрической проекции P_D в зависимости от свойств пространства X и получаются оценки константы Липшица для соответствующих выборок st_3 из отображения Штейнера трех точек.

Напомним некоторые определения из геометрии банаховых пространств, используемые в этом параграфе и в дальнейшем.

Функционал $f \in S(X^*)$ называется *опорным* к единичному шару $B(X)$ пространства X в точке x единичной сферы $S(X)$, если $f(x) = 1$. Множество всех функционалов из $S(X^*)$, опорных в точке $x \in S(X)$, то есть достигающих своей нормы на элементе x, назовем $J(x)$. Банахово пространство X называется *гладким*, если для всех точек на $S(X)$ множество $J(x)$ одноточечно. Пространство X называется *строго выпуклым*, если его единичная сфера $S(X)$ не содержит отрезков. Пространство X называется *локально равномерно выпуклым*, если для любого $x \in S(X)$ из $x_n \in S(X)$ и $\|x + x_n\| \to 2$ при $n \to \infty$ следует $x_n \to x$.

Теорема 2.2. *Пусть X — банахово пространство со свойством существования точки Штейнера для всякой тройки его точек. Тогда для всякой выборки p из отображения P_D, соответствующего отображению Штейнера* St_3*, выполнено неравенство $\lambda(p) \leqslant 1/2$.*

Доказательство. Рассмотрим элемент $q_1 = (x, 0, 0), x \in X, x \neq 0$. Покажем, что $p(q_1) = (0, 0, 0)$. Действительно, при $y \neq 0$ имеем $\|q_1 - (y, y, y)\|_3 = \|(x - y, -y, -y)\|_3 = \|x - y\| + 2\|y\| > \|x - y\| + \|y\| \geqslant \|x\| = \|q_1\|_3$. Аналогично для элемента $q_2 = (0, x, 0)$ получаем $p(q_2) = (0, 0, 0)$. Поэтому

$$\lambda(p) \leqslant \frac{\|(x, x, 0) - (x, x, x)\|_3}{\|(x, x, 0)\|_3} = \frac{\|x\|}{2\|x\|} = \frac{1}{2}.$$

Теорема доказана.

Замечание 2.1. Оценка в теореме 2.2 является точной: можно показать, что $\lambda(p) = \lambda(P_D) = 1/2$ для произвольного пространства $X = L_1(E, \Sigma, \mu)$ действительнозначных суммируемых функций. В частном случае одномерного пространства $X = \mathbb{R}$ это доказано в [10].

Теорема 2.3. *Пусть X — рефлексивное локально равномерно выпуклое пространство с локально равномерно выпуклым сопряженным пространством X^*, $\dim X \geqslant 2$. Тогда для однозначного отображения P_D, соответствующего отображению Штейнера St_3, выполнено неравенство $\lambda(P_D) \leqslant 1/3$.*

Доказательству теоремы 2.3 предпошлем несколько лемм.

В силу [18, гл. 2, §2, теорема 1 и следствие 1] справедлива

Лемма 2.C. *Пусть пространство X удовлетворяет условиям теоремы 2.3. Тогда отображение $x \longrightarrow f_x$, сопоставляющее каждому элементу $x \in S(X)$ единственный опорный функционал $f_x = J(x)$, является гомеоморфизмом $S(X)$ на $S(X^*)$.*

Лемма 2.2. *Пусть пространство X удовлетворяет условиям теоремы 2.3, $a, b \in S(X)$ и $\|f_a + f_b\| = 1$, где $f_a = J(a), f_b = J(b)$. Тогда $\lambda(P_D) \leqslant \|a + b\|/3$.*

Доказательство. Возьмем функционал $f_c = -(f_a + f_b) \in S(X^*)$. В силу рефлексивности пространства X найдется элемент $c \in S(X)$, для которого функционал f_c опорный.

По лемме 2.A имеем $0 \in \mathrm{St}(a, b, c)$. По той же лемме $0 \in \mathrm{St}(a, 0, tc)$ для любого $t \geqslant 0$, и тогда для элемента $q_1 := (a, 0, tc) \in X^3$ имеем $P_D(q_1) = (0, 0, 0)$.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Построим такой элемент $q_2 = (0, -b', a - tc)$, что $\|b'\| = 1$,

$\|b' - b\| < \varepsilon$ и $P_D(q_2) = (0, 0, 0)$.

В силу леммы 2.C найдется такое число $\delta > 0$, что из условий $f = f_s \in S(X^*)$, $\|f - f_{-b}\| < \delta$ следует $\|s + b\| < \varepsilon$. Далее, выберем такой функционал $f \in S(X^*)$, что $\|f - f_{-b}\| < \delta$ и $\|f + f_{-c}\| < 1$ (этот функционал f нетрудно найти в двумерной плоскости $\langle f_b, f_c \rangle$, пользуясь равенством $\|f_{-b} + f_{-c}\| = 1$ и строгой выпуклостью кривой $S(X^*) \cap \langle f_b, f_c \rangle$). Пусть $f = f_{-b'}$, где $-b' \in S(X)$. По сказанному выше, $\|b - b'\| < \varepsilon$.

Для достаточно большого $t > 0$ вектор $\sigma(a - tc) = (a - tc)/\|a - tc\| \in S(X)$ настолько близок к $-c$, что $\|f_{\sigma(a-tc)} - f_{-c}\| < 1 - \|f_{-b'} + f_{-c}\|$. Отсюда $\|f_{\sigma(a-tc)} + f_{-b'}\| \leqslant \|f_{\sigma(a-tc)} - f_{-c}\| + \|f_{-b'} + f_{-c}\| < 1$. Получаем, что для точки 0, тройки элементов $0, -b', a - tc$ и функционалов $f_0 := -(f_{-b'} + f_{\sigma(a-tc)}), f_{-b'}, f_{\sigma(a-tc)}$ выполнены условия леммы 2.A, поэтому $0 \in \mathrm{St}(0, -b', a - tc)$ и требуемая тройка q_2 построена.

Используя сумму $q_1 + q_2 = (a, -b', a)$, получаем

$$\lambda(P_D) \leqslant \frac{\rho(q_1 + q_2, D)}{\|q_1 + q_2\|_3} \leqslant \frac{\|(a, -b', a) - (a, a, a)\|_3}{\|(a, -b', a)\|_3} \\ = \frac{\|a + b'\|}{2\|a\| + \|b'\|} = \frac{\|a + b'\|}{3} \leqslant \frac{\|a + b\| + \varepsilon}{3},$$

откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует требуемое неравенство. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *В условиях теоремы* 2.3 *найдутся такие элементы* $a, b \in S(X)$, *что* $\|a + b\| \leqslant 1, \|f_a + f_b\| = 1$, *где* $f_a = J(a)$, $f_b = J(b)$.

Доказательство. Возьмем произвольное двумерное подпространство $X_2 \subset X$. На единичной сфере сопряженного ему пространства X_2^* найдутся такие функционалы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, что $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$. Теперь на единичной сфере пространства X_2 выделим элементы a, b, c, на которых функционалы $\varphi_1 =: \varphi_a$, $\varphi_2 =: \varphi_b$, $\varphi_3 =: \varphi_c$ соответственно достигают своей нормы.

Удостоверимся, что сумма некоторой пары элементов из тройки a, b, c лежит внутри единичного шара пространства X_2. Так как элементы a, b, c находятся в двумерном пространстве, то они линейно зависимы и для некоторого ненулевого набора $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ выполнено $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$. Без ограничения общности $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3|$ и $\lambda_1 > 0$. Покажем, что тогда $\lambda_2, \lambda_3 > 0$. Из равенства $\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c = 0$ имеем

$$\varphi_a(b) + 1 + \varphi_c(b) = 0, \qquad \varphi_a(c) + \varphi_b(c) + 1 = 0.$$

Поскольку каждое из слагаемых в этих равенствах по модулю ограничено единицей, то слагаемые $\varphi_a(b), \varphi_c(b), \varphi_a(c), \varphi_b(c)$ принадлежат отрезку $[-1; 0]$. Покажем, что они не могут принимать значения -1 и 0. Действительно, если, скажем, $\varphi_c(b) = -1$ (или, что то же самое, $\varphi_a(b) = 0$), то функционал $-\varphi_c \in J(b)$. Пространство X гладкое [18, гл. 2, §2, следствие 1], поэтому пространство X_2 гладкое. Отсюда имеем $-\varphi_c = \varphi_b$, что в силу $\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c = 0$ влечет $\varphi_a = 0$ и противоречит тому, что $\varphi_a \in S(X_2)$. Из равенства $\varphi_a(\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c) = \lambda_1 + \lambda_2\varphi_a(b) + \lambda_3\varphi_a(c) = 0$ и условия $\lambda_1 \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3|$ тогда следует, что λ_2, λ_3 могут быть только положительными. Итак, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 > 0$. Поделив равенство $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$ на λ_3: $\mu_1 a + \mu_2 b + c = 0, \mu_1, \mu_2 \geqslant 1$, получим $c = \mu_1(-a) + \mu_2(-b)$. Значит, элемент $-(a + b)$ лежит в выпуклой оболочке $\operatorname{conv}\{-a, -b, c\}$ элементов единичной сферы, т.е. его норма не больше 1, так что $\|a + b\| \leqslant 1$.

Итак, мы нашли такие $a, b \in S(X_2)$ и $\varphi_a, \varphi_b \in S(X_2^*)$, что $\|\varphi_a + \varphi_b\|_{X_2^*} = 1$, $\|a + b\|_{X_2} \leqslant 1$. Продолжим теперь функционалы φ_a и φ_b до функционалов $f_a, f_b \in S(X^*)$ по теореме Хана–Банаха. Норма суммы $f_a + f_b$ при этом может вырасти: $\|f_a + f_b\|_{X^*} \geqslant 1$. Рассмотрим дугу $\gamma = S(X) \cap \{\xi(-a) + \eta b \colon \xi \geqslant 0, \eta \geqslant 0\}$. При движении точки s по этой дуге от элемента b до элемента $-a$ соответствующие опорные функционалы $f_s \in S(X^*)$ изменяются также непрерывно. В точке $-a$ имеем $f_{-a} = -f_a$, а значит, при движении элемента s по дуге γ норма суммы $\|f_s + f_a\|$ принимает все значения от $\|f_b + f_a\| \geqslant 1$ до $\|f_{-a} + f_a\| = 0$. Поэтому найдется такой элемент $b' \in \gamma$, что $\|f_{b'} + f_a\| = 1$. Нетрудно видеть, что дуга γ лежит внутри параллелограмма с вершинами $0, b, -a+b, -a$, а значит, точка $b' + a$ лежит внутри параллелограмма с вершинами $a, a+b, b, 0$, откуда $\|b' + a\| \leqslant 1$. Лемма доказана.

Теперь теорема 2.3 прямо следует из лемм 2.2 и 2.3.

Из теоремы 2.3 и леммы 2.1 получаем

Следствие 2.1. *Пусть X — рефлексивное локально равномерно выпуклое пространство с локально равномерно выпуклым сопряженным пространством X^*, $\dim X \geqslant 2$. Тогда для константы Липшица k отображения St_3 справедливо неравенство $k \geqslant 2/3$.*

Замечание 2.2. Для гильбертова (евклидова) пространства известно точное значение $k = 2/\sqrt{3}$, вычисленное Ж.–П. Каханом [42, теорема 5.2]. Нам удалось вычислить точное значение $\lambda(P_D) = \sqrt{21}/14$ для гильбертова пространства (см. I главу, §2, теорема 1.2). Этот результат показывает, что оценка сверху коэффициента линейности из теоремы 2.3 довольно близка к конкретным возможным значениям: $1/3$ отстоит от $\sqrt{21}/14$ менее чем на 0.006007.

§4. Липшицевость отображения St_3 на нормированной плоскости.

В этом параграфе рассматривается отображение Штейнера для трех точек. Удалось доказать, что свойство липшицевости отображения St_3 на евклидовой плоскости (теорема B из введения, пункт a)) распространяется на произвольные строго выпуклые гладкие плоскости. Перед формулировкой и доказательством результата приведем необходимые определения и несколько технических лемм.

Лемма 2.4. *Если одна из компонент вектора $v \in X^3$ по норме не превосходит $\|v\|_3/5$, то*

$$\frac{\rho(v, D)}{\|v\|_3} \geqslant \frac{1}{5}.$$

Доказательство. Пусть $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ и $\|\gamma\| \leqslant \|v\|_3/5$. Тогда одна из двух других компонент, скажем, α имеет норму $\|\alpha\|$ не меньше $2\|v\|_3/5$. Имеем

$$\rho(v, D) = \inf_{d \in X} \{\|\alpha - d\| + \|\beta - d\| + \|\gamma - d\|\} \geqslant \inf_{d \in X} \{\|\alpha - d\| + \|\gamma - d\|\}$$
$$\geqslant \|\alpha - \gamma\| \geqslant \|\alpha\| - \|\gamma\| \geqslant 2/5\|v\|_3 - 1/5\|v\|_3 = \|v\|_3/5.$$

Лемма доказана.

Для всякой тройки $x_1, x_2, x_3 \in X$ ненулевых элементов, удовлетворяющей условию $\mathrm{st}(x_1, x_2, x_3) \ni 0$, назовем *триадой* множество

$$\mathsf{Y}(x_1, x_2, x_3) = \bigcup_{k=1}^{3} \{\lambda x_k \colon \lambda \geqslant 0\}$$

из трех лучей с общей вершиной в 0, проходящих через точки x_k. Нетрудно видеть, что в случае двумерного пространства X всякая триада Y не может лежать в одной открытой полуплоскости.

Лемма 2.5. *Пусть X — строго выпуклое гладкое двумерное пространство. Существует такое число $\delta = \delta(X) > 0$, что для всякой триады $\mathsf{Y} = \mathsf{Y}(x_1, x_2, x_3) \subset X$ евклидов угол между любыми двумя ее лучами не превосходит $\pi - \delta$.*

Доказательство. Если такого δ нет, то найдутся такие триады Y_n, что угол между какими-то двумя лучами Y_n больше $\pi - 1/n$. Трехточечные пересечения $\mathsf{Y}_n \cap S(X)$ сходятся (по некоторой подпоследовательности) к тройке z_1, z_2, z_3 точек сферы $S(X)$, для которой $\mathrm{st}(z_1, z_2, z_3) = \{0\}$ (в силу непрерывности и однозначности оператора P_D в X^3), и в триаде $\mathsf{Y}(z_1, z_2, z_3)$ два луча образуют развернутый угол. В силу гладкости пространства X множества $J(z_k)$ одноточечны: $J(z_k) = \{f_k\}$. Если, скажем, направления z_1 и z_2 противоположны, то $f_1 = -f_2$, а тогда $f_1 + f_2 + f_3 = f_3 \neq 0$, что противоречит лемме 2.A.

Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Пусть X — строго выпуклое гладкое двумерное пространство. Тогда для всякого числа δ, $0 < \delta \leqslant \pi$, существует такое число $\sigma = \sigma(X, \delta) > 0$, что для любых ненулевых векторов $x, y \in X$, евклидов угол $\widehat{xy}$ между которыми не менее δ, выполнено неравенство $\|x - y\| \geqslant \sigma \cdot \min\{\|x\|, \|y\|\}$.*

Доказательство. Рассмотрим величину

$$\sigma(X, \delta) := \inf \{\rho(s, \langle z \rangle) \colon s, z \in S(X), \widehat{sz} \geqslant \delta\},$$

где $\langle z \rangle$ обозначает одномерное подпространство, порожденное вектором z. В силу компактности сферы $S(X)$ для всякого $\delta \in (0, \pi]$ величина $\sigma(X, \delta)$ отделена от нуля. Пусть теперь для некоторых элементов $x, y \in X$ выполнено $\|x\| \geq \|y\|$, $\widehat{xy} \geqslant \delta$. Тогда

$$\|x - y\| = \|y\| \left\| \frac{y}{\|y\|} - \frac{x}{\|y\|} \right\| \geqslant \|y\| \rho \left(\frac{y}{\|y\|}, \langle x \rangle \right) \geqslant \sigma \|y\|,$$

где $\sigma = \sigma(X, \delta)$.

Лемма доказана.

Теорема 2.4. а) *Для строго выпуклого гладкого двумерного пространства отображение St_3 является липшицевым.*

b) Для всякого $M > 0$ существует такое двумерное гладкое строго выпуклое пространство, что константа Липшица отображения St_3 в этом пространстве больше M.

c) Существует двумерное строго выпуклое негладкое пространство, для которого St_3 не липшицево.

Доказательство. a) По лемме 2.B отображение St_3 однозначно, оператор P_D однозначен, то есть D — чебышевское подпространство в X^3. Покажем, что $\lambda(P_D) > 0$. В силу теоремы A из введения это будет означать, что оператор P_D липшицев, а значит, и отображение St_3 липшицево.

Возьмем $q_1 = (x_1, x_2, x_3) \in Q(D)$, $q_2 = (y_1, y_2, y_3) \in Q(D)$. Наша цель — показать, что отношение $\rho(q_1 - q_2, D)/\|q_1 - q_2\|_3$ отделено от нуля.

Можно считать $\max\{\|q_1\|_3, \|q_2\|_3\} = 1$.

Для всякого элемента $x \in X$, $x \neq 0$, существует единственная триада Y_x, содержащая x. Действительно, по функционалу $f \in J(x)$ в условиях п. a) единственным образом находятся такие функционалы $g, h \in S(X^*)$, что $f + g + h = 0$ (см., напр., [33, лемма 6]). Для элементов $y \in J^{-1}(g)$, $z \in J^{-1}(h)$ имеем $\mathrm{St}_3(x, y, z) = \{0\}$ по лемме 2.A, а значит, $\mathsf{Y}_x = \mathsf{Y}(x, y, z) \ni x$. Ясно, что такая триада Y_x единственна.

Пусть $\delta = \delta(X)$ — число из леммы 2.5. По этому δ можно подобрать такое $\varepsilon \in (0, 1/16)$, что из неравенств $\|x\| \geqslant 1/4$, $\|y\| \geqslant 1/4$, $\|x - y\| < \varepsilon$ следует, что триады Y_x и Y_y визуально близки, то есть для должным образом занумерованных лучей l_1, l_2, l_3 триады Y_x и лучей m_1, m_2, m_3 триады Y_y евклидовы углы между l_k и m_k меньше $\delta/2$ ($k = 1, 2, 3$).

1. Пусть $\|q_1 - q_2\|_3 \geqslant \varepsilon$. Если для таких пар q_1 и q_2 отношение $\rho(q_1 - q_2, D)/\|q_1 - q_2\|_3$ может быть сколь угодно малым, то найдется последовательность пар q_1^n, q_2^n со свойствами: $\|q_1^n\|_3 = 1$, $\|q_2^n\|_3 \leqslant 1$, $\|q_1^n - q_2^n\|_3 \geqslant \varepsilon$, $\rho(q_1^n - q_2^n, D)/\|q_1^n - q_2^n\|_3 < 1/n$.

В силу конечномерности X по некоторой подпоследовательности $\Lambda \subset \mathbb{N}$ имеем $q_1^n \to q_1$, $q_2^n \to q_2$ $(n \to \infty, n \in \Lambda)$ и $\|q_1\|_3 = 1$, $\|q_2\|_3 \leqslant 1$, $\|q_1 - q_2\|_3 \geqslant \varepsilon$, $\rho(q_1 - q_2, D)/\|q_1 - q_2\|_3 = 0$. Отсюда $q_1 - q_2 = y \in D$, $y \neq 0$. Это означает, что $y \in P_D(q_1)$, и получаем противоречие с однозначностью оператора P_D.

Таким образом,

$$\inf\left\{\frac{\rho(q_1 - q_2, D)}{\|q_1 - q_2\|_3} \colon q_1, q_2 \in Q(D), \max\{\|q_1\|_3, \|q_2\|_3\} = 1, \|q_1 - q_2\|_3 \geqslant \varepsilon\right\} > 0.$$

2. Рассмотрим теперь случай $\|q_1 - q_2\|_3 < \varepsilon$.

2a) Предположим, что $x_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$. Считаем $\|x_1\| \geqslant \|x_2\| \geqslant \|x_3\| > 0$. Отсюда и из неравенства $\|q_1\|_3 \geqslant 1 - \varepsilon$ следует, что $\|x_1\| \geqslant (1-\varepsilon)/3 > 1/4$, а значит, $\|y_1\| \geqslant (1-\varepsilon)/3 - \varepsilon > 1/4$ и при этом $\|x_1 - y_1\| < \varepsilon$. Согласно выбору ε, углы между соответствующими лучами триады $\mathsf{Y}_{x_1} = \mathsf{Y}(x_1, x_2, x_3)$ и Y_{y_1} (в частности, угол между лучами по направлениям x_1 и y_1) меньше $\delta/2$.

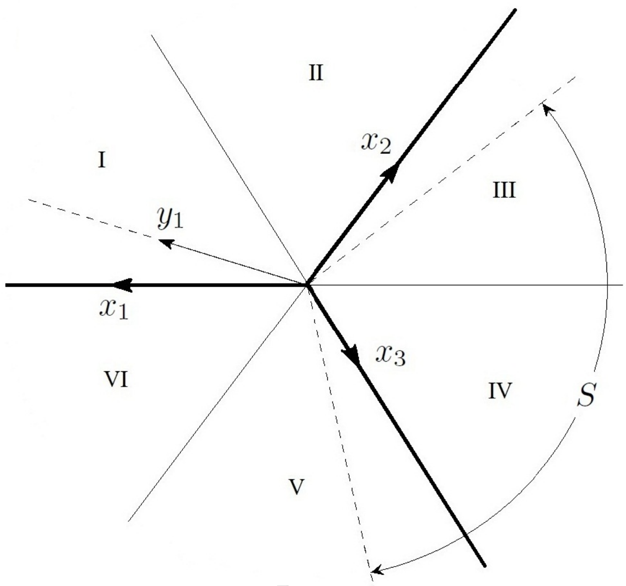

Рис. 11

На рис. 11 триада Y_{x_1} изображена с жирными лучами, триада Y_{y_1} — с пунктирными. Точки y_2 и y_3 лежат в секторе S (на его граничных лучах, если оба вектора y_2 и y_3 не равны 0).

Продолжим лучи триады Y_{x_1} до прямых. Эти прямые разбивают плоскость на 6 углов, каждый из которых по величине не меньше δ (см. лемму 2.5). Занумеруем секторы, соответствующие этим углам, римскими цифрами.

Пусть $q_2 - q_1 = (\alpha, \beta, \gamma)$. Из рисунка видно, что вектор α может лежать только в секторах I – III. Поскольку y_2 лежит в секторе S, вектор $\beta = y_2 - x_2$ может лежать только в секторах III – V.

Если $y_3 = 0$, то $\gamma = -x_3$, и вектора γ и β отделены друг от друга сектором II или секторами I, VI.

Если $y_3 \neq 0$ и y_3 лежит в пересечении секторов S и V, то вектор γ может лежать только в секторах V, VI, I, и тогда какие-то два из векторов α, β, γ отделены друг от друга одним из 6 секторов.

Если $y_3 \neq 0$ и y_3 лежит в пересечении сектора S с сектором IV или с сектором III, то вектор y_2 лежит на пунктирном луче в секторе V (возможно, $y_2 = 0$), а тогда $\beta = y_2 - x_2$ лежит в секторе V (более точно, в разности секторов V и S) и отделяется от вектора α сектором IV или VI.

Таким образом, в любом случае какие-то два из векторов α, β, γ — скажем, α и β — отделены друг от друга одним из 6 секторов.

Если $\|\alpha\|$ или $\|\beta\|$ не больше $\|q_1 - q_2\|_3/5$, то по лемме 2.4 получаем $\rho(q_1 - q_2, D)/\|q_1 - q_2\|_3 \geqslant 1/5$.

Пусть теперь обе нормы $\|\alpha\|$ и $\|\beta\|$ больше $\|q_1 - q_2\|_3/5$. По лемме 2.6 имеем $\|\alpha - \beta\| \geqslant \sigma \cdot \min\{\|\alpha\|, \|\beta\|\}$ для некоторого $\sigma > 0$, и

$$\rho(q_2 - q_1, D) = \inf_{d \in X} \{\|\alpha - d\| + \|\beta - d\| + \|\gamma - d\|\}$$
$$\geqslant \|\alpha - \beta\| \geqslant \sigma \cdot \min\{\|\alpha\|, \|\beta\|\} \geqslant \sigma \|q_1 - q_2\|_3/5.$$

Итак, в случае 2а) отношение $\rho(q_1 - q_2, D)/\|q_1 - q_2\|_3$ не меньше $\min\{1/5, \sigma/5\}$.

2б) Пусть у обоих векторов q_1 и q_2 есть нулевые компоненты.

Если номера этих компонент одинаковы, то по лемме 2.4 получаем $\rho(q_1 -$

$q_2, D)/\|q_1 - q_2\|_3 \geqslant 1/5$.

Пусть теперь номера нулевых компонент у q_1 и q_2 разные – скажем, $x_3 = y_2 = 0$. Тогда $\|y_3\| < \varepsilon$, $\|x_2\| < \varepsilon$, $\|x_1\| > 1 - 2\varepsilon$, $\|y_1\| > 1 - 2\varepsilon$, и при этом $\|x_1 - y_1\| < \varepsilon$. Согласно выбору ε, углы между соответствующими лучами триад Y_{x_1} и Y_{y_1} (в частности, угол между лучами по направлениям x_1 и y_1) меньше $\delta/2$ (см. рис. 12).

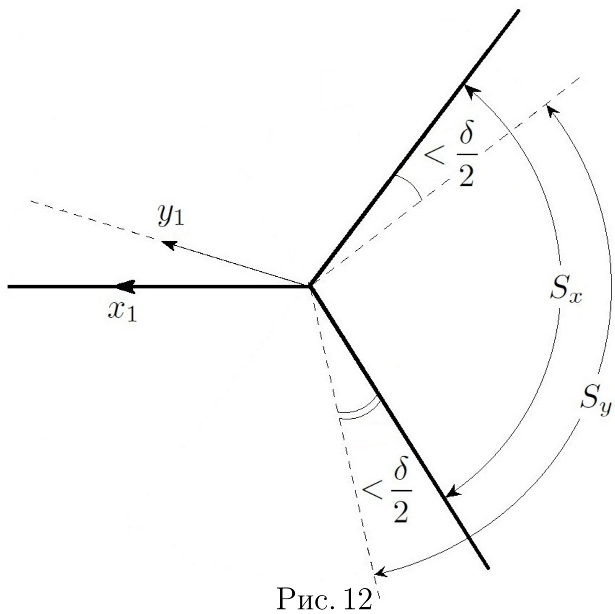

Рис. 12

Пусть опять $q_2 - q_1 = (\alpha, \beta, \gamma)$. Вектор $-\beta = x_2$ лежит в секторе S_x, то есть вектор β лежит в секторе $-S_x$, отделенном от S_x углами величины не меньше δ. Вектор $\gamma = y_3$ лежит в секторе S_y. Следовательно, векторы β и γ разделены углом не меньше $\delta/2$. Дальнейшие рассуждения аналогичны случаю 2a).

Таким образом, во всех рассмотренных случаях отношение $\rho(q_1 - q_2, D)/\|q_1 - q_2\|$ отделено от нуля.

b) Пусть X — действительная двумерная плоскость с заданной системой координат Oxy. Для всякого достаточно малого δ построим специальную единичную сферу S_δ в этом пространстве с помощью набора кривых $\gamma_i, i = 1, ..., 6$

(рис. 13а):

$$\gamma_1 = \{\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)\colon t \in [0, \pi/2]\}\,;$$

$$\gamma_2 = \{\gamma_2(t) = (\delta \cos t, 1 - \delta + \delta \sin t)\colon t \in [\pi/2, 3\pi/4]\}\,;$$

$$\gamma_4 = \{\gamma_4(t) = (\cos t, \sin t)\colon t \in [\pi, 3\pi/2]\}\,;$$

$$\gamma_5 = \{\gamma_5(t) = (\delta \cos t, -1 + \delta + \delta \sin t)\colon t \in [3\pi/2, 7\pi/4]\}\,;$$

γ_3 — произвольная выпуклая кривая с концами в точках $\gamma_2(3\pi/4) = (-\sqrt{2}/2\delta, 1 - \delta + \sqrt{2}/2\delta)$ и $\gamma_4(\pi) = (-1, 0)$, гладко соединяющаяся с кривыми γ_1 и γ_3; γ_6 — кривая, симметричная γ_3 относительно нуля.

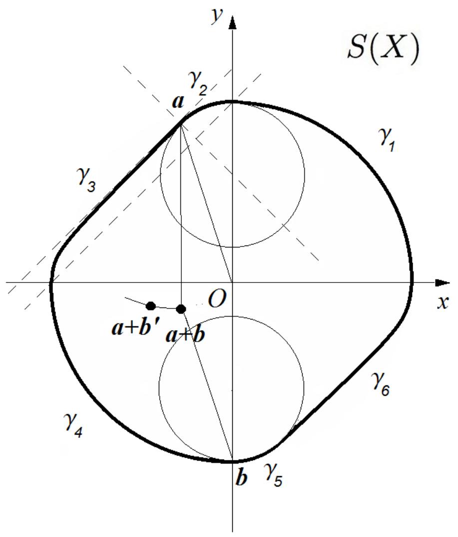

Рис. 13а

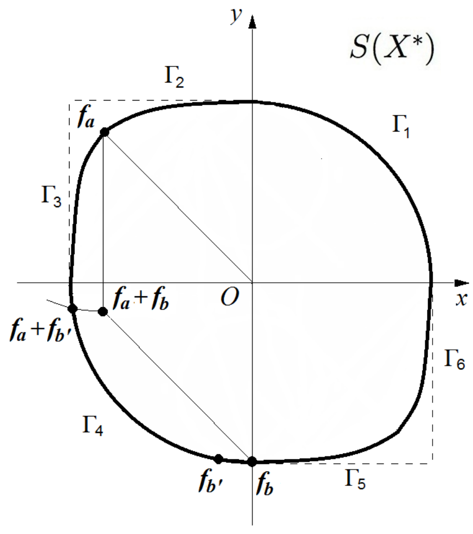

Рис. 13б

Сфера S^*_δ сопряженного пространства состоит из кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$ (рис. 13б): $\Gamma_1 = \{\Gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)\colon t \in [0, \pi/2]\}$; Γ_2, Γ_3 — некоторые кривые, точки которых соответствуют функционалам, опорным к сфере S_δ в точках кривых γ_2, γ_3, концами кривой Γ_2 являются точка $\Gamma_1(\pi/2)$ и некоторая точка f_a, соответствующая функционалу, опорному к сфере S_δ в точке $a := \gamma_2(3\pi/4)$, концы кривой Γ_3 — точки f_a и $(-1, 0)$; $\Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$ — кривые, симметричные $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ относительно нуля.

Вектор f_a направлен под углом $3\pi/4$ к оси Ox, поскольку касательная к сфере S_δ в точке a (параллельная ядру функционала f_a), имеет угол наклона $\pi/4$. Евклидова длина f_a близка к $\sqrt{2}$, поэтому норма $\|f_a + f_b\|$ близка к 1, и найдется близкий к f_b функционал $f_{b'} \in S^*_\delta$, для которого $\|f_a + f_{b'}\| = 1$ ($\|f_b - f_{b'}\| \to 0$ при $\delta \to 0$). Соответствующий функционалу $f_{b'}$ вектор $b' \in S_\delta$ близок к b, и $\|a + b'\| \leqslant \|a + b\| + \|b - b'\| < 3\varepsilon$ при достаточно малых δ.

По лемме 2.2 получаем $\lambda(P_D) \leqslant \varepsilon$. Теперь с учетом леммы 2.1 получаем оценку для константы Липшица отображения Штейнера, что и требовалось.

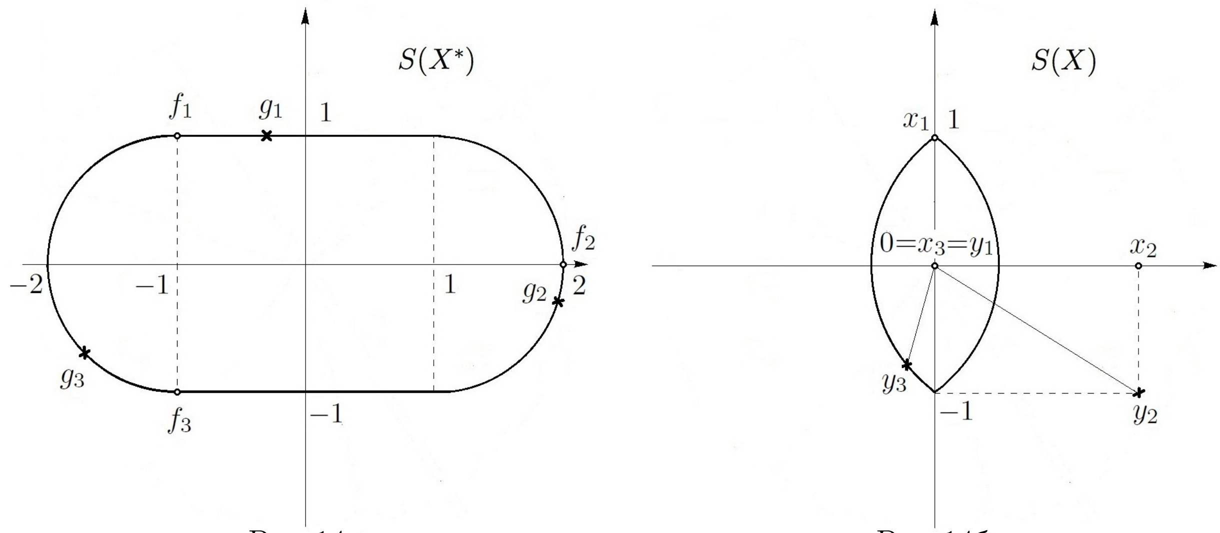

Рис. 14а Рис. 14б

c) Построим соответствующий пример. В качестве сферы $S(X^*)$ сопряженного пространства возьмем „стадион“, изображенный на рис. 14а (2 отрезка и 2 полуокружности). Сфера $S(X)$ — поляра к $S(X^*)$ — изображена на рис. 14б. Ясно, что X — строго выпуклое негладкое пространство.

Для тройки функционалов $f_1, f_2, f_3 \in S(X^*)$, отмеченных на рисунке, очевидно выполнено равенство $f_1 + f_2 + f_3 = 0$, поэтому по лемме 2.А точки $x_1, x_2, x_3 = 0$ образуют тройку с $\mathrm{St}_3(x_1, x_2, x_3) = \{0\}$.

Если взять фукционал $g_3 \in S(X^*)$, достаточно близкий к f_3, (см. рис. 14а) и такой фукционал $g_2 \in S(X^*)$, близкий к f_2, что сумма ординат g_2 и g_3 равна -1, то на верхнем отрезке сферы $S(X^*)$ найдется такой функционал

g_1, что $g_1 + g_2 + g_3 = 0$. По лемме 2.A точки $y_1 = 0$, y_2 (y_2 и x_2 выбираются на своих лучах так, чтобы $x_2 - y_2 = x_1$) и $y_3 \in S(X)$ образуют тройку со $\mathrm{St}_3(y_1, y_2, y_3) = \{0\}$.

Элементы $q_1 = (x_1, x_2, x_3)$ и $q_2 = (y_1, y_2, y_3)$ квазиортогональны подпространству D в X^3, и

$$\frac{\rho(q_1 - q_2, D)}{\|q_1 - q_2\|_3} = \frac{\rho\left((x_1, x_1, -y_3), D\right)}{\|(x_1, x_1, -y_3)\|_3}$$

$$\leqslant \frac{\|(x_1, x_1, -y_3) - (x_1, x_1, x_1)\|_3}{3} = \frac{\| - y_1 - x_1\|}{3} \to 0,$$

когда $g_3 \to f_3$ (а вместе с этим $y_3 \to -x_1$).

Таким образом, $\lambda(P_D) = 0$, и (однозначное в силу леммы 2.B) отображение St_3 не липшицево по теореме A из введения.

Теорема доказана.

§5. Липшицевость выборок из отображения St_n при $n \geqslant 4$.

Точка $x \in S(X)$ называется *достижимой точкой*, если найдется такой функционал $f \in J(x)$, что $\{y : f(y) = 1\} \cap S(X) = \{x\}$.

Теорема 2.5. *Пусть X — банахово пространство, $\mathrm{dim}X \geqslant 2$, $\varepsilon > 0$. Если сфера $S(X)$ содержит две различные достижимые точки на расстоянии не больше ε, то для каждого чётного $n \geqslant 4$ и для всякой выборки p из отображения $P_D : X^n \to D$ верна оценка $\lambda(p) \leqslant 2\varepsilon/n$. Как следствие, всякая липшицева выборка из отображения St_n имеет константу Липшица не меньше $1/(8\varepsilon) - 3/(2n)$.*

Доказательство. Пусть $n = 2k$, $k \geqslant 2$, $a, b \in S(X)$ — достижимые точки, $\|a - b\| \leqslant \varepsilon$.

Рассмотрим следующие элементы $q_1, q_2 \in X^n$:

$$q_1 = (b, 0, \underbrace{a, \dots, a}_{k-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}),\ \ q_2 = (0, b, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, \underbrace{a, \dots, a}_{k-1}).$$

Покажем, что $P_D(q_k) = \{0\}$, $k = 1, 2$. Для всякого $s \in X$ выполнено

$$\|q_k - (s, \dots, s)\|_n = \|b - s\| + k\|s\| + (k-1)\|a - s\| \geqslant \|b\| + (k-1)\|a\| = k = \|q_k\|_n,$$

так что $\rho(q_k, D) = k$ и $P_D(q_k) \ni 0$. Пусть $f_a, f_b \in S(X^*)$ — такие функционалы, что $J^{-1}(f_a) = \{a\}, J^{-1}(f_b) = \{b\}$ (такие найдутся в силу достижимости точек a и b). Если $(s, \dots, s) \in P_D(q_k)$ и $s \neq 0$, то выполнены соотношения

$$\|b\| = \|b - s\| + \|s\| \geqslant f_b(b - s) + f_b(s) = f_b(b) = \|b\|,$$

$$\|a\| = \|a - s\| + \|s\| \geqslant f_a(a - s) + f_a(s) = f_a(a) = \|a\|.$$

Из этих соотношений следует, что $f_a, f_b \in J(s)$. Точки a, b — достижимые, то есть a, b — единственные вектора из $S(X)$, на которых f_a, f_b достигают своей нормы соответственно. Получается, что s коллинеарен a, и s коллинеарен b, что невозможно ($a \neq b$). Полученное противоречие показывает, что $P_D(q_k) = \{0\}$.

Таким образом, для всякой выборки $p \in P_D$ имеем $p(q_k) = 0$, $k = 1, 2$, и

$$\lambda(p) \leqslant \frac{\rho(q_1 + q_2, D)}{\|q_1 + q_2\|_n} \leqslant \frac{\|(b, b, \overbrace{a, \dots, a}^{n-2}) - (\overbrace{a, \dots, a}^{n})\|_n}{\|(b, b, \underbrace{a, \dots, a}_{n-2})\|_n} \leqslant \frac{2\varepsilon}{n}.$$

Оценка константы Липшица всякой выборки из отображения St_n следует из доказанного в силу леммы 2.1.

Теорема доказана.

Следствие 2.2. *В строго выпуклом пространстве X с $\dim X \geqslant 2$ не существует липшицевой выборки из отображения St_n при четном $n \geqslant 4$.*

Действительно, в строго выпуклом пространстве все точки единичной сферы являются достижимыми, поэтому найдутся сколь угодно близкие достижимые точки, различные при $\dim X \geqslant 2$. Тогда по теореме 2.5 всякая выборка из St_n не является липшицевой.

Конечномерное нормированное пространство X называется *полиэдральным*, если его единичный шар является выпуклой оболочкой конечного числа точек. Следующее утверждение следует непосредственно из теоремы 2.1 работы [37] и предложения 2.3 работы [38].

Лемма 2.D. *В полиэдральном пространстве X для всякого подпространства Y существует липшицева выборка из оператора P_Y метрического проектирования.*

Как следствие леммы 2.D и теоремы 2.5 в случае конечномерного пространства X и четного $n \geqslant 4$ получаем критерий существования липшицевой выборки из отображения Штейнера.

Следствие 2.3. *Пусть пространство X конечномерно, $n \geqslant 4$ — четное число. Отображение St_n имеет липшицеву выборку тогда и только тогда, когда X — полиэдральное пространство.*

Доказательство. Полиэдральность X влечет полиэдральность X^n: если единичный шар есть выпуклая оболочка точек e_i, то единичный шар $B(X^n)$ есть выпуклая оболочка точек $(0, \dots, 0, e_i, 0, \dots, 0)$. Теперь достаточность следует из леммы 2.D.

Докажем необходимость. Если X не полиэдрально, то по теореме Страшевича (замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ совпадает с замыканием выпуклой оболочки своих достижимых точек; см., напр., [25, гл. 1, § 4]) на $S(X)$ имеется бесконечно много достижимых точек. Тогда в силу компактности $S(X)$ найдутся сколь угодно близкие достижимые точки, и по теореме 2.5 всякая выборка из St_n не является липшицевой.

Следствие доказано.

Заметим, что следствие 2.3 получилось аналогичным критерию существования липшицевой выборки из чебышевских центров на классе ограниченных множеств в конечномерном нормированном пространстве, доказанному Ю.Ю. Дружининым [20].

Теорема 2.6. *Пусть X — рефлексивное локально равномерно выпуклое банахово пространство с локально равномерно выпуклым сопряжённым X^*,* $\dim X \geqslant 2$*. Тогда для всякого нечётного $n \geqslant 5$ (однозначное) отображение* $\mathrm{St_n}$ *не является липшицевым.*

Доказательство. Рассмотрим функционал $f \in S(X^*)$. Найдутся такие функционалы $f_1, f_2 \in S(X^*)$, что $f_1+f_2 = f$. Обозначим за a, a_1, a_2 элементы из $S(X)$, на которых функционалы f, f_1, f_2 достигают нормы (используем теорему Джеймса).

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для каждого $i = 1, 2$ в секторе $\widehat{a0(-a_i)}$ двумерной плоскости $\langle a, a_i \rangle$ выберем вектор b_i настолько близко к вектору $-a_i$, чтобы функционал $g_i \in J(b_i)$ удовлетворял неравенству $\|g_i + f_i\| \leqslant \varepsilon/4$ (это возможно в силу леммы 2.C). Тогда

$$\|g_1 + g_2 + f\| \leqslant \|g_1 + f_1 + g_2 + f_2\| \\ \leqslant \|g_1 + f_1\| + \|g_2 + f_2\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь выберем функционалы $g_3, g_4 \in S(X^*)$ так, чтобы $g_3+g_4 = (2-\varepsilon)\cdot f$. Единичные векторы, на которых функционалы g_3, g_4 достигают своей нормы, обозначим через b_3, b_4 соответственно. Рассмотрим следующие элементы $q_1, q_2 \in X^n$, $n = 2k+1$:

$$q_1 = (\underbrace{a, \dots, a}_{k-1}, \lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \underbrace{0, \dots, 0}_{k}), \ q_2 = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, \mu_1 b_1, \mu_2 b_2, \underbrace{a, \dots, a}_{k-2}, b_3, b_4),$$

где неотрицательные коэффициенты λ_i, μ_i выбраны так, чтобы $\lambda_i a_i + \mu_i b_i = a$, $i = 1, 2$. При этом $q_1 + q_2 = (\underbrace{a, \ldots, a}_{2k-1}, b_3, b_4)$.

Покажем, что $P_D(q_i) = \{0\}$, $i = 1, 2$. В пространстве $(X^{2k+1})^*$ рассмотрим следующие функционалы:

$$F_1 = (\underbrace{f, \ldots, f}_{k-1}, f_1, f_2, \underbrace{-f, \ldots, -f}_{k}),\ F_2 = (\underbrace{-f, \ldots, -f}_{k-2}, g, g_1, g_2, \underbrace{f, \ldots, f}_{k-2}, g_3, g_4),$$

где $g = -(g_1 + g_2 + g_3 + g_4)$. Заметим, что

$$\|g\| = \|g_1 + g_2 + g_3 + g_4\| = \|g_1 + g_2 + (2 - \varepsilon) \cdot f\|$$
$$\leqslant \|g_1 + g_2 + f\| + (1 - \varepsilon) \cdot \|f\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 1 - \varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Функционалы F_i, $i = 1, 2$, принадлежат аннулятору пространства D, так как сумма компонент каждого из F_i равна нулю. Имеем $\|F_1\| = \max\{\|f\|, \|f_1\|, \|f_2\|\} = 1$, $\|F_2\| = \max\{\|f\|, \|g\|, \|g_1\|, \|g_2\|, \|g_3\|, \|g_4\|\} = 1$. Также выполнено равенство $F_i(q_i) = \|F_i\| \cdot \|q_i\|$, $i = 1, 2$. Поэтому по лемме 2.A точка $0 \in P_D(q_i)$, $i = 1, 2$, а в силу леммы 2.B множество $P_D(q_i) = \{0\}$, $i = 1, 2$.

Построенные q_1, q_2 дают оценку на коэффициент линейности:

$$\lambda(P_D) \leqslant \frac{\rho(q_1 + q_2, D)}{\|q_1 + q_2\|_n}$$
$$\leqslant \frac{\|(\overbrace{a, \ldots, a}^{n-2}, b_3, b_4) - (\overbrace{a, \ldots, a}^{n})\|_n}{\|(\underbrace{a, \ldots, a}_{n-2}, b_3, b_4)\|_n} = \frac{\|b_3 - a\| + \|b_4 - a\|}{n}.$$

В силу локально равномерной выпуклости пространства X^* при $\varepsilon \to 0$ функционалы $g_3, g_4 \to f$, так что по лемме 2.C имеем $b_3, b_4 \to a$. Следовательно, $\lambda(P_D) = 0$, так что по теореме A из введения отображение P_D, а значит и отображение St_n, не является липшицевым.

Теорема доказана.

Заключение.

Как показывают результаты диссертации, коэффициент линейности однозначного оператора метрического проектирования или выборок из этого оператора может эффективно вычисляться и оцениваться, а также применяться к исследованию липшицевости указанного оператора и связанных с ним отображений.

Так, выше коэффициент линейности был точно вычислен для одномерных чебышевских подпространств пространства $C(K)$ непрерывных функций и достаточно точно оценен для диагональных подпространств l_1-сумм $X \oplus \cdots \oplus X$ (в нескольких случаях вычислен точно), а также для подпространств пространства l_p^n. Во всех этих случаях оценки коэффициента линейности влекли новые нетривиальные оценки константы Липшица операторов метрического проектирования или выборок из него. В частности, в пространстве $C(K)$ были улучшены оценки константы Липшица, полученные В.И. Бердышевым, в пространстве l_p фактически получилось описание одномерных подпространств с липшицевой метрической проекцией.

Указанные оценки коэффициента линейности для диагональных подпространств повлекли новые результаты в исследовании липшицевости отображения Штейнера. Для отображения St_3 была доказана липшицевость в произвольном двумерном строго выпуклом гладком пространстве, для отображения St_n при $n \geqslant 4$ доказано отсутствие липшицевой выборки во всех "хороших" пространствах. Эти результаты существенно обобщают теорему Ж.-П. Кахана для евклидовой плоскости.

В связи с полученными результатами естественно возникает ряд задач.

1) Ввести локальный коэффициент линейности метрической проекции и оценить с его помощью локальные константы Липшица в случае конечномер-

ных чебышевских подпространств в $C(K)$ (оценки этих локальных констант получены в [39], см. также [34]).

2) Во всяком ли банаховом пространстве размерности n найдется чебышевское подпространство заданной размерности $k \leqslant n-2$, метрическая проекция на которое липшицева? То, что в каждом конечномерном банаховом пространстве есть чебышевские подпространства всех размерностей, доказано в [22].

3) Существует ли липшицева выборка из отображения St_n в пространстве C при $n \geqslant 4$? (При $n = 3$ существует [7].) Липшицево ли отображение St_n в пространстве L_p при $n \geqslant 3$, $p \neq 1, 2$?

4) Найти необходимые или достаточные условия существования липшицевой выборки из St_3 для трехмерных пространств.

Эти задачи могут служить ориентирами при дальнейших исследованиях в данной области геометрической теории приближений.

Список литературы

[1] *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. Физматлит, М., 2009.

[2] *Алимов А.Р.* Всякое ли чебышевское множество выпукло? // Матем. просвещение, 1998, 2, С. 155-172.

[3] *Алимов А.Р., Царьков И.Г.* Связность и другие геометрические свойства солнц и чебышёвских множеств // Фундамент. и прикл. матем, 2014, Т. 19, вып. 4, С. 21-91.

[4] *Алимов А.Р., Царьков И.Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // Успехи матем. наук, 2016, Т. 71, № 1(427), С. 3-84.

[5] *Альбрехт П.В.* Порядки модулей непрерывности операторов почти наилучшего приближения // Матем. сб., 1994, Т. 185, № 9, С. 3-25.

[6] *Балаганский В.С., Власов Л.П.* Проблема выпуклости чебышевских множеств // Успехи матем. наук, 1996, Т. 51, № 6, С. 125-188.

[7] *Беднов Б.Б.* О точках Штейнера в пространстве непрерывных функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Матем. Механ., 2011, № 6, С. 26-31.

[8] *Бердышев В.И.* Метрическая проекция на конечномерные подпространства из C и L // Матем. заметки, 1975, Т. 18, № 4, С. 473-488.

[9] *Бородин П.А.* О линейности оператора метрического проектирования на чебышевские подпространства в пространствах L_1 и C // Матем. заметки, 1998. Т. 63, № 6, С. 812-820.

[10] *Бородин П.А.* Коэффициент линейности оператора метрического проектирования на чебышевское подпространство // Матем. заметки, 2009, Т. 85, № 2, С. 180-188.

[11] *Бородин П.А.* Пример несуществования точки Штейнера в банаховом пространстве// Матем. заметки, 2010, Т. 87, № 4, С. 514-518.

[12] *Власов Л.П.* Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Успехи матем. наук, 1973. Т. 28, № 6, С. 3-66.

[13] *Гаркави А.Л.* О чебышевских и почтичебышевских подпространствах // Известия АН СССР. Сер. матем., 1964, Т. 28, № 4, С. 799-818.

[14] *Гаркави А.Л.* Задача Хелли и наилучшее приближение в пространстве непрерывных функций // Известия АН СССР. Сер. матем., 1967, Т.31, № 3, С. 641-656.

[15] *Гаркави А.Л.* Теория наилучшего приближения в линейных нормированных пространствах // Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал. 1967, ВИНИТИ, М., 1969, С. 75-132.

[16] *Гаркави А.Л.* Характеристика чебышевских подпространств конечной коразмерности в L_1 // Матем. заметки, 1970, Т. 7, № 2, С. 155-163.

[17] *Гаркави А.Л., Шматков В.А.* О точке Ламе и ее обобщениях в нормированном пространстве // Матем. сб., 1974, Т. 95(137), № 2(10), С. 272-293

[18] *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространств. Вища школа, Киев, 1980.

[19] *Дружинин Ю.Ю.* О линейности оператора метрического проектирования на подпространства в пространствах L_p // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1 Матем. Мех., 2010, № 1, С. 30-36.

[20] *Дружинин Ю.Ю.* О существовании липшицевой выборки из чебышевских центров // Матем. сб., 2013, Т. 204, № 5, С. 25-44.

[21] *Дружинин Ю.Ю.* Свойства операторов метрического проектирования и выборок из чебышевских центров в банаховых пространствах // Диссертация, М., 2013.

[22] *Залгаллер В.А.* О k-мерных направлениях, особых для выпуклого тела F в $\mathbb{R}^n$ // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 6, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1972, Т. 27, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., С. 67–72.

[23] *Карлов М.И., Царьков И.Г.* Выпуклость и связность чебышевских множеств и солнц // Фундаментальная и прикладная математика, 1997, Т.3, № 4, С. 967-978.

[24] *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? РХД, М.; Ижевск, 2001.

[25] *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. Наука, М., 1985.

[26] *Маринов А.В.* О равномерных константах сильной единственности в чебышевских приближениях и основополагающих результатах Н. Г. Чеботарева // Изв. РАН. Сер. матем., 2011, Т. 75, № 3, С. 161–188

[27] *Рубинштейн Г.Ш.* Об одной экстремальной задаче в линейном нормированном пространстве // Сиб. матем. журн., 1965, Т. VI, № 3, С. 711–714.

[28] Изложение лекций С.Б. Стечкина по теории приближений. Изд-во УрО РАН, Екатеринбург, 2010.

[29] *Царьков И.Г.* Геометрическая теория приближения в работах С.Б.Стечкина // Известия Тульского государственного университета, 2005, Т.11, Вып. 1, Математика, С. 236-260.

[30] *Чебышев П.Л.* Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций //1859. в кн.: Чебышев П.Л. Полн. собр. соч. Т.2. М.-Л., изд-во АН СССР, 1947, С. 151-235.

[31] *Bartelt M., Li W.* Characterization of Generalized Haar Spaces // J. Approx. Theory, 1998, V. 92, № 1, P. 101-115.

[32] *Baronti M., Casini E., Papini P.L.* Equilateral sets and their central points // Rend. Mat. Appl., 1993, V. 13, № 1, P. 133-148.

[33] *Benitez C., Fernandez M., Soriano M.L.* Location of Fermat–Torricelli medians of three points // Trans. Amer. Math. Soc., 2002, V. 354, № 12, P. 5027-5038.

[34] *Blatt H.-P.* Lipschitz continuity and strong unicity in G. Freud's work // J. Approx. Theory, 1986, V. 46, № 1, P. 25-31.

[35] *Cheney E.W., Wulbert D.E.* The existence and unicity of best approximation // Math. Scand., 1969, V. 24, № 1, P. 113-140.

[36] *Cline A.K.* Lipschitz conditions on uniform approximation operators // J. Approx. Theory, 1973, V. 8, № 2, P. 160-172.

[37] *Deutsch F., Li W.* Strong uniqueness, Lipschitz continuity, and continuous

selections for metric projections in L_1 // J. Approx. Theory, 1991, V. 66, № 2, P. 198-224.

[38] *Deutsch F., Li W., Park S.-H.* Characterization of continuous and Lipschitz continuous metric selections in normed linear spaces // J. Approxim. Theory, 1989, V. 58, № 3, P. 297-314.

[39] *Freud G.* Eine Ungleichung für Tschebysheffsche Approximations–polynome // Acta Scientiarum Mathematicarum, 1958, V. 19, P. 162–164.

[40] *Haar A.* Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen // Math. Ann., 1917, V. 78, № 1–4, P. 294-311.

[41] *Holmes R., Kripke B.* Smoothness of approximation // Michigan Math. J., 1968, V. 15, № 2, P. 225-248.

[42] *Kahane J.-P.* Best approximation in $L^1(T)$ // Bull. Amer. Math. Soc., 1974, V. 80, № 5, P. 788-804.

[43] *Li W.* Lipschitz continuous metric selections in $C_0(T)$ // SIAM J. Math. Anal., 1990, V. 21, № 1, P. 205-220.

[44] *Mairhuber J.C.* On Haar's theorem concerning Chebyshev approximation problems having unique solutions // Proc.Amer.Math.Soc., 1956, V.7, № 4, P. 609-615.

[45] *Morris P.D.* Chebyshev subspaces of L_1 with linear metric projection // J. Approx. Theory, 1980, V. 29, № 3, P. 231-234.

[46] *Morris P.D.* Metric projections onto subspaces of finite codimension // Duke Math. J., 1968, V. 35, № 4, P. 799-808.

[47] *Papini P.L.* Two new examples of sets without medians and centers// Sociedad de Estadístíca e Investigacíon Operativa Top, 2005, V. 13, № 2, P. 315-320.

[48] *Pei-Kee Lin.* Remarks on linear selections for the metric projection // J. Approx. Theory, 1985, V. 43, № 1, P. 64-74.

[49] *Phelps R.R.* Uniqueness of Hahn – Banach extensions and unique best approximation // Trans. Amer. Math. Soc., 1960, V. 95, № 2, P. 238—255.

[50] *Phelps R.R.* Chebyshev subspaces of finite dimension in L_1 // Proc.Amer.Math.Soc., 1966, V. 17, № 3, P. 646-652.

[51] *Rudin W., Smith K.T.* Linearity of best approximation: a characterization of ellipsoids // Indagationes Mathematicae, 1961, V. 23, № 1, P. 97-103.

[52] *Shapiro H.S.* Topics in Approximation Theory // Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[53] *Singer I.* Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces. Acad. SRR, Bucharest; Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[54] *Veselý L.* A characterization of reflexivity in the terms of the existence of generalized centers // Extracta Mathematicae, 1993, V. 8, № 2–3, P. 125-131.

[55] *Veselý L.* Generalized centers of finite sets in Banach spaces // Acta Math. Univ. Comenianae, 1997, V. 66, № 1, P. 83-115.

[56] *Чеснокова К.В.* Коэффициент линейности оператора метрического про-

ектирования для одномерных чебышевских подпространств в пространстве C // Матем. заметки, 2014, Т. 96, № 4, С. 588-595.

[57] *Чеснокова К.В.* Об отображении, сопоставляющем тройке точек банахова пространства их точку Штейнера // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Матем. Механ., 2016, № 2, С. 294-311.

[58] *Чеснокова К.В.* Об отображении Штейнера для трех точек // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции : Воронежская зимняя математическая школа (27 января – 2 февраля 2015 г.). Издательский дом ВГУ, Воронеж, 2015, С. 151-152.

[59] *Беднов Б.Б., Чеснокова К.В.* О выборках из отображения Штейнера // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского, т. 51, Материалы Двенадцатой международной Казанской летней научной школы-конференции "Теория функций, её приложения и смежные вопросы"(Казань, 27 июня – 4 июля 2015 г.). Казанское математическое общество, Казань, 2015, С. 63-65.

[60] *Беднов Б.Б., Чеснокова К.В.* Липшицевы выборки из отображения Штейнера // Современные проблемы теории функций и их приложения, Материалы 18-й междунар. Сарат. зимней школы. ООО Издательство "Научная книга", Саратов, 2016, С. 56-57.