“УТВЕРЖДАЮ”
Заместитель директора Федерального
государственного бюджетного учреждения науки
“Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук”
академик РАН Д.В. Трещев
3 ноября 2016 года

**Отзыв ведущей организации —
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
“Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук”
на диссертацию Чесноковой Ксении Васильевны
“Коэффициент линейности метрической проекции и его приложения”,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук
по специальности 01.01.01 —
вещественный, комплексный и функциональный анализ**

В диссертации исследуется липшицевость (в чебышевском случае) и существование липшицевых выборок у операторов метрического проектирования P_Y на различные подпространства, оцениваются соответствующие константы Липшица. Важнейшим объектом для изучения является оператор Штейнера. Основным методом исследований является введённый П.А. Бородиным коэффициент линейности оператора P_Y.

Оператор метрической проекции находится в центре внимания геометрической теории приближений. Его свойства, такие как непрерывность, равномерная непрерывность, гёльдеровость, изучали С.Б.Стечкин, А.Л. Гаркави, И. Зингер, А.К. Клайн, В. Ли, Ф. Дойч, С. Парк, П.В. Альбрехт, И.Г. Царьков и многие другие математики.

Пусть Y — подпространство нормированного пространства X. Оператор метрической проекции P_Y сопоставляет точке x множество ближайших к x элементов Y. Предположим, Y является чебышёвским подпространством; тогда отображение P_Y однозначно; оно равномерно непрерывно тогда и только тогда, когда оно липшицево. При этом константа

Липшица $K(P_Y)$ тесно связана с *коэффициентом линейности*

$$\lambda(P_Y) = \inf_{q_1, q_2 \perp Y, y \in Y} \frac{\|q_1 + q_2 - y\|}{\|q_1 + q_2\|},$$

где запись $q \perp Y$ означает *квазиортогональность*: ближайшим к q элементом в Y является нуль. П.А. Бородин показал, что $|K(P_Y) - 1/\lambda(P_Y)| \leq 1$.

В первой главе получен ряд результатов относительно величины $\lambda(P_Y)$. Отметим, что многие результаты являются точными. Приведём некоторые из них.

В теореме 1.1 автор точно вычисляет коэффициент линейности оператора метрической проекции на одномерное подпространство $\langle\varphi\rangle \subset C(K)$, для произвольного компакта K и непрерывной функции φ, не обращающейся в ноль. Приведём формулу в случае связного K:

$$\lambda(P_{\langle\varphi\rangle}) = \frac{1-\alpha}{2}, \quad \alpha := \frac{\max|\varphi| - \min|\varphi|}{\max|\varphi| + \min|\varphi|}.$$

В теореме 1.3 получены оценки $\lambda(P_Y)$ в случае одномерного подпространства $Y = \langle y\rangle \subset \ell_p^n$. Из них вытекает, в частности, что для вектора $y \in \ell_p$ с бесконечным числом ненулевых координат проектор $P_{\langle y\rangle}$ не липшицев. Для подпространства констант $I = \langle(1, 1, \ldots, 1)\rangle$ оценки теоремы оказываются точными по порядку; из них вытекает интересное порядковое равенство

$$K(P_I \colon \ell_p^n \to I) \asymp n^{1/p}, \quad p \in (1, 2) \cup (2, \infty).$$

(При $p = 2$, очевидно, $K = 1$.)

Вторая глава, а также §2 первой главы, посвящены отображению Штейнера St_n, причём основное внимание уделяется наиболее трудному случаю $n = 3$. Отображение St_n сопоставляет набору $(x_1, \ldots, x_n)$ точек нормированного пространства множество точек s, таких, что сумма расстояний $\|x_1 - s\| + \ldots + \|x_n - s\|$ минимальна.

Отправной точкой этих исследований является

Теорема (J.-P. Kahane). *Для отображения Штейнера в евклидовой плоскости выполнено:*

- *(однозначное) отображение* St_3 *удовлетворяет условию Липшица с точной константой* $2/\sqrt{3}$*;*

- *для нечётных $n \geq 5$ (однозначное) отображение* St_n *не липшицево.*

В диссертации теорема Кахана развивается и дополняется в нескольких направлениях. Во-первых, отображение St_3 в евклидовой плоскости ℓ_2^2 соответствует оператору метрической проекции в X^3, $X = \ell_2^2$, на диагональ; константа Липшица этого оператора равна $2\sqrt{3}$, в соответствии с теоремой Кахана. В теореме 1.2 автору удаётся точно вычислить коэффициент линейности этого оператора: $\lambda = \sqrt{21}/14$. Во-вторых, доказывается следующая

Теорема (2.4).

a) Для строго выпуклого гладкого двумерного пространства отображение St_3 *является липшицевым.*

b) Для всякого $M > 0$ существует такое двумерное гладкое строго выпуклое пространство, что константа Липшица отображения St_3 *в этом пространстве больше M.*

c) Существует двумерное строго выпуклое негладкое пространство, для котрого St_3 *не липшицево.*

В-третьих, доказано, что St_{2k+1}, $k \geq 2$, не липшицево во всех "достаточно хороших" нормированных пространствах.

В работе получены новые интересные результаты. При доказательстве автору пришлось преодолеть существенные технические трудности и вовсю использовать аппарат теории банаховых пространств.

Теоремы приведены с полными и подробными доказательствами. Результаты опубликованы в пяти работах, две из них — в журналах из списка ВАК. Результаты и методы диссертации могут найти применение в теории функций, функциональном анализе и геометрии. Результаты и методы диссертации могут быть использованы при исследованиямх в Московском, Уральском, Саратовском государственных университетах, в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Институте математики и механики УрО РАН. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

В работе имеется небольшое количество неточностей и опечаток. Так, на стр.42 в оценке через $\inf |f(q^1 + q^2)|/...$ правильно брать не фиксированный функционал f, а максимум по всевозможным функционалам вида $f = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots)$. На стр.45 в предложении перед теоремой 2.1 пропущено слово “выборки”. На стр.49 в п.3) вверху нужно $f_k(x_k - y)$ вместо $f_k(x_k - y_0)$. На стр. 65 вместо $\| - y_1 - x_1\|$ нужно $\| - y_3 - x_1\|$.

Работа написана несколько формально, в ряде мест можно было бы заменить рутинные вычисления “идейными” соображениями. Например, в доказательстве теоремы 2.4 а), случаи, в которых какие-то из точек x_i, y_i попадают в нуль, можно было бы вывести из общего случая “по непрерывности”.

Несмотря на указанные недостатки, представленная работа удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор Ксения Васильевна Чеснокова заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв подготовлен старшим научным сотрудником отдела теории функций к.ф.-м.н. Ю.В. Малыхиным, обсужден и утвержден на заседании отдела теории функций ФГБУН “Математический институт имени В.А. Стеклова РАН” 3 ноября 2016 года, протокол № 2 . Результаты голосования:
“за” 5
“против” 0
“воздержались” 0 .

Старший научный сотрудник отдела теории функций
ФГБУН “Математический институт имени В.А. Стеклова РАН”
к.ф.-м.н., 01.01.01. Ю.В. Малыхин
тел. +7 (495) 984 81 41 * 37 88
e-mail: malykhin@mi.ras.ru

Заведующий отделом теории функций
ФГБУН “Математический институт имени В.А. Стеклова РАН”
член-корреспондент РАН О.В. Бесов
д.ф.-м.н., 01.01.01
тел. +7 (495) 984 81 41 * 36 67
e-mail: besov@mi.ras.ru

Адрес: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д.8
ФГБУН „Математический институт имени В.А. Стеклова РАН",
отдел теории функций