

## ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации К.В. Чесноковой "Коэффициент линейности метрической проекции и его приложения", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация посвящена двум задачам теории приближений в нормированных пространствах (геометрической теории приближений):

- (1) вычисление и оценка коэффициентов линейности операторов метрического проектирования  $P_Y$  на чебышевские подпространства  $Y$  банаховых пространств, а также коэффициентов линейности выборок из  $P_Y$  для нечебышевских  $Y$ ;
- (2) приложение оценок коэффициента линейности к исследованию существования липшицевых выборок из операторов  $P_Y$  и связанных с ними отображений — прежде всего, отображений Штейнера, а также к оценкам констант Липшица этих выборок.

Исследования свойств операторов метрического проектирования на линейные подпространства банаховых пространств (то есть операторов, ставящих в соответствие точке пространства множество ближайших к ней точек в подпространстве) составляют одну из центральных областей в геометрической теории приближений. Начиная с классической работы П.Л. Чебышева, в которой описан оператор метрического проектирования на подпространство многочленов в пространстве непрерывных на отрезке функций (теорема об альтернансе), этой тематике посвящены работы Хаара, Е.Я. Ремеза, А.Н. Колмогорова, А.Л. Гаркави, Зингера, Линденштраусса, Фелпса, Рудина, Смита, Морриса, В.И. Бердышева, Клайна, Дойча, Ву Ли, А.В. Маринова, Л.П. Власова и многих других математиков. Основными здесь являются вопросы непрерывности, липшицевости и линейности оператора метрического проектирования или близких к нему операторов, а также выборок из этих операторов в случае их многозначности.

Коэффициент линейности  $\lambda(Y)$  метрической проекции  $P_Y$  на чебышевское подпространство  $Y$  был введен мной в 2009 г. как измеритель линейности оператора  $P_Y$ : значение  $\lambda(Y)$  всегда находится между 0 и 1 и равно 1 в точности тогда, когда оператор  $P_Y$  линейен. Помимо собственных достаточно интересных свойств, коэффициент линейности напрямую связан со свойством липшицевости метрической проекции: оператор  $P_Y$  липшицев тогда и только тогда, когда  $\lambda(Y) > 0$ , и при этом  $\lambda(Y)$  и константа Липшица оператора  $P_Y$  оцениваются друг через друга.

В связи с коэффициентом линейности возникли задачи (1) и (2), которыми К.В. Чеснокова занималась семь лет, начиная с третьего курса университета.

Сначала она сумела точно вычислить коэффициент линейности  $\lambda(\langle \varphi \rangle)$  одномерного чебышевского подпространства  $\langle \varphi \rangle$ , порожденного функцией  $\varphi$ , в пространстве  $C(K)$  функций, непрерывных на хаусдорфовом компакте  $K$  (как показал Клайн в 1973 г., метрическая проекция на чебышевское подпространство конечной размерности больше 1 в  $C(K)$  в случае бесконечного  $K$  не липшицева, так что коэффициент линейности такого подпространства равен 0). Полученная формула задает тонкие характеристики порождающей функции  $\varphi$  и доказывается очень непросто. Из этой формулы, в свою очередь, получились оценки константы Липшица метрической проекции на подпространство  $\langle \varphi \rangle$ , в ряде случаев уточняющие оценки В.И. Бердышева 1975 г. Эти результаты вошли в первую главу диссертации.

В дальнейшем К.В. Чеснокова занималась в основном оценками коэффициента линейности выборок из метрической проекции на диагональное подпространство  $D = \{(x, \dots, x) : x \in X\}$  в  $l_1$ -сумме  $X \oplus \dots \oplus X$  из  $n$  экземпляров банахова пространства  $X$ . Оператор  $P_D$  напрямую связан с отображением  $St_n$ , сопоставляющим  $n$  точкам  $x_1, \dots, x_n$  пространства

$X$  множество их точек Штейнера  $s$ , минимизирующих сумму  $\|x_1 - s\| + \dots + \|x_n - s\|$ . Для различных общих классов пространств  $X$  были получены нетривиальные оценки коэффициента линейности  $\lambda(p)$  выборок  $p \in P_D$ , в ряде случаев этот коэффициент был вычислен точно (например, для гильбертова пространства  $X$  и  $n = 3$ ). Эти оценки повлекли за собой утверждения о существовании липшицевых выборок из отображений  $St_n$  и оценки констант Липшица этих выборок. Так, была доказана липшицевость (однозначного) отображения  $St_3$  в случае двумерного гладкого строго выпуклого пространства  $X$ , что обобщает соответствующий результат Кахана 1974 г. для евклидовой плоскости. В случае четных  $n \geq 4$  и пространств  $X$  конечной размерности больше 1 получился замечательный критерий: отображение  $St_n$  допускает липшицеву выборку тогда и только тогда, когда единичный шар пространства  $X$  — конечный многогранник. Эти результаты составили всю вторую и частично первую главы диссертации.

Нельзя не отметить и полученные в первой главе интересные оценки коэффициентов линейности одномерных подпространств пространства  $l_p^n$ . Эти оценки, в ряде случаев асимптотически точные по  $n$ , позволили установить критерий липшицевости метрической проекции на одномерное подпространство в пространстве  $l_p$ .

При доказательстве основных своих теорем К.В. Чесноковой пришлось преодолеть существенные технические трудности. В то же время порой длинные доказательства этих теорем не кажутся громоздкими, они производят впечатление тонкой кропотливой ручной работы. Результаты диссертации значительно продвигают решение задач (1) и (2) и побуждают к дальнейшим исследованиям в этих направлениях. Возникшие новые интересные задачи сформулированы в заключении.

Тема диссертации актуальна, полученные результаты новы, интересны и могут быть использованы в научных исследованиях, ведущихся в МГУ имени М.В. Ломоносова, Институте математики и механики УРО РАН (Екатеринбург), Московском физико-техническом институте, Математическом институте имени В.А. Стеклова РАН, Воронежском и Тульском государственных университетах. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации; основные результаты диссертации опубликованы и апробированы на различных семинарах и конференциях.

Считаю, что диссертация "Коэффициент линейности метрической проекции и его приложения" удовлетворяет требованиям "Положения о порядке присуждения ученых степеней", а ее автор К.В. Чеснокова заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Научный руководитель, д.ф.-м.н. (01.01.01),  
профессор кафедры теории функций и функционального анализа  
механико-математического факультета  
МГУ имени М.В. Ломоносова

П.А. Бородин

15.09.2016

119991, Москва, Воробьевы горы, МГУ, Главное здание, кафедра теории функций и функционального анализа; e-mail: pborodin@inbox.ru; тел.: (495)939-36-80.

Подпись П.А. Бородина заверяю  
И.о. декана механико-математического факультета МГУ,  
д.ф.-м.н, профессор

