Отзыв официального оппонента
на диссертацию Чесноковой Ксении Васильевны
«КОЭФФИЦИЕНТ ЛИНЕЙНОСТИ МЕТРИЧЕСКОЙ
ПРОЕКЦИИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ»,
представленную на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.01.01 –
«вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация К. В. Чесноковой посвящена изучению коэффициента линейности оператора метрического проектирования на замкнутое подпространство в банаховом вещественном пространстве. С помощью коэффициента линейности исследуется условие Липшица для оператора метрического проектирования на подпространство, а также липшицевы выборки из отображения Штейнера. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и содержит 78 страниц текста.

Выяснение наличия/отсутствия условия Липшица для оператора метрического проектирования на подпространство – давний вопрос функционального анализа. В бесконечномерном случае липшицевость оператора метрического проектирования на любое замкнутое подпространство означает, что норма в данном пространстве эквивалентна некоторой евклидовой норме (Линденштраусс). Следовательно, если пространство не гильбертово, то в нем существует подпространство, метрическая проекция на которое не липшицева. В то же время, во многих банаховых пространствах (и в первую очередь в нерефлексивных) актуально описание таких подпространств, что оператор метрического проектирования на эти подпространства равномерно непрерывен и, в частности, липшицев. Автор диссертации базируется на конструкции, названной «коэффициентом линейности» оператора метрического проектирования на подпространство и предложенной в 2009 году Бородиным. Результаты Бородина (Теорема А введения работы и ряд др. результатов) увязывают коэффициент линейности и константу Липшица для оператора метрического проектирования для данного замкнутого подпространства.

Тематика работы находится, в первую очередь, в сфере интересов специалистов по геометрической теории приближений. Близкие вопросы об устойчивости решения экстремальной задачей по «данным» (в нашем случае зависимость метрической проекции от проецируемой точки и от вида подпространства) рассматривают и специалисты не негладкому анализу и экстремальным задачам. Поэтому тематика работы представляет интерес и для специалистов в этих областях.

Остановимся подробнее на разделах работы.

Во введении содержится достаточно полный обзор по проблематике исследований условия Липшица для оператора метрического проектирования на замкнутые подпространства в разных классах банаховых пространств. Перечислены основные известные свойства коэффициента линейности, в частности его связь с условием Липшица. Также дан обзор результатов по отображению Штейнера. Значения (многозначного вообще говоря) отображение Штейнера – это множество всех точек Штейнера для данного (конечного) набора точек пространства, т.е. множество таких точек, сумма расстояний от каждой из которых до заданных точек пространства минимальна. Легко видеть, что в рефлексивном банаховом пространстве множество Штейнера непусто из соображений слабой компактности и, например, в классе равномерно выпуклых банаховых пространств, равномерно непрерывно. Однако в нерефлексивном банаховом пространстве само существование точек Штейнера находится под вопросом, тем более нет таких простых и удобных механизмов для исследования отображения Штейнера, как, например, модули выпуклости или гладкости пространства. Отметим также, что даже в конечномерном пространстве вопрос о наличии липшицевой выборки из отображения Штейнера является нетривиальным, тем более этот вопрос нетривиален в бесконечномерном пространстве.

Глава I посвящена вычислению коэффициента линейности для разных банаховых пространств. На взгляд рецензента, основным результатом главы является теорема 1.1, в которой вычислен коэффициент линейности для одномерного подпространства из C(K) (пространство вещественных функций на хаусдорфовом компакте K), а также следствие 1.1. В силу известных ранее результатов, только оператор метрического проектирования на одномерное подпространство C(K) может быть липшицевым. Вычисленный коэффициент линейности позволяет уточнить константу Липшица при проектировании на одномерное подпространство из C(K). В частности, автор диссертации усилила (для определенных классов одномерных подпространств) оценку Бердышева (1975 г.) константы Липшица оператора метрического проектирования на одномерное подпространство.

Два других результата первой главы – теоремы 1.2 и 1.3. В теореме 1.2 точно вычислен коэффициент линейности оператора метрического проектирования для подпространства констант пространства l_1^3(C). При этом вычислении автор преодолела значительные технические трудности.

Из теоремы 1.3 вытекает важное следствие 1.4, которое характеризует одномерные подпространства из l_p, ($1<p<\infty$, $p \neq 2$), оператор метрического проектирования на которые удовлетворяет условию Липшица. Здесь, для доказательства необходимости, важным инструментом снова оказался коэффициент линейности.

Вторая глава посвящена исследованию существования/не существования липшицевых выборок из отображения Штейнера. Основной положительный результат здесь – это теорема 2.5 и доказанное на ее основе следствие 2.3, которое характеризует конечномерные пространства, в которых отображение St_n при четных $n \geq 4$ имеет липшицеву выборку. Это пространства, в которых шар – многогранник. Также в теореме 2.4 доказано, что для строго выпуклого и гладкого двумерного банахова пространства отображение St_3 липшицево.

Другие результаты главы II носят ограничительный характер. В следствии 2.1 получено, что для широкого класса банаховых пространств константа Липшица (одноточечного в данном случае) отображения St_3 не менее 2/3. Следствие 2.2 и теорема 2.6 показывают, что в широком классе банаховых пространств размерности ≥ 2 отображение St_n не липшицево ($n \geq 4$). При этом важнейшим техническим инструментом является коэффициент линейности и свойство, что условие «коэффициент линейности оператора метрического проектирования на заданное подпространство =0» влечет то, что оператор метрического проектирования на это подпространство не липшицев.

Оценивая работу в целом, хочется отметить, что, во-первых, научная новизна работы несомненна. Во-вторых, в работе существенно развита техника работы с коэффициентом линейности, на основе которой решены многие актуальные задачи теории приближений. Особенно интересно результаты выглядят в случае нерефлексивных (и даже не равномерно выпуклых/гладких) банаховых пространств, когда не работают привычные модули (выпуклости, гладкости, и проч.).

По мнению рецензента, результаты диссертации являются значимыми для геометрической теории приближений и негладкого анализа.

Сделаем несколько замечаний по работе.

1) В работе почему-то очень экономно расставлены ссылки на формулы: есть всего три занумерованные формулы. Это затрудняет чтение текста, особенно теорем 1.2 и 2.4.
2) Некоторые доказательства апеллируют к другим работам (например, лемма 2.1), однако, пройдя по ссылке, восстановить доказательство все же непросто, т.к. обозначения разнятся и, по сути, надо прочитать еще одну статью (сопоставив обозначения, результаты и т.д.), чтобы понять доказательство всего одной леммы из диссертации. Имело бы смысл изложить полное доказательство таких мест в диссертации для удобства читателя.
3) Имеется ряд опечаток (например, на стр. 29 вместо знаков объединения стоят знаки пересечения), не имеющих принципиального значения.

Указанные замечания имеют редакционный характер и не снижают ценности результатов, полученных в диссертации.

Результаты, полученные в диссертации, достаточно полно опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК, доложены и обсуждены со специалистами на научных семинарах и конференциях. Результаты могут найти применение при проведении научных исследований в теории приближений, негладком анализе, теории экстремальных задач. Полученные результаты могут быть использованы специалистами в названных областях из МГУ, СПб ГУ, МФТИ, МИ РАН, ИММ УрО РАН, РУДН и др., а также могут быть включены в лекционные курсы по указанным выше разделам математики для студентов и аспирантов.

Автореферат диссертации верно отражает ее содержание.

Представленная диссертация является законченной научно-квалификационной работой, в которой содержится решение актуальных задач, имеющих существенное значение для теории функций и функционального анализа (геометрическая теория приближений). Диссертация отвечает всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям (в частности, п. 9 «Положения о присуждении ученых степеней»). Автор работы, К. В. Чеснокова, заслуживает присвоения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

15 ноября 2016 г.

Профессор кафедры высшей математики, д.ф.-м.н.,
специальность 01.01.09 – дискретная математика и
математическая кибернетика

Максим Викторович Балашов

Почтовый адрес: 141707, МО, г. Долгопрудный, Институтский пер. 9, МФТИ, кафедра высшей математики

Организация – место работы: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»
Тел. 8 495 4088172.
Адрес электронной почты balashov73@mail.ru

Подпись М. В. Балашова и сведения заверяю.
Ученый секретарь МФТИ Ю. И. Скалько