МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

На правах рукописи
517.518+517.984

Тихонов Юлий Васильевич

Классы сингулярных функций в различных функциональных пространствах

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2016

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор
Шейпак Игорь Анатольевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, доцент
Федоровский Константин Юрьевич,
главный научный сотрудник кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

кандидат физико-математических наук, доцент
Артамонов Никита Вячеславович,
заведующий кафедрой математики, эконометрики и информационных технологий ФГАОУ ВО «Московский государственный институт международных отношений (университет) Министерства иностранных дел Российской Федерации»

Ведущая организация:

ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Защита состоится 02 декабря 2016 г. в 16 час. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119234, ГСП–1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, 27, сектор А, 8-й этаж).

Автореферат разослан октября 2016 г.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 на базе МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор **Власов Виктор Валентинович**

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена исследованию свойств сингулярных функций в различных функциональных пространствах, а также приложениям к теории дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами.

Актуальность темы. Сингулярные функции возникают при разложении непрерывных функций ограниченной вариации в сумму абсолютно-непрерывной и сингулярной компонент[1,2]. Первоначально сингулярные функции служили иллюстрацией различных экзотических свойств. Одним из первых примеров сингулярной функции является функция Кантора (или лестница Кантора), представляющая собой нетривиальный пример неубывающей функции, производная которой почти всюду равна нулю.

Впоследствии стали появляться примеры других сингулярных функций с достаточно необычными свойствами. Например, сингулярные функции Салема и Минковского[3,4] являются строго монотонными на отрезке $[0;1]$, но их производная, тем не менее, почти всюду равна нулю. Сингулярные функции типа функции Кантора, Салема и Минковского также служат примером непрерывных функций, для которых коэффициенты преобразования Фурье–Стилтьеса не стремятся к нулю. Одним из первых пример таких функций построил А. Зигмунд[5]. Исследований свойств, которые позволили бы определить, является ли функция сингулярной, не проводились.

Постепенно сингулярные функции перестали служить только источником экзотических примеров, все больше являясь объектом исследований в различных математических дисциплинах. Особенно это проявилось с развитием компьютерных технологий.

Одним из важных классов сингулярных функций, широко применяемых в различных областях, являются самоподобные функции. Самоподобными (фрактальными) объектами (множествами, мерами, функциями и т. д.) занимались многие математики. Самоподобные объекты

---

[1] Lebesgue, Henri, *Lecons sur L'integration et La recherche des fanctions primitives*, Paris: Gauthier-Villars, 1904. Русский перевод: Лебег А., *Интегрирование и отыскание примитивных функций*, М.: ГТТИ, 1934.

[2] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, 3 изд., М.: Наука, 1974.

[3] H. Minkowski, *Verhandlungen des III* // Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg — Berlin, 1904.

[4] Salem R., *On Some Singular Monotone Functions which Are Strictly Increasing* // Trans. Amer. Math. Soc. 53, 1943, 427–439.

[5] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды (том 1)*, Мир, М., 1964.

появлялись уже в работах Г. Кантора, В. Серпинского, Р. Салема и др, но основы современной теории самоподобия были заложены в работах Б. Мандельброта[6,7], Дж. Хатчинсона[8]. Важные результаты были получены в работах Р. С. Стрихартца[9], Ж. де Рама[10,11], В. Ю. Протасова[12].

Различными приложениями самоподобных множеств и самоподобных функций к спектральной теории дифференциальных операторов занимались М. В. Берри[13], М. Л. Лапидус[14], Дж. Кигами[15], Дж. Броссар, Р. Кармона[16], М. Левитин, Д. Васильев[17], М. З. Соломяк, Е. А. Вербицкий[18], А. А. Владимиров, И. А. Шейпак[19], А. И. Назаров[20]. Основная идея этих работ заключается в том, что некоторые спектральные характеристики задачи могут быть выражены через параметры самоподобия элементов, участвующих в задаче (множеств, функций, мер и др.).

Самоподобные сингулярные функции и порождаемые ими самоподоб-

---

[6] Mandelbrot B. B., *How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension* // Science. 1967, 155, 636–638.

[7] Mandelbrot B. B., *The fractal geometry of nature* // Freeman, San Francisco, 1982.

[8] Hutchinson J., *Fractals and Self-similatity* // Indiana University Math. J., **30** (1981), 713–741.

[9] Strihartz R. S., *Self-similar measures and their Fourier transform, I* // Indiana University Math.J., **39**, 1990, 797–817.

[10] De Rham G., *Une peu de mathématique à propos d'une courbe plane* // Rev. de math. elemetaires, **2**:4,5, 1947, 73–76, 89–97.

[11] De Rham G., *Sur les courbes limités de polygones obtenus par trisection* // Enseign. Math., (2), **5** (1959), 29–43.

[12] Протасов В. Ю., *Фрактальные кривые и всплески* // Изв. РАН. Серия матем., **70**:5 (2006), 105–145.

[13] Berry M. V., *Distribution of modes in fractal resonators, structural stability in physics* (W. Güttinger and H. Eikemeier, eds.) // Springer-Verlag, Berlin, 1979, pp.51–53.

[14] Lapidus M. L., *Fractal drum, inverse spectral problems for elliptic operators and a partial resolution of the Weyl–Berry conjecture* // Trans. Amer. Math. Soc., **325**, 1991, 465-529.

[15] Kigami J., Lapidus M. L., *Weyl's problem for the spectral distributions of Laplacians on p.c.f. self-similar fractals* // Comm. Math. Phys. 158, 1993, 93-–125.

[16] Brossard J., Carmona R., *Can one hear the dimension of a fractal?* // Comm. Math. Phys., **104**, 1986, pp.103–122.

[17] Levitin M., Vassiliev D., *Spectral asymptotics, renewal theorem, and the Berry conjecture for a class of fractals* // Proc. Lond. Math. Soc., **72** (1996), 188–214.

[18] Solomyak M., Verbitsky E., *On a spectral problem related to self-similar measures* // Bull. London Math. Soc., **27**, 1995, 242–248.

[19] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, *Самоподобные функции в пространстве* $L_2[0,1]$ *и задача Штурма–Лиувилля с сингулярным весом* // Математический сборник, 2006, **197**:11, 13–30.

[20] Nazarov A. I., Sheipak I. A., *Degenerate self-similar measures, spectral asymptotics and small ball deviations of gaussian processes* // Bulletin of the London Mathematical Society, 44, 2012, 12–24.

ные сингулярные меры возникают не только в спектральной теории операторов, но и в теории случайных процессов[21], в теории сжатия информации и компьютерных изображений [22].

Эти и другие исследования, в частности[23], привели к идее охарактеризовать неубывающие ограниченные сингулярные функции с точки зрения скорости приближения их в норме пространства $L_2[0;1]$ кусочно-постоянными функциями. К этой тематике близко примыкает исследования по скорости приближений гладких функций многочленами или сплайнами[24,25].

Цель работы. Получить необходимые и достаточные условия того, что неубывающая ограниченная функция является сингулярной в терминах скорости аппроксимации такой функции кусочно-постоянными (с растущим количеством значений) функциями в нормах пространств $L_p[0;1]$ $(1 \leq p \leq \infty)$. В зависимости от скорости приближения (скорости убывания нормы разности) выделить классы сингулярных функций. Получить для этих классов квалифицированные оценки на скорость сходимости. Дать описание пространства мультипликаторов из пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_2[0;1]$ в дуальное пространство $\overset{\circ}{W}{}^{-1}_2[0;1]$ в множестве самоподобных кусочно-постоянных функций.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем.

1. Получен критерий того, что неубывающая ограниченная функция является сингулярной в терминах скорости приближения ее кусочно-постоянными функциями (при росте числа их точек разрыва) в нормах пространств $L_p[0;1]$ $(1 \leq p < \infty)$.

2. Рассмотрено множество аффинно-самоподобных неубывающих непрерывный сингулярных функций положительного спектрального порядка. Получены двусторонние оценки степенного характера

[21] А. И. Назаров, *Логарифмическая асимптотика малых уклонений для некоторых гауссовских процессов в L_2-норме относительно самоподобной меры* // Вероятность и статистика. ЗНС ПОМИ, 2004, **311**, 190–213.

[22] Barnsley M., *Fractals everywere* // Academic Press, 1988.

[23] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, *О задаче Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа* // Функциональный анализ, 2013, **47**:4, 18–29.

[24] Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных, *Порядок наилучших сплайн-приближений некоторых классов функций* // Матем. заметки., 1970, **7**:1, 31–42.

[25] Н. П. Корнейчук, А. И. Половина, *О приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, алгебраическими многочленами* // Матем. заметки., 1971, **9**:4, 441–447.

на скорость приближения функции из этого множества в пространствах $L_p[0;1]$ $(1 \le p \le \infty)$. Скорость сходимости зависит от показателя p и параметров самоподобия приближаемой функции.

3. Полученные результаты позволяют для класса неубывающих непрерывных сингулярных функций ввести «степень» сингулярности: чем быстрее приближается функция кусочно-постоянными, тем она «сингулярнее». Кроме того, скорость приближения сингулярной функции позволяет получить информацию о хаусдорфовой размерности сингулярной меры, ассоциированной с неубывающей непрерывной сингулярной функцией.

4. Дано полное описание множества мультипликаторов из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1[0;1]$ в пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0;1]$ в классе обобщенных производных аффинно-самоподобных функций нулевого спектрального порядка с особенностью на конце отрезка. Рассмотрена задача Штурма–Лиувилля с весом из указанного класса. Показано, что для некоторого подкласса таких весов спектр задачи может быть чисто непрерывным.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и разработанная техника могут быть использованы специалистами в области теории функций, теории сингулярных мер, в теории обработки компьютерных изображений, а также в спектральной теории дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами.

Методы исследования. В работе используются свойства сжимающих отображений в различных функциональных пространствах, свойства сингулярных функций и сингулярных мер, методы масштабирующих уравнений, методы теории функций действительной переменной, методы спектральной теории операторов и операторных пучков в гильбертовых пространствах, асимптотические методы.

Апробация диссертации. Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

- Научный семинар по операторным моделям в математической физике механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством профессоров А. А. Шкаликова, И. А. Шейпака, доцента А. М. Савчука (2013–2016 гг., неоднократно).

- Научный семинар по геометрической теории приближений механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством профессора П. А. Бородина (2015).
- Научно-исследовательский семинар по теории функций механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством академика РАН Б. С. Кашина, профессора М. И. Дьяченко, профессора Б. И. Голубева, член-корреспондента РАН, профессора С. В. Конягина (2016).
- Городской (С.-Петербург) Семинар «Конструктивная теория функций» под руководством профессора М. А. Скопиной (2016).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались на следующих научных конференциях:

- Международная конференция по функциональным пространствам и теории приближения функций, посвященная 110-летию со дня рождения академика С. М. Никольского (25–29 мая 2015 г., МИАН, г. Москва).
- XVIII Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» (27 января–03 февраля 2016 г., г. Саратов).

Тезисы всех докладов опубликованы в сборниках тезисов соответствующих конференций.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах автора, в том числе в 2 работах, опубликованных в ведущих математических журналах из перечня, рекомендованного ВАК. Список работ приведен в конце автореферата. Из совместных работ в диссертацию включены только результаты автора.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Текст диссертации изложен на 88 страницах. Список литературы содержит 39 наименований. В работе имеется 2 поясняющие иллюстрации.

Краткое содержание диссертации

Введение. Во введении приводится краткий исторический обзор исследований по сингулярным функциям, делается анализ состояния исследований по заявленной тематике на современный момент, формулируются основные результаты, полученные в диссертации.

В первой главе диссертации исследуется скорость приближения сингулярных функций кусочно-постоянными, доказывается критерий сингулярности функции в терминах скорости приближения.

Обозначим через $\mathcal{D}_N$ множество неубывающих на $[0;1]$ функций, принимающих не более чем N значений.

В первом разделе первой главы приводятся предварительные сведения: указывается, что $\mathcal{D}_N$ является компактом в $L_p[0;1]$ при $p \in [1;+\infty)$, и приводятся тривиальные оценки скорости приближения кусочно-постоянными функциями.

Основной результат **второго раздела первой главы** описывается следующими двумя фактами.

Теорема 1. *Пусть f — ограниченная неубывающая функция на $[0;1]$. Следующие условия эквивалентны:*
(1) *f — сингулярна;*
(2) *Для некоторого $p \in [1;+\infty)$ найдется последовательность $f_n \in \mathcal{D}_{N(n)}$ такая, что*

$$\|f - f_n\|_{L_p} \cdot N(n) \to 0, \quad n \to \infty$$

(3) *Для любого $p \in [1;+\infty)$*

$$C_N^p(f) \cdot N \to 0, \quad N \to \infty,$$

где $C_N^p(f) = \min_{g \in \mathcal{D}_N} \|f - g\|_{L_p}$.

Теорема 2. *Пусть f — ограниченная неубывающая функция на $[0;1]$. Следующие условия эквивалентны:*
(1) *f — дискретна (т. е. мера, порожденная f, представима в виде счетной суммы атомарных мер);*
(2) *Найдется последовательность $f_n \in \mathcal{D}_{N(n)}$ такая, что*

$$\|f - f_n\|_{L^\infty} \cdot N(n) \to 0, \quad n \to \infty$$

(3) *Найдется последовательность $f_N \in \mathcal{D}_N$ такая, что*

$$\|f - f_N\|_{L^\infty} \cdot N \to 0, \quad N \to \infty$$

В третьем разделе первой главы приводится определение размерности Хаусдорфа меры, как наименьшей размерности множества, мера которого совпадает с мерой всего пространства; доказывается следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть функция f приближается кусочно-постоянными функциями в L_p со степенной скоростью α, где $p \in [1;+\infty)$, то есть выполнено неравенство*

$$\liminf_{N\to\infty} C_N^p(f)\cdot N^\alpha < +\infty\,.$$

Тогда размерность меры Лебега–Стилтьеса $\mathrm{d}f$ *не превосходит* $1/(\alpha p + 1 - p)$.

Вторая глава носит вспомогательный характер. В ней приводится краткая необходимая информация о конструкции самоподобных функций, устанавливаются условия на параметры самоподобия, задающие монотонные самоподобные функции. Рассматриваются различные классы самоподобных функций, которые потом используются в главах 3 и 4.

Определим отображение функций, заданных на отрезке $[0;1]$:

$$Gf(t) = \beta_k + d_k\cdot f\left(\frac{t-\alpha_k}{a_k}\right),\quad t\in[\alpha_k,\alpha_{k+1}],\quad k=1,\dots,n,$$
$$0=\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{n+1}=1,$$
$$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\in\mathbb{R},$$
$$a_k=\alpha_{k+1}-\alpha_k,\quad d_1,d_2,\dots,d_n\in\mathbb{R}.$$

Числа $\{\alpha_k\}$, $\{a_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{d_k\}$ будем называть *параметрами самоподобия.*

Известно[26], что при выполнении условия

$$\sup_{1\le k\le n}|d_k|<1 \tag{1}$$

отображение G будет сжимающим в пространстве $L_\infty[0;1]$.

При выполнении условия (1) отображение G имеет неподвижную точку в пространстве $L_\infty[0;1]$. Функция f называется *самоподобной функцией,* если она является неподвижной точкой *оператора подобия G*.

Всегда предполагается, что среди набора $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ хотя бы одно число отлично от нуля (иначе самоподобная функция есть тождественный нуль).

В третьей главе устанавливаются двусторонние оценки на скорость приближения монотонной ограниченной самоподобной функции положительного спектрального порядка кусочно-постоянными функциями.

[26] И. А. Шейпак, *О конструкции и некоторых свойствах самоподобных функций в пространствах $L_p[0,1]$* // Матем. заметки, 2007, **81:6**, 924–938.

Для параметров самоподобия накладывается условие, что хотя бы два числа из набора $\{d_k\}_{k=1}^n$ отличны от нуля (это условие определяет класс самоподобной функции положительного спектрального порядка).

Основным результатом этой главы является следующая

Теорема 4. *Для любого $p \in [1; +\infty)$ и любого $N \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства:*

$$m \cdot N^{-\alpha} \leq C_N^p(f) \leq M \cdot N^{-\alpha},$$

где m, M и α зависят только от f и p. При этом $\alpha \geq 1$ определяется однозначно из уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_k d_k^p\right)^{\frac{1}{1+\alpha p}} = 1.$$

В четвертой главе строятся примеры функций, которые приближаются кусочно-постоянными с произвольной скоростью. А именно, получен следующий результат:

Теорема 5. *Пусть $p \in [0, +\infty)$ и $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ — невозрастающая функция (функция оценки). Тогда существует сингулярная непрерывная неубывающая функция f такая, что*

$$\frac{s(8N)}{32} \leq C_N^p(f) \cdot N \leq s(N),$$

где $C_N^p(f) = \min_{g \in \mathcal{D}_N} \|f - g\|_{L_p}$.

Пятая глава посвящена изучению пространства мультипликаторов из соболевского пространства $\mathring{W}_2^1[0;1]$ в дуальное пространство $\mathring{W}_2^{-1}[0;1]$ и определению свойств самоподобных функций нулевого спектрального порядка в пространстве мультипликаторов. Также в этой главе приведен пример приложения некоторого класса этих функций к спектральным задачам.

Через $\mathcal{M}$ мы будем обозначать пространство мультипликаторов из $\mathring{W}_2^1[0;1]$ в дуальное пространство $\mathring{W}_2^{-1}[0;1]$. Обобщенная функция f принадлежит $\mathcal{M}$, если оператор умножения $y \mapsto f \cdot y$ является ограниченным из пространства $\mathring{W}_2^1[0;1]$ в пространство $\mathring{W}_2^{-1}[0;1]$.

В первом разделе пятой главы дана общая информация о пространстве $\mathcal{M}$ и получены достаточные условия, при выполнении которых обобщенная производная функции из весового пространства $L_p([0; 1 =, \mu)$ принадлежит пространству $\mathcal{M}$.

Рассмотрим пространства $L_{2\theta}([0;1],\mu)$, где $\mathrm{d}\mu = x(1-x)\mathrm{d}x$, $1 \le \theta \le \infty$.

Если $1 \le \theta < \infty$, то норма определяется

$$\|P\|_{L_{2\theta}([0;1],\mu)} = \left(\int_0^1 |P(x)|^{2\theta} x(1-x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/(2\theta)}.$$

Если $P \in L_\infty([0;1],\mu)$, то

$$\|P\|_{L_\infty([0;1],\mu)} = \|Q\|_{L_\infty[0;1]},$$

где Q — такой элемент пространства $L_\infty[0;1]$, что $Q(x) = x(1-x)P(x)$.

Обозначим через $\mathcal{H}$ пространство $\mathring{W}_2^1[0;1]$, а через $\mathcal{H}'$ — двойственное пространство $\mathring{W}_2^{-1}[0;1]$.

Основной результат этого раздела заключается в следующем

Теорема 6. *Если $P \in L_{2\theta}([0;1],\mu)$, то $P' \in \mathcal{M}$ (производная понимается в обобщенном смысле). При этом*

$$|\langle P'y, z\rangle| \le 2c_\theta \|P\|_{L_{2\theta}([0;1],\mu)} \|y\|_{\mathcal{H}} \|z\|_{\mathcal{H}},$$

где $c_\theta = (1/6)^{(\theta-1)/(2\theta)}$ при $1 \le \theta < \infty$ и $c_\theta = 4$ при $\theta = \infty$. Если $1 \le \theta < \infty$, то оператор $y \mapsto P'y$ является компактным из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}'$.

Во втором разделе пятой главы для аффинно-самоподобных функций нулевого спектрального порядка получены необходимые и достаточные условия, чтобы их обобщенные производные принадлежали пространству $\mathcal{M}$. Самоподобная функция имеет нулевой спектральный порядок, если среди набора параметров самоподобия $\{d_k\}_{k=1}^n$ ровно одно число отлично от нуля. Обозначим индекс этого числа через m: $d_m \ne 0$, $d_k = 0$ (при $k \ne m$).

Теорема 7. *Если $a_m|d_m| \le 1$, то обобщенная производная P' самоподобной функции P нулевого спектрального порядка, для которой $m = 1$ или $m = n$, принадлежит пространству $\mathcal{M}$.*

Если $a_m|d_m| > 1$ и самоподобная функция P нулевого спектрального порядка, для которой $m = 1$ или $m = n$, не является тождественно постоянной, то ее обобщенная производная P' не *принадлежит пространству $\mathcal{M}$.*

Во третьем разделе пятой главы рассматривается спектральная задача

$$-y'' = \lambda \rho y, \tag{2}$$

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{3}$$

где ρ — обобщенная производная некоторой функции $P \in \mathcal{M}$. Нас интересует спектр этой задачи в случае, когда P есть аффинно-самоподобная функция нулевого спектрального порядка.

Рассмотрим следующий операторный подход к этой задаче.

Оператор $y \mapsto y''$ осуществляет изометрию из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}'$. Обратный оператор из $\mathcal{H}'$ в $\mathcal{H}$ обозначим через J.

В качестве операторной модели, отвечающей задаче (2), (2), рассматривается линейный пучок $T_\rho(\lambda) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ ограниченных операторов, при каждом $\lambda \in \mathbb{R}$ и каждом $y \in \mathcal{H}$, удовлетворяющий тождеству

$$\langle JT_\rho(\lambda)y, y\rangle = \int_0^1 |y'|^2\,dx - \lambda\langle \rho y, y\rangle = \int_0^1 \left(|y'|^2 + \lambda P \cdot (|y|^2)'\right)\,dx. \quad (4)$$

Спектром задачи (2), (3) мы будем называть спектр пучка $T_\rho(\lambda)$ (т.е. те значения $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $T_\rho(\lambda)$ не имеет ограниченного обратного).

Получены следующие результаты

Теорема 8. *Если $a_m d_m < 1$, то спектр задачи (2), (3) дискретен, и все её собственные значения простые.*

Рассмотрим величины ζ_k, где $k = 2, \dots n$, имеющие вид

$$\zeta_k := \begin{cases} \beta_m - \beta_{m-1} + d_m\beta_1 & \text{при } k = m, \\ \beta_{m+1} - \beta_m - d_m\beta_n & \text{при } k = m+1, \\ \beta_k - \beta_{k-1} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим также через $N_\pm$ две величины

$$N_\pm := \#\{k \in [2, n] : \quad \pm\zeta_k > 0\}.$$

Про асимптотику собственных значений в этом случае можно сказать следующее

Теорема 9. *Пусть выполняются соотношения $d_m > 0$, $N_+ > 0$ и $N_+ + N_- = n - 1$. Тогда существуют вещественные числа $c_l > 0$, где $l = 1, \dots, N_+$, для которых последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ занумерованных в порядке возрастания положительных собственных значений задачи (2), (3) удовлетворяет при $k \to \infty$ асимптотикам*

$$\lambda_{l+kN_+} = c_l \cdot (a_m d_m)^{-k} \cdot (1 + o(1)).$$

Теорема 10. *Пусть выполняются соотношения* $d_m > 0$, $N_- > 0$ *и* $N_+ + N_- = n - 1$. *Тогда существуют вещественные числа* $c_l > 0$, *где* $l = 1, \ldots N_-$, *для которых последовательность* $\{\lambda_{-k}\}_{k=1}^{\infty}$ *занумерованных в порядке убывания отрицательных собственных значений задачи* (2)–(3) *удовлетворяет при* $k \to \infty$ *асимптотикам*

$$\lambda_{-(l+kN_-)} = -c_l \cdot (a_m d_m)^{-k} \cdot (1 + o(1)).$$

Теорема 11. *Пусть выполняются соотношения* $d_m < 0$ *и* $N_+ + N_- = n - 1$. *Тогда существуют вещественные числа* $c_l > 0$, *где* $l = 1, \ldots n - 1$, *для которых последовательность* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *занумерованных в порядке возрастания положительных собственных значений задачи* (2)–(3) *удовлетворяет при* $k \to \infty$ *асимптотикам*

$$\lambda_{l+k(n-1)} = c_l \cdot (a_m |d_m|)^{-2k} \cdot (1 + o(1)),$$

а последовательность $\{\lambda_{-k}\}_{k=1}^{\infty}$ *занумерованных в порядке убывания отрицательных собственных значений задачи* (2)–(3) *удовлетворяет при* $k \to \infty$ *асимптотикам*

$$\lambda_{-(l+N_-+k(n-1))} = -c_l \cdot (a_m |d_m|)^{-2k-1} \cdot (1 + o(1)).$$

Для этой задачи обнаруживается совершенно новый эффект, если рассмотреть веса, являющиеся обобщенными производными аффинно-самоподобных функций нулевого спектрального порядка, параметры самоподобия которых удовлетворяют условию $a_m d_m = 1$

Показано, что в случае «двучленных» самоподобных функций ($n = 2$) при условии $a_m d_m = 1$ спектр задачи (2), (3) непрерывен.

Теорема 12. *При* $n = m = 2$ *и* $a_m d_m = 1$ *и условии, что самоподобная функция* P *не является постоянной, спектр задачи* (2)–(3) *непрерывный и представляет собой отрезок* $\left[\frac{(1-\sqrt{a})^2}{ra(1-a)}; \frac{(1+\sqrt{a})^2}{ra(1-a)}\right]$, *где* $r = d\beta_1 + \beta_2 - \beta_1$, $a = a_m$.

При $m = 1$ можно получить аналогичный результат, но r будет определяться как $\beta_2 - \beta_1 - d\beta_2$.

Заключение

Диссертация посвящена исследованию свойств сингулярных функций и некоторым приложениям сингулярных функций в спектральных задачах. Характеристические свойства сингулярных неубывающих непрерывных функций описываются в терминах скорости их приближения кусочно-постоянными функциями (при росте количества значений) в различных функциональных пространствах.

Для класса неубывающих непрерывных функций получены необходимые и достаточные условия сингулярности. Рассмотрено множество аффинно-самоподобных неубывающих непрерывный сингулярных функций положительного спектрального порядка. Получены двусторонние оценки степенного характера на скорость приближения функции из этого множества в пространствах $L_p[0;1]$ $(1 \leq p \leq \infty)$. Скорость сходимости зависит от показателя p, параметров самоподобия приближаемой функции и количества точек разрыва функций, которыми проводится аппроксимация.

Приведены примеры, показывающие, что существуют неубывающие непрерывные сингулярные функции со сколь угодно быстрой и сколь угодно медленной скоростью приближения.

Полученные результаты позволяют для класса неубывающих непрерывный сингулярных функций ввести «степень» сингулярности: чем быстрее приближается функция кусочно-постоянными, тем она «сингулярнее». Кроме того, скорость приближения сингулярной функции позволяет получить информацию о хаусдорфовой размерности носителя сингулярной меры, ассоциированной с неубывающей непрерывной сингулярной функцией.

Дано полное описание множества мультипликаторов из пространства $\mathring{W}_2^1[0;1]$ в пространство $\mathring{W}_2^{-1}[0;1]$ в классе обобщенных производных аффинно-самоподобных функций нулевого спектрального порядка с особенностью на конце отрезка. Рассмотрена задача Штурма–Лиувилля с весом из указанного класса. Показано, что для некоторого подкласса таких весов спектр задачи может быть чисто непрерывным.

Полученные результаты могут быть применены к описанию пространства мультипликаторов в соболевские пространства с отрицательными показателями гладкости из соболевских пространств функций на отрезке с некоторыми краевыми условиями. Эти же результаты могут быть использованы в теории дифференциальных операторов с коэффициентами-распределениями.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Игорю Анатольевичу Шейпаку за постановку задач и поддержку в работе.

Публикации автора по теме диссертации

(Из официального перечня ВАК)

1. Ю. В. Тихонов, *О скорости приближения сингулярных функций кусочно-постоянными* // Математические заметки, 2014, **95**:4, 590–604.

2. Ю. В. Тихонов, И. А. Шейпак, *Описание самоподобных мультипликаторов в негативных соболевских пространствах с условием Дирихле* // Математические заметки, 2016, **99**:2, 314–318 (И. А. Шейпаку принадлежит условие необходимости в теореме 2, Ю. В. Тихонову принадлежат остальные результаты).

(Прочие публикации)

3. Ю. В. Тихонов, И. А. Шейпак, *О спектре задачи Штурма–Лиувилля с весом-мультипликатором из пространства Соболева с отрицательным индексом гладкости* // Тезисы Международной конференции «Функциональные пространства и теория приближения функций», посвященной 110-летию со дня рождения академика С. М. Никольского (25–29 мая 2015 г., МИАН, г. Москва), с. 253.

4. Ю. В. Тихонов *Скорость приближения монотонной функции кусочно-постоянными как критерий ее сингулярности* // Сборник материалов XVIII Международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» (27 января — 03 февраля 2016 г.), место издания Издательство СГУ Саратов, тезисы, 275–276.