МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
517.518+517.984

Тихонов Юлий Васильевич

# КЛАССЫ СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ В РАЗЛИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.01. — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание учёной степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
И.А. Шейпак

Москва — 2016

# Оглавление

# Введение

Целью настоящей работы является исследование свойств сингулярных функций в различных функциональных пространствах. Первой задачей является получение критерия сингулярности неубывающей функции в терминах оценок скорости ее приближения кусочно-постоянными функциями по нормам различных функциональных пространств. К этой задаче тесно примыкает проблема получения для некоторых классов сингулярных функций двусторонних оценок норм приближения, зависящих как от параметров сингулярных функций, так и от количества точек разрыва кусочно-постоянных функций, которыми ведется аппроксимация.

Второй задачей является получение условий, при которых обобщенная производная самоподобных функций нулевого спектрального порядка является мультипликатором из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1[0;1]$ в дуальное пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0;1]$. Такие функции разрывны, могут иметь неограниченную вариацию, но их классическая производная почти всюду на отрезке $[0;1]$ равна нулю, т.е. с этой точки зрения такие функции также можно считать сингулярными.

Сингулярная функция, определяемая как отличная от постоянной непрерывная функция ограниченной вариации, производная которой почти всюду на рассматриваемом отрезке равна нулю, является классическим объектом теории функций и других смежных дисциплин.

Возникнув, как слагаемое в Лебеговом разложении функций ограниченной вариации (см. [22], [28]), сингулярные функции долгое время играли роль экзотического примера. Одним из первых примеров сингулярной функции является функция Кантора (или лестница Кантора).

В дальнейшем появлялись и другие примеры сингулярных функций с достаточно необычными свойствами. Например, сингулярные функции Салема и Минковского (см. [21], [23]) являются строго монотонными на отрезке $[0;1]$, но их производная, тем не менее, почти всюду равна нулю. Сингулярные функции типа функции Кантора, Салема и Минковского также служат примером непрерывных функций, для которых коэффициенты преобразования Фурье–Стилтьеса не стремятся к нулю ([25], [12]).

Такая тенденция сохранялась достаточно продолжительное время: отдельные примеры сингулярных функций возникали в различных математических дисциплинах (теория функций, теория меры, случайные процессы и др.) в качестве иллюстрации «экзотичности» тех или иных свойств этих функций (как правило, предметом исследований являлись различные свойства множества точек роста и асимптотика коэффициентов Фурье–Стилтьеса). Систематическое исследование свойств функции, определяющих ее сингулярность, не проводилось.

С развитием компьютерных технологий, в частности при развитии теории сжатия информации, появился класс аффинно-самоподобных функций, которые оказались полезными с точки зрения многих приложений (теория гауссовских процессов (см. [17]), спектральная теория операторов (см. [1])). В свою очередь эти исследования послужили стимулом к описанию новых свойств сингулярных функций, а также привели к конструкции весьма широких новых классов сингулярных функций. В некоторых задачах спектральной теории использование кусочно-постоянных функций, в том числе имеющих неограниченную вариацию (т. е. с точки зрения классического определения сингулярной функции осталось только свойство равенства нулю почти всюду производной) привело к новым нетривиальным результатам (см. [4]).

В работе [8] получен критерий сингулярности неубывающей непрерывной функции в терминах ее скорости приближения кусочно постоянными функциями по норме пространства $L_2[0;1]$. Близкие результаты об аппроксимации гладких функций сплайнами или многочленами известны в литературе (см., например, [26]).

В работе [27]) для функций $f(x) \in KH^{(\alpha)}$ (удовлетворяющих на отрезке $[-1;1]$ условию Липшица степени $\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ с константой $K$) доказывается существование последовательности алгебраических многочленов $P_n(f;x)$ степени $n = 1, 2, \ldots$, таких, что при $n \to \infty$ равномерно по $x \in [-1;1]$ справедливо неравенство

$$\|f(x) - P_{n-1}(f;x)\| \leqslant \sup_{f \in KH^{(\alpha)}} E_n(f) \left[(1-x^2)^{\alpha/2} + o(1)\right], \tag{1}$$

где $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции $f$ алгебраическими многочленами степени не выше $n$.

Из формулы (1) видно, что на скорость приближения оказывает влияние как гладкость исходной функции (порядок липшицевости), так и порядок приближающей функции (степень многочлена). Похожая ситуация возникает и для сингулярных функций.

Приведем два результат работы [8], относящиеся к приближению сингулярных функций кусочно-постоянными.

**Теорема 1.** *Пусть $f \in L_2[0,1]$ — ограниченная неубывающая сингулярная функция. Тогда найдётся последовательность $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ неубывающих ступенчатых функций, удовлетворяющая при $n \to \infty$ асимптотическому соотношению*

$$(\#\mathfrak{A}_n + 2) \cdot \|f - f_n\|_{L_2[0,1]} = o(1), \tag{2}$$

*где через $\{\mathfrak{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$ обозначена последовательность множеств точек разрыва функций $f_n$.*

Знаком # обозначена мощность множества.

**Теорема 2.** *Пусть $f \in L_2[0,1]$ — ограниченная неубывающая функция, $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность неубывающих ступенчатых функций, а $\{\mathfrak{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность множеств точек разрыва функций $f_n$. Пусть также при $n \to \infty$ выполняется асимптотическое соотношение*

$$(\#\mathfrak{A}_n + 2) \cdot \|f - f_n\|_{L_2[0,1]} = o(1). \tag{3}$$

*Тогда монотонная функция $f$ является сингулярной.*

Формулы (2), (3) дают критерий сингулярности неубывающей непрерывной функции в терминах скорости ее приближения кусочно-постоянными функциями в $L_2$-норме. Естественным является вопрос о получении аналогичных оценок в нормах других пространств. Такие обобщения получены в диссертации в терминах $L_p$-норм ($p \geqslant 1$).

Заметим, что в формулах (2), (3) в качестве характеристики порядка приближающей функции служит количество ее точек разрыва. Но остается неизвестным, какая характеристика самой сингулярной функции влияет на скорость приближения ее кусочно-постоянными функциями. Также интересен вопрос, существуют ли какие-нибудь характеристики сингулярной функции, уточняющие скорость сходимости. Поэтому возникает важная и интересная задача нахождения классов таких сингулярных функций, для которых возможно уточнение скорости сходимости приближений, а именно можно ли заменить $o(1)$ на более качественную оценку. В данной диссертации показано, что для аффинно-самоподобных неубывающих непрерывных функций положительного спектрального порядка параметры самоподобия определяют скорость сходимости аппроксимации в пространствах $L_p[0;1]$. При этом получены точные степенные оценки на скорость сходимости приближений. До этого ни одного класса сингулярных функций, для которых известна скорость сходимости,определено не было.

Проблема описания мультипликаторов в различных соболевских пространствах представлена в математической литературе более широко нежели аппроксимативные свойства сингулярных функций. В работе [29] получен критерий того, что функция является мультипликатором между двумя пространствами Соболева–Слободецкого с неотрицательными показателями гладкости. Результаты по описанию пространств мультипликаторов в пространствах с отрицательными индексами гладкости представлены существенно реже.

Одним из источников, вызвавших интерес к описанию пространств мультипликаторов в пространствах с отрицательным показателем гладкости, является теория дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами. Первой работой, в которой изучался оператор Шредингера с коэффициентами из пространства мультипликаторов в соболевских пространствах с негативным показателем гладкости, была статья [15]. Более общие результаты позже были получены, например в [18], [19].

В работе [16] получены достаточные условия принадлежности функций-распределений пространству мультипликаторов из соболевского пространства $H_p^\alpha(\mathbb{R}^n)$ в дуальное пространство $H_{p'}^{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$. При $\alpha > \dfrac{n}{p}$ найден критерий, т.е. дано полное описание рассматриваемого пространства мультипликаторов.

Заметим, что результаты в этих работах относятся к функциям заданным в $\mathbb{R}^n$. При переходе к пространствам Соболева, заданным на отрезке с какими-либо краевыми условиями, возникают трудности. В частности, неизвестно полное описание пространства мультипликаторов даже не в самой сложной ситуации: из пространства $\mathring{W}_2^1[0;1]$ в дуальное пространство $\mathring{W}_2^{-1}[0;1]$ (пространство $\mathcal{M}\big[\mathring{W}_2^1[0;1], \mathring{W}_2^{-1}[0;1]\big]$). В данной диссертации такой критерий получен в классе обобщенных производных самоподобных кусочно-постоянных функций. Полученные результаты применены к задаче Штурма–Лиувилля с весом-мультипликатором.

В последнее десятилетие задача Штурма–Лиувилля с сингулярным весом (или задача о колебании струны), а также общая теория дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами получила значительное развитие. Главной особенность этих задач является то, что собственные значения имеет асимптотику, значительно отличающуюся от асимптотики собственных значений аналогичных задач, но с гладкими коэффициентами. В работах [1], [2] рассматривалась задача Штурма–Лиувилля с индефинитным (незнакоопределенным) самоподобным весом из пространства $\mathring{W}_2^{-1}[0;1]$. В работе [17] рассматривались задачи с обыкновенным дифференциальным самосопряженным оператором произвольного порядка, но с весом, являющимся самоподобной мерой. В работе [4] разобран случай дискретного веса $\rho$ с *вырожденным* самоподобием. Собственные числа Штурма–Лиувилля с таким типом весов имеют экспоненциальную асимптотику.

Рассмотрение задачи Штурма–Лиувилля с самоподобным весом из пространства $\mathcal{M}\big[\mathring{W}_2^1[0;1],\mathring{W}_2^{-1}[0;1]\big]$ (в дальнейшем мы это пространство будем обозначать через $\mathcal{M}$) привело к обнаружению нового эффекта. Предъявлен класс сингулярных весов, для которых спектр задачи чисто непрерывен. В случае так называемых двузвенных весов получено полное описание спектра.

Опишем структуру данной работы. Диссертация состоит из 5 глав, заключения и списка литературы.

В главе 1 исследуется скорость приближения сингулярных функций кусочно-постоянными, доказывается критерий сингулярности функции в терминах скорости приближения. Основной результат этой главы описывается следующими двумя фактами.

Обозначим через $\mathcal{D}_N$ множество неубывающих на $[0;1]$ функций, принимающих не более чем $N$ значений.

**Теорема 3.** *Пусть $f$ — ограниченная неубывающая функция на $[0;1]$. Следующие условия эквивалентны:*

***(1)*** *$f$ — сингулярна;*

***(2)*** *Для некоторого $p\in[1;+\infty)$ найдется последовательность $f_n\in\mathcal{D}_{N(n)}$ такая, что*

$$\|f-f_n\|_{L_p}\cdot N(n)\to 0,\quad n\to\infty$$

***(3)*** *Для любого $p\in[1;+\infty)$*

$$C_N^p(f)\cdot N\to 0,\quad N\to\infty,$$

*где $C_N^p(f)=\min_{g\in\mathcal{D}_N}\|f-g\|_{L_p}$.*

**Теорема 4.** *Пусть $f$ — ограниченная неубывающая функция на* $[0;1]$. *Следующие условия эквивалентны:*

***(1)*** *$f$ — дискретна (т. е. мера, порожденная $f$, представима в виде счетной суммы атомарных мер);*

***(2)*** *Найдется последовательность $f_n \in \mathcal{D}_{N(n)}$ такая, что*

$$\|f - f_n\|_{L^\infty} \cdot N(n) \to 0, \quad n \to \infty$$

***(3)*** *Найдется последовательность $f_N \in \mathcal{D}_N$ такая, что*

$$\|f - f_N\|_{L^\infty} \cdot N \to 0, \quad N \to \infty$$

В главе 2 дается краткая информация о конструкции самоподобных функций, устанавливаются условия на параметры самоподобия, задающие монотонные самоподобные функции. Рассматриваются различные классы самоподобных функций, которые потом используются в главах 3 и 5. Для понимания основного результата главы 3, приведем эти сведения.

Пусть задано натуральное число $n > 1$ и задано разбиение отрезка $[0;1]$

$$0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{n+1} = 1.$$

Определим числа

$$a_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Для произвольных наборов действительных чисел

$$d_1, d_2, \ldots, d_n \quad \text{и} \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$$

определим отображение функций, заданных на отрезке $[0;1]$:

$$(Gf)(t) = \sum_{k=1}^{n} \left( \beta_k + d_k \cdot f\left(\frac{t-\alpha_k}{a_k}\right)\right) \cdot \chi_{(\alpha_k,\alpha_{k+1})}$$

Всегда предполагается, что хотя бы одно из чисел из набора $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ отлично от нуля.

В работе [3] показано, что при выполнении условия

$$\sum_{k=1}^{n} a_k |d_k|^p < 1 \tag{4}$$

отображение $G$ является сжимающим в пространстве $L_p[0;1]$, а при выполнении условия

$$\sup_{1\le k\le\infty} |d_k| < 1 \tag{5}$$

отображение $G$ будет сжимающим в пространстве $L_\infty[0;1]$.

При выполнении условий (4) или (5) отображение $G$ имеет неподвижную точку в соответствующем пространстве. Функций $f$ называется *самоподобной функцией,* если она является неподвижной точкой *оператора подобия* $G$.

Всегда предполагается, что среди набора $\{\beta_k\}_{k=1^n}$ хотя бы одно число отлично от нуля (иначе самоподобная функция очевидно есть тождественный нуль).

Числа $\{\alpha_k\}$, $\{a_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{d_k\}$ будем называть *параметрами самоподобия.*

В главе 3 устанавливаются двусторонние оценки на скорость приближения монотонной ограниченной самоподобной функции положительного спектрального порядка кусочно-постоянными функциями. Самоподобная функция имеет положительный спектральный порядок, если среди параметров самоподобия $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$ хотя бы два числа отличны от нуля.

Основным результатом этой главы является следующая

**Теорема 5.** *Для любого $p \in [1; +\infty)$ и любого $N \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства:*

$$m \cdot N^{-\alpha} \leq C_N^p(f) \leq M \cdot N^{-\alpha},$$

*где $m$, $M$ и $\alpha$ зависят только от $f$ и $p$. При этом $\alpha \geq 1$ определяется однозначно из уравнения*

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_k d_k^p\right)^{\frac{1}{1+\alpha p}} = 1.$$

В главе 4 строятся примеры функций, которые приближаются кусочно-постоянными с произвольной скоростью. А именно, получен следующий результат:

**Теорема 6.** *Пусть $p \in [0, +\infty)$ и $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ — невозрастающая функция (функция оценки). Тогда существует неубывающая сингулярная функция $f$ такая, что*

$$\frac{s(8N)}{32} \leq C_N^p(f) \cdot N \leq s(N),$$

*где $C_N^p(f) = \min_{g \in \mathcal{D}_N} \|f - g\|_{L_p}$.*

В общей ситуации критерий принадлежности пространству мультипликаторов $\Updownarrow$ неизвестен.

Глава 5 посвящена описанию пространства мультипликаторов $\mathcal{M} = \mathcal{M}\left[\mathring{W}_2^1[0;1], \mathring{W}_2^{-1}[0;1]\right]$. Исследуется роль самоподобных функций нулевого спектрального порядка в этом пространстве и рассматриваются некоторые спектральные задачи для дифференциальных операторов с коэффициентами-мультипликаторами.

В разделе 5.1 определяется пространство $\mathcal{M}$ мультипликаторов из пространства $\mathring{W}_2^1[0;1]$ в дуальное $\mathring{W}_2^{-1}[0;1]$. Обобщенная функция $f$ принадлежит пространству $\mathcal{M}$, если оператор умножения $y \mapsto f \cdot y$ является ограниченным из пространства $\mathring{W}_2^1[0;1]$ в пространство $\mathring{W}_2^{-1}[0;1]$.

Рассмотрим пространства $L_{2\theta}([0;1],\mu)$, где $\mathrm{d}\mu = x(1-x)\mathrm{d}x$, $1 \le \theta \le \infty$.

Если $1 \le \theta < \infty$, то норма определяется

$$\|P\|_{L_{2\theta}([0;1],\mu)} = \left(\int_0^1 |P(x)|^{2\theta} x(1-x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/(2\theta)}.$$

Если $P \in L_\infty([0;1],\mu)$, то

$$\|P\|_{L_\infty([0;1],\mu)} = \|Q\|_{L_\infty[0;1]},$$

где $Q$ — такой элемент пространства $L_\infty[0;1]$, что $Q(x) = x(1-x)P(x)$.

Основной результат этого раздела заключается в следующем

**Теорема 7.** *Если $P \in L_{2\theta}([0;1],\mu)$, то $P' \in \mathcal{M}$ (производная понимается в обобщенном смысле). При этом*

$$|\langle P'y, z\rangle| \le 2c_\theta \|P\|_{L_{2\theta}([0;1],\mu)} \|y\|_{\mathcal{H}} \|z\|_{\mathcal{H}},$$

*где $c_\theta = (1/6)^{(\theta-1)/(2\theta)}$ при $1 \le \theta < \infty$ и $c_\theta = 4$ при $\theta = \infty$. Если $1 \le \theta < \infty$, то оператор $y \mapsto P'y$ является компактным из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}'$.*

В разделе 5.2 рассмотрены самоподобные функции нулевого спектрального порядка. Это означает, что среди набора чисел $\{d_k\}_{k=1}^n$ ровно одно число отлично от нуля. Индекс этого числа обозначим через $m$: $d_m \ne 0$, $d_k = 0$ при $k \ne m$.

При рассмотрении этих функций мы отказывается от условий (4), (5), т.е. эти функции не обязательно принадлежат пространствам $L_p[0;1]$, тем не менее из результатов главы 2 следует, что существует и единственна измеримая функция $P$, являющаяся неподвижной точкой отображения $G$, рассматриваемого в пространстве измеримых на отрезке $[0;1]$ функций с метрикой

$$\rho(f,g) = \int_0^1 \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}\,\mathrm{d}x\,.$$

Основным результатом раздела 5.2 является критерий

**Теорема 8.** *Если $a_m|d_m| \le 1$, то обобщенная производная $P'$ самоподобной функции $P$ нулевого спектрального порядка, для которой $m=1$ или $m=n$, принадлежит пространству $\mathcal{M}$.*

*Если $a_m|d_m| > 1$ и самоподобная функция $P$ нулевого спектрального порядка, для которой $m=1$ или $m=n$, не является тождественно постоянной, то ее обобщенная производная $P'$* не *принадлежит пространству $\mathcal{M}$.*

В разделе 5.3 получены результаты о спектре задачи Штурма–Лиувилля с весом, принадлежащим пространству $\mathcal{M}$. Показано, что для некоторого подкласса из $\mathcal{M}$ спектр таких весовых задач может быть чисто непрерывным.

Напомним некоторые обозначения. Для краткости символом $L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ обозначается пространство $L_p[0;1]$. $W_2^1[0,1]$ — гильбертово пространство абсолютно непрерывных функций $y$, таких что $y' \in L_2[0,1]$. $\mathring{W}_2^1[0,1]$ — подпространство функций $y \in W_2^1[0,1]$, удовлетворяющих нулевым граничным условиям (условиям Дирихле): $y(0)=y(1)=0$. Через $\mathcal{D}_N$ мы будем обозначать множество неубывающих на $[0;1]$ функций, принимающих не более чем $N$ значений, величина $C_N^p(f)$ определяется как

$$C_N^p(f) = \min_{g\in\mathcal{D}_N} \|f-g\|_{L_p}.$$

На протяжении всей работы для определений, лемм, утверждений, теорем и т.д. используется сквозная нумерация: **Определение 1**, **Лемма 2**, **Теорема 3** и т.д.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю Игорю Анатольевичу Шейпаку за постановку задач и поддержку в работе.

# Глава 1

# Скорость приближения произвольных сингулярных функций

## 1.1 Существование наилучшего приближения

**Определение 9.** Символом $\mathcal{D}_N$ будем обозначать множество неубывающих функций на $[0;1]$, принимающих не более $N$ различных значений.

**Утверждение 10.** *Пусть $f\colon [0;1] \to \mathbb{R}$ — неубывающая ограниченная функция. Тогда для любого $p \in [1;+\infty)$ и любого $N \in \mathbb{N}$ найдется функция $g \in \mathcal{D}_N$ такая, что $\|f-g\|_{L_p}$ принимает наименьшее значение среди всех $g \in \mathcal{D}_N$.*

*Доказательство.* Можно искать минимум среди таких функций из $\mathcal{D}_N$, значения которых заключены между $\inf f$ и $\sup f$ (остальные функции не минимизируют расстояние в $L_p$, так как их значения, находящиеся за пределами $[\inf f; \sup f]$, можно уменьшить или увеличить до $\sup f$ или $\inf f$, уменьшив при этом норму разности в $L_p$). Такое равномерно ограниченное подмножество $\mathcal{D}_N$ — обозначим его $\mathcal{D}'_N$ — параметризуется $2N - 1$ вещественными параметрами ($N-1$ точек разрыва $x_1$, $x_2$, …, $x_{n-1}$, и $N$ значений на участках постоянства $y_1$, $y_2$, …, $y_n$), причем такая параметризация непрерывна в $L_p$, а параметры пробегают замкнутый выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^{2N+1}$, задаваемый неравенствами $0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{n-1} \le 1$ и $\inf f \le y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_n \le \sup f$. (Функции, имеющие меньшее число значений, чем $N$, будут задаваться неоднозначно.) Получаем, что $\mathcal{D}'_N$ является непрерывным образом компакта из $\mathbb{R}^{2N+1}$. Значит, $\mathcal{D}'_N$ само является компактом в $L_p$. Следовательно, найдется функция $g \in \mathcal{D}'_N$, для которой $\|f - g\|_{L_p}$ принимает наименьшее значение. $\square$

*Замечание* 11. Это утверждение делает корректным определение

$$C_N^p(f) = \min_{g \in \mathcal{D}_N} \|f - g\|_{L_p}, \quad p \in [1; \infty),\ N \in \mathbb{N}$$

**Утверждение 12.** *Пусть* $f\colon [0;1] \to \mathbb{R}$ *— неубывающая ограниченная функция. Тогда для любого* $p \in [1; +\infty)$ *и любого натурального* $N$ *выполнено*

$$C_N^p(f) \cdot N \le \frac{\operatorname{osc} f}{2}, \tag{1.1}$$

*где* $\operatorname{osc} f = \sup f - \inf f$.

*Доказательство.* Достаточно для произвольного $N \in \mathbb{N}$ построить функцию $g \in \mathcal{D}_N$ такую, что $\|f-g\|_{L_p} \le (\operatorname{osc} f)/(2N)$. Сначала выберем множество из $N$ значений, которые будет принимать $g$, а потом зададим функцию $g$ в каждой точке одним из этих значений.

Множество из $N$ значений функции $g$ выберем на отрезке $[\inf f; \sup f]$ равномерно, а именно так, чтобы любая точка этого отрезка была удалена не более чем на $(\operatorname{osc} f)/(2N)$ от одного из выбранных значений (таким образом, выбранные значения будут образовывать арифметическую прогрессию с разностью $(\operatorname{osc} f)/N$).

Далее, для каждой точки $x \in [0; 1]$ выберем значение $g(x)$, ближайшее к $f(x)$ (меньшее из двух в случае неоднозначности). Из монотонности $f$ будет следовать монотонность так определенной $g$. При этом очевидно $|f(x) - g(x)| \leq (\operatorname{osc} f)/(2N)$ для всех $x$, откуда следует $\|f - g\|_{L_p} \leq (\operatorname{osc} f)/(2N)$. $\square$

## 1.2 Критерий сингулярности

Пусть $f\colon [0; 1] \to \mathbb{R}$ — неубывающая ограниченная функция.

**Утверждение 13.** *Пусть при $p \in [1; +\infty)$ существует последовательность функций $f_n \in \mathcal{D}_{N(n)}$ такая, что*

$$\|f - f_n\|_{L_p} \cdot N(n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

*Тогда $f$ — сингулярная функция (т. е. ее производая равна нулю почти всюду).*

*Доказательство.* Сначала рассмотрим случай $p = 1$.

Обозначим $D(n) = \sqrt[3]{\|f - f_n\|_{L_1} \cdot N(n)}$, $D(n) \to 0$. Можно считать, что $D(n) < 1/2$ для всех $n$ и $\sum_n D(n) < \infty$ (выберем подпоследовательность $f_n$ так, чтобы это выполнялось).

Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — интервалы постоянства $f_n$.

Выберем из них те, на которых среднее отклонение $f_n$ от $f$ не превышает $\|f - f_n\|_{L_1}/D(n)$:

$$\int_{a_i} |f - f_n| \, \mathrm{d}x \leq \frac{|a_i|}{D(n)} \int_0^1 |f - f_n| \, \mathrm{d}x, \tag{1.2}$$

где $|a_i|$ — длина отрезка $a_i$. Обозначим выбранные интервалы $b_1, \ldots, b_m$. Суммарная длина этих интервалов не меньше $1 - D(n)$. Действительно, предположим обратное. Обозначим остальные интервалы за $c_1, \ldots, c_l$. Тогда

$$\int_0^1 |f - f_n| \, \mathrm{d}x \geq \sum_{i=1}^{l} \int_{c_i} |f - f_n| \, \mathrm{d}x > \frac{1}{D(n)} \int_0^1 |f - f_n| \, \mathrm{d}x \sum_{i=1}^{l} |c_i| >$$
$$> \int_0^1 |f - f_n| \, \mathrm{d}x.$$

Противоречие.

Рассмотрим интервал $b_i = (r; s)$. Пусть $\varphi$ — значение $f_n$ на $b_i$. Обозначим $r' = r + |b_i| D(n)$, $s' = s - |b_i| D(n)$. В силу выбора $D(n)$ выполнено $r' < s'$.

Тогда

$$\int_{b_i} |f - f_n| \, \mathrm{d}x \geq \int_r^{r'} (f_n - f) \, \mathrm{d}x \geq |r - r'| \cdot (\varphi - f(r'))$$

Последнее неравенство следует из неубывания $f$ и постоянства $f_n$. Воспользовавшись также (1.2) и $|r - r'| = |b_i| D(n)$, получаем

$$f(r') - \varphi \geq -\frac{\|f - f_n\|_{L_1}}{D^2(n)}.$$

Аналогично, рассмотрев $\int_{s'}^{s}$, получаем

$$f(s') - \varphi \le \frac{\|f - f_n\|_{L_1}}{D^2(n)}.$$

Обозначим $d_i = (r'; s')$. Получаем $|f(t) - \varphi| \le \|f - f_n\|_{L_1}/D^2(n)$ при $t \in c_i$.

Пусть $\mu$ — мера Лебега-Стилтьеса, порожденная функцией $f$, а $\Lambda$ — обычная мера Лебега на $[0;1]$. Тогда $\mu(c_i) \le 2\|f - f_n\|_{L_1}/D^2(n)$.

С другой стороны, $|c_i| = |b_i|(1 - 2D(n))$.

Рассмотрим множество $A_n = \bigcup_i c_i$. Тогда

$$\Lambda(A_n) \ge (1 - D(n))(1 - 2D(n)) \ge 1 - 3D(n),$$
$$\mu(A_n) \le \frac{2\|f - f_n\|_{L_1}}{D^2(n)} \cdot N(n) = 2D(n).$$

Наконец, рассмотрим множество

$$A = \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n\,.$$

Из условия $\sum_n D(n) < \infty$ получаем $\Lambda(A) = 1$; с другой стороны из $\mu(A_n) \to 0$ получаем $\mu(A) = 0$. Это доказывает сингулярность меры $\mu$, то есть сингулярность функции $f$.

Осталось рассмотреть случай $p \in (1; +\infty)$. Он сводится к рассмотренному случаю с помощью неравенства Гёльдера

$$\|f - f_n\|_{L_1} \le \|f - f_n\|_{L_p} \cdot \|1\|_{L^q}.$$

$\square$

**Определение 14.** *Дискретной функцией* $f$ на $[0;1]$ будем называть неубывающую функцию, для которой мера Лебега-Стильтьеса $\mu$ дискретна, т. е. представляется в виде не более чем счетной суммы атомарных мер: $\mu = \sum_k m_k \cdot \delta(x - x_k)$.

**Утверждение 15.** *Пусть существует последовательность функций $f_n \in \mathcal{D}_{N(n)}$ такая, что*

$$\|f - f_n\|_{L_\infty} \cdot N(n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

*Тогда $f$ — дискретная функция.*

*Доказательство.* Пусть $A_n$ — объединение всех *интервалов* постоянства $f_n$ (т. е. весь $(0;1)$ кроме точек разрыва); $\mu$ — мера Лебега-Стилтьеса, порожденная функцией $f$. Тогда

$$\mu(A_n) \leq 2N(n) \cdot \|f - f_n\|_{L_\infty} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Пусть $A = \bigcap_n A_n$. Тогда $\mu(A) = \lim \mu(A_n) = 0$. С другой стороны, дополнение к $A$ — это не более чем счетное множество. Следовательно, мера $\mu$ дискретна. □

**Утверждение 16.** *Пусть $f$ является сингулярной функцией. Тогда для любого $p \in [1; +\infty)$ найдется последовательность функций $f_N \in \mathcal{D}_N$ такая, что*

$$\|f - f_N\|_{L_p} \cdot N \to 0, \quad N \to \infty.$$

Сначала докажем следующую лемму. Можно без ограничения общности принять, что $f(x) = f(x+0)$ при $x \in [0;1)$ и $f(1) = f(1-0)$.

**Лемма 17.** *В условиях утверждения и предыдущего соглашения для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечный набор непересекающихся полуинтервалов $I_k = (\alpha_k, \beta_k]$, $k = 1, \ldots, m$ такой, что*

*(1) на промежутках, дополняющих эти полуинтервалы до* $(0;1]$, *$f$ постоянна (таких промежутков может не оказаться);*
*(2)*

$$\sum_{k=1}^{m} M_k < \varepsilon, \qquad M_k = \sqrt[p+1]{(\beta_k - \alpha_k)\big(f(\beta_k) - f(\alpha_k)\big)^p},$$

*причем $M_k > 0$ для всех $k$.*

*Доказательство леммы.* Пусть $\mu$ — мера Лебега-Стилтьеса, порожденная функцией $f$. Она сингулярна, следовательно, существует счетный набор непересекающихся полуинтервалов $J_k = (\alpha_k, \beta_k]$, $k = 1, \dots$ такой, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |J_k| \le \varepsilon, \qquad \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \supset \operatorname{supp} \mu.$$

Выберем среди них первые $m$ полуинтервалов так, чтобы

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} J_k\right) \ge \mu[0,1] - \varepsilon.$$

Далее, среди всех полуинтервалов, дополняющих $\{J_k\}_{k=1}^m$ до $(0;1]$, выберем те, на которых $\mu$ не равна нулю. Обозначим их за $J'_k = (\alpha'_k, \beta'_k]$, $k = 1, \dots, m'$. Введем

$$M_k = \sqrt[p+1]{(\alpha_k - \beta_k)\big(f(\alpha_k) - f(\beta_k)\big)^p}, \quad k = 1, \dots, m,$$
$$M'_k = \sqrt[p+1]{(\alpha'_k - \beta'_k)\big(f(\alpha'_k) - f(\beta'_k)\big)^p}, \quad k = 1, \dots, m'.$$

Используя неравенство Гёльдера, получаем:

$$\sum_{k=1}^{m} M_k \leq \sqrt[p+1]{\sum_{k=1}^{m}(\alpha_k - \beta_k)} \cdot \sqrt[\frac{p+1}{p}]{\sum_{k=1}^{m}(f(\alpha_k) - f(\beta_k))} \leq \sqrt[p+1]{\varepsilon} \cdot \sqrt[\frac{p+1}{p}]{\mu[0;1]},$$

$$\sum_{k=1}^{m'} M'_k \leq \sqrt[p+1]{\sum_{k=1}^{m'}(\alpha'_k - \beta'_k)} \cdot \sqrt[\frac{p+1}{p}]{\sum_{k=1}^{m'}(f(\alpha'_k) - f(\beta'_k))} \leq 1 \cdot \sqrt[\frac{p+1}{p}]{\varepsilon}.$$

Следовательно, в качестве набора $I_k$ можно взять $\{J_k\} \cup \{J'_k\}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{m} M_k + \sum_{k=1}^{m'} M'_k \leq \sqrt[p+1]{\varepsilon} \sqrt[\frac{p+1}{p}]{\mu[0;1]} + \sqrt[\frac{p+1}{p}]{\varepsilon},$$

что в силу произвольности $\varepsilon$ дает требуемое. $\square$

*Доказательство утверждения.* Для произвольного $\varepsilon > 0$ возьмем $I_k$ и $M_k$, $k = 1, \ldots, m$, определенные в лемме 17. Обозначим $S = \sum_{k=1}^{m} M_k < \varepsilon$.

Построим функцию $f_N$, которая принимает не более $N$ различных значений. Выберем $N$ исходя из следующих условий:

$$N = N' + 1, \qquad N' \geq \frac{S}{\min_k M_k}.$$

Заметим, что эти условия выполнены для всех достаточно больших $N$.

Сначала выберем множество из $N$ значений, которые будет принимать $f_N$, а потом зададим функцию $f_N$ в каждой точке одним из этих значений. Положим $m+1$ значений равными $f(0)$, $f(\beta_1)$, $\ldots$, $f(\beta_m)$. Отметим, что эти значения совпадают соотвественно с $f(\alpha_1)$, $f(\alpha_2)$, $\ldots$, $f(1)$. Остальные $N' - m$ значений сопоставим промежуткам $I_k$ так, чтобы $I_k$ соответствовало $N_k - 1$ значений, где

$$N_k \geq \left[\frac{M_k \cdot N'}{S}\right] \geq 1.$$

В частности, $2N_k \geq M_k \cdot N'/S$.

Распределим $N_k - 1$ значений, соответствующих промежутку $I_k$, равномерно на отрезке $[f(\alpha_k); f(\beta_k)]$ так, чтобы эти значения образовывали арифметическую прогрессию вместе с концами отрезка (т. е. этот отрезок будет разбит на $N_k$ равных частей).

Выбрав возможные значения функции $f_N$, зададим саму функцию. Для каждой точки $x$ выберем значение $f_N(x)$, ближайшее к $f(x)$ (меньшее из двух в случае неоднозначности). Из монотонности $f$ будет следовать монотонность так определенной $f_N$. При этом

$$|f(x) - f_N(x)| \leq \frac{f(\beta_k) - f(\alpha_k)}{2N_k}, \quad x \in I_k,$$

и $f(x) = f_N(x)$ при $x \notin \bigcup_k I_k$. Далее, оценим $\|f - f_N\|_{L_p}$:

$$\begin{aligned}
\|f - f_N\|_{L_p}^p &\leq \sum_{k=1}^{m} (\beta_k - \alpha_k) \left( \frac{f(\beta_k) - f(\alpha_k)}{2N_k} \right)^p \leq \\
&\leq \frac{S^p}{N'^p} \cdot \sum_{k=1}^{m} \frac{(\beta_k - \alpha_k)(f(\beta_k) - f(\alpha_k))^p}{M_k^p} = \\
&= \frac{2^p S^p}{N^p} \cdot \sum_{k=1}^{m} M_k = \frac{2^p S^{p+1}}{N^p}.
\end{aligned}$$

Получаем

$$\|f - f_N\|_{L_p} \cdot N \leq 2S^{\frac{p+1}{p}} \leq 2\varepsilon^{\frac{p+1}{p}}.$$

Заметим, что для произвольного $\varepsilon$ мы может строить $f_N$ для любого достаточно большого $N$. Пользуясь этим, мы можем построить последовательность $f_N$, для которой $\|f - f_N\|_{L_p} \cdot N \to 0$. $\square$

**Утверждение 18.** *Пусть $f$ является дискретной функцией. Тогда най-*

*дется последовательность функций $f_N \in \mathcal{D}_N$ такая, что*

$$\|f - f_N\|_{L_\infty} \cdot N \to 0, \quad N \to \infty.$$

*Доказательство.* Можно без ограничения общности принять, что $f(x) = f(x+0)$ при $x \in [0;1)$ и $f(1) = f(1-0)$.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Пользуясь дискретностью $f$, выберем такой конечный набор точек $\alpha_k \in (0;1)$, что

$$\mu\left([0;1] \setminus \left\{\alpha_k\right\}_k\right) < \varepsilon,$$

где $\mu$ — мера Лебега-Стилтьеса, порожденная функцией $f$.

Среди интервалов $(\alpha_k; \beta_k)$, образованных разбиением $(0;1)$ точками $\alpha_k$, обозначим $I_k$, $k = 1, \ldots, m$ такие, что $M_k = f(\beta_k - 0) - f(\alpha_k) > 0$; остальные интервалы обозначим $J_k$, $k = 1, \ldots, n$. (Таким образом, на интервалах $J_k$ функция $f$ постоянна, а на $I_k$ — нет.) При этом $S = \sum_k M_k < \varepsilon$.

Построим функцию $f_N$, которая принимает не более $N$ различных значений. Выберем $N$ исходя из следующих условий:

$$N = N' + n \qquad N' \geq \frac{S}{\min_k M_k} \qquad N' \geq n.$$

При этом $N' \geq N/2$. Заметим, что эти условия выполнены для всех достаточно больших $N$.

Далее, $n$ из значений $f_N$ сделаем равными $f(J_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Остальные $N'$ сопоставим промежуткам $I_k$ так, чтобы $I_k$ соответствовало $N_k$ значений, где

$$N_k \geq \left[\frac{M_k \cdot N'}{S}\right] \geq 1.$$

В частности, $2N_k \geq M_k \cdot N'/S$.

Распределим $N_k$ значений, соответствующих интервалу $I_k = (\alpha_k; \beta_k)$, равномерно на отрезке $[f(\alpha_k); f(\beta_k - 0)]$ так, чтобы каждая точка этого отрезка находилась не расстоянии не более чем на $M_k/(2N_k)$ от одного из значений (таким образом, выбранные значения будут образовывать арифметическую прогрессию с разностью $M_k/N_k$).

Выбрав возможные значения функции $f_N$, зададим саму функцию. Для каждой точки $x$ выберем значение $f_N(x)$, ближайшее к $f(x)$ (меньшее из двух в случае неоднозначности). Из монотонности $f$ будет следовать монотонность так определенной $f_N$. При этом

$$|f(x) - f_N(x)| \leq \frac{M_k}{2N_k}, \quad x \in I_k,$$

$f(x) = f_N(x)$ при $x \in J_k$. Далее, оценим $\|f - f_n\|_{L_\infty}$:

$$\|f - f_n\|_{L_\infty} \leq \max_{k=1\dots m} \frac{M_k}{2N_k} \leq \max_{k=1\dots m} \frac{S}{N'} \leq \frac{2S}{N}.$$

Получаем

$$\|f - f_n\|_{L_\infty} \cdot N \leq 2S \leq 2\varepsilon.$$

Заметим, что для произвольного $\varepsilon$ мы может строить $f_N$ для любого достаточно большого $N$. Пользуясь этим, мы можем построить последовательность $f_N$, для которой $\|f - f_N\|_{L_\infty} \cdot N \to 0$. $\square$

Предыдущие четыре утверждения можно суммировать в следующих теоремах:

**Теорема 19.** *Пусть $f$ — ограниченная неубывающая функция на $[0; 1]$. Следующие условия эквивалентны:*
***(1)*** *$f$ — сингулярна;*

***(2)*** *Для некоторого* $p \in [1; +\infty)$ *найдется последовательность* $f_n \in \mathcal{D}_{N(n)}$ *такая, что*

$$\|f - f_n\|_{L_p} \cdot N(n) \to 0, \quad n \to \infty$$

***(3)*** *Для любого* $p \in [1; +\infty)$

$$C_N^p(f) \cdot N \to 0, \quad N \to \infty,$$

*где* $C_N^p(f) = \min_{g \in \mathcal{D}_N} \|f - g\|_{L_p}$.

**Теорема 20.** *Пусть* $f$ *— ограниченная неубывающая функция на* $[0; 1]$. *Следующие условия эквивалентны:*

***(1)*** $f$ *— дискретна (т. е. мера, порожденная* $f$*, представима в виде счетной суммы атомарных мер);*

***(2)*** *Найдется последовательность* $f_n \in \mathcal{D}_{N(n)}$ *такая, что*

$$\|f - f_n\|_{L_\infty} \cdot N(n) \to 0, \quad n \to \infty$$

***(3)*** *Найдется последовательность* $f_N \in \mathcal{D}_N$ *такая, что*

$$\|f - f_N\|_{L_\infty} \cdot N \to 0, \quad N \to \infty$$

# Глава 2

# Конструкция самоподобных функций

Напомним конструкцию аффинно-самоподобных функций. Более подробное изложение можно найти в [3], [1].

Пусть $f$ — элемент некоторого класса измеримых функций (который мы будем уточнять в зависимости от задачи) на отрезке $[0;1]$. Тогда $f$ называется *самоподобной функцией*, если она является неподвижной точкой *оператора подобия $G$:*

$$Gf(t) = \beta_k + d_k \cdot f\left(\frac{t-\alpha_k}{a_k}\right), \quad t \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}], \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{n+1} = 1,$$

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R},$$

$$a_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k, \quad d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{R}.$$

Числа $\{\alpha_k\}$, $\{a_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{d_k\}$ будем называть *параметрами самоподобия.* Легко заметить, что оператор $G$ переводит измеримые функции в измеримые, а функции из $L_p[0;1]$ переводит в $L_p[0;1]$ для каждого $p \in [0;\infty]$.

Как показано в [3], если $|d_k| < 1$ для всех $k$, то оператор $G$ является сжимающим в $L_\infty[0;1]$; таким образом, самоподобная функция $f$ в этих случаях существует и определяется однозначно по параметрам самоподобия.

Также следует отметить, что если все коэффициенты $\beta_k$ равны нулю, то $f(x) \equiv 0$ является неподвижной точкой отображения $G$. В дальнейшем этот случай будем исключать из рассмотрения.

Следуя определению, введенному в [1], будем называть самоподобную функцию *самоподобной функцией положительного спектрального порядка,* если хотя бы два из коэффициентов $d_k$ не равны нулю, и хотя бы один из коэффициентов $\beta_k$ не равен нулю; в противном случае, будем говорить, что функция имеет *нулевой спектральный порядок.*

## 2.1 Монотонные самоподобные функции

Будем называть функцию $f \in L_\infty[0;1]$ *ограниченной неубывающей самоподобной функцией,* если на параметры самоподобия наложены следующие условия:

$$0 \le \beta_1 \le \beta_2 \le \ldots \le \beta_{n+1} = 1\,, \quad 0 \le d_k \le \beta_{k+1} - \beta_k\,, \quad d_k < 1\,.$$

(Как уже было отмечено, функция $f$ определена однозначно как элемент $L_\infty[0;1]$ при $|d_k| < 1$.)

**Утверждение 21.** *У ограниченной неубывающей самоподобной функции $f$ есть всюду определенная ограниченная неубывающая версия.*

*Доказательство.* Воспользуемся тем, что $\|G^n h - f\|_{L_\infty} \to 0$ при $n \to \infty$ для любой $h \in L_\infty$. Заметим, что если $h$ имеет неубывающую версию со значениями в $[0;1]$, то и $Gh$ обладает тем же свойством. Если начать с $h(x) = x$, $f$ можно представить как *предел почти всюду* неубывающих функций $G^n h$ со значениями в $[0;1]$. Отсюда следует, что и у функции $f$ есть неубывающая версия со значениями в $[0;1]$. $\square$

В разделе 3 нас будет интересовать приближение самоподобной функции кусочно-постоянными. Для этого выделим условия, при которых такая функция сама не является кусочно-постоянной.

**Утверждение 22.** *Пусть по крайней мере два из коэффициентов $d_k$ не равны нулю (то есть $f$ имеет положительный спектральный порядок). Тогда ограниченная неубывающая самоподобная функция $f$ не является кусочно-постоянной (т. е. не существует конечного набора значений такого, что $f(x)$ почти для каждого $x$ принадлежит этому набору).*

*Доказательство.* Предположим противное. Тогда $f$ принимает некоторое значение $C \in [0;1]$ на множестве положительной меры. Среди всех $k$, для которых $d_k > 0$ (а таких хотя бы два), выберем такое, для которого $C \neq \beta_k + Cd_k$. В силу самоподобия, $f$ принимает также значения $C_1 = \beta_k + Cd_k$, $C_2 = \beta_k + C_1 d_k$, $\ldots$, причем все эти значения различны. Следовательно, $f$ принимает счетное число значений на множествах положительной меры. Противоречие. $\square$

## 2.2 Измеримые самоподобные функции нулевого спектрального порядка

Рассмотрим набор коэффициентов, соответствующий функции нулевого спектрального порядка, причем хотя бы один коэффициент $\beta_k$ не равен нулю. Через $m$ обозначим тот единственный индекс $k$, для которого $d_k \neq 0$.

Определим самоподобную функцию как неподвижную точку отображения (2), действующего в пространстве измеримых на отрезке $[0;1]$ функций с метрикой

$$\rho(f,g) = \int_0^1 \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}\,\mathrm{d}x\,.$$

Существование и единственность неподвижной точки следует из фундаментальности последовательности $\{G^k f\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\rho(G^k f, G^l f) \leq a_m^{\min(k,l)}\,.$$

# Глава 3

# Скорость приближения самоподобных функций

Рассмотрим $f$ — ограниченную монотонную самоподобную функцию, определенную в разделе 2.1.

## 3.1 Скорость приближения

**Теорема 23.** *Для любого $p \in [1; +\infty)$ и любого $N \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства:*

$$m \cdot N^{-\alpha} \leq C_N^p(f) \leq M \cdot N^{-\alpha},$$

*где $m$, $M$ и $\alpha$ зависят только от $f$ и $p$. При этом $\alpha \geq 1$ определяется однозначно из уравнения*

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_k d_k^p\right)^{\frac{1}{1+\alpha p}} = 1.$$

Доказательство этой теоремы разбивается на два утверждения.

**Утверждение 24.** *Для любого $N > 0$ найдется функция $f_N \in \mathcal{D}_N$ такая, что $\|f - f_N\|_{L_p} \leq M \cdot N^{-\alpha}$, где $M$ зависит только от $f$ и $p$.*

*Доказательство.* Достаточно доказать, что для каждого $N \in \mathbb{N}$ найдется функция $f_N \in \mathcal{D}_N$ такая, что

$$\|f - f_N\|_{L_p}^p \leq C \cdot (N + R)^{-\alpha p} \tag{3.1}$$

для некоторых констант $R$ и $C$.

Обозначим $r_k = \left(a_k d_k^p\right)^{\frac{1}{1+\alpha p}}$. Выберем $R$ исходя из условий $R - n \geq r_k \cdot R$, $k = 1, \ldots, n$. Например, $R = n/(1 - \max_k r_k)$.

Будем доказывать утверждение по индукции. Переход индукции будем проводить для $N$, больших некоторого $N_0$. Всé меньшие $N$ будут базой индукции: подберем константу $C$ так, чтобы (3.1) для них выполнялось (с уже выбранной константой $R$).

$N_0$ выберем так, чтобы для каждого $k$ при $d_k > 0$ было выполнено $r_k(N_0 - n) \geq 1$. Например, $N_0 = n + 1/(\min_k r_k)$, где минимум идет только по $d_k > 0$.

Для данного $N$ будем строить функцию индуктивно: $N$ значений распределим между сегментами самоподобия, и в каждом сегменте разместим $N_k$ значений оптимальным образом:

$$\|f - f_N\|_{L_p}^p = \sum_{k=1}^{n} (a_k d_k^p) \cdot \|f - f_{N_k}\|_{L_p}^p, \qquad \sum_{k=1}^{n} N_k = N.$$

Для сегментов с $d_k = 0$, соответствующих горизонтальным участкоам графика $f$, полагаем $N_k = 1$. На таком сегменте функция $f$ постоянна, и построенная $f_N$ будет совпадать с $f$, не давая никакого вклада в $\|f - f_N\|_{L_p}$. Будем считать, что всего сегментов с $d_k = 0$ ровно $m$. В дальнейшем доказательстве не учитываем такие сегменты (любой минимум или суммирование $\sum_k$ идет только по $d_k > 0$).

Оставшиеся $N-m$ значений распределим между $n-m$ сегментами (для которых $d_k > 0$) пропорционально $r_k$ так, чтобы выполнялись условия $N_k + R \geq r_k(N + R)$. Для этого достаточно выбрать $N_k \geq [r_k(N - m)]$. Действительно, в этом случае $N_k + R \geq r_k N - r_k m + R \geq r_k N + R - n \geq r_k N + r_k R$. При этом $N_k \geq 1$, так как $r_k(N - m) \geq r_k(N - n) \geq 1$.

Считаем, что предположение индукции верно для всех $N_k$:

$$\|f - f_{N_k}\|_{L_p}^p \leq C \cdot (N_k + R)^{-\alpha p}.$$

Получаем

$$\|f - f_N\|_{L_p}^p \leq C \cdot \sum_k (a_k d_k^p)(N_k + R)^{-\alpha p} \leq C \cdot (N + R)^{-\alpha p} \cdot \sum_k (a_k d_k^p) r_k^{-\alpha p} =$$

$$= C \cdot (N + R)^{-\alpha p} \cdot \sum_k (a_k d_k^p)^{\frac{1}{1+\alpha p}} = C \cdot (N + R)^{-\alpha p}.$$

□

**Утверждение 25.** *Для любой функции $f_N \in \mathcal{D}_N$ выполнено $\|f - f_N\|_{L_p} \geq m \cdot N^{-\alpha}$, где $m > 0$ зависит только от $f$ и $p$.*

*Доказательство.* Усилим утверждение: будем считать, что функция $f_N$ может принимать не более $N$ различных значений из $(0; 1)$, но также может принимать любые значения вне этого интервала. Достаточно доказать неравенство вида

$$\|f - f_N\|_{L_p}^p \geq C \cdot N^{-\alpha p}$$

для некоторого $C > 0$.

Заметим, что для каждого $k$, при котором $d_k > 0$, можно подобрать $C_k > 0$ такое, что если функция $f_N$ не имеет значений в интервале $(\beta_k; \beta_k + d_k)$, то $\|f - f_N\|_{L_p}^p \geq C_k$. Действительно, в этом случае

$$\|f - f_N\|_{L_p}^p \geq \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} |f(x) - f_N(x)|^p \, \mathrm{d}x \geq a_k d_k^p \int_0^1 \min\bigl(|f(x)|, |1 - f(x)|\bigr) \, \mathrm{d}x > 0.$$

Последнее выполнено, так как $f$ не является кусочно-постоянной. Пусть $C = \min_k C_k$ (здесь и далее в доказательстве любой минимум или суммирование $\sum_k$ идет только по $d_k > 0$).

Будем доказывать неравенство индукцией по $N$ — рассматривая $f_N$, будем считать утверждение доказанным для всех меньших $N$.

Рассмотрим два случая. Первый случай — $f_N$ не имеет значений в одном из интервалов $(\beta_k; \beta_k + d_k)$, для которого $d_k > 0$. Тогда $\|f - f_N\|_{L_p}^p \geq C \geq C \cdot N^{-\alpha p}$. (Этот случай дает базу индукции.)

Второй случай — в каждом из интервалов $(\beta_k; \beta_k + d_k)$, для которых $d_k > 0$, присутствует хотя бы по одному значению функции $f_N$. Пусть на интервале $(\beta_k; \beta_k + d_k)$ находится $N_k$ значений, $N_k = r_k N$, $\sum_k r_k \leq 1$. Тогда из предположения индукции ($0 < N_k < N$) получаем

$$\|f - f_N\|_{L_p}^p \geq \sum_k \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} |f(x) - f_N(x)|^p \, \mathrm{d}x \geq$$

$$\geq C \sum_k (a_k d_k^p) N_k^{-\alpha p} = C \cdot N^{-\alpha p} \sum_{k=1}^{n} (a_k d_k^p) r_k^{-\alpha p}.$$

Осталось показать, что

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k d_k^p) r_k^{-\alpha p} \geq 1.$$

Воспользуемся неравенством Гёльдера и условием $\sum_{k=1}^{n} r_k \leq 1$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k d_k^p) r_k^{-\alpha p}\right)^{\frac{1}{1+\alpha p}} \left(\sum_{k=1}^{n} r_k\right)^{\frac{\alpha p}{1+\alpha p}} \geq \sum_{k=1}^{n}(a_k d_k^p)^{\frac{1}{1+\alpha p}} = 1.$$

□

**Пример 26.** Найдем скорость приближения для обычной функции Кантора. Параметры самоподобия:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1/3,$$
$$d_1 = 1/2, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = 1/2$$

Получаем условие на $\alpha$

$$2 \cdot (1/3 \cdot 1/2^p)^{\frac{1}{1+\alpha p}} = 1$$
$$1 + \alpha p = \log_2(3 \cdot 2^p) = \log_2 3 + p$$
$$\alpha = \frac{\log_2 3 - 1}{p} + 1$$

Таким образом, для некоторых констант $m$ и $M$ получаем

$$m \cdot N^{-\frac{\log_2 3 - 1}{p} - 1} \leq \left\| f - [f]_N^p \right\|_{L_p} \leq M \cdot N^{-\frac{\log_2 3 - 1}{p} - 1},$$

где $f$ — функция Кантора.

# Глава 4

# Произвольная скорость приближения

Покажем, что для любой невозрастающей функции оценки $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ найдется монотонная ограниченная функция $f$ такая, что $C_N^p(f) \cdot N \leq s(N)$, а также $g$ такая, что $C_N^p(g) \cdot N \geq s(N)$.

Приведенная ниже конструкция функций является частным случаем использованных в [25, с. 313] *функций Лебега*.

Пусть дана последовательность чисел $\theta_0, \theta_1, \ldots \in (0; 1]$.

Определим функцию $f_{(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_k)}\colon [0;1] \to [0;1]$:

$$f_{(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_{(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)}\left(\frac{x}{\theta_0/2}\right)}{2} & \text{при } x \in [0, \theta_0/2) \\ 1/2 & \text{при } x \in [\theta_0/2, 1-\theta_0/2] \\ 1 - \dfrac{f_{(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)}\left(\frac{1-x}{\theta_0/2}\right)}{2} & \text{при } x \in (1-\theta_0/2, 1] \end{cases}$$

$$f_{()}(x) = x$$

Определим функцию $f_{(\theta_0,\theta_1,\ldots)}\colon [0;1] \to [0;1]$:

$$f_{(\theta_0,\theta_1,\ldots)}(x) = \lim_{k\to\infty} f_{(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_k)}(x)$$

Такая функция монотонна и непрерывна на $[0;1]$.

Существование предела, непрерывность и монотонность следует из фундаментальности последовательности в $C[0;1]$. Действительно, для соседних элементов последовательности получаем:

$$\|f_{(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_k)} - f_{(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_{k-1})}\|_C \le \frac{1}{2}\cdot\|f_{(\theta_1,\ldots,\theta_k)} - f_{(\theta_1,\ldots,\theta_{k-1})}\|_C \le \ldots$$
$$\ldots \le \frac{1}{2^k}\cdot\|f_{(\theta_k)} - f_{()}\|_C \le \frac{1}{2^k}$$

Отсюда следует фундаментальность для $N < k < m$:

$$\|f_{(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_k)} - f_{(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_m)}\|_C \le \|f_{(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_k)} - f_{(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_{k+1})}\|_C + \ldots$$
$$\ldots + \|f_{(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_{m-1})} - f_{(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_m)}\|_C <$$
$$< \frac{1}{2^{k-1}} \le \frac{1}{2^{N-1}}.$$

**Пример 27.** $f_{(1,1,\ldots,1,\ldots)}(x) = f_{()}(x) = x$.

**Пример 28.** $f_{(2/3,1,1,\ldots,1,\ldots)}(x) = f_{(2/3)}(x)$. График изображен на рис. 4.1а.

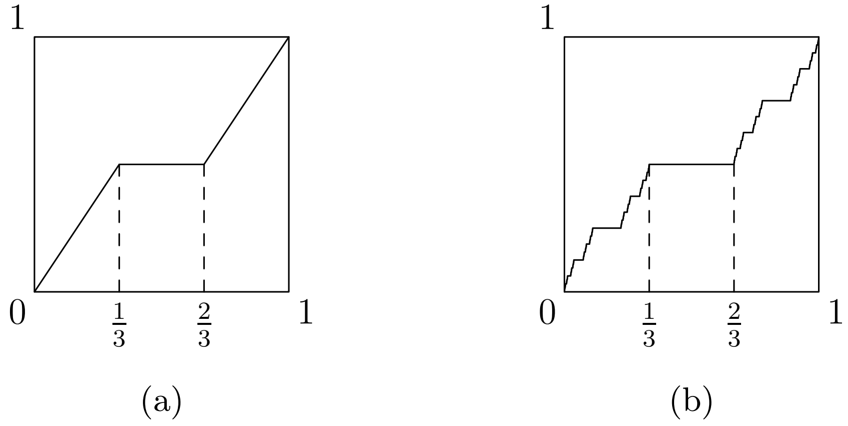


Рис. 4.1

**Пример 29.** $f_{(2/3,2/3,\dots,2/3,\dots)}(x)$ — обычная функция Кантора (рис. 4.1b).

**Лемма 30.** *Пусть* $f_N \in \mathcal{D}_N$. *Тогда* $\|f_{()} - f_N\|_{L_p}^p \ge 2^{-2p} \cdot N^{-p}$, $N \in \mathbb{N}$.

*Доказательство.* Сначала разберем случай $N = 1$. По сути, нам нужно доказать, что для любой константы $c$ выполнена оценка

$$\int\limits_{[0,1]} |x-c|^p \,\mathrm{d}x \ge 2^{-2p}.$$

Действительно

$$\int\limits_{[0,1]} |x-c|^p \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{[0,1]} \bigl(|x-c|^p + |x-(1-c)|^p\bigr) \,\mathrm{d}x \ge$$

$$\ge \int\limits_{[0,1]} |x-1/2|^p \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^p(p+1)} \ge 2^{-2p}.$$

Пусть $\{\Delta_k\}$ — интервалы постоянства $f_N$, их не более $N$. Тогда

$$\int\limits_{\Delta_k} |x - f_N(x)|^p \,\mathrm{d}x \ge |\Delta_k|^{p+1} \cdot 2^{-2p}.$$

Доказательство аналогично случаю $N = 1$. Отсюда получаем

$$\int\limits_{[0,1]} |x - f_N(x)|^p \, \mathrm{d}x = \sum_k \int\limits_{\Delta_k} |x - f_N(x)|^p \, \mathrm{d}x \geq 2^{-2p} \sum_k |\Delta_k|^{p+1} \geq$$
$$\geq 2^{-2p} \cdot N \cdot N^{-p-1} \geq 2^{-2p} \cdot N^{-p}.$$

□

**Утверждение 31.** *Пусть* $f_N \in \mathcal{D}_N$. *Тогда* $\|f_{(\theta_0,\theta_1,\ldots)} - f_N\|^p_{L_p} \geq r(N)$, $N \in \mathbb{N}$, *где*

$$r(2^r) = 2^{-2p} \cdot \prod_{l=0}^{r} \frac{\theta_l}{2^p}, \quad r = 0, 1, \ldots,$$
$$r(N) = 2^{-2p} \cdot \prod_{l=0}^{r} \frac{\theta_l}{2^p} \left(\alpha + \beta \frac{\theta_{r+1}}{2^p}\right)$$
*при* $N = \alpha \cdot 2^r + \beta \cdot 2^{r+1}$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta > 0$.

*Доказательство.* Заметим, что доказываемая оценка выпукла вниз по $N$.

Усилим утверждение: будем считать, что функция $f_N$ может принимать не более $N$ различных значений из $(0;1)$, но также может принимать любые значения вне этого интервала.

Докажем утверждение сначала для функций $f_{(\theta_0,\ldots,\theta_k)} = f_{(\theta_0,\ldots,\theta_k,1,1,\ldots)}$.

Будем доказывать индукцией по $k$. Для функции $f_{()}$ утверждение верно, так как это ослабление предыдущей леммы.

Пусть утверждение верно для функции $f_\circ = f_{(\theta_1,\ldots,\theta_k)}$, и $r_\circ(N)$ — соответствующая функция оценки. Докажем лемму для функции $f = f_{(\theta_0,\ldots,\theta_k)}$.

При $N = 1$ получаем для некоторого $c \in (0;1)$:

$$\begin{aligned}
\|f - f_1\|_{L_p}^p &\geq \int_0^1 \min\bigl(|f(x)|^p,\, |1 - f(x)|^p,\, |f(x) - c|^p\bigr)\, \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \min\bigl(|f(x)|^p,\, |1 - f(x)|^p,\, |f(x) - c|^p\bigr)\, \mathrm{d}x + \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 \min\bigl(|f(x)|^p,\, |1 - f(x)|^p,\, |f(x) - (1-c)|^p\bigr)\, \mathrm{d}x \geq \\
&\geq \int_0^1 \min\bigl(|f(x)|^p,\, |1 - f(x)|^p,\, |f(x) - 1/2|^p\bigr)\, \mathrm{d}x = \\
&= 2^{-p} \cdot \theta_0 \cdot \int_0^1 \min\bigl(|f_\circ(x)|^p, |1 - f_\circ(x)|^p\bigr)\, \mathrm{d}x \geq \\
&\geq 2^{-2p} \cdot \theta_0 \cdot \theta_1 \cdot \int_0^1 |f_{(\theta_2,\ldots,\theta_k)}(x)|^p\, \mathrm{d}x + 2^{-p} \cdot \theta_0 \cdot (1 - \theta_1) \cdot 2^{-p} \geq \\
&\geq 2^{-2p} \cdot \theta_0 \cdot \theta_1 \cdot 2^{-p} + 2^{-p} \cdot \theta_0 \cdot (1 - \theta_1) \cdot 2^{-p} \geq \\
&\geq 2^{-3p} \cdot \theta_0 = r(1).
\end{aligned}$$

Для $N > 1$ рассмотрим два случая. Первый случай — функция $f_N$ не принимает значений из интервала $(0; 1/2)$ (или из интервала $(1/2; 1)$ — этот случай симметричен). Получаем

$$\begin{aligned}
\|f - f_N\|_{L_p}^p &\geq \int_0^{\theta_0/2} |f(x) - f_N(x)|^p\, \mathrm{d}x \geq \\
&\geq 2^{-p-1} \cdot \theta_0 \cdot \int_0^1 \min\bigl(|f_\circ(x)|^p, |1 - f_\circ(x)|^p\bigr)\, \mathrm{d}x \geq \\
&\geq 2^{-3p-1} \cdot \theta_0 \geq r(2) \geq r(N).
\end{aligned}$$

Второй случай — функция $f_N$ принимает $N_1 > 0$ значений из интервала $(0;1/2)$ и $N_2>0$ значений из интервала $(1/2;1)$. Получаем

$$\begin{aligned}\|f-f_N\|^p_{L_p} \geq 2^{-p}\cdot\theta_0\cdot\frac{\|f_\circ-f_{\circ N_1}\|^p_{L_p}+\|f_\circ-f_{\circ N_2}\|^p_{L_p}}{2} \geq \\ \geq 2^{-p}\cdot\theta_0\cdot\frac{r_\circ(N_1)+r_\circ(N_2)}{2} \geq \\ \geq 2^{-p}\cdot\theta_0\cdot r_\circ\left(\frac{N_1+N_2}{2}\right) \geq 2^{-p}\cdot\theta_0\cdot r_\circ(N/2)=r(N).\end{aligned}$$

Последние три переходя следуют из: выпуклости $r_\circ$; монотонности $r_\circ$ и $N_1+N_2\leq N$; определения $r_\circ$ и $r$.

Осталось заметить, что утверждение леммы для функций $f_{(\theta_0,\theta_1,\ldots)}$ следует из уже доказанного для $f_{(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_k)}$ предельным переходом. □

**Утверждение 32.** *Пусть $f=f_{(\theta_0,\theta_1,\ldots)}$. Тогда для каждого $N\in\mathbb{N}$ найдется функция $f_N\in\mathcal{D}_n$ такая, что $\|f-f_N\|^p_{L_p}\leq R(N)$, где*

$$\begin{aligned}R(2^r-1)=\prod_{l=0}^{r-1}\frac{\theta_l}{2^p}, \quad r\in\mathbb{N}, \\ R(N)=R(2^r-1), \quad 2^r-1<N<2^{r+1}-1.\end{aligned}$$

*Доказательство.* Достаточно привести пример кусочно-постоянных функций $f_N$ для $N=2^r-1$ таких, что $\|f-f_N\|^p_{L_p}\leq R(N)$.

В качестве $2^r-1$ значений возьмем числа $t/2^r$, $t=1,2,\ldots,2^r-1$. Для каждой точки $x$ выберем значение $f_N(x)$, ближайшее к $f(x)$ (меньшее из двух в случае неоднозначности). Тогда $|f-f_N|<2^{-r}$, причем $f\neq f_N$ только отрезках суммарной длины $\prod_{l=0}^{r-1}\theta_l$. Отсюда сразу следует искомая оценка. □

**Теорема 33.** *Пусть $p\in[0,+\infty)$ и $s\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}_+$ — невозрастающая функ-*

*ция (функция оценки). Тогда существует функция $f$ такая, что*

$$\frac{s(8N)}{32} \le C_N^p(f) \cdot N \le s(N),$$

*где* $C_N^p(f) = \min_{g \in \mathcal{D}_N} \|f - g\|_{L_p}$.

*Доказательство.* Считаем без ограничения общности $s(1) = 1$. В остальных случаях можно построить $f_\circ$ для функции оценки $s_\circ(n) = s(n)/s(1)$, а потом взять $f(x) = s(1) \cdot f_\circ(x)$.

Достаточно положить

$$\theta_0 = s^p(2)/2^p, \qquad \theta_1 = s^p(6)/s^p(2),$$
$$\theta_k = s^p(2^{k+2} - 2)/s^p(2^{k+1} - 2), \quad k = 2, 3, \ldots$$

и взять $f = f_{(\theta_0, \theta_1, \ldots)}$. Пусть $2^r - 1 \le N \le 2^{r+1} - 2$. Получаем оценку сверху

$$\|f - f_N\|_{L_p}^p \cdot N^p \le N^p \cdot \prod_{l=0}^{r-1} \frac{\theta_l}{2^p} \le$$
$$\le 2^{rp+p} \cdot 2^{-rp-p} \cdot s^p(2^{r+1} - 2) \le s^p(N).$$

Пусть $2^r \le N \le 2^{r+1} - 1$. Получаем оценку снизу

$$\|f - f_N\|_{L_p}^p \cdot N^p \ge N^p \cdot 2^{-2p} \prod_{l=0}^{r+1} \frac{\theta_l}{2^p} \ge$$
$$\ge 2^{rp} \cdot 2^{-2p} \cdot 2^{-rp-3p} \cdot s^p(2^{r+3} - 2) \ge s^p(2^3 N)/2^{-5p}.$$

$\square$

# Глава 5

# Самоподобные функции в пространстве мультипликаторов

## 5.1 Пространство мультипликаторов

Обозначим через $\mathcal{H}$ пространство $\mathring{W}_2^1[0,1]$, снабженное скалярным произведением

$$(y,z)_{\mathcal{H}} = \int_0^1 y'(x)\overline{z'(x)}\,\mathrm{d}x\,. \tag{5.1}$$

Определим $\mathcal{H}'$ — двойственное пространство к $\mathcal{H}$ по отношению к $L_2[0;1]$, т. е. пополнение пространства $L_2[0;1]$ по норме

$$\forall y \in L_2[0;1],\ \forall z \in \mathcal{H}\ \|y\|_{\mathcal{H}'} := \sup_{\|z\|_{\mathcal{H}}=1} |\langle y, z\rangle|\,. \tag{5.2}$$

Определим пространство мультипликаторов $\mathcal{M} = M[\mathcal{H}, \mathcal{H}']$ следующим образом (см. [15]). Обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'$ принадлежит $\mathcal{M}$, если

$$\exists C > 0 \,\forall y, z \in \mathcal{D}(0;1) \quad |\langle fy, z\rangle| \leq C\|y\|_{\mathcal{H}}\|z\|_{\mathcal{H}}\,. \tag{5.3}$$

Другими словами, оператор умножения на $f \in \mathcal{M}$: $y \mapsto fy$, определенный на $\mathcal{D}(0;1)$, ограничен из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}'$ и в силу плотности $\mathcal{D}(0;1)$ в $\mathcal{H}$ продолжается до ограниченного оператора из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}'$.

Точная нижняя грань констант $C$, для которых выполнено неравенство (5.3) называется *мультипликаторной нормой.*

**Лемма 34.** *Для функции $y \in \mathcal{H}$ справедливо неравенство*

$$|y(x)| \leq \sqrt{x(1-x)}\|y\|_{\mathcal{H}}\,.$$

*Доказательство.* Используя представление

$$y(x) = (1-x)\int_0^x y'(t)\,\mathrm{d}t - x\int_x^1 y'(t)\,\mathrm{d}t$$

и применяя неравенство Коши–Буняковского к функциям $y'$ и $g(x) = (1-x)\chi_{[0;x)} - x\chi_{[x;1]}$, получаем искомое неравенство. □

Введем в рассмотрение пространства $L_{2\theta}([0;1],\mu)$, где $\mathrm{d}\mu = x(1-x)\mathrm{d}x$, $1 \leq \theta \leq \infty$.

Если $1 \leq \theta < \infty$, то норма определяется

$$\|P\|_{L_{2\theta}([0;1],\mu)} = \left(\int_0^1 |P(x)|^{2\theta}x(1-x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/(2\theta)}.$$

Если $P \in L_\infty([0;1],\mu)$, то

$$\|P\|_{L_\infty([0;1],\mu)} = \|Q\|_{L_\infty[0;1]},$$

где $Q$ — такой элемент пространства $L_\infty[0;1]$, что $Q(x) = x(1-x)P(x)$.

**Теорема 35.** *Если* $P \in L_{2\theta}([0;1],\mu)$, *то* $P' \in \mathcal{M}$ *(производная понимается в обобщенном смысле). При этом*

$$|\langle P'y, z\rangle| \leq 2c_\theta \|P\|_{L_{2\theta}([0;1],\mu)} \|y\|_{\mathcal{H}} \|z\|_{\mathcal{H}},$$

*где* $c_\theta = (1/6)^{(\theta-1)/(2\theta)}$ *при* $1 \leq \theta < \infty$ *и* $c_\theta = 4$ *при* $\theta = \infty$. *Если* $1 \leq \theta < \infty$, *то оператор* $y \mapsto P'y$ *является компактным из* $\mathcal{H}$ *в* $\mathcal{H}'$.

*Доказательство.* Так как

$$|\langle P'y, z\rangle| = |\langle P, (yz)'\rangle| \leq |\langle P, y'z\rangle| + |\langle P, yz'\rangle| \ ,$$

достаточно оценить $|\langle P, y'z\rangle|$.

**1.** $\theta \in [1;\infty)$. Для произвольных $y, z \in \mathcal{H}$, применяя лемму 34, получаем

$$\left|\int_0^1 Py'z \,\mathrm{d}x\right| \leq \|z\|_{\mathcal{H}} \int_0^1 |P| \cdot \sqrt{x(1-x)} \cdot |y'| \,\mathrm{d}x = \tag{5.4}$$

$$= \|z\|_{\mathcal{H}} \int_0^1 (|P|(x(1-x))^{\frac{1}{2\theta}}) \cdot (x(1-x))^{\frac{\theta-1}{2\theta}} \cdot |y'| \,\mathrm{d}x \,. \tag{5.5}$$

Применяя к последнему интегралу в (5.6) тройное неравенство Гёльдера с показателями $2\theta$, $\frac{2\theta}{\theta-1}$ и 2 соответственно, получаем утверждение теоремы для $\theta \in [1;+\infty)$.

**2.** $\theta = \infty$. Для произвольных $y, z \in \mathcal{H}$ получаем

$$\left|\int_0^1 Py'z \,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 |P| \cdot |y'(x)| \cdot |z(x)| \,\mathrm{d}x \leq \|Q\|_{L_\infty[0;1]} \int_0^1 \frac{|y'(x)z(x)|}{x(1-x)} \,\mathrm{d}x = \tag{5.6}$$

$$= \|P\|_{L_\infty([0;1],\mu)} \int_0^1 |y'(x)| \left|\frac{1}{x}\int_0^x z'(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{1-x}\int_x^1 z'(t)\,\mathrm{d}t\right| \mathrm{d}x \leq \tag{5.7}$$

$$\leq 2\|P\|_{L_\infty([0;1],\mu)} \cdot \|y\|_{\mathcal{H}} \cdot \|Az'\|_{L_2[0;1]} \,. \tag{5.8}$$

Здесь через $A$ обозначен ограниченный в $L_2[0;1]$ оператор Харди: $Aw = \frac{1}{x}\int_0^x w(t)\,\mathrm{d}t$, $w \in L_2[0;1]$. Учитывая равенство $\|A\|_{L_2\to L_2} = 2$, получаем доказываемое неравенство для случая $\theta = \infty$.

**3.** Покажем теперь компактность мультипликатора $y \mapsto P'y$ при $1 \le \theta < \infty$. Пусть $P \in L_{2\theta}([0;1],\mu)$. Построим такую последовательность кусочно-постоянных функций $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, что

$$\|P - P_n\|_{L_{2\theta}([0;1],\mu)} \to 0, \quad \text{при } n \to \infty\,.$$

Потребуем также, чтобы каждая из функций $P_n$ принимала конечное число значений. Тогда обобщенная производная $P_n'$ представляет собой конечную линейную комбинацию $\delta$-функций, а значит, задает конечномерный ограниченный оператор $y \mapsto P_n'y$ из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}'$. Из первой части теоремы следует, что $P_n' \to P'$ по мультипликаторной норме, следовательно, если $P \in L_{2\theta}([0;1],\mu)$ $(1 \le \theta < \infty)$, то отображение $y \mapsto P'y$ есть компактный оператор из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}'$.

$\square$

## 5.2 Аффинно-самоподобные функции нулевого спектрального порядка

Используем конструкцию из раздела 2. Нас интересуют функции нулевого спектрального порядка. Причём, они могут не принадлежать $L_p$.

Самоподобная функция нулевого спектрального порядка является кусочно-постоянной. Все точки разрыва имеют первый род, за исключением, быть может, одной точки $\hat{x}$, являющейся *особой*. Если функция принимает счетное число значений, то особая точка обязательно есть. В окрестности этой точки самоподобная функция может быть неограниченной, может быть ограниченной, но не имеющей предела в этой точке. Также существуют функции, для которых особая точка является точкой непрерывности. Для наших целей интерес представляют самоподобные функции, неограниченные в окрестности особой точки. В [5] получена формула для особой точки и изучено поведение самоподобной функции в ее окрестности:

$$\hat{x} = \frac{\alpha_m}{1 - a_m} \,. \tag{5.9}$$

В частности, из (5.9) следует, что $\hat{x} = 0$ тогда и только тогда, когда $m = 1$; аналогично, $\hat{x} = 1$ тогда и только тогда, когда $m = n$.

Далее рассматриваем только случай, когда особая точка находится на границе промежутка $[0; 1]$.

Так как неподвижная точка отображения $G$ является также неподвижной точкой отображения $G^2$, то можно считать, что $d_m > 0$. Иначе вместо отображения $G$ можно рассмотреть отображение $G^2$, задающее ту же самоподобную функцию, при этом новые параметры самоподобия $\tilde{d}_{m^2} = d_m^2 > 0$, $\tilde{a}_{m^2} = a_m^2$.

**Теорема 36.** *Если $a_m|d_m| \le 1$, то обобщенная производная $P'$ самоподобной функции $P$ нулевого спектрального порядка, для которой $m = 1$ или $m = n$, принадлежит пространству $\mathcal{M}$.*

*Если $a_m|d_m| > 1$ и самоподобная функция $P$ нулевого спектрального порядка, для которой $m = 1$ или $m = n$, не является тождественно постоянной, то ее обобщенная производная $P'$* не *принадлежит пространству $\mathcal{M}$.*

*Доказательство.* Не ограничивая общности, проведем доказательство для $m = 1$ и $d_1 > 0$. Из определения следует, что функция $P$ нулевого спектрального порядка представима в виде

$$P'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n-1}\delta(x-a_la_1^{k-1})\cdot(m_ld_1^{k-1})\,,$$

где $m_l=\beta_{l+1}-\beta_l$ при $l>1$ и $m_1=\beta_2-d_1\beta_2-\beta_1$.

**1.** Пусть $a_1d_1<1$. Определим последовательность функций $P_j=(G^j)P_0$, для некоторой начальной измеримой функции $P_0$. В силу того, что в этом случае особенность у предельной функции $P$ может быть только в нуле, достаточно оценить интеграл $\int_0^1 P^2(x)\,x\mathrm{d}x$. Опираясь на свойства отображения $G$, получаем соотношение

$$\int_0^1\big(P_{j+2}(x)-P_{j+1}(x)\big)^2\,x\,\mathrm{d}x=(a_1d_1)^2\int_0^1\big(P_{j+1}(x)-P_j(x)\big)^2\,x\,\mathrm{d}x\,,$$

которое влечет фундаментальность последовательности $\{P_j\}_0^\infty$ в $L_2([0;1],\mu)$. Отсюда следует конечность интеграла $\int_0^1 P^2(x)\,x\mathrm{d}x$.

Используя самоподобие функции $P$ этот интеграл можно вычислить явно:

$$\begin{aligned}\int_0^1 xP^2(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^1 x\big(G(P)(x)\big)^2\,\mathrm{d}x=\\&=\int_0^{\alpha_1} x\big(G(P)(x)\big)^2\,\mathrm{d}x+\sum_{k=2}^{n}\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} x\big(G(P)(x)\big)^2\,\mathrm{d}x=\\&=(a_1d_1)^2\int_0^1 tP^2(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{k=2}^{n}\int_0^1(a_kt+\alpha_k)\beta_k^2a_k\,\mathrm{d}t\,,\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\int_0^1 xP^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\sum_{k=2}^{n}a_k\beta_k^2(\frac{a_k}{2}+\alpha_k)}{1-(a_1d_1)^2}\,.$$

При вычислении интегралов на промежутках $(\alpha_k,\alpha_{k+1})$ мы использовали соотношение (2) и замену переменной $t=S_k(x)=a_kx+\alpha_k$.

Из теоремы 35 следует наше утверждение.

**2.** Пусть $a_1 d_1 = 1$.

Запишем обобщенную функцию $P'$ в виде

$$P' = \sum_{l=1}^{n-1} P'_l, \quad \text{где} \quad P'_l = m_l \sum_{k=1}^{\infty} d_1^{k-1} \delta(x - a_l a_1^{k-1})\,. \tag{5.10}$$

Для произвольных двух функций $y, z \in \mathcal{H}$ оценим $\langle P'y, z\rangle$ произведением норм $\|y\|_{\mathcal{H}} \cdot \|z\|_{\mathcal{H}}$ с некоторым коэффициентом. В силу представления (5.10), достаточно провести оценку для одного из слагаемых $P'_l$ при фиксированном $l$.

$$|\langle P'_l y, z\rangle| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} m_l d_1^{k-1} \cdot y(a_l a_1^{k-1}) \cdot z(a_l a_1^{k-1}) \right| \le$$
$$\le m_l \sum_{k=1}^{\infty} d_1^{k-1} \cdot |y(a_l a_1^{k-1})| \cdot |z(a_l a_1^{k-1})|\,.$$

Введем следующие обозначения:

$$I_i^2 = \int_{a_l a_1^i}^{a_l a_1^{i+1}} |y'(t)|^2 \, \mathrm{d}t\,,\ i = 1, 2, \ldots \quad J_j^2 = \int_{a_l a_1^j}^{a_l a_1^{j+1}} |z'(t)|^2 \, \mathrm{d}t\,,\ j = 1, 2, \ldots$$

Оценим значения функции $y$:

$$|y(a_l a_1^{k-1})| \le \sum_{i=k}^{\infty} |y(a_l a_1^{i-1}) - y(a_l a_1^i)| \le \sum_{i=k}^{\infty} \sqrt{a_l (1 - a_1) a_1^{i-1}} \cdot I_i =$$
$$= \sqrt{a_l (1 - a_1)} \sum_{i=k}^{\infty} \sqrt{a_1^{i-1}} \cdot I_i\,.$$

Аналогично,

$$|z(a_l a_1^{k-1})| \le \sqrt{a_l (1 - a_1)} \sum_{j=k}^{\infty} \sqrt{a_1^{j-1}} \cdot J_j\,.$$

Используя полученные неравенства, получаем:

$$|\langle P_l' y, z\rangle| \leq m_l a_l (1-a_1) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} d_1^{k-1} \left( \sum_{i=k}^{\infty} \sqrt{a_1^{i-1}} \cdot I_i \right) \left( \sum_{j=k}^{\infty} \sqrt{a_1^{j-1}} \cdot J_j \right).$$

Коэффициент перед суммой зависит только от $P$ и $l$, поэтому в дальнейших вычислениях мы его опустим. Все слагаемые в этой тройной сумме положительны, поэтому можно менять порядки суммирования. Достаточно оценить сумму для индексов, удовлетворяющих неравенству $i \leq j$; сумма для индексов $j < i$ оценивается аналогично. В области $i \leq j$ сделаем замену $j = i + t$, $t = 0, 1, \ldots$. Учитывая условие $d_1 = \frac{1}{a_1}$, простое соотношение

$$\sum_{k=1}^{i} d_1^{k-1} = \frac{d_1^i - 1}{d_1 - 1} \leq a_1^{-(i-1)} \cdot \frac{d_1}{d_1 - 1}$$

и меняя порядок суммирования, получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_1^{k-1} \left( \sum_{k \le i \le j} \sqrt{a_1^{i-1}} \cdot I_i \cdot \sqrt{a_1^{j-1}} \cdot J_j \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} d_1^{k-1} \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \sqrt{a_1^{i-1}} \cdot I_i \cdot \sqrt{a_1^{i-1+t}} \cdot J_{i+t} =$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_1^{i-1} \cdot \sqrt{a_1^t} \cdot I_i \cdot J_{i+t} \sum_{k=1}^{i} d_1^{k-1} \le$$

$$\le \frac{d_1}{d_1 - 1} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_1^{i-1} \cdot \sqrt{a_1^t} \cdot I_i \cdot J_{i+t} \cdot a_1^{-(i-1)} =$$

$$= \frac{d_1}{d_1 - 1} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{a_1^t} \cdot I_i \cdot J_{i+t} \le \frac{d_1}{d_1 - 1} \sum_{t=0}^{\infty} \sqrt{a_1^t} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} I_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} J_{i+t}^2} \le$$

$$\le \frac{d_1}{d_1 - 1} \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{a_1}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} I_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} J_j^2}$$

Осталось заметить, что $\sum_{i=1}^{\infty} I_i^2 \le \|y\|_{\mathcal{H}}^2$ и $\sum_{j=1}^{\infty} J_j^2 \le \|z\|_{\mathcal{H}}^2$.

Так как для индексов $j > i$ справедливы аналогичные оценки, в конечном итоге имеем

$$|\langle P' y, z \rangle| \le \frac{2}{1 - \sqrt{a_1}} \left( \sum_{l=1}^{n-1} m_l a_l \right) \cdot \|y\|_{\mathcal{H}} \cdot \|z\|_{\mathcal{H}}$$

**3.** Пусть $a_1 d_1 > 1$.

Для некоторого $\alpha \in (1/2; 1)$, которое мы уточним позже, построим функцию

$$y_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{при } x \in [0; 1/2]; \\ (1-x)^\alpha & \text{при } x \in [1/2; 1]. \end{cases}$$

Очевидно, что $y_\alpha \in \overset{\circ}{W}{}_2^1[0;1]$.

Теперь покажем, что найдется $\alpha$, при котором $\langle P' y_\alpha, y_\alpha \rangle$ будет расходится. Достаточно рассмотреть ряд при тех индексах $k \geq k_0$, при которых все точки вида $a_l a^{k-1}$, $l = 1, \ldots, n-1$ лежат на отрезке $[0; 1/2]$:

$$\langle P' y_\alpha, y_\alpha \rangle \geq \sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{l=1}^{n-1} \big(y_\alpha(a_l a_1^{k-1})\big)^2 m_l d_1^{k-1} = \sum_{k=k_0}^{\infty} \left( (a_1^{2\alpha} d_1)^{k-1} \cdot \sum_{l=1}^{n-1} a_l^{2\alpha} m_l \right) ,$$

Теперь добьемся, чтобы эта геометрическая прогрессия расходилась. Для этого, во-первых, потребуем, чтобы её знаменатель $a_1^{2\alpha} d_1$ был больше 1. Так как $a_1 d_1 > 1$ и $0 < a_1 < 1$, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что при $\alpha \in (1/2; 1/2 + \varepsilon)$ справедливо неравенство $a_1^{2\alpha} d_1 > 1$. Заметим также, что можно подобрать такое $\alpha \in (1/2; 1/2 + \varepsilon)$, что первый член прогрессии $\sum_{l=1}^{n-1} a_l^{2\alpha} m_l$ отличен от нуля. Действительно, если такого $\alpha$ не существует, то аналитическая по $\alpha$ функция $\sum_{l=1}^{n-1} a_l^{2\alpha} m_l$ тождественно равна нулю на некотором интервале вещественной оси, откуда будет следовать $m_l = 0$ для всех $l$, что входит в противоречие с условием теоремы (функция $P$ — не константа). $\square$

## 5.3 Спектральная задача для струны с весом из пространства мультипликаторов

Рассмотрим задачу

$$-y'' = \lambda \rho y, \tag{5.11}$$

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{5.12}$$

где $\rho$ — обобщенная производная некоторой функции $P$.

В 1959 г. была написана, по-видимому, одна из первых работ (см. [24]), в которых рассматривалась задача (5.11), (5.12) с чисто сингулярной непрерывной функцией $P$. В предположении, что $\rho$ есть обобщённая производная лестницы Кантора, была получена оценка на считающую функцию собственных значений

$$N(\lambda) = O\left(\lambda^{\log_6 2}\right), \quad \lambda \to +\infty\,.$$

В работах [13], [14] более точные результаты по асимптотике собственных значений были получены для общего случая аффинно-самоподобных мер. В этих работах было показано, что в случае так называемого *неарифметического самоподобия* меры собственные числа задачи (5.11), (5.12) имеют чисто степенную асимптотику, тогда как в случае *арифметического самоподобия* асимптотика $\lambda_j$, вообще говоря, более сложна — помимо степенного множителя, главный член может содержать периодическую функцию $s$ от $\ln(j)$. При этом вопрос о невырожденности функции $s$ (не является ли она постоянной) не рассматривался. Предполагается, что эта функция непостоянна во всех нетривиальных случаях, но лишь недавно этот факт был доказан в [8] для мер канторовского типа, а для более широкого класса весов в [9].

Результаты [13], [14] были позднее обобщены в двух направлениях: в работах [1], [2] были рассмотрены более общие (незнакоопределенные) весовые функции с более сильным характером сингулярности, а именно $\rho \in \left(\overset{\circ}{W}{}_2^1[0;1]\right)'$. В работе [17] рассматривались задачи с обыкновенным дифференциальным самосопряженным оператором произвольного порядка. В работе [4] разобран случай дискретного веса $\rho$ с *вырожденным* самоподобием. Собственные числа задачи (5.11), (5.12) в этом случае имеют экспоненциальную асимптотику. Точнее, все собственные значения задачи можно разбить на несколько серий $\{\lambda_k^{(l)}\}_{k=1}^{\infty}$, $l = 1, \ldots, n$ (их количество определяется самоподобной функций $P$), для каждой из которых существует такое положительное число $c_l$, что справедлива асимптотика

$$\lambda_k^{(l)} \sim c_l q^k \, .$$

Число $q > 1$ определяется параметрами самоподобия функции $P$.

В [7] показано, что экспоненциальная асимптотика собственных значений сохраняется и в случае оператора, порожденного дифференциальным выражением произвольного порядка (мера имеет вырожденное самоподобие).

В работах [8] и [10] исследовались более тонкие спектральные характеристики задачи (5.11) для весов, являющихся обобщенными производными «ровных канторовских лестниц» (см. [9]); вместо краевых условий Дирихле рассматривались краевые условия Неймана и третьего рода. В этом случае обнаружен и доказан эффект спектральной периодичности. В [11] эти результаты были обобщены на дифференциальные операторы четвертого порядка. Аналогичные результаты в случае дифференциального выражения второго порядка и условий Неймана получены в [20].

В данном разделе обобщаются результаты работ [1], [2] и [4] на случай еще более сильного характера сингулярности веса. А именно, предполагается, что $\rho$ является самоподобным мультипликатором из пространства $\mathring{W}_2^1[0;1]$ в двойственное $\left(\mathring{W}_2^1[0;1]\right)'$. Расширение класса сингулярных весов на мультипликаторы накладывает ограничение на класс краевых условий: задачу (5.11) можно определить, если на том конце, где вес имеет большую сингулярность, рассматривать условие Дирихле.

Первой работой, в которой изучался оператор Шредингера с коэффициентами из пространства мультипликаторов в соболевских пространствах с негативным показателем гладкости, была статья [15]. Более общие результаты позже были получены, например в [18], [19], [16].

### 5.3.1 Вспомогательные утверждения

В этом разделе мы построим операторную модель задачи и исследуем некоторые свойства полученных операторов, используя идеи и методы работы [4]. Для удобства читателей мы приводим необходимые для полноты изложения утверждения этой работы здесь.

Известно, что оператор $y \mapsto -y''$ есть изометрия из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}'$. Через $J : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ обозначим обратный оператор.

Как и в предшествующих работах [1] и [2], в качестве операторной модели задачи (5.11), (5.12) мы будем рассматривать линейный пучок $T_\rho : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ ограниченных операторов, удовлетворяющий тождеству

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathcal{H} \tag{5.13}$$
$$\langle JT_\rho(\lambda)y, y\rangle = \int\limits_0^1 |y'|^2\,dx - \lambda\langle \rho y, y\rangle = \int\limits_0^1 \left(|y'|^2 + \lambda P \cdot (|y|^2)'\right)\,dx.$$

Через $\operatorname{ind} S$ мы будем обозначать отрицательный индекс инерции ограниченного самосопряжённого оператора $S$, действующего в некотором гильбертовом пространстве $H$. То есть $\operatorname{ind} S$ равен точной верхней грани размерностей подпространств $M \subseteq H$, удовлетворяющих условию

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall y \in M \quad \langle Sy, y\rangle_H \leqslant -\varepsilon\,\|y\|_H^2.$$

Как и в разделе 5.2 через $m$ мы обозначаем тот единственный индекс, для которого $d_m \neq 0$. Если $P' \in \mathcal{M}$, то $m = 1$ или $m = n$.

Введём в рассмотрение два подпространства $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{H}$. Подпространство $\mathcal{H}_1$ имеет вид

$$\mathcal{H}_1 := \{y \in \mathcal{H} : \forall x \notin (\alpha_m, \alpha_{m+1}) \quad y(x) = 0\}.$$

Подпространство $\mathcal{H}_2$ представляет собой $(n-1)$-мерную линейную оболочку функций $e_k \in \mathcal{H}$, где $k = 1, \ldots n-1$, имеющих вид

$$e_k(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \gamma_{k+1}}{\alpha_{k+1} - \gamma_{k+1}} & \text{при } x \in [\gamma_{k+1}, \alpha_{k+1}], \\ \dfrac{\delta_{k+1} - x}{\delta_{k+1} - \alpha_{k+1}} & \text{при } x \in [\alpha_{k+1}, \delta_{k+1}], \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где

$$\gamma_{k+1} := \begin{cases} \alpha_k & \text{при } k \neq m, \\ \alpha_{m+1} - a_m a_n & \text{при } k = m, \end{cases}$$

$$\delta_{k+1} := \begin{cases} \alpha_{k+2} & \text{при } k \neq m-1, \\ \alpha_m + a_m a_1 & \text{при } k = m-1. \end{cases}$$

Справедливы следующие два утверждения.

**Утверждение 37.** *([4], утверждение 3.1) Ортогональное дополнение прямой суммы $\mathcal{H}_1 \dotplus \mathcal{H}_2$ допускает представление в виде*

$$\mathcal{H} \ominus (\mathcal{H}_1 \dotplus \mathcal{H}_2) = \left\{ y \in \mathcal{H} : \ \forall x \in (\alpha_m, \alpha_{m+1}) \cup \bigcup_{k=2}^{n} \{\alpha_k\} \quad y(x) = 0 \right\}.$$

**Утверждение 38.** *([4], утверждение 3.2) Пусть $\lambda$ — вещественное число, а $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{H}$ — конечномерное подпространство, на котором квадратичная форма оператора $JT_\rho(\lambda)$ отрицательна. Тогда существует подпространство $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{H}_1 \dotplus \mathcal{H}_2$ размерности $\dim \mathcal{W}$, на котором квадратичная форма оператора $JT_\rho(\lambda)$ также отрицательна.*

Рассмотрим два линейных пучка $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ и $C : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ ограниченных операторов, определяемых соотношениями

$$\forall\lambda \in \mathbb{R},\, \forall y \in \mathcal{H}_1 \qquad \langle A(\lambda)y, y\rangle = \int\limits_0^1 \left(|y'|^2 + \lambda P \cdot (|y|^2)'\right)\, dx, \tag{5.14}$$

$$\forall\lambda \in \mathbb{R},\, \forall y \in \mathcal{H}_2 \qquad \langle C(\lambda)y, y\rangle = \int\limits_0^1 \left(|y'|^2 + \lambda P \cdot (|y|^2)'\right)\, dx,$$

а также оператор $B : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, удовлетворяющий тождеству

$$\forall y \in \mathcal{H}_1,\, \forall z \in \mathcal{H}_2 \qquad \langle By, z\rangle = \int\limits_0^1 y'\overline{z'}\, dx. \tag{5.15}$$

Несложно видеть, что $A = P_1 JT_\rho P_1$, $C = P_2 JT_\rho P_2$, где $P_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$, суть ортогональные проекторы.

Справедливы следующие два утверждения.

**Утверждение 39.** *([4], утверждение 3.3) Пусть $\lambda$ — вещественное число. Тогда выполняется равенство*

$$\operatorname{ind} A(\lambda) = \operatorname{ind} JT_\rho(a_m d_m\, \lambda).$$

**Утверждение 40.** *([4], утверждение 3.4) Пусть $\lambda$ — вещественное число, не принадлежащее спектру пучка $C$. Тогда выполняется равенство*

$$\operatorname{ind} JT_\rho(\lambda) = \operatorname{ind}[A(\lambda) - B^* C^{-1}(\lambda) B] + \operatorname{ind} C(\lambda).$$

Рассмотрим величины $\zeta_k$, где $k = 2, \dots n$, имеющие вид

$$\zeta_k := \begin{cases} \beta_m - \beta_{m-1} + d_m\beta_1 & \text{при } k = m, \\ \beta_{m+1} - \beta_m - d_m\beta_n & \text{при } k = m+1, \\ \beta_k - \beta_{k-1} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим также через $N_\pm$ две величины

$$N_\pm := \#\{k \in [2,n] : \quad \pm\zeta_k > 0\}.$$

Справедливы следующие два утверждения.

**Утверждение 41.** *([4], утверждение 3.5) Для любого достаточно большого вещественного числа $\lambda > 0$ выполняется равенство*

$$\operatorname{ind} C(\lambda) = N_+.$$

**Утверждение 42.** *([4], утверждение 3.6) Пусть выполнено равенство $N_+ + N_- = n - 1$. Тогда для любого достаточно большого вещественного числа $\lambda > 0$ оператор $C(\lambda)$ является ограниченно обратимым, причём при $\lambda \to +\infty$ справедлива асимптотика*

$$\|C^{-1}(\lambda)\| = O(\lambda^{-1}).$$

**Теорема 43.** *Если $a_m d_m < 1$, то спектр задачи* (5.11), (5.12) *дискретен, и все её собственные значения простые.*

*Доказательство.* Дискретность спектра следует из компактности мультипликатора $y \mapsto P'y$ (см. теорему 35 и пункт 1 теоремы 36).

Простота спектра задачи (5.11), (5.11) следует из [1, Теорема 4.1]. □

### 5.3.2 Основные результаты

В этом параграфе мы рассматриваем задачу (5.11)–(5.12) с весом $\rho = P' \in \mathcal{M}$ (поэтому $m = 1$ или $m = n$). Доказательство теоремы 44 дословно повторяет доказательство теоремы 4.1 работы [4] для веса $\rho = P' \in L_2[0;1]$.

**Дискретный спектр.**

Основными являются следующие три теоремы.

**Теорема 44.** *Пусть выполняются соотношения* $d_m > 0$, $N_+ > 0$ *и* $N_+ + N_- = n - 1$. *Тогда существуют вещественные числа* $c_l > 0$, *где* $l = 1, \ldots, N_+$, *для которых последовательность* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *занумерованных в порядке возрастания положительных собственных значений задачи* (5.11), (5.12) *удовлетворяет при* $k \to \infty$ *асимптотикам*

$$\lambda_{l+kN_+} = c_l \cdot (a_m d_m)^{-k} \cdot (1 + o(1)).$$

Следующие две теоремы доказываются аналогичным доказательству теоремы 44 способом.

**Теорема 45.** *Пусть выполняются соотношения* $d_m > 0$, $N_- > 0$ *и* $N_+ + N_- = n - 1$. *Тогда существуют вещественные числа* $c_l > 0$, *где* $l = 1, \ldots N_-$, *для которых последовательность* $\{\lambda_{-k}\}_{k=1}^{\infty}$ *занумерованных в порядке убывания отрицательных собственных значений задачи* (5.11)–(5.12) *удовлетворяет при* $k \to \infty$ *асимптотикам*

$$\lambda_{-(l+kN_-)} = -c_l \cdot (a_m d_m)^{-k} \cdot (1 + o(1)).$$

**Теорема 46.** *Пусть выполняются соотношения* $d_m < 0$ *и* $N_+ + N_- = n - 1$. *Тогда существуют вещественные числа* $c_l > 0$, *где* $l = 1, \ldots n - 1$, *для которых последовательность* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *занумерованных в порядке возрастания положительных собственных значений задачи* (5.11)–(5.12) *удовлетворяет при* $k \to \infty$ *асимптотикам*

$$\lambda_{l+k(n-1)} = c_l \cdot (a_m |d_m|)^{-2k} \cdot (1 + o(1)),$$

*а последовательность* $\{\lambda_{-k}\}_{k=1}^{\infty}$ *занумерованных в порядке убывания отрицательных собственных значений задачи* (5.11)–(5.12) *удовлетворяет при* $k \to \infty$ *асимптотикам*

$$\lambda_{-(l+N_-+k(n-1))} = -c_l \cdot (a_m|d_m|)^{-2k-1} \cdot (1+o(1)).$$

**Непрерывный спектр**

Покажем, что в случае «двучленных» самоподобных функций ($n = 2$) при условии $a_1 d_1 = 1$ спектр задачи (5.11), (5.12) непрерывен.

Не ограничивая общности, считаем, что $m = n = 2$. Для краткости введем обозначения: $a_1 = 1 - a$, $a_2 = a$, $d_2 = d$. Напомним, что $d_1 = 0$ и $ad = 1$. Соотношение (2) для оператора подобия в этих обозначениях записывается более просто:

$$G(P)(x) = \beta_1 \cdot \chi_{[0,1-a)}(x) + \left(d \cdot P\left(\frac{x-1+a}{a}\right) + \beta_2\right) \cdot \chi_{(1-a,1]}(x),$$

**Теорема 47.** *При* $n = 2$ *и* $ad = 1$ *и условии, что самоподобная функция* $P$ *не является постоянной, спектр задачи* (5.11)–(5.12) *непрерывный и представляет собой отрезок* $\left[\frac{1}{d\beta_1+\beta_2-\beta_1}\frac{(1-\sqrt{a})^2}{a}; \frac{1}{d\beta_1+\beta_2-\beta_1}\frac{(1+\sqrt{a})^2}{a}\right]$.

*Доказательство.* Заметим, что $d\beta_1 + \beta_2 - \beta_1$ обращается в нуль только при условии $d\beta_1 + \beta_2 = \beta_1$. При таких параметрах самоподобия функция $P \equiv \beta_1$.

Рассмотрим пространство $l_{2,1/d}$, элементами которого являются последовательности $u = \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, $u_k \in \mathbb{C}$, скалярное произведение определено формулой

$$(u,v)_{l_{2,1/d}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{d^{k-1}} u_k \overline{v_k}.$$

В этом пространстве рассмотрим оператор $L$, действие которого на стандартные базисные векторы определяется следующим образом:

$$Le_1 = \left(1+\frac{1}{a}\right)e_1 - \frac{1}{a}e_2,$$

$$Le_k = -\frac{1}{(ad)^{k-1}}e_{k-1} + \frac{1+\frac{1}{a}}{(ad)^{k-1}}e_k - \frac{d}{(ad)^k}e_{k+1}, \quad k \geqslant 2.$$

Оператор $L$ симметричен в $l_{2,1/d}$, имеет индексы дефекта (1;1). Рассмотрим его самосопряженное расширение, которое имеет область определения $\lim_{k\to\infty}\frac{u_k}{d^k} = 0$. Это самосопряженное расширение мы также обозначим через $L$.

В работе [6] показано, что при $n = 2$ задача (5.11)–(5.12) эквивалентна спектральной задаче $Lu = \lambda(d\beta_1 + \beta_2 - \beta_1)u$ именно для этого самосопряженного расширения.

Эквивалентность задач в [6] была установлена в предположении, что $ad^2 < 1$, но те же самые рассуждения справедливы и при $ad = 1$. При условии $ad = 1$ действие оператора $L$ на базисные векторы можно записать проще:

$$Le_1 = \left(1+\frac{1}{a}\right)e_1 - \frac{1}{a}e_2, \qquad Le_k = -e_{k-1} + \left(1+\frac{1}{a}\right)e_k - \frac{1}{a}e_{k+1}, \quad k \geqslant 2.$$

Матрица оператора $L$, в свою очередь, подобна «симметризованной» матрице $\tilde{L}$:

$$\tilde{L}e_1 = \left(1+\frac{1}{a}\right)e_1 - \frac{1}{\sqrt{a}}e_2,$$

$$\tilde{L}e_k = -\frac{1}{\sqrt{a}}e_{k-1} + \left(1+\frac{1}{a}\right)e_k - \frac{1}{\sqrt{a}}e_{k+1}, \quad k \geqslant 2,$$

действующей уже в обычном пространстве $l_2$ (без веса).

Спектр оператора $\tilde{L}$ непрерывен и представляет собой отрезок

$$\left[1+\frac{1}{a}-\frac{2}{\sqrt{a}};1+\frac{1}{a}+\frac{2}{\sqrt{a}}\right]=\left[\frac{(1-\sqrt{a})^2}{a};\frac{(1+\sqrt{a})^2}{a}\right].$$

В этом несложно убедиться, построив изоморфизм между $l_2$ и $L_2[0;\pi]$ ($e_k \leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kt$, $k=1,2,\ldots$), при котором оператор $\tilde{L}$ подобен оператору умножения на функцию $\left(1+\frac{1}{a}\right)-\frac{2}{\sqrt{a}}\cos kt$. $\square$

# Заключение

Диссертация посвящена исследованию свойств сингулярных функций и некоторым приложениям сингулярных функций в спектральных задачах. Характеристические свойства сингулярных неубывающих непрерывных функций описываются в терминах скорости их приближения кусочно-постоянными функциями в различных функциональных пространствах.

Для класса неубывающих непрерывных функций получены необходимые и достаточные условия сингулярности. Рассмотрено множество аффинно-самоподобных неубывающих непрерывный сингулярных функций положительного спектрального порядка. Получены двусторонние оценки степенного характера на скорость приближения функции из этого множества в пространствах $L_p[0;1]$ $(1 \leq p \leq \infty)$. Скорость сходимости зависит от показателя $p$, параметров самоподобия приближаемой функции и количества точек разрыва функций, которыми проводится аппроксимация.

Приведены примеры, показывающие, что существуют неубывающие непрерывные сингулярные функции со сколь угодно быстрой и сколь угодно медленной скоростью приближения.

Полученные результаты позволяют для класса неубывающих непрерывный сингулярных функций ввести «степень» сингулярности: чем быстрее приближается функция кусочно-постоянными, тем она«сингулярнее». Кроме того, скорость приближения сингулярной функции позволяет получить информацию о хаусдорфовой размерности носителя сингулярной меры, ассоциированной с неубывающей непрерывной сингулярной функцией.

Дано полное описание множества мультипликаторов из пространства $\mathring{W}_2^1[0;1]$ в пространство $\mathring{W}_2^{-1}[0;1]$ в классе обобщенных производных аффинно-самоподобных функций нулевого спектрального порядка с особенностью на конце отрезка. Рассмотрена задача Штурма–Лиувилля с весом из указанного класса. Показано, что для некоторого подкласса таких весов спектр задачи может быть чисто непрерывным.

Полученные результаты могут быть применены к описанию пространства мультипликаторов в соболевские пространства с отрицательными показателями гладкости из соболевских пространств функций на отрезке с некоторыми краевыми условиями. Эти же результаты могут быть использованы в теории дифференциальных операторов с коэффициентами-распределениями.

# Литература


[1] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, *Самоподобные функции в пространстве* $L_2[0,1]$ *и задача Штурма–Лиувилля с сингулярным весом*, Математический сборник, 2006, **197:11**, 13–30.

[2] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, *Индефинитная задача Штурма–Лиувилля для некоторых классов самоподобных сингулярных весов*, Труды МИРАН, 2006, **255**, 88–98.

[3] И. А. Шейпак, *О конструкции и некоторых свойствах самоподобных функций в пространствах* $L_p[0,1]$, Матем. заметки, 2007, **81:6**, 924–938.

[4] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак *Асимптотика собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с дискретным самоподобным весом*, Матем. заметки, 2010, **88:5**, 662-–672

[5] И. А. Шейпак, *Особые точки самоподобной функции нулевого спектрального порядка. Самоподобная струна Стилтьеса*, Матем. заметки, 2010, **88:2**, 303–316.

[6] И.А. Шейпак *О спектре оператора Якоби с экспоненциально растущими матричными элементами*// Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика, 2011, **6**, 16–21.

[7] Nazarov A. I., Sheipak I. A., *Degenerate self-similar measures, spectral asymptotics and small ball deviations of gaussian processes*//Bulletin of the London Mathematical Society, 2012, **44**, 12—24.

[8] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, *О задаче Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа*, Функциональный анализ, 2013, **47:4**, 18–29.

[9] Н.В. Растегаев,*Об асимптотике спектра задачи Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом обобщенного канторовского типа*// Зап. научн. сем. ПОМИ, 2014, **425**, 86–98.

[10] A.A. Vladimirov and I.A. Sheipak, *On Spectral Periodicity for the Sturm.Liouville Problem: Cantor Type Weight, Neumann and Third Type Boundary Conditions*//Operator Theory: Advances and Applications, 2014, Springer Basel AG, Vol. 236, 509–516.

[11] А.А. Владимиров, *Осцилляционный метод в задаче о спектре дифференциального оператора четвёртого порядка с самоподобным весом*//Алгебра и анализ, 2015, **27:2**, 83–95.

[12] Strihartz R. S., *Self-similar measures and their Fourier transform, I*// Indiana University Math.J., **39**, 1990, 797–817.

[13] J. Kigami, M.L. Lapidus, *Weyl's problem for the spectral distributions of Laplacians on p.c.f. self-similar fractals*, Comm. Math. Phys., 1993, **158** 93–125.

[14] M. Solomyak, E. Verbitsky. *On a spectral problem related to self-similar measures*//Bull. London Math. Soc., 1995, **27**, 242–248.

[15] М. И. Нейман-заде, А. А. Шкаликов, *Операторы Шредингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов*, Матем. заметки, 1999, **66:5**, 723–733.

[16] А. А. Шкаликов, Дж.-Г. Бак, *Мультипликаторы в дуальных соболевских пространствах и операторы Шрёдингера с потенциалами-распределениями*, Матем. заметки, 2002, **71:5**, 643-–651.

[17] А.И. Назаров, *Логарифмическая асимптотика малых уклонений для некоторых гауссовских процессов в $L_2$-норме относительно самоподобной меры*, Вероятность и статистика. ЗНС ПОМИ, 2004, **311**, 190–213.

[18] V.G. Maz'ya and I.E. Verbitsky, *Infinitesimal Form Boundedness and Trudinger's Subordination for the Schrödinger Operator*//Invent. Math., 2005, **162:1**, 81—136.

[19] M.I. Neiman-zadee, A.A. Shkalikov, *Strongly Elliptic Operators with Singular Coefficients*// Russian Journal of Mathematical Physics, 2006, **13:1**, 2006, 70–78.

[20] U. Freiberg, *Refinement of the spectral asymptotics of generalized Krein Feller operators*//Forum Math., 2011, **23**, 427–445.

[21] H. Minkowski, *Verhandlungen des III*//Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg. — Berlin, 1904.

[22] Lebesgue, Henri, *Lecons sur L'integration et La recherche des fanctions primitives*, Paris: Gauthier-Villars, 1904. Русский перевод: Лебег А. *Интегрирование и отыскание примитивных функций*, М.: ГТТИ, 1934.

[23] Salem R., *On Some Singular Monotone Functions which Are Strictly Increasing*//Trans. Amer. Math. Soc. 53, 1943, 427–439.

[24] Uno T., Hong I., *Some consideration of asymptotic distribution of eigenvalues for the equation* $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \lambda \rho u = 0$//Japan Journal of Mathematics, 1959, **29**, 152–164.

[25] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды (том 1)*, Мир, М., 1964

[26] Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных, *Порядок наилучших сплайн-приближений некоторых классов функций*//Матем. заметки., 1970, **7:1**, 31–42.

[27] Н. П. Корнейчук, А. И. Половина, *О приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, алгебраическими многочленами*//Матем. заметки., 1971, **9:4**, 441–447.

[28] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, 3 изд., М.: Наука, 1974.

[29] В. Г. Мазья, Т. О. Шапошникова *Мультипликаторы в парах пространств дифференцируемых функций*// Труды ММО, 1981, т. 43, 37–80.