ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации
Тихонова Юлия Васильевича
"Классы сингулярных функций
в различных функциональных пространствах",
представленной на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 – вещественный,
комплексный и функциональный анализ

Диссертация посвящена изучению сингулярных функций, исследованию вопросов приближаемости этих функций кусочно-постоянными, и применению полученных результатов для исследования спектральных свойств дифференциальных операторов с коэффициентами-распределениями. Одной из важнейших задач, решаемых в диссертации, является описание классов сингулярных монотонных непрерывных функций, для которых возможно получение явных оценок на скорость приближения функций из этих классов кусочно-постоянными функциями с конечным числом точек разрыва. Ранее результатов по этому направлению практически не было.

Одна из первых характеристик сингулярности функций в терминах скорости приближения простыми была получена в 2013 г. в работе А. А. Владмимирова и И. А. Шейпака. Информация о том, что функция, стоящая в качестве множителя в формуле распределения собственных значений, является сингулярной, позволила уточнить асимптотику спектра. Кроме того, оказалось, что конкретные численные характеристики сингулярных самоподобных функций содержат информацию об асимптотике спектра некоторого класса дифференциальных операторов с коэффициентами-распределениями (эти коэффициенты являются обобщёнными производными соответствующих сингулярных функций). Начало теории дифференциальных операторов с коэффициентами-распределениями было положено в работах М. Г. Крейна о сингулярной струне в 50-х годах XX столетия. Особенно большое развитие теория дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами получила в последние два десятилетия. Разными направлениями в этой тематике занимались М. С. Соломяк, Е. А. Вербицкий, А. А. Шкаликов, А. М. Савчук, М. И. Нейман-заде, А. И. Назаров, А. А. Владимиров и другие.

Среди сингулярных функций важное место занимают самоподобные функции. Многие свойства функций этого класса допускают описание через параметры самоподобия. Самоподобными (фрактальными) объектами (множествами, мерами, функциями и т.д.) занимались многие математики. Основы современной теории самоподобия были заложены в работах Б. Мандельброта, Дж. Хатчинсона. Важные результаты были получены в работах Р. Салема, Р. С. Стрихартца, Ж. де Рама, В. Ю. Протасова. Различными приложениями самоподобных множеств и функций к спектральной теории дифференциальных операторов занимались М. В. Берри, М. Л. Лапидус, Дж. Кигами, Дж. Броссар, Р. Кармона, М. Левитин, Д. Васильев, М. С. Соломяк, Е. А. Вербицкий, А. И. Назаров, А. А. Владимиров и другие. Развитие теории дифференциальных операторов с коэффициентами-распределениями потребовало описания мультипликаторов в пространствах Соболева с негативными индексами гладкости. Одними из первых это заметили А. А. Шкаликов и М. И. Нейман-Заде в 1999 году, в работе которых были получены первые результаты в этом направлении. Дальнейшее существенное развитие эта тема получила в работах В. Г. Мазьи, И. Э. Вербицкого, Т. О. Шапошниковой, В. И. Буренкова, Дж.-Г. Бака, А. А. Шкаликова, В. А. Михайлеца, В. Н. Молибоги, Б. С. Митягина, П. Джакова и других.

Помимо приложений к теории дифференциальных операторов задача описания пространств мультипликаторов представляет несомненный самостоятельный интерес. Классические результаты в этом направлении были получены Р. С. Стрихартцем, В. Г. Мазьёй, Т. О. Шапошниковой. Важную роль сыграли работы Г. Бурдо, В. Зикеля, Г. А. Калябина, П.-Ж. Лемари-Рьёссе, Х. Трибеля, Й. Франке, М. Фрэйзера, Б. Яверта. В большей части эти работы касаются описания мультипликаторов в пространствах бесселевых потенциалов, определённых во всём пространстве $\mathbb{R}^n$.

В диссертации Ю. В. Тихонова получены новые важные результаты по описанию классов сингулярных функций с точки зрения сходимости к ним аппроксимаций кусочно-постоянными функциями с конечным числом точек разрыва. Для сингулярных самоподобных функций положительного спектрального порядка найдена скорость сходимости приближений простыми функциями. Дано описание мультипликаторов в классе самоподобных функций нулевого спектрального порядка и рассмотрены приложения к спектральной задаче колебания струны с весом-мультипликатором. Указан класс весов, для которых спектр задачи непрерывен.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы.

В первой главе диссертации исследуется скорость приближения сингулярных функций кусочно-постоянными, доказывается критерий сингулярности функции в терминах скорости приближения. Основной результат этой главы состоит в следующем.

Рассматривая класс $\mathcal{D}_N$ — неубывающих на $[0;1]$ функций, принимающих не более чем N значений, Ю.В.Тихонов показал, что для f — ограниченной неубывающей функции на $[0;1]$ следующие условия эквивалентны:

(1) f — сингулярна;

(2) Для некоторого $p \in [1;+\infty)$ найдется последовательность $f_n \in \mathcal{D}_{N(n)}$ такая, что

$$||f - f_n||_{L_p} \cdot N(n) \to 0, \quad n \to \infty$$

(3) Для любого $p \in [1;+\infty)$

$$C_N^p(f); \cdot N \to 0, \quad N \to \infty,$$

где $C_N^p(f) = \min_{g \in \mathcal{D}_N} ||f - g||_{L_p}$. При этом показано, что константа $C_N^p(f)$ определена корректно.

Этот результат важен для развиваемой далее идеи классифицировать сингулярные функции с точки зрения скорости стремления к нулю величины $||f - f_n||_{L_p} \cdot N(n)$.

Вторая глава диссертации носит вспомогательный характер. В ней приводится краткая необходимая информация о конструкции самоподобных функций, устанавливаются условия на параметры самоподобия, задающие монотонные самоподобные функции. Рассматриваются различные классы самоподобных функций, которые потом используются в главах 3 и 4.

В третьей главе устанавливаются двусторонние оценки на скорость приближения монотонной ограниченной самоподобной функции положительного спектрального порядка кусочно-постоянными функциями. Получен следующий результат

Для любого $p \in [1; +\infty)$ и любого $N \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства:

$$m \cdot N^{-\alpha} \leq C_N^p(f) \leq M \cdot N^{-\alpha},$$

где m, M и α зависят только от f и p. При этом $\alpha \geq 1$ определяется однозначно по параметрам самоподобия функции f.

Этот результат очень важен для дальнейшего развития теории самоподобных функций и мер. В частности, по числу α в степени убывания величины $C_N^p(f)$ можно получать оценки на размерность Хаусдорфа меры μ_f, порождаемой функцией f.

В четвертой главе строятся примеры сингулярных функций, допускающих произвольную скорость приближения. Основной результат этого раздела следующий.

Пусть $p \in [0, +\infty)$ и $s \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ — невозрастающая функция (функция оценки). Тогда существует сингулярная непрерывная неубывающая функция f такая, что

$$\frac{s(8N)}{32} \leq C_N^p(f) \cdot N \leq s(N),$$

где $C_N^p(f) = \min_{g \in \mathcal{D}_N} ||f - g||_{L_p}$.

Пятая глава посвящена изучению пространства мультипликаторов из соболевского пространства $\mathring{W}_2^1[0;1]$ в дуальное пространство $\mathring{W}_2^{-1}[0;1]$ и определению свойств самоподобных функций нулевого спектрального порядка в пространстве мультипликаторов. Также в этой главе приведен пример приложения некоторого класса этих функций к спектральным задачам.

В пятой главе Ю. В. Тихонов получил критерий пространства мультипликаторов в классе сингулярных самоподобных функций нулевого спектрального порядка. Это очень важный результат в задаче описания мультипликаторов в пространствах Соболева на ограниченных областях с краевыми условиями.

В качестве приложения полученных результатов по описанию мультипликаторов, в третьем разделе пятой главы рассматривается задача

$$-y'' = \lambda \rho y, \tag{1}$$
$$y(0) = y(1) = 0, \tag{2}$$

где ρ — обобщенная производная некоторой функции P из пространства самоподобных мультипликаторов.

Показано, что есть мультипликаторы, для которых спектр задачи (1)–(2) дискретен и получена асимптотика собственных значений. Также предъявлен класс мультипликаторов, для которых спектр задачи (1)–(2) непрерывен. Получено полное описание спектра. Пример большого класса весов, для которых задача (1)–(2) имеет непрерывный спектр построен впервые.

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и обоснованы в виде строгих математических доказательств. По теме диссертации автором опубликованы 5 работ, в том числе 3 из них в журналах из списка

ВАК, а результаты диссертации неоднократно представлялись автором на научно-исследовательских семинарах и международных научных конференциях. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Таким образом, в диссертационной работе Ю. В. Тихонова “Классы сингулярных функций в различных функциональных пространствах” решён ряд важных и трудных задач теории функциональных пространств и теории операторов. Эта работа является завершённым научным исследованием и удовлетворяет всем требованиям “Положения о порядке присуждения учёных степеней” Высшей Аттестационной Комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации, а её автор Тихонов Юлий Васильевич несомненно заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Научный руководитель,
доктор физико-математических наук, 01.01.01, доцент,
профессор кафедры теории функций и функционального анализа
механико-математического факультета ФГБОУ ВО
“Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова” Игорь Анатольевич Шейпак

19 сентября 2016 г.

119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, д. 1, Главное здание
механико-математический факультет,
кафедра теории функций и функционального анализа
e-mail: iasheip@yandex.ru; тел. +7(495)939-55-40

Подпись профессора И. А. Шейпака заверяю:

И.о. декана механико-математического факультета МГУ
имени М. В. Ломоносова, профессор В. Н. Чубариков