ОТЗЫВ
официального оппонента о диссертационной работе ТИХОНОВА ЮЛИЯ ВАСИЛЬЕВИЧА «Классы сингулярных функций в различных функциональных пространствах» представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа Ю. В. Тихонова посвящена исследованию свойств сингулярных функций. Основные вопросы, рассматриваемые в диссертации — это вопросы аппроксимации сингулярных функций кусочно-постоянными функциями в нормах различных функциональных пространств, и применение полученных результатов для исследования спектральных свойств дифференциальных операторов, коэффициентами которых являются обобщенные функции (распределения).

Сразу отметим, что рассматриваемая диссертационная работа принадлежит к активно разрабатываемой области современного математического анализа. Теория дифференциальных операторов с коэффициентами, являющимися обобщенными функциями (распределениями) возникла в работах М. Г. Крейна в середине XX столетия. Теория дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами активно развивается в последние два десятилетия. Здесь можно отметить работы М. С. Соломяка, Е. А. Вербицкого, А. А. Шкаликова, А. М. Савчука, М. И. Нейман-заде, А. И. Назарова, А. А. Владимирова и других авторов.

В классе всех сингулярных функций естественно выделяется и занимает важное место класс самоподобных функций. Самоподобные объекты (множества, меры, функции) естественно возникают во многих разделах математики. В рассматриваемой тематике самоподобные функции интересны тем, что определенные характеристики сингулярных самоподобных функций содержат информацию об асимптотике спектра некоторого класса дифференциальных операторов с коэффициентами, являющимися обобщенными производными соответствующих сингулярных функций.

Изучение дифференциальных операторов с коэффициентами, являющимися обобщенными функциями, привело к задаче об описании мультипликаторов между пространствами Соболева с отрицательными индексами гладкости, например, между пространствами $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}$ (этот случай рассматривается в диссертации). Этой теме посвящены работы В. И. Буренкова, И. Э. Вербицкого, В. Г. Мазьи, Б. С. Митягина, Т. О. Шапошниковой, А. А. Шкаликова и других. Разумеется, задача описания мультипликаторов между различными пространствами функций интересна сама по себе, а не только в связи с приложениями к изучению дифференциальных уравнений.

В диссертации Ю. В. Тихонова получены новые важные результаты по описанию классов сингулярных функций с точки зрения сходимости к ним аппроксимаций кусочно-постоянными функциями с конечным числом точек разрыва. Для сингулярных самоподобных функций положительного спектрального порядка найдена скорость сходимости приближений простыми функциями. Дано описание мультипликаторов в классе самоподобных функций нулевого спектрального порядка и рассмотрены приложения к спектральной задаче колебания струны с весом-мультипликатором. Указан класс весов, для которых спектр задачи непрерывен.

Обсудим кратко *содержание* рассматриваемой диссертации, состоящей из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Диссертация изложена на 70 страницах. Список литературы включает 29 наименований.

Во введении приведен краткий исторический обзор исследований по сингулярным функциям, обоснована актуальность темы исследования, сформулированы цели и задачи работы, приведена структура диссертации и сформулированы основные полученные результаты.

В первой главе изучается скорость приближения сингулярных функций кусочно-постоянными и получен критерий сингулярности функции в терминах скорости такого приближения. Основной результат этой главы (Теорема 19) состоит в следующем: для ограниченной неубывающей на $[0, 1]$ функции f следующие условия эквивалентны (через $\mathcal{D}_N$ обозначен класс неубывающих на отрезке $[0, 1]$ функций, принимающих не более чем N значений):

(1) функция f является сингулярной;

(2) Для некоторого числа $p \in [1, +\infty)$ найдется последовательность функций $f_n \in \mathcal{D}_{N(n)}$ такая, что
$$\|f - f_n\|_{L^p} \cdot N(n) \to 0$$
при $n \to \infty$;

(3) Для любого $p \in [1, +\infty)$ выполнено
$$C_N^p(f) \cdot N \to 0$$
при $N \to \infty$, где $C_N^p(f) = \min_{g \in \mathcal{D}_N} \|f - g\|_{L^p}$. При этом показано, что константа $C_N^p(f)$ определена корректно.

Этот результат важен для классификации сингулярных функций с точки зрения скорости стремления к нулю величины $\|f - f_n\|_{L^p} \cdot N(n)$.

Отметим еще один результат первой главы диссертации — Теорему 20 — которая дает критерий дискретности данной ограниченной неубывающей функции f в терминах скорости приближения f кусочно-постоянными функциями в пространстве L^∞.

Во второй главе дается краткая информация о конструкции самоподобных функций, устанавливаются условия на параметры самоподобия, задающие монотонные самоподобные функции. Рассматриваются различные классы самоподобных функций, которые используются далее в третьей и четвертой главах диссертации.

В третьей главе устанавливаются двусторонние оценки на скорость приближения монотонной ограниченной самоподобной функции положительного спектрального порядка кусочно-постоянными функциями. Приведем основной результат, полученный в этой главе (Теорема 23):

Для любого $p \in [1, +\infty)$ и любого $N \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства:
$$m \cdot N^{-\alpha} \le C_N^p(f) \le M \cdot N^{-\alpha},$$
где m, M и α зависят только от f и p. При этом $\alpha \geqslant 1$ определяется однозначно по параметрам самоподобия функции f.

Эта теорема представляется интересной и полезной для дальнейшего изучения самоподобных функций и мер. Так, из значений α в степени убывания величины $C_N^p(f)$ можно извлекать оценки на размерность Хаусдорфа сингулярной меры, порождаемой функцией f.

В четвертой главе строятся примеры сингулярных функций, допускающих произвольную скорость приближения. Основной результат четвертой главы — Теорема 33 — утверждает, что для любого числа $p \in [0, +\infty)$ и для любой невозрастающей функции $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ существует сингулярная непрерывная неубывающая функция f, для которой
$$\frac{s(8N)}{32} \leqslant C_N^p(f) \cdot N \leqslant s(N).$$

В пятой главе диссертации получено полное описание множества мультипликаторов из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1[0, 1]$ в пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0, 1]$ в классе обобщенных производных аффинно-самоподобных функций нулевого спектрального порядка с особенностью на конце отрезка. Рассмотрена задача Штурма–Лиувилля с весом из указанного класса.

Показано, что для некоторого подкласса рассматриваемых весов спектр задачи может быть чисто непрерывным. Такого рода примеры построены впервые.

В заключении кратко сформулированы основные результаты диссертации.

Рассмотрение диссертации позволяет сделать следующие выводы: Диссертация Ю. В. Тихонова «Классы сингулярных функций в различных функциональных пространствах» относится к хорошо известному специалистам и активно развивающемуся направлению современного анализа. *Таким образом, тема диссертации является актуальной.*

Основными достижениями диссертации, определяющим ее *научную новизну*, являются следующие результаты:

1) Получен критерий сингулярности неубывающей ограниченной функции в терминах скорости ее приближения кусочно-постоянными функциями с конечным числом точек разрыва в нормах пространств $L^p[0,1]$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.
2) Рассмотрено множество аффинно самоподобных неубывающих непрерывных сингулярных функций положительного спектрального порядка. Получены двусторонние оценки степенного вида на скорость приближения функций этого класса кусочно-постоянными в нормах пространств $L^p[0,1]$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ (скорость сходимости зависит от значения p, от параметров самоподобия и от количества точек разрыва функций, которыми осуществляется аппроксимация).

3)Получено полное описание множества мультипликаторов из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$ в пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1]$ в классе обобщенных производных аффинно-самоподобных функций нулевого спектрального порядка с особенностью на конце отрезка. Рассмотрена задача Штурма–Лиувилля с весом из указанного класса. Показано, что для некоторого подкласса рассматриваемых весов спектр задачи может быть чисто непрерывным.

Все полученные автором результаты обоснованы строгими и аккуратными математическими доказательствами. Это подтверждает их *достоверность*.

Отметим, что основные результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории сингулярных функций и мер, и в спектральной теории дифференциальных операторов. Результаты, связанные с самоподобными функциями могут найти применение в теории обработки изображений. Это определяет *теоретическую ценность* результатов диссертации.

Считаю, что полученные результаты диссертации найдут дальнейшее применение в исследованиях анализу и теории дифференциальных уравнений, проводимых в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, в Санкт-Петербургском государственном университете, в ПОМИ РАН, и в других математических исследовательских центрах в России и за рубежом. Это, в частности, определяет *практическую значимость* результатов диссертации.

Результаты диссертации своевременно и в полном объеме опубликованы автором в 4 работах, включая 2 статьи, опубликованных в журналах из списка, рекомендованного ВАК. Еще одна статья (в журнале из списка ВАК) вышла сразу после подачи диссертации. Все основные результаты диссертации были представлены на ряде семинаров и международных конференций. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Замечания. По диссертации имеется ряд замечаний. В основном — это мелкие неточности и не всегда согласованные обозначения, а также опечатки и погрешности редакционного характера, а также погрешности оформления. Не приводя список этих замечаний, неизбежных в работах достаточно большого объема, отметим лишь некоторые из них

1) В Теоремах 19 и 20 явно не сказано, что такое $N(n)$. Смысл этой величины, конечно, можно восстановить из контекста, но формулировка основного результата должна быть полной.

2) Использованная автором сквозная система нумерации теорем, лемм, утверждений, определений, примеров представляется не совсем удачной, особенно в связи с разделением текста на пять глав. Условную Теорему 1.2 немного легче найти в первой главе, нежели Теорему 20. Кроме того, теоремы из введения, повторяющие теоремы из основного текста работы (само по себе такое повторение весьма уместно) встроены в общую нумерацию, что еще больше усложняет чтение. Например, Теоремы 3 и 4 из введения — это в точности Теоремы 19 и 20 из первой главы.
3) Считаю, что работы только выиграла бы от объединения глав 2, 3 и 4 (посвященных близким вопросам и очень коротких — от 5 до 7 страниц каждая) в одну.

Приведенные замечания не влияют на общую положительную оценку диссертационной работы и на научную значимость полученных результатов. Таким образом считаю, что диссертация Ю. В. Тихонова «Классы сингулярных функций в различных функциональных пространствах» соответствует всем требованиям п. 9 «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации №842 от 24.09.2013, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор, Тихонов Юлий Васильевич, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук, доцент,
01.01.01
главный научный сотрудник НИЧ НУК ФН,
профессор кафедры Прикладной математики
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего
образования «Московский государственный
технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

/ Федоровский Константин Юрьевич /

Почтовый адрес: 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д.5, стр. 1.
Телефон: (499) 263-63-26
Адрес электронной почты: fn2@bmstu.ru

ВЕРНО
ЗАМ. НАЧАЛЬНИКА УПРАВЛЕНИЯ КАДРОВ
МГТУ им Н.Э. БАУМАНА
А.Г. МАТВЕЕВ
16.11.2016 г.