ФГБОУ ВО

Московский государственный университет

имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Оганесян Вардан Спартакович

Геометрия коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2

Специальность 01.01.04 − геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва − 2016

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель: **Мохов Олег Иванович**,
доктор физико-математических наук,
профессор ФГБОУ ВО Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова.

Официальные оппоненты: **Миронов Андрей Евгеньевич**,
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.
Шейнман Олег Карлович,
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник
ФГБУН математический институт имени В.А. Стеклова Российской академии наук.

Ведущая организация: **ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН**

Защита состоится 17 февраля 2017 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д501.001.84 на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.
С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, https://istina.msu.ru/dissertations/27700863/
Автореферат разослан 17 января 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.84 на базе
ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук,
профессор **Шафаревич Андрей Игоревич**

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Рассмотрим два дифференциальных оператора

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} u_i(x)\partial_x^i, \quad L_m = \sum_{i=0}^{m} v_i(x)\partial_x^i$$

Условие коммутации операторов L_n и L_m

$$[L_n, L_m] = L_n L_m - L_m L_n = 0$$

представляет собой очень сложную систему нелинейных дифференциальных уравнений на коэффициенты. Теория коммутирующих дифференциальных операторов начала развиваться в начале XX века в работах Валленберга, Шура и Бурхналла, Чаунди.

Рассмотрим самые простые примеры коммутирующих дифференциальных операторов. Пусть

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} a_i\partial_x^i, \quad L_m = \sum_{i=0}^{m} b_i\partial_x^i,$$

где a_i и b_i константы. Очевидно, что операторы L_n и L_m коммутируют. Рассмотрим менее тривиальный пример. Пусть

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} u_i(x)\partial_x^i$$

произвольный дифференциальный оператор. Рассмотрим полиномы $R_1(L_n)$ и $R_2(L_n)$ от оператора L_n. Очевидно, что $R_1(L_n)$ коммутирует с $R_2(L_n)$.

Валленберг в 1903 году исследовал условие коммутации операторов

$$L_1 = \partial_x + u(x), \quad L_m = \sum_{i=0}^{m} b_i\partial_x^i,$$

где L_m – произвольный дифференциальный оператор. Валленберг доказал, что если L_1 и L_m коммутируют, то L_m обязательно полиномиально выражается через L_1. Он также рассмотрел операторы

$$L_2 = \partial_x^2 + u(x) \quad L_3 = \partial_x^3 + p(x)\partial_x + q(x)$$

и установил, что операторы

$$L_2 = \partial_x^2 + u(x) \quad L_3 = \partial_x^3 + \left(\frac{s_2}{4} + \frac{3}{2}u(x)\right)\partial_x + \frac{3}{4}u'(x)$$

коммутируют тогда и только тогда, когда

$$\left(u'(x)\right)^2 + 2u^3(x) + s_2u^2(x) + s_1u(x) + s_0 = 0, \quad s_i \in \mathbb{C}.$$

Это были первые примеры коммутирующих операторов, не являющиеся полиномами от третьего оператора.
Шур, вдохновленный работами Валленберга, тоже стал изучать коммутирующие дифференциальные операторы. Он рассмотрел три оператора L_n, L_m и L_k, где порядок $ord(L_m) \geqslant 1$, и доказал, что если L_n коммутирует с L_m, а L_m коммутирует с L_k, то L_n коммутирует с L_k. Данный факт совсем не очевиден. Например, для матриц аналог леммы Шура неверен. Лемма Шура показывает, что множество операторов коммутирующих с данным нетривиальным дифференциальным оператором образует коммутативное кольцо.

В 1920-х годах Бурхналл-Чаунди доказали, что если два дифференциальных оператора

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} u_i(x)\partial_x^i, \quad L_m = \sum_{i=0}^{m} v_i(x)\partial_x^i$$

коммутируют, то существует полином $R(z, w)$ такой, что $R(L_n, L_m) = 0$. Кривая Γ, определенная соотношением $R(z, w) = 0$, называется *спектральной кривой*. Если

$$L_n\psi = z\psi, \quad L_m\psi = w\psi,$$

то $(z, w) \in \Gamma$. Для почти всех $(z, w) \in \Gamma$ размерность пространства общих собственных функций ψ одна и та же. Размерность пространства общих собственных функций двух коммутирующих дифференциальных операторов называется *рангом.* Ранг является общим делителем порядков операторов m и n. Род спектральной кривой иногда называют родом коммутирующей пары.

Лакс заметил, что многие нелинейные уравнения математической физики эквивалентны условию коммутации некоторых дифференциальных операторов. То есть, если мы будем уметь явно находить коэффициенты коммутирующих дифференциальных операторов, то мы сможем находить решения уравнений математической физики.

Также интересны коммутирующие дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами. Алгебра дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами изоморфна первой алгебре Вейля. Первая алгебра Вейля обозначается как A_1. Можно рассматривать и обобщения, дифференциальные операторы от нескольких переменных с полиномиальными коэффициентами. Алгебра дифференциальных операторов от n переменных с полиномиальными коэффициентами изоморфна $n-$ой алгебре Вейля. Через A_n обозначается $n-$ая алгебра Вейля. Существует гипотеза Диксмье, которая утверждает, что гомоморфизм алгебры

$$f : A_n \to A_n$$

такой, что

$$[f(\partial_{x_i}), f(x_j)] = [\partial_{x_i}, x_j] = \delta_{ij}.$$

является автоморфизмом. Обозначим эту гипотезу, для краткости, через DC_n. А гипотезу о якобиане для $\mathbb{C}^n$ обозначим JC_n. Канель-Белов с Концевичем в, и независимо от них, Тсушимото доказали, что из DC_n следует JC_n, а из JC_{2n} следует DC_n. То есть гипотеза Диксмье и гипотеза о якобиане стабильно эквивалентны. Примеры коммутирующих дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами могут помочь сравнить эндоморфизмы алгебр Вейля с их автоморфизмами. Тем самым, поиск примеров коммутирующих дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами является важной и сложной задачей.

Коэффициенты коммутирующих операторов ранга 1 явно выражаются через тэта-функции Римана. Случай ранга больше 1 значительно сложней. Первые примеры коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2 со спектральной кривой рода $g = 1$ были построены Диксмье для невырожденной эллиптической кривой $w^2 = z^3 - \alpha$ с произвольным числом α:

$$L = (\partial_x^2 + x^3 + \alpha)^2 + 2x,$$

$$M = (\partial_x^2 + x^3 + \alpha)^3 + 3x\partial_x^2 + 3\partial_x + 3x(x^2 + \alpha),$$

где L и M – коммутирующая пара операторов Диксмье ранга 2 рода 1. Общая классификация коммутирующих операторов ранга больше единицы была получена Кричевером. Общая форма коммутирующих операторов ранга 2 для произвольной эллиптической кривой была получена Кричевером и Новиковым. Общий вид операторов ранга 3 для произвольной эллиптической кривой был найден Моховым. Более того, примеры коммутирующих операторов рода 1 с полиномиальными коэффициентами были построены для произвольного ранга. При этом даже в тех случаях, для которых были получены явные формулы для общего вида коммутирующих операторов, задача выделения коммутирующих операторов с полиномиальными коэффициентами является нетривиальной и полностью не решена до сих пор. Задача полного описания коммутирующих операторов с полиномиальными коэффициентами была поставлена и рассмотрена Моховым. В частности, задача описания всех коммутирующих операторов ранга 2 и рода 1 с полиномиальными коэффициентами рассматривалась Моховым, где было получено много явных примеров. Миронов построил примеры коммутирующих операторов L и M ранга 2 и произвольного рода g:

$$L = (\partial_x^2 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0)^2 + g(g+1)A_3x,$$

$$M^2 = L^{2g+1} + a_{2g}L^{2g} + ... + a_1L + a_0,$$

где A_i – произвольные константы, $A_3 \neq 0$, a_i – некоторые константы.

Кроме того, Мироновым было доказано, что

$$L_1 = (\partial_x^2 + \alpha_1\mathcal{P}(x) + \alpha_0)^2 + \alpha_1 g_2 g(g+1)\mathcal{P}(x), \quad \alpha_1 \neq 0,$$

$$M_1^2 = L_1^{2g+1} + a_{2g}L_1^{2g} + ... + a_1L_1 + a_0,$$

где $\mathcal{P}$ удовлетворяет уравнению

$$(\mathcal{P}'(x))^2 = g_2\mathcal{P}^2(x) + g_1\mathcal{P}(x) + g_0, \quad g_2 \neq 0,$$

—коммутирующая пара ранга 2, рода g.

В той же работе доказано, что

$$L_2 = (\partial_x^2 + \alpha_1\wp(x) + \alpha_0)^2 + s_1\wp(x) + s_2\wp^2(x),$$

$$M_2^2 = L_2^{2g+1} + b_{2g}L_2^{2g} + ... + b_1L_2 + b_0,$$

где $\wp(x)$ - эллиптическая функция Вейерштрасса, $\alpha_1 = \frac{1}{4} - 2g^2 - 2g$, $s_1 = \frac{1}{4}g(g+1)(16\alpha_0 + 5g_2)$, $s_2 = -4g(g+2)(g^2-1)$, тоже коммутирующая пара ранга 2, рода g. Примеры коммутирующих операторов произвольного рода и произвольного ранга с полиномиальными коэффициентами были построены Моховым.

Миронов и Жеглов доказали, что для произвольного $m \in \mathbb{N}$ и произвольной спектральной кривой Γ вида $w^2 = z^3 + c_2z^2 + c_1z + c_0$ существуют полиномы

$$V_m = \alpha_{m+2}x^{m+2} + ... + \alpha_0, \quad W_m = \beta_m x^m + ... + \beta_0,$$

что оператор

$$L_{4,m} = (\partial_x^2 + V_m)^2 + W_m$$

коммутирует с оператором $L_{6,m}$ порядка 6. И спектральная кривая пары $L_{4,m}, L_{6,m}$ совпадают с Г.

В диссертации исследуются коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2. Найдены новые примеры коммутирующих операторов ранга 2 со спектральной кривой произвольного рода. В некоторых частных случаях найдены их общие собственные функции, которые выражаются через функции Бесселя и Гойна. Это единственные, явно найденные, собственные функций у пары коммутирующих операторов с полиномиальными коэффициентами с неособой спектральной кривой. Рассмотрим дифференциальный оператор $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$ и дифференциальный оператор M порядка $4g+2$. Найдены необходимые условия на функцию $u(x)$, а в некоторых случаях и достаточные, чтобы оператор L_4 коммутировал с оператором M и они образовывали бы пару ранга 2.

Цели работы

Найти явно примеры коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2 с полиномиальными коэффициентами. Вычислить собственные функции некоторых найденных коммутирующих операторов со спектральной кривой рода 1 в точках ветвления. Найти примеры операторов вида $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$, где L_4 коммутирует с оператором M порядка $4g + 2$ и операторы L_4 и M образуют пару ранга 2.

Научная новизна

Все результаты работы являются новыми, получены автором самостоятельно. В диссертации получены следующие основные результаты:

- Найдены новые коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2 со спектральной кривой произвольного рода.

• Вычислены собственные функции некоторых найденных коммутирующих операторов со спектральной кривой рода 1 в точках ветвления.

• Найдены необходимые, а в некоторых случаях и достаточные условия на функцию $u(x)$, что $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$ коммутирует с оператором M порядка $4g+2$ и операторы L_4 и M образуют пару ранга 2 рода g.

Основные методы исследования

В диссертации используются фундаментальные результаты теории коммутирующих операторов, классификация коммутирующих операторов, полученная Кричевером, результаты Миронова по самосопряженным коммутирующим операторам ранга 2.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа имеет теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы для поиска новых решений уравнений математической физики. Результаты диссертации также могут помочь в доказательстве или опровержении гипотезы Диксмье.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались автором на следующих семинарах и общеуниверситетских, всероссийских и международных конференциях.

• Международная конференция «Recent Advances in Complex Differential Geometry», Toulouse, France, July 13–22, 2016

Постер «Commuting differential operators».

• Конференция «Ломоносов - 2016», Московский государственный университет, Москва, Апрель 11-15, 2016

Доклад «Матричные коммутирующие дифференциальные операторы».

• Международная конференция «Integrability in algebra, geometry and physics: new trends», Switzerland, July 13–17, 2015

Постер «New commuting differential operators of rank 2 and arbitrary genus».

• Конференция «Ломоносов - 2015», Московский государственный университет, Москва, Апрель 13-17, 2015

Доклад «Коммутирующие дифференциальные операторы».

• Международная конференция «Дни геометрии в Новосибирске — 2014», Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 24 — 27 сентября, 2014, Новосибирск

Доклад «Коммутирующие дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами».

• Конференция «Ломоносов - 2014», Московский государственный университет, Москва, Апрель 7-11, 2014

Доклад «Коммутирующие дифференциальные операторы».

• Международная конференция «Вероятность, анализ и геометрия», МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва, 30 сентября - 4 октября 2014

Доклад «Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2».

• Международная конференция «Геометрия и анализ на метрических структурах», Новосибирск, Россия, 4-7 декабря, 2013.

Доклад «Конечнозонные эллиптические потенциалы оператора Шредингера».

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 5 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения и двух глав, разбитых на параграфы, списка литературы и списка публикаций автора. Общий объем диссертации составляет 60 страниц. Список литературы включает 32 наименования.

Краткое содержание работы

Во введении дано краткое изложение содержания диссертации и даны базовые определения.

В главе 1 приводятся основные определения и обозначения используемые в работе. В частности, определяются понятия спектральной кривой, ранга коммутирующей пары операторов, функции Бейкера-Ахиезера и кратко изложена классификация коммутирующих операторов ранга больше 1, полученная Кричевером. Приводятся недавние результаты и продвижения, полученные как автором так и другими математиками.

Основные результаты автора изложены во второй главе диссертации. В первом параграфе второй главы получены новые примеры коммутирующих операторов ранга 2 с полиномиальными коэффициентами для гиперэллиптических спектральных кривых произвольного рода. В первом параграфе доказаны следующие три теоремы.

Теорема 2.1 *Оператор* $L = (\partial_x^2 + A_6x^6 + A_2x^2)^2 + 16g(g+1)A_6x^4$*, где* $g \in \mathbb{N}$*,* $A_6 \neq 0$*, а* A_2 *– произвольное число, коммутирует с некоторым дифференциальным оператором* M *порядка* $4m+2$ *при любом* $m \geqslant g$*. Пара операторов* L, M *имеет ранг 2, а ее спектральная кривая имеет вид* $w^2 = z^{2m+1} + a_{2m}z^{2m} + \ldots + a_1z + a_0$.

Теорема 2.2 *Оператор* $L = (\partial_x^2 + A_4x^4 + A_2x^2 + A_0)^2 + 4g(g+1)A_4x^2$*, где* $g \in \mathbb{N}$*,* $A \neq 0$ *и* A_2, A_0 *– произвольные числа, коммутирует с некоторым дифференциальным оператором* M *порядка* $4m+2$ *при любом* $m \geqslant g$*. Пара операторов* L, M *имеют ранг 2, а ее спектральная кривая имеет вид* $w^2 = z^{2m+1} + a_{2m}z^{2m} + \ldots + a_1z + a_0$.

Теорема 2.3

1) *Если* $L = (\partial_x^2 + A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_0)^2 + B_k x^k + B_{k-1}x^{k-1} + ... + B_0$, где $n > 3$, $n \in \mathbb{N}$, $A_n \neq 0$, $B_k \neq 0$, *коммутирует с оператором* M *порядка* $4g+2$ *и пара* M, L *имеет ранг 2, то* $k = n-2$ и $B_k = (n-2)^2 m(m+1)A_n$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

2) *Если* $L = (\partial_x^2 + Ax^n)^2 + Bx^{n-2}$, $A \neq 0, B \neq 0$, *то при* $n > 6$, $n \in \mathbb{N}$, *не существует дифференциального оператора* M *порядка* $4g+2$, *коммутирующего с* L, *такого, что пара* M, L *имела бы ранга 2.*

3) *Если* $n = 5$, *то оператор* $L = (\partial_x^2 + Ax^5)^2 + 18Ax^3$, $A \neq 0$, *коммутирует с оператором* M *порядка* $4g+2$ *для любого* g *и* M, L *– пара операторов ранга 2.*

4) *Оператор* $L = (\partial_x^2 + Ax^5)^2 + 9m(m+1)Ax^3$ *при* $m > 1$, $A \neq 0$, *не коммутирует ни с каким оператором* M *порядка* $4g+2$, *с которым он образовывал бы пару ранга 2.*

Отметим, что как показывают выкладки, в случае рода меньше 9 при $m = g$ спектральная кривая пары операторов из теоремы 2.1 невырожденна для любого ненулевого A_6 и почти всех A_2. Аналогично, у пары операторов из теоремы 2.2 для почти всех A_2, A_0 спектральная кривая является невырожденной для $m = g < 9$.

Во втором параграфе второй главы явно найдены общие собственные функции коммутирующих операторов из первого параграфа в случае рода 1 и 2 в точках ветвления. Напомним некоторые определения. Функциями Бесселя J_α называют решения следующего уравнения

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0.$$

Если α не целое число, то уравнение Бесселя удовлетворяется двумя независимыми решениями J_α, $J_{-\alpha}$, где

$$J_\alpha(x) = \frac{x^\alpha}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)} \left(1 - \frac{x^2}{2^2 1!(\alpha+1)} + \frac{x^4}{2^4 2!(\alpha+2)} - ...\right).$$

Если α целое число, то $J_{\pm\alpha}$ перестают быть независимыми. Функции

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{sin(\alpha\pi)}$$

называют функциями Бесселя второго рода.

Функциями Гойна $H(a, q, \alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ называют решения уравнения

$$y''(x) + \left(\frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x-1} + \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta+1}{x-a}\right) y'(x) + \frac{\alpha\beta x - q}{x(x-1)(x-a)} y(x) = 0.$$

Данное уравнение имеет 4 регулярные особые точки $0, 1, a, \infty$. Конфлюэнтным уравнением Гойна называется уравнение Гойна после процедуры конфлюэнции, при которой сливаются точки $x = a$ и $x = \infty$. Через $CH(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; x)$ обозначим решение конфлюэнтного уравнения

$$y''(x) + \left(\frac{\beta+\gamma-\alpha+2}{x-1} + \frac{x\alpha}{x-1} - \frac{\beta+1}{x(x-1)}\right) y'(x) +$$
$$+ \left(\frac{\alpha(\beta+\gamma+2)+2\delta}{2(x-1)} - \frac{\alpha(\beta+1) - \beta(\gamma+1) - 2\eta - \gamma}{2x(x-1)}\right) y(x) = 0$$

с начальными условиями

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{\beta(\gamma-\alpha+1) + \gamma - \alpha + 2\eta}{2(\beta+1)}.$$

Нам известно, что $L = (\partial_x^2 + Ax^6 + Bx^2)^2 + 16g(g+1)Ax^4$ коммутирует с неким оператором порядка $4g+2$. Мы знаем, что при $g = 1$ и $B = 0$ спектральная кривая коммутирующей пары и уравнение на общие собственные функции имеют вид

$$\begin{gathered} w^2 = z(192A + z^2), \\ \psi'' - \frac{64Ax^3}{16Ax^4 + z}\psi' - \left(\frac{w - 96Ax^2}{16Ax^4 + z} - Ax^6\right)\psi = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Утверждение 2.4.

Пусть $z = 0, \pm\sqrt{-192A}$, тогда $w = 0$. Если $z = 0$, то общими собственными функциями, то есть решениями (1) будут

$$x^{\frac{5}{2}} J_{\frac{1}{8}} \left(\frac{x^4\sqrt{A}}{4} \right), \quad x^{\frac{5}{2}} Y_{\frac{1}{8}} \left(\frac{x^4\sqrt{A}}{4} \right).$$

Если $z = \pm\sqrt{-192A}$, то общими собственными функциями будут

$$e^{-\frac{Ax^4}{4\sqrt{-A}}} CH \left(\frac{z}{32\sqrt{-A}}, -\frac{1}{4}, -2, 0, \frac{5}{4}, -\frac{16Ax^4}{z} \right),$$
$$x e^{-\frac{Ax^4}{4\sqrt{-A}}} CH \left(\frac{z}{32\sqrt{-A}}, \frac{1}{4}, -2, 0, \frac{5}{4}, -\frac{16Ax^4}{z} \right).$$

Рассмотрим общие собственные функции при $g = 2$. В этом случае спектральная кривая имеет вид $w^2 = z(20160A + z^2)(20736A + z^2)$. Уравнением на собственные функции, при $z = 0$, является уравнение

$$(4Ax^8 + 35)\psi'' - 32Ax^7\psi' + (147Ax^6 + 4A^2x^{14})\psi = 0. \qquad (2)$$

Утверждение 2.5.

При $z = 0, w = 0$ общими собственными функциями, то есть решениями (2) будут

$$CH(0, -\frac{1}{8}, -2, -\frac{35}{256}, \frac{387}{256}, -\frac{4Ax^8}{35}),$$
$$xCH(0, \frac{1}{8}, -2, -\frac{35}{256}, \frac{387}{256}, -\frac{4Ax^8}{35}).$$

В третьем параграфе второй главы рассмотрен оператор $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$. Допустим, что $u(x)$ имеет изолированные полюса в точках $a_1, a_2, ...$. Пусть в окрестности точки a_i ряд Лорана функции $u(x)$ имеет вид

$$u(x) = \frac{\varphi_{i,-k}}{(x-a_i)^k} + \frac{\varphi_{i,-k+1}}{(x-a_i)^{k-1}} + ... + \varphi_{i,0} + \varphi_{i,1}(x-a_i) + O((x-a_i)^2).$$

Верны следующие теоремы:

Теорема 2.5 *Если* $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$ *и дифференциальный оператор* M *порядка* $4g+2$ *образуют пару коммутирующих операторов ранга 2, то* $u(x)$ *может иметь изолированный полюс порядка не более* 4, $\varphi_{i,-4} = n_i(4n_i+1)(4n_i+3)(4n_i+4)$, $n_i \in \mathbb{N}$, $\varphi_{i,4k-l} = 0$, *где* $k = 0, ..., n_i$, $l = 1, 2, 3$. *Также* $\varphi_{i,4r-1} = \varphi_{i,4r-3} = 0$, *где* $r = n_i + 1, ..., g$. *Функция* $u(x)$ *не может иметь изолированного полюса в бесконечности.*

Следствие 2.6 *Предположим, что* $u(x)$ *— эллиптическая, периодическая или рациональная функция и не имеет изолированной особенности в бесконечности. Пусть* a_1 *— единственный полюс в фундаментальном параллелограмме, в периодической ленте или на комплексной плоскости соответственно. Тогда оператор* $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$ *и оператор* M *порядка* $4g+2$ *образуют пару ранга 2 тогда и только тогда, когда* $\varphi_{1,-4} = g(4g+1)(4g+3)(4g+4)$, $\varphi_{1,4k-l} = 0$, *где* $k = 0, ..., g$, $l = 1, 2, 3$.

Следствие 2.7 *Допустим, что* $\wp(x)$ *— эллиптическая функция Вейерштрасса, удовлетворяющая уравнению* $(\wp'(x))^2 = 4\wp^3(x) + g_2\wp(x) + g_3$. *Тогда оператор*

$$L_4 = \partial_x^4 + n(4n+1)(4n+3)(4n+4)\wp^2(x),$$

где $n \in \mathbb{N}$, *коммутирует с оператором порядка* $4n+2$ *тогда и только тогда, когда* $g_3 = 0$. *Из вычислений видно, что для* n *меньших* 8 *спектральная кривая является гладкой для почти всех* g_2.

Пример 2.8 *Допустим, что* $\wp(x)$ *— эллиптическая функция Вейерштрасса, удовлетворяющая уравнению* $(\wp'(x))^2 = 4\wp^3(x) + g_2\wp(x) + g_3$. *Рассмотрим оператор*

$$L_4 = \partial_x^4 + 280\wp^2(x) + 280\wp^2(x-a).$$

Предположим, что $g_3 = 0$ *и* $a = \omega_1$, ω_2 *или* $\omega_1 + \omega_2$, *где* ω_i *— полупериоды. Тогда* L_4 *коммутирует с оператором порядка* 6.

Теорема 2.9 *Пусть* L_4 *и оператор* M *порядка* $4g+2$ *образуют пару коммутирующих операторов ранга* 2. *Пусть функция* $u(x)$ *имеет изолированный полюс в точке* a_i. *Тогда решения уравнения* $\psi^{(4)}(x)+u(x)\psi(x)=\lambda\psi(x)$ *имеют особенности в точках* a_i *следующего вида* $x^{\sigma_{i,r}}g(x)$, *где* $r=1,2,3,4$ *и* $g(x)$ *голоморфная функция в окрестности* a_i,
$\sigma_{i,1}=\frac{1}{2}(1-4n_i-\sqrt{1-16n_i-16n_i^2})$
$\sigma_{i,2}=\frac{1}{2}(1-4n_i+\sqrt{1-16n_i-16n_i^2})$
$\sigma_{i,3}=\frac{1}{2}(5+4n_i-\sqrt{1-16n_i-16n_i^2})$
$\sigma_{i,4}=\frac{1}{2}(5+4n_i+\sqrt{1-16n_i-16n_i^2})$.
То есть собственные функции всегда имеют точки ветвления. Следовательно, L_4 *не коммутирует с оператором нечетного порядка так как общие собственные функции операторов взаимно простого порядка всегда мероморфны.*

Заключение

В этом разделе мы опишем возможные обобщения полученных в работе результатов и направления дальнейших исследований.

1. Если проанализировать доказательство теоремы 2.1, 2.2 и 2.3, то можно выдвинуть следующую гипотезу

Гипотеза. *Если оператор*

$$L=(\partial_x^2+A_nx^n+...+A_0)+B_{n-2}x^{n-2}+...+B_0,\quad A_n\neq 0, n\in\mathbb{N}$$

коммутирует с оператором M *порядка* $4g+2$, $g>1$, *то* $n\leqslant 6$.

При попытке построить оператор M мы получим систему алгебраических уравнений, где уравнений намного больше чем переменных. Из этих систем видно, что они наверняка не имеют решений.

2. Было бы интересно узнать каким спектральным кривым соответствуют коммутирующие операторы с полиномиальными или рациональными коэффициентами. На данный момент известно, что любая эллиптическая кривая вида

$$w^2 = z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

является спектральной кривой пары коммутирующих операторов ранга 2 с полиномиальными или рациональными коэффициентами. Также известно, что любая гиперэллиптическая кривая вида

$$w^2 = z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

является спектральной кривой пары операторов ранга 2 с рациональными коэффициентами.

3. Необходимо найти эффективные методы поиска несамосопряженных операторов ранга 2.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Мохову Олегу Ивановичу за постановку задач, помощь и постоянное внимание к работам.

Автор также выражает благодарность Миронову Андрею Евгеньевичу за внимание, помощь и советы.

Автор благодарит Глухова Евгения за очень важные комментарии, существенно улучшившие текст работы.

Список публикаций

[1] Оганесян В.С. Об операторах вида $\partial_x^4 + u(x)$ из коммутирующей пары дифференциальных операторов ранга 2 рода g //Успехи математических наук, 71:3(429) (2016), 201–202.

[2] Oganesyan V. Explicit characterization of some commuting differential operators of rank 2 //International Mathematics Research Notices (2016), doi:10.1093/imrn/rnw085.

[3] Оганесян В.С. Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2 с полиномиальными коэффициентами //Функциональный анализ и его приложения, 50:1 (2016), 67–75.

[4] Оганесян В.С. Общие собственные функции коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2 //Математические заметки, 99:2 (2016), 283–287.

[5] Оганесян В.С. Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2 произвольного рода g с полиномиальными коэффициентами //Успехи математических наук, 70:1(421) (2015), 179–180.