МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 519.216.22 517.987.4

Романов Евгений Дмитриевич

КВАЗИИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

Специальность 01.01.01 —
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Шавгулидзе Евгений Тенгизович**

Официальные оппоненты: **Сакбаев Всеволод Жанович,** доктор физико-математических наук, доцент, Московский физико-технический институт, кафедра высшей математики.

Досовицкий Алексей Алексеевич, кандидат физико-математических наук, Фрайбургский университет имени Альберта и Людвига (Германия), технический факультет, научный сотрудник.

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского»

Защита состоится 23 декабря 2016 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 1624.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова (г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А) и на сайте механико-математического факультета http://mech.math.msu.su.

Автореферат разослан «   » ноября 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85,
доктор физико-математических наук,
профессор Власов Виктор Валентинович

Общая характеристика работы

Настоящая диссертация посвящена построению нового семейства мер, квазиинвариантных относительно действия группы гладких диффеоморфизмов конечномерного евклидова пространства, и получению на их основе серии унитарных неэквивалентных представлений указанной группы, в том числе неприводимых.

Квазиинвариантные меры строятся посредством переноса меры Винера на внешнее по отношению к группе функциональное пространство. Такой подход даёт возможность получить явное аналитическое выражение для производной Радона—Никодима образа меры относительно исходной под действием группы диффеоморфизмов. Использование конструкции стохастического интеграла позволяет выразить эту производную в инвариантной форме для более широкого, в смысле гладкости, класса диффеоморфизмов.

Наличие квазиинвариантной меры, для которой известна соответствующая производная Радона—Никодима, позволяет построить унитарные представления группы диффеоморфизмов в пространстве функций, квадратично-интегрируемых по этой мере. В одномерном случае для группы гладких диффеоморфизмов полупрямой с некоторыми дополнительными ограничениями на значение диффеоморфизмов в нуле предъявляется доказательство неприводимости и неэквивалентности таких представлений.

Актуальность темы.

Одним из активно разрабатываемых направлений в теории представлений является изучение представлений бесконечномерных групп. С математической точки зрения интерес к этому направлению обусловлен желанием в том или ином виде обобщить на бесконечномерные группы богатые и глубоко разработанные результаты, относящиеся к конечномерным группам Ли или же к методам гармонического анализа. Так, в частности, группы петель[1] наследуют многие свойства локально компактных групп. С другой стороны, этот интерес обусловлен влиянием математической физики: в квантовой теории поля возникают калибровочные группы и группы токов, которые лишь в некоторых частных или модельных случаях могут быть сведены к относительно хорошо изученным группам петель.

На данный момент достаточно хорошо разработана часть топологической алгебры, посвященная структуре и представлениям локально компактных групп. Одним из активно используемых инструментов для этого случая является конструкция меры Хаара, которая инвариантна при левых или правых сдвигах, порожденных элементами группы. Но из обрат-

[1] А. Пресли, Г. Сигал, *Группы петель*, Мир, М., 1990

ной теоремы Вейля[2] следует, что существование нетривиальной неотрицательной меры, лево (или право) квазиинвариантной относительно всей топологической группы, влечет ее локальную компактность. Следовательно, этот метод не может быть напрямую обобщён для изучения представлений групп, не являющихся локально компактными, в частности для группы диффеоморфизмов. Стоит отметить, что для группы диффеоморфизмов окружности существуют примеры мер, квазиинвариантных относительно действия диффеоморфизмов более высокой гладкости.

Другим подходом к исследованию представлений бесконечномерных групп является метод орбит. Как отмечает А.А. Кириллов[3], этот подход позволяет получить результаты для случаев конечной их размерности или коразмерности, однако для общего случая не работает. Проблема состоит в отсутствии квазиинвариантных мер, из-за чего оказывается неприменим один из главных инструментов теории представлений в случае локально компактных групп, а именно метод индуцированных представлений. Однако, в некоторых частных случаях такие меры удаётся построить.

Первые работы по исследованию мер, квазиинвариантных под действием групп диффеоморфизмов различных многообразий, относятся к началу 1970-х годов и представлены в статьях Р.С. Исмагилова[4,5,6,7,8]. В работе [4] строится мера на пространстве сходящихся подпоследовательностей окружности, доказывается её инвариантность относительно действия группы диффеоморфизмов окружности, а так же неприводимость соответствующих унитарных представлений. В работах [5,6] похожие идеи обобщаются на группу диффеоморфизмов компактного многообразия. В статьях [7,8] вводится пуассоновская мера на пространстве конфигураций в $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, с помощью которой исследуются представления группы тождественных вне компакта диффеоморфизмов.

Другой подход по изучению мер на пространстве конфигураций (т.е. локально конечных подмножеств) некомпактного многообразия представ-

---

[2] A. Weil, *L'integrtion dans les groupes topologiques et ses applications*, Actual. Scient. et Ind., V. 869, Paris: Herman, 1940

[3] A.A. Kirillov, *Infinite dimensional groups, their representations, orbits, invariants*, Proc. Intern. Congr. of Math. (Helsinki, 1978), Helsinki, 1980, p. 705–708

[4] Р.С. Исмагилов, *Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов окружности*, Функциональный анализ и приложения, 5, N. 3, 1971, с. 45–53

[5] Р.С. Исмагилов, *Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов компактного многообразия*, Функциональный анализ и приложения, 6, N. 1, 1972, с. 79–80

[6] Р.С. Исмагилов, *Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов компактного многообразия*, Известия Академии Наук СССР, Серия математическая, 36, 1972, с. 180–208

[7] Р.С. Исмагилов, *Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов пространства* $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $\mathrm{n} \geq 2$, Функциональный анализ и приложения, 9, N. 2, 1975, с. 71–72

[8] Р.С. Исмагилов, *Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов пространства* $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $\mathrm{n} \geq 2$, Математический сборник, 98(140), N. 1(9), 1975, с. 55–71

лен в статье А.М. Вершика, И.М. Гельфанда, М.И. Граева[9]; для пуассоновской меры даётся описание соответствующего кольца представлений. Различные свойства дифференцируемых мер, в частности, их изменение под действием гладких отображений, исследованы в работах О.Г. Смолянова и Г.ф. Вайцзекера[10,11,12].

Отдельным направлением исследования является изучение представлений группы диффеоморфизмов, действующих в пространстве достаточно гладких функций. Для группы диффеоморфизмов окружности различные способы получения представлений такого вида, в том числе связанные с квазиинвариантными мерами, представлены в работах Ю.А. Неретина[13,14,15,16,17,18]. Далее, квазиинвариантные меры, заданные на пространстве функций, построены в работах Е.Т. Шавгулидзе [19,20]. В статье [19] строится пример меры на пространстве непрерывных функций, квазиинвариантной относительно трижды гладких диффеоморфизмов окружности. В [20] мера строится уже на группах диффеоморфизмов конечномерных многообразий, квазиинвариантных под действием подгрупп более высокой гладкости.

[9] А.М. Вершик, И.М. Гельфанд, М.И. Граев, *Представления группы диффеоморфизмов*, Успехи математических наук, 30, N. 6, 1975, с. 3–50

[10] O.G. Smolyanov, H.v. Weizsäcker, *Differentiable Families of Measures*, Journal of Funct. An., 1993, 118, N. 2, p. 454–476

[11] O.G. Smolyanov, H.v. Weizsäcker, *Change of measures and their logarithmic derivatives undersmooth transformations*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, Math., 321, N. 1, 1995, p. 103–108

[12] O.G. Smolyanov, H.v. Weizsäcker, *Smooth probability measures and associated differential operators*, Inf. Dim. Anal. Quant. Probab., 2, N. 1, 1999, p. 51–78

[13] Ю.А. Неретин. *Дополнительная серия представлений группы диффеоморфизмов окружности*, Успехи математических наук, 37, N. 2(224), 1982, с. 213–214

[14] Ю.А. Неретин. *Унитарные представления со старшим весом группы диффеоморфизмов окружности*, Функциональный анализ и приложения, 17, N. 3. 1983, с. 85–86

[15] Yu.A. Neretin, *Holomorphic extensions of representations of the group of the diffeomorphisms of the circle*, Mat. Sb., 180:5 (1989), 635–657

[16] Yu.A. Neretin, *Some remarks on quasi-invariant actions of loop groups and the group of diffeomorphisms of the circle*, Communications in Mathematical Physics, 1994, Vol. 164, no. 3, p. 599–626

[17] Ю.А. Неретин. *Представления алгебры Вирасоро и аффинных алгебр*, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, М.: ВИНИТИ, 22, 1988, с. 163–224

[18] Yu.A. Neretin, *Categories of symmetries and infinite-dimensional groups*, Oxford, 1996

[19] Е.Т. Шавгулидзе, *Один пример меры, квазиинвариантной относительно действия группы диффеоморфизмов окружности*, Функциональный анализ и приложения, 12, N. 3, 1978, с. 55–60

[20] Е.Т. Шавгулидзе, *Об одной мере, квазиинвариантной относительно действия группы диффеоморфизмов конечномерного многообразия*, Доклады Академии Наук СССР, 303, N. 4, 1988, с. 811–814

В более поздних работах Е.Т. Шавгулидзе [21,22,23,24] реализован способ получения квазиинвариантных мер на функциональных пространствах с помощью переноса меры Винера. Примеры подобных построений даны, кроме того, в статьях П. Малявена и М.П. Малявена [25,26]; далее, в статье А.В. Косяка [27] рассматриваются представления группы диффеоморфизмов окружности на основе мер типа Шавгулидзе. Суть метода состоит в построении биекции, которая позволяет перенести винеровскую меру на интересующее пространство функций. В частности, в работе [22] строится отображение в пространство всех гладких диффеоморфизмов отрезка, сохраняющих концы на месте. В дальнейшем данный подход развивался различными авторами. Так, в статье П.А. Кузьмина [28] доказывается квазиинвариантность мер Шавгулидзе относительно более широкого, в смысле гладкости, класса диффеоморфизмов, а в работе А.А. Досовицкого [29] развивается данный метод построения квазиинвариантных мер для случая кусочно-гладких диффеоморфизмов и доказывается неприводимость соответствующей серии унитарных и попарно неэквивалентных представлений.

Все вышесказанное определяет актуальность темы диссертации.

Целью данной работы является построение нового семейства мер, квазиинвариантных относительно действия группы диффеоморфизмов конечномерного евклидова пространства и построение на их основе серии унитарных неприводимых представлений указанной группы, действующих в пространствах функций, квадратично-интегрируемых по этим мерам.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

[21] Е.Т. Шавгулидзе, *Распределения на бесконечномерных пространствах и вторичное квантование в струнных теориях*, V международная Вильнюсская конференция по теории вероятносткй и математической статистике. Июнь 1989: тезисы кратких сообщений. Вильнюс, 1990. с. 359–360

[22] Е.Т. Шавгулидзе, *Квазиинвариантные меры на группах диффеоморфизмов*, Труды МИАН им. Стеклова, 217, 1997, с. 189–208

[23] E.T. Shavgulidze, *Some Properties of Quasi-Invariant Measures on Groups of Diffeomorphisms of the Circle*, Russ. J. Math. Phys., 7, N. 4, 2000, p. 464–472

[24] E.T. Shavgulidze, *Properties of the convolution operation for quasi-invariant measures on groups of diffeomorphisms of a circle*, Russ. J. Math. Phys., 8, N. 4, 2001, p. 495–498

[25] M.P. Malliavin, P. Malliavin, *Measures quasi invariantes sur certain groupes de dimension infini*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. 1, 311, 1990, p. 765–768

[26] M.P. Malliavin, P. Malliavin, *Integration on loop groups. I. Quasi invariant measures*, Journal of Functional Analysis, 93, N. 1, 1990, p. 207–237

[27] A.V. Kosyak, *Irreducible Regular Gaussian Representations of the Groups of the Interval and Circle Diffeomorphisms*, Journal of Functional Analysis, 125, 1994, p. 493–547

[28] P.A. Kuzmin, *On circle diffeomorphisms with discontinuous derivatives and quasi-invariancc subgroups of Malliavin-Shavguhdze measures*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 330, 2007, p. 744–750

[29] A. A. Dosovitskii, *Quasi-Invariant Measures on Sets of Piecewise Smooth Homeomorphisms of Closed Intervals and Circles and Representations of Diffeomorphism Groups*, Russ. J. Math. Phys., 18, N. 3, 2011, p. 258–296

1. Построено новое семейство мер, квазиинвариантных относительно действия подгрупп достаточно гладких диффеоморфизмов в $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$. Существенным отличием от существующих конструкций является получение результата для размерности $\mathrm{d} > 1$.
2. Построена серия унитарных представлений указанной группы диффеоморфизмов. Предъявлены необходимые условия непрерывности и неприводимости таких представлений.
3. Для построенных мер предъявлена явная аналитическая форма производной Радона—Никодима. Использование стохастического интеграла Ито позволило сформулировать результат в инвариантной форме для более широкого, в смысле гладкости, класса диффеоморфизмов.
4. Доказана неприводимость получаемых представлений для случая действия группы диффеоморфизмов полупрямой с дополнительными ограничениями на значения диффеоморфизмов в нуле. Указано разбиение на классы заведомо неэквивалентных представлений.
5. Развит подход к доказательству неприводимости представлений группы диффеоморфизмов для случая, когда соответствующая производная Радона—Никодима может быть выражена через стохастический интеграл Ито.

Методы исследования. В работе развивается вышеописанный подход Е.Т. Шавгулидзе к получению квазиинвариантных мер на основе меры Винера и доказательству индуцируемых ими представлений. Ключевой особенностью является использование аппарата стохастического интегрирования, что позволяет, во-первых, сформулировать результат для более широких, в смысле гладкости, групп диффеоморфизмов и, во-вторых, естественным образом воспользоваться результатами эргодической теории при доказательстве неприводимости порождаемых квазиинвариантными мерами представлений.

Отдельно стоит сказать о деталях использовании аппарата стохастического исчисления. Естественность его применения сразу следует из использования меры Винера в качестве основы для построения новых мер. Если обходиться без него, то, грубо говоря, потребовав более сильные ограничения на гладкость, интеграл Ито можно свести к обычному интегралу Лебега, проведя интегрирование по частям. Такой подход реализован, например, в приведённой выше статье А.А. Досовицкого, и влечёт за собой необходимость последующего доказательства ряда технических лемм, в которых для соответствующего оператора представления снимаются ограничения на гладкость.

Несмотря на то, что данный подход позволяет получать доказательства с меньшим числом технических выкладок, он имеет свои ограничения. Например, существующий аппарат хорошо развит лишь для небольшого класса функций, вычисляемых от траекторий Винеровского процесса, а именно для так называемых предсказуемых (то есть не зависящих от будущего). Кроме того, такие результаты как формула Ито общеизвестны для функций, зависящих лишь от значения винеровского процесса в конкретной точке, что делает их неприменимыми, в частности, в данной работе. Однако, современные результаты стохастического анализа дают возможность применять указанную технику для всё более широкого ряда задач. Так, в статье [30] представляется операторная формулировка формулы Ито, а в работе Х.-С. Го и Ю. Пенга [31] даётся конструкция стохастического интеграла для подынтегрального выражения, которое может зависеть от конечной точки интервала интегрирования по времени.

Теоретическая и практическая значимость Работа имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы для исследования свойств группы диффеоморфизмов и построения соответствующего гармонического анализа на группе диффеоморфизмов. Методы, развитые для их получения, могут быть использованы для построения квазиинвариантных относительно группы диффеоморфизмов мер, получения соответствующих унитарных представлений и доказательства их неприводимости.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и конференциях:

– Семинар механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова «Бесконечномерный анализ и математическая физика» под руководством д.ф.-м.н., проф. О.Г. Смолянова и д.ф.-м.н., проф. Е.Т. Шавгулидзе (2011–2016 гг.)
– Семинар механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова «Тригонометрические и ортогональные ряды» под руководством д.ф.-м.н., проф. Т.П. Лукашенко, д.ф.-м.н., проф. М.И. Дьяченко, д.ф.-м.н., проф. В.А.Скворцова, д.ф.-м.н., проф. М.К. Потапова.
– XIX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (2012 г.)
– XX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (2013 г.)
– XXIII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (2016 г.)
– Вторая российско-белорусская научно-техническая конференция «Элементная база отечественной радиоэлектроники» им. О.В. Лосева на базе ННГУ им. Н.И. Лобачевского (2016 г.)

[30] R. Cont, D.-A. Fournié. *Functional Ito calculus and stochastic integral representation of martingales*, Annals of Probability, Institute of Mathematical Statistics (IMS), 2013, 41 (1), p. 109–133

[31] H.-H. Kuo, Y. Peng, B. Szozda, *Ito Formula and Girsanov Theorem for Anticipating Stochastic Integrals*, Communication on Stochastic Analysis 7, no. 3 (2013), p. 441–458

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в семи работах, три из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1, 2, 3], а четыре – в тезисах конференций [4, 5, 6, 7]. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 65 страниц. Список литературы содержит 48 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во введении обосновывается актуальность рассматриваемых задач, формулируются цели, предъявляются основные результаты и приводится исторический обзор исследований по теме работы. В первой главе диссертации предъявляется способ построения семейства квазиинвариантных мер и получения унитарных представлений на их основе. В абстрактной форме даются достаточные условия непрерывности и неприводимости представлений такого вида. Во второй главе выводится явное аналитическое выражение для соответствующей производной Радона—Никодима, необходимое для доказательства неприводимости представлений, с помощью нахождения предела конечномерных проекций. В третьей главе для одномерного случая с дополнительными ограничениями на значения диффеоморфизмов в нуле удаётся показать непрерывность и неприводимость полученных представлений. Кроме того, предъявляется разбиение на классы заведомо неэквивалентных представлений.

Опишем теперь подробно содержимое каждой из глав.

В первой главе описывается способ построения квазиинвариантных (то есть переходящих в эквивалентные при сдвиге на любой элемент группы) мер и общая конструкция соответствующих им унитарных представлений. Кроме того, предъявляются достаточные условия для непрерывности и неприводимости таких представлений. Так как конструкция семейства мер лежит в основе всех построений, приведём её здесь полностью.

Семейство мер строится на пространстве

$$\Omega = \mathrm{C}^2([0,1], \mathbb{R}^{\mathrm{d}}) \times \mathrm{C}^1([0,1], \mathbb{M}^*_{\mathrm{d}}),$$

где под $\mathbb{M}^*_{\mathrm{d}}$ понимаются невырожденные вещественнозначные матрицы размера $\mathrm{d} \times \mathrm{d}$.

В качестве действия рассматривается отображение $L_g\colon \Omega \to \Omega$, задаваемое соотношением

$$L_g\colon (x,X) \mapsto (g(x), g'(x)X),\ g \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}).$$

Если понимать матричную компоненту как координатный репер, определённый вдоль компоненты кривой, то такое действие отвечает геометрии пространства: кривая переходит в свой образ, а репер преобразуется под действием дифференциала g в соответствующей точке кривой согласно формуле замены базиса.

Для построения меры используется вспомогательное пространство

$$\Omega' = \mathrm{C}^1([0{,}1],\, \mathbb{R}^{\mathrm{d}}) \times \mathrm{C}([0{,}1],\, \mathbb{M}_{\mathrm{d}}) \times \mathbb{R}^{\mathrm{d}} \times \mathbb{M}^*_{\mathrm{d}},$$

где $\mathbb{M}_{\mathrm{d}}$ суть вещественнозначные матрицы размера $\mathrm{d} \times \mathrm{d}$.

Пусть $Z \in \mathrm{C}([0{,}1],\, \mathbb{M}_{\mathrm{d}})$, $X \in \mathrm{C}^1([0{,}1],\, \mathbb{M}^*_{\mathrm{d}})$. С точностью до мультипликативной константы решением уравнения $Z(t){=}X^{-1}(t)X'(t)$ относительно неизвестной Z является (правая) хронологическая T-экспонента $T(t) = \mathrm{Texp}\{\int\limits_0^t Z(\tau)\,d\tau\}$[32]. Таким образом, можно построить биекцию $\Phi\colon \Omega \to \Omega'$:

$$\Phi\colon (x(t),X(t)) \mapsto (X^{-1}(t)x'(t), X^{-1}(t)X'(t), x(0), X(0)),\ t \in [0{,}1].$$

Обратное отображение $\Phi^{-1}\colon \Omega' \to \Omega$ имеет вид

$$\Phi^{-1}\colon (z(t), Z(t), \hat{z}, \hat{Z}) \mapsto \left(\hat{z} + \hat{Z}\int\limits_0^t T(\tau)z(\tau)\,d\tau, \hat{Z}T(t)\right),\ t \in [0{,}1].$$

Мера μ на Ω' задаётся как $\mu_1{\otimes}\mu_2{\otimes}\mu_3{\otimes}\mu_4$. Существенной часть построения является выбор Винеровской (покомпонентно) меры со свободным концом (то есть произведение меры Лебега на начальной точке траектории и стандартной меры Винера с дисперсией σ^2) на $\mathrm{C}([0{,}1],\, \mathbb{M}_{\mathrm{d}})$ в качестве μ_2. Для того, чтобы образ был эквивалентен, можно взять в качестве μ_3 и μ_4, например, меры с борелевскими, всюду положительными плотностями ρ_3 и ρ_4 соответственно. В качестве μ_1 в силу равенства $u(t) = z(t)$ берётся произвольная радонова мера. Таким образом, задавая меру μ на Ω', получаем меру ν на Ω с помощью биекции Φ. Ясно, что построенная таким образом мера квазиинвариантна. Однако, для исследования представлений на основе квазиинвариантной меры потребуется явный вид соответствующей производной Радона—Никодима.

Определим индуцированное действие $L'_g\colon \Omega' \to \Omega'$ как $L'_g = \Phi^{-1} \circ L_g \circ \Phi$. Для $g \in \mathrm{Diff}^2(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$ действие L'_g можно представить в виде:

$$L'_g\colon (z(t), Z(t), \hat{z}, \hat{Z}) \mapsto (z(t), Z(t) + Q(t), g(\hat{z}), g'(\hat{z})\hat{Z}),\ t \in [0{,}1],$$

где $Q(t) = X(t)^{-1}[g'(x(t))]^{-1}[\frac{d}{dt}g'(x(t))]X(t)$, или, в переменных Ω',

$$Q(t) = (\hat{Z}T(t))^{-1}[g'(\hat{z} + \hat{Z}\int\limits_0^t T(\tau)z(\tau)\,d\tau)]^{-1}[\tfrac{d}{dt}g'(\hat{z} + \hat{Z}\int\limits_0^t T(\tau)z(\tau)\,d\tau)]\hat{Z}T(t).$$

[32] A.A. Agrachev, R.V. Gamkrelidze, *The exponential representation of flows and the chronological calculus*, Math. USSR-Sb., 35:6 (1979), p. 727–785

Обозначим через μ_g образ меры μ под действием L'_g. По построению $\frac{d\mu^g}{d\mu} = \frac{d\mu_1^g}{d\mu_1}\frac{d\mu_2^g}{d\mu_2}\frac{d\mu_3^g}{d\mu_3}\frac{d\mu_4^g}{d\mu_4}$. В силу инвариантности L'_g на первой компоненте $\frac{d\mu_1^g}{d\mu_1} = 1$, $\frac{d\mu_3^g}{d\mu_3}$ и $\frac{d\mu_4^g}{d\mu_4}$ легко считаются для конкретного выбора конечномерной меры: например, для указанного выбора мер μ_3 и μ_4 имеем $\frac{d\mu_3^g}{d\mu^3}(\hat{z}) = \frac{\rho^3(g(\hat{z}))}{\rho^3(\hat{z})}|g'(\hat{z})|$, $\frac{d\mu_4^g}{d\mu^4}(\hat{z},\hat{Z}) = \frac{\rho^4(g'(\hat{z})\hat{Z})}{\rho^4(\hat{Z})}|g'(\hat{z})|$. Вторая глава посвящена нахождению явного вида для $\frac{d\mu_2^g}{d\mu_2}$.

Следующий раздел первой главы описывает способ построения унитарных представлений на основе квазиинвариантных мер. В данном случае речь идёт о представлениях подгрупп достаточно гладких диффеоморфизмов в $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$, реализуемых в пространстве $\mathrm{H}_\Omega = \mathrm{L}_2(\Omega,\nu)$ квадратично-интегрируемых комплекснозначных функций. Пусть $F \in \mathrm{H}_\Omega$, i-мнимая единица, $\omega = (x,X) \in \Omega$. Тогда данная серия представлений задаётся формулой

$$(U^\lambda_{g^{-1}}F)(\omega) = (\rho_{\nu,g}(\omega))^{\frac{1}{2}+i\lambda}\, F(L_g(\omega)) = M_g\left(F(L_g(\omega))\right) = M_g\left(R_g(F(\omega))\right).$$

По построению меры ν, вместе с U^λ_g естественно рассматривать серию представлений V^λ_g, реализуемых аналогичной формулой в пространстве $\mathrm{H}_{\Omega'} = \mathrm{L}_2(\Omega',\mu)$. Вопросы непрерывности и, тем более, неприводимости не могут быть разрешены без явного вида действия, так что предъявляются соответствующие достаточные условия, которые будут использованы в третье главе.

Теорема. Если U^λ_g как функции от g слабо непрерывны по норме на некотором плотном в H_Ω множестве, то они сильно непрерывны.

Теорема. Пусть $S\colon \mathrm{H}_\Omega \to \mathrm{H}_\Omega$ - линейный непрерывный оператор, коммутирующий с всеми операторами представления U_g, $g \in G$, D - некоторое подмножество в H_Ω, содержащее константы, и для $\forall g \in G$ выполнены условия: 1. S коммутирует с M_g на $R_g D$; 2. $M^*_g D$ плотно в H_Ω, где M^*_g — сопряжённый к M_g в H_Ω; 3. Если функционал $F_0 \in \mathrm{H}_\Omega$ инвариантен относительно действия группы G, то он суть константа. Тогда представления U_g неприводимы.

Вторая глава посвящена нахождению явного аналитического выражения для производной Радона—Никодима, соответствующей компоненте пространства Ω', на которой сосредоточена мера Винера. Идея, позволяющая получить такое выражение, заключена в анализе изменения конечномерных проекций построенной меры и нахождения их предельного значения. Для этого оказывается достаточным определить дискретные приближения $T^n(t)$ для хронологической экспоненты $T(t)$ в виде ступенчатой функции, построенной по точкам $T_k = \prod_{l=1}^{k}(E + (t_l - t_{l-1})Z(t_l))$ (Z - траектория из второй компоненты пространства Ω', произведение понимается в порядке возрастания индексов), которые будут сходиться к $T(t)$ в средне-квадратичном по мере Винера.

Окончательно, удаётся показать справедливость следующего результата:

Теорема. Пусть $g \in \mathrm{Diff}^2(\mathbb{R}^\mathrm{d})$, такая, что $\exists g'''$ - ограниченная борелевская функция. Тогда для $\forall z \in \mathrm{C}^1([0{,}1], \mathbb{M}_\mathrm{d})$, $\forall \hat{z} \in \mathbb{R}^\mathrm{d}$, $\forall \hat{Z} \in \mathbb{M}^*_\mathrm{d}$ существует определённая μ_2-почти всюду (как функция от Z)

$$\frac{d\mu_2^g}{d\mu_2}(z,Z,\hat{z},\hat{Z}) = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\langle Q',Q'\rangle - \frac{1}{\sigma^2}\langle Q',Z'\rangle},$$

где $\langle Q', Q'\rangle = \int\limits_0^1 \mathrm{tr}\, Q'(t) {Q'}^T(t)\, dt$, а $\langle Q', Z'\rangle = \int\limits_0^1 \mathrm{tr}\, Q'(t)\, dZ^T(t)$ понимается как стохастический интеграл Ито [33,34].

Для пояснения корректности использования интеграла Ито отметим, что изменение начальной точки $Z^0 = Z(0)$ траектории Z под действием L'_g не зависит от Z^1, таким образом можно рассматривать интеграл Ито в том смысле, что вместо стандартной меры Винера $W = W^0$ взята мера $W^{Z(0)}$, сосредоточенная на функциях, выходящих из $Z(0)$.

Использование аппарата стохастического исчисления решает две проблемы: во-первых, даёт инвариантную форму записи для более широкого класса диффеоморфизмов, во-вторых, в силу условия предсказуемости, естественным образом приводит к построению дискретных приближений, якобиан которых равен единице.

В третьей главе для одномерного случая с некоторыми дополнительными ограничениями доказывается непрерывность и неприводимость представлений, индуцированных построенными мерами. Более точно, в качестве группы G рассматривается подгруппа специального вида в $\mathrm{Diff}(\mathbb{R})$:

$$G = \{g \in \mathrm{Diff}^2(\mathbb{R})\colon g(0) = 0,\ g'(0) = 1,\ g''(0) = 0\}.$$

Заметим, что фиксация положительного значения в качестве $g'(0)$ ведёт к тому, что положительная и отрицательная полупрямые являются инвариантными относительно действия такой группы диффеоморфизмов. Вместе с дальнейшим выбором меры получим $x(t) > 0$, откуда от значения диффеоморфизмов на отрицательной полупрямой ничего зависеть не будет. Таким образом мы рассматриваем, фактически, действие группы диффеоморфизмов положительной полупрямой.

Мера μ на Ω' задаётся так, чтобы она была сосредоточена на $\hat{z} = 0$, $\hat{Z} = 1$ и фиксированной всюду положительной на $[0{,}1]$ кривой z, то есть полагается $\mu_1 = \delta(z)$, $\mu_3 = \delta(0)$, $\mu_4 = \delta(1)$. Фиксация $g''(0) = 0$ даёт $Q(0) =$

[33] B. Oksendal, *Stochastic Differentional Equations*, 5th Edition, 1998, Springer-Verlag Heidelberg New York

[34] H.-H. Kuo, *Gaussian Measures in Banach Spaces*, Lect. Notes Math., Vol. 463 (Springer-Verlag, Berlin - New York, 1975; Mir, Moscow, 1979)

0, откуда $Z(0) \to Z(0) + Q(0) = Z(0)$, что позволяет сделать ограничение на компоненту $\mathrm{C}_0([0,1])$ пространства $\mathrm{C}([0,1]) = \mathbb{R} \times \mathrm{C}_0([0,1])$ с помощью отображения $Z(t) \mapsto Z(t) - Z(0)$.

В такой конструкции действие на компонентах, соответствующих z, $\hat{z}$ и $\hat{Z}$, инвариантно, мера μ будет квазиинвариантна под действием L'_g, причём

$$Q(t) = \frac{\frac{d}{dt} g'(x(t))}{g'(x(t))} = \frac{d}{dt} \ln g'(\int\limits_0^t T(\tau) z(\tau)\, d\tau).$$

Производная Радона—Никодима, соответственно, имеет вид

$$\rho_g(z,Z,\hat{z},\hat{Z}) = \rho_{\mu,g}(z,Z,\hat{z},\hat{Z}) = \frac{d\mu_g}{d\mu}(z,Z,\hat{z},\hat{Z}) = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\langle Q',Q'\rangle - \frac{1}{\sigma^2}\langle Q',Z'\rangle}.$$

Оператор представления V_g, описание которого дано в первой главе, представляется в виде

$$V_g(F)(Z) = e^{-\frac{1/2+i\lambda}{2\sigma^2}\langle Q',Q'\rangle - \frac{1/2+i\lambda}{\sigma^2}\langle Q',Z'\rangle} F(L'_g(Z)),\ F \in \mathrm{L}_2(\Omega', \mu).$$

Теорема. Представления V_g (как и унитарно им эквивалентные представления U_g) группы диффеоморфизмов полупрямой унитарны, непрерывны и неприводимы.

Доказательство неприводимости заключается в сведении к лемме Шура посредством применения эргодической теоремы для линейных сдвигов относительно меры Винера. Ключевым моментом в этой редукции является переход от факта перестановочности произвольного линейного непрерывного оператора S и оператора представления к перестановочности S и оператора замены аргумента R_g. Для этого оказывается достаточно показать, что оператор S с такими свойствами должен при некоторых дополнительных условиях, обеспечивающих принадлежность результата операции к пространству $\mathrm{H}_{\Omega'}$, коммутировать с оператором умножения на произвольную функцию. Это удаётся реализовать, переставив последовательность диффеоморфизмов g_n такую, что поточечно они сходятся к тождественному, а их среднее по Чезаро сходится к нетривиальному оператору умножения на функцию.

Более точно, пусть $F_1, F_2 \in \mathrm{H}_{\Omega'}$ - ограниченные. Тогда утверждается, что для $\forall x_0 \geq 0$ существует такая сходящаяся к x_0 справа последовательность вещественных точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что

$$\lim_{k\to\infty} \left\langle F_1, \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{1} (\rho_{g_n}(Z))^{1/2+i\lambda} F_2 \right\rangle = \left\langle F_1, e^{-\frac{1+4\lambda^2}{8\sigma^2}(\widetilde{x}'(t_0))^3} F_2 \right\rangle,$$

где $g_n(x) = x + \frac{(x-x_0)^3\theta(x-x_0) - (x-x_n)^3\theta(x-x_n)}{6\sqrt{x_n - x_0}}$, θ - функция Хевисайда, а $\widetilde{x}'(t_0) = T(t_0)z(t_0)$ определяется по t_0 из условия $x_0 = \int\limits_0^{t_0} T(\tau)z(\tau)\, d\tau$. Из этого результата уже довольно техническим образом следует искомое. Во-первых, в силу поточечной сходимости таких диффеоморфизмов к тождественным имеем $L'_g \to \mathrm{Id}$, откуда соответствующие диффеоморфизмам g_k операторы представления V_{g_k} в указанном выше смысле (как среднее по Чезаро при действии на непрерывные ограниченные функционалы с ограниченным носителем) будут сходится к операторам умножения на функцию. Во-вторых, такие функции образуют плотное множество, откуда имеем перестановочность оператора S и оператора умножения на произвольную функцию из $\mathrm{H}_{\Omega'}$, что даёт необходимые условия для применения теоремы о необходимом условии неприводимости из первой главы.

Полученные неприводимые представления не являются попарно эквивалентными по крайней мере при некоторых значениях параметров. Введём обозначение $V_g = V_g^{\sigma,\lambda,z}$, где все параметры вынесены в индекс явным образом.

Теорема. Представления $V_g^{\sigma_1,\lambda_1,z}$ и $V_g^{\sigma_2,\lambda_2,z}$, построенные на основе одной и той же траектории z, эквивалентны тогда и только тогда, когда $\sigma_1 = \sigma_2$ и $\lambda_1 = \lambda_2$.

Заключение.

В диссертации был развит подход к построению неприводимых унитарных представлений группы диффеоморфизмов с помощью получения нового семейства квазиинвариантных мер на основе переноса меры Винера. Для построения мер предложена конструкция, позволяющая ввести в качестве параметров серию достаточно произвольных мер и реализовать оператор переноса в виде предсказуемого, в смысле соответствующего винеровского процесса, действия. Последнее обстоятельство дало возможность использовать методы стохастического анализа наряду с классическими методами функционального и математического анализа, что существенным образом упростило доказательства.

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Построено новое семейство мер, квазиинвариантных относительно действия группы диффеоморфизмов конечномерного евклидова пространства.
2. Предъявлена конструкция унитарных представлений на основе квазиинвариантных мер вместе с достаточными условиями для непрерывности и неприводимости.
3. Для построенных мер получено явное аналитическое выражение соответствующей производной Радона—Никодима на основе аппарата стохастического исчисления.
4. В одномерном случае для группы диффеоморфизмов полупрямой с дополнительными ограничениями на значения диффеоморфизмов в нуле показана неэквивалентность и неприводимость построенных представлений.

5. Развит подход к доказательству неприводимости получаемых представлений для случая, когда производная Радона—Никодима может быть выражена с помощью стохастического интеграла Ито.

Полученные результаты актуальны для исследования свойств группы диффеоморфизмов. Для дальнейшего исследования наибольший интерес представляют следующие вопросы:

1. Снятие ограничений на значения диффеоморфизмов в нуле. Особый интерес представляет случай, в котором допустимо $g'(0) = 0$, дающий представления группы диффеоморфизмов всей прямой.
2. Обобщение доказательства неприводимости представлений на многомерный ($\mathrm{d} > 1$) случай.
3. Разложение тензорных произведений полученных представлений на неприводимые и построение соответствующего гармонического анализа.

Благодарности

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Евгению Тенгизовичу Шавгулидзе за поддержку, обсуждение результатов, научное руководство и постоянное внимание к работе, а также руководителю и соруководителю семинара «Бесконечномерный анализ и математическая физика», доктору физико-математических наук, профессору Олегу Георгиевичу Смолянову и доктору физико-математических наук, доценту Николаю Николаевичу Шамарову за ценные указания, комментарии и помощь в подготовке публикаций.

Публикации автора по теме диссертации

Из официального перечня ВАК:

[1] Е.Д. Романов, *Квазиинвариантные меры и представления группы диффеоморфизмов*, Нелинейный мир, 3 т. 14, 2016, 32–39.

[2] E.D. Romanov, *Family of measures on a space of curves that are quasi-invariant with respect to some action of diffeomorphisms group*, Inf. Dim. Anal. Quant. Probab., Vol. 19, No. 03, 2016, 1650019 [15 pages].

[3] E.D. Romanov, *A Series of Irreducible Unitary Representations of a Group of Diffeomorphisms of the Half-Line*, Russ. J. Math. Phys., 23, N. 3, 2016, p. 369–381.

В тезисах конференций:

[4] Е.Д. Романов, *Квазиинвариантная относительно действия гладких диффеоморфизмов мера*, Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2016», М.: МАКС Пресс, 2012.

[5] Е.Д. Романов, *Семейство мер, квазиинвариантных относительно действия группы диффеоморфизмов. Представления*, Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2016», М.: МАКС Пресс, 2012.

[6] Е.Д. Романов, *Об одном представлении группы диффеоморфизмов на основе квазиинвариантной меры*, материалы международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2016», М.: МАКС Пресс, 2016.

[7] Е.Д. Романов, *Семейство квазиинвариантных мер в пространстве траекторий и связанные с ним представления группы диффеоморфизмов*, труды II Российско-Белорусской научно-технической конференции «Элементная база отечественной радиоэлектроники» им. О.В. Лосева, Нижний Новгород, 2016.