МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 519.216.22 517.987.4

Романов Евгений Дмитриевич

КВАЗИИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

Специальность 01.01.01 —
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Шавгулидзе Евгений Тенгизович

Москва — 2016

Оглавление

Введение

Настоящая диссертация посвящена построению нового семейства мер, квазиинвариантных относительно действия группы гладких диффеоморфизмов конечномерного евклидова пространства, и получению на их основе серии унитарных неэквивалентных представлений указанной группы, в том числе неприводимых.

Квазиинвариантные меры строятся посредством переноса меры Винера на внешнее по отношению к группе функциональное пространство. Такой подход даёт возможность получить явное аналитическое выражение для производной Радона—Никодима образа меры относительно исходной под действием группы диффеоморфизмов. Использование конструкции стохастического интеграла позволяет выразить эту производную в инвариантной форме для более широкого, в смысле гладкости, класса диффеоморфизмов.

Наличие квазиинвариантной меры, для которой известна соответствующая производная Радона—Никодима, позволяет построить унитарные представления группы диффеоморфизмов в пространстве функций, квадратично-интегрируемых по этой мере. В одномерном случае для группы гладких диффеоморфизмов полупрямой с некоторыми дополнительными ограничениями на значение диффеоморфизмов в нуле предъявляется доказательство неприводимости и неэквивалентности таких представлений.

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Одним из активно разрабатываемых направлений в теории представлений является изучение представлений бесконечномерных групп. С математической точки зрения интерес к этому направлению обусловлен желанием в том или ином виде обобщить на бесконечномерные группы богатые и глубоко разработанные результаты, относящиеся к конечномерным группам Ли или же к методам гармонического анализа. Так, в частности, группы петель [1] наследуют многие свойства локально компактных групп. С другой стороны, этот интерес обусловлен влиянием математической физики: в квантовой теории поля возникают калибровочные группы и группы токов, которые лишь в некоторых частных или модельных случаях могут быть сведены к относительно хорошо изученным группам петель.

На данный момент достаточно хорошо разработана часть топологической алгебры, посвященная структуре и представлениям локально компактных групп. Одним из активно используемых инструментов для этого случая является конструкция меры Хаара, которая инвариантна при левых или правых сдвигах, порожденных элементами группы. Но из обратной теоремы Вейля [2] следует, что существование нетривиальной неотрицательной меры, лево (или право) квазиинвариантной относительно всей топологической группы, влечет ее локальную компактность. Следовательно, этот метод не может быть напрямую обобщён для изучения представлений групп, не являющихся локально компактными, в частности для группы диффеоморфизмов. Стоит отметить, что для группы диффеоморфизмов окружности существуют примеры мер, квазиинвариантных относительно действия диффеоморфизмов более высокой гладкости.

Другим подходом к исследованию представлений бесконечномерных групп является метод орбит. Как отмечает А.А. Кириллов [3], этот подход позволяет получить результаты для случаев конечной их размерности или коразмерности, однако для общего случая не работает. Проблема состоит в отсутствии квазиинвариантных мер, из-за чего оказывается неприменим один из главных инструментов теории представлений в случае локально компактных групп, а именно метод индуцированных представлений. Однако, в некоторых частных случаях такие меры удаётся построить.

Первые работы по исследованию мер, квазиинвариантных под действием групп диффеоморфизмов различных многообразий, относятся к началу 1970-х годов и представлены в статьях Р.С. Исмагилова [4, 5, 6, 7, 8]. В работе [4] строится мера на пространстве сходящихся подпоследовательностей окружности, доказывается её инвариантность относительно действия группы диффеоморфизмов окружности, а так же неприводимость соответствующих унитарных представлений. В работах [5, 6] похожие идеи обобщаются на группу диффеоморфизмов компактного многообразия. В статьях [7, 8] вводится пуассоновская мера на пространстве конфигураций в $\mathbb{R}^n$, с помощью которой исследуются представления группы тождественных вне компакта диффеоморфизмов.

Другой подход по изучению мер на пространстве конфигураций (т.е. локально конечных подмножеств) некомпактного многообразия представлен в статье А.М. Вершика, И.М. Гельфанда, М.И. Граева [9]; для пуассоновской меры даётся описание соответствующего кольца представлений. Различные свойства дифференцируемых мер, в частности, их изменение под действием гладких отображений, исследованы в работах О.Г. Смолянова и Г.ф. Вайцзекера [10, 11, 12].

Отдельным направлением исследования является изучение представлений группы диффеоморфизмов, действующих в пространстве достаточно гладких функций. Для группы диффеоморфизмов окружности различные способы получения представлений такого вида, в том числе связанные с квазиинвариантными мерами, представлены в работах Ю.А. Неретина [13, 14, 15, 16, 17, 18]. Далее, квазиинвариантные меры, заданные на пространстве функций, построены в работах Е.Т. Шавгулидзе [19, 20]. В статье [19] строится пример меры на пространстве непрерывных функций, квазиинвариантной относительно трижды гладких диффеоморфизмов окружности. В [20] мера строится уже на группах диффеоморфизмов конечномерных многообразий, квазиинвариантных под действием подгрупп более высокой гладкости.

В более поздних работах Е.Т. Шавгулидзе [21, 22, 23, 24] реализован способ получения квазиинвариантных мер на функциональных пространствах с помощью переноса меры Винера. Примеры подобных построений даны, кроме того, в статьях П. Малявена и М.П. Малявена [25, 26]; далее, в статье А.В. Косяка [27] рассматриваются представления группы диффеоморфизмов окружности на основе мер типа Шавгулидзе. Суть метода состоит в построении биекции, которая позволяет перенести винеровскую меру на интересующее пространство функций. В частности, в работе [22] строится отображение в пространство всех гладких диффеоморфизмов отрезка, сохраняющих концы на месте. В дальнейшем данный подход развивался различными авторами. Так, в статье П.А. Кузьмина [28] доказывается квазиинвариантность мер Шавгулидзе относительно более широкого, в смысле гладкости, класса диффеоморфизмов, а в работе А.А. Досовицкого [29] развивается данный метод построения квазиинвариантных мер для случая кусочно-гладких диффеоморфизмов и доказывается неприводимость соответствующей серии унитарных и попарно неэквивалентных представлений.

Все вышесказанное определяет актуальность темы диссертации.

Целью данной работы является построение нового семейства мер, квазиинвариантных относительно действия группы диффеоморфизмов конечномерного евклидова пространства и построение на их основе серии унитарных неприводимых представлений указанной группы, действующих в пространствах функций, квадратично-интегрируемых по этим мерам.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Построено новое семейство мер, квазиинвариантных относительно действия подгрупп достаточно гладких диффеоморфизмов в $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$. Существенным отличием от существующих конструкций является получение результата для размерности $\mathrm{d} > 1$.
2. Построена серия унитарных представлений указанной группы диффеоморфизмов. Предъявлены необходимые условия непрерывности и неприводимости таких представлений.
3. Для построенных мер предъявлена явная аналитическая форма производной Радона—Никодима. Использование стохастического интеграла Ито позволило сформулировать результат в инвариантной форме для более широкого, в смысле гладкости, класса диффеоморфизмов.
4. Доказана неприводимость получаемых представлений для случая действия группы диффеоморфизмов полупрямой с дополнительными ограничениями на значения диффеоморфизмов в нуле. Указано разбиение на классы заведомо неэквивалентных представлений.
5. Развит подход к доказательству неприводимости представлений группы диффеоморфизмов для случая, когда соответствующая производная Радона—Никодима может быть выражена через стохастический интеграл Ито.

Методы исследования. В работе развивается вышеописанный подход Е.Т. Шавгулидзе к получению квазиинвариантных мер на основе меры Винера и доказательству индуцируемых ими представлений. Ключевой особенностью является использование аппарата стохастического интегрирования, что позволяет, во-первых, сформулировать результат для более широких, в смысле гладкости, групп диффеоморфизмов и, во-вторых, естественным образом воспользоваться результатами эргодической теории при доказательстве неприводимости порождаемых квазиинвариантными мерами представлений.

Отдельно стоит сказать о деталях использовании аппарата стохастического исчисления. Естественность его применения сразу следует из использования меры Винера в качестве основы для построения новых мер. Если обходиться без него, то, грубо говоря, потребовав более сильные ограничения на гладкость, интеграл Ито можно свести к обычному интегралу Лебега, проведя интегрирование по частям. Такой подход реализован, например, в статье А.А. Досовицкого [29] и влечёт за собой необходимость последующего доказательства ряда технических лемм, в которых для соответствующего оператора представления снимаются ограничения на гладкость.

Несмотря на то, что данный подход позволяет получать доказательства с меньшим числом технических выкладок, он имеет свои ограничения. Например, существующий аппарат хорошо развит лишь для небольшого класса функций, вычисляемых от траекторий Винеровского процесса, а именно для так называемых предсказуемых (то есть не зависящих от будущего). Кроме того, такие результаты как формула Ито общеизвестны для функций, зависящих лишь от значения винеровского процесса в конкретной точке, что делает их неприменимыми, в частности, в данной работе. Однако, современные результаты стохастического анализа дают возможность применять указанную технику для всё более широкого ряда задач. Так, в статье [30] представляется операторная формулировка формулы Ито, а в работе Х.-С. Го и Ю. Пенга [31] даётся конструкция стохастического интеграла для подынтегрального выражения, которое может зависеть от конечной точки интервала интегрирования по времени.

Теоретическая и практическая значимость Работа имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы для исследования свойств группы диффеоморфизмов и построения соответствующего гармонического анализа на группе диффеоморфизмов. Методы, развитые для их получения, могут быть использованы для построения квазиинвариантных относительно группы диффеоморфизмов мер, получения соответствующих унитарных представлений и доказательства их неприводимости.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и конференциях:

- Семинар механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова «Бесконечномерный анализ и математическая физика» под руководством д.ф.-м.н., проф. О.Г. Смолянова и д.ф.-м.н., проф. Е.Т. Шавгулидзе (2011–2016 гг.)
- XIX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (2012 г.)

– XX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (2013 г.)
– XXIII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (2016 г.)
– Вторая российско-белорусская научно-техническая конференция «Элементная база отечественной радиоэлектроники» им. О.В. Лосева на базе ННГУ им. Н.И. Лобачевского (2016 г.)

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в семи работах, три из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [42, 43, 44], а четыре – в тезисах конференций [45, 46, 47, 48]. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 65 страниц. Список литературы содержит 48 наименований.

Краткое содержание диссертации

В первой главе диссертации предъявляется способ построения семейства квазиинвариантных мер и получения унитарных представлений на их основе. В абстрактной форме даются достаточные условия непрерывности и неприводимости представлений такого вида. Во второй главе выводится явное аналитическое выражение для соответствующей производной Радона—Никодима, необходимое для доказательства неприводимости представлений, с помощью нахождения предела конечномерных проекций. В третьей главе для одномерного случая с дополнительными ограничениями на значения диффеоморфизмов в нуле удаётся показать непрерывность и неприводимость полученных представлений. Кроме того, предъявляется разбиение на классы заведомо неэквивалентных представлений.

Опишем теперь подробно содержимое каждой главы.

В первой главе описывается способ построения квазиинвариантных (то есть переходящих в эквивалентные при сдвиге на любой элемент группы) мер и общая конструкция соответствующих им унитарных представлений. Кроме того, предъявляются достаточные условия для непрерывности и неприводимости таких представлений. Так как конструкция семейства мер лежит в основе всех построений, приведём её здесь полностью.

Семейство мер строится на пространстве

$$\Omega = \mathrm{C}^2([0,1],\, \mathbb{R}^{\mathrm{d}}) \times \mathrm{C}^1([0,1],\, \mathbb{M}^*_{\mathrm{d}}),$$

где под $\mathbb{M}^*_{\mathrm{d}}$ понимаются невырожденные вещественнозначные матрицы размера $\mathrm{d} \times \mathrm{d}$.

В качестве действия рассматривается отображение $L_g\colon \Omega \to \Omega$, задаваемое соотношением

$$L_g\colon (x,X) \mapsto (g(x), g'(x)X),\ g \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}).$$

Если понимать матричную компоненту как координатный репер, определённый вдоль компоненты кривой, то такое действие отвечает геометрии пространства: кривая переходит в свой образ, а репер преобразуется под действием дифференциала g в соответствующей точке кривой согласно формуле замены базиса.

Для построения меры используется вспомогательное пространство

$$\Omega' = \mathrm{C}^1([0,1],\, \mathbb{R}^{\mathrm{d}}) \times \mathrm{C}([0,1],\, \mathbb{M}_{\mathrm{d}}) \times \mathbb{R}^{\mathrm{d}} \times \mathbb{M}^*_{\mathrm{d}},$$

где $\mathbb{M}_{\mathrm{d}}$ суть вещественнозначные матрицы размера $\mathrm{d} \times \mathrm{d}$.

Пусть $Z \in \mathrm{C}([0,1],\, \mathbb{M}_{\mathrm{d}})$, $X \in \mathrm{C}^1([0,1],\, \mathbb{M}^*_{\mathrm{d}})$. С точностью до мультипликативной константы решением уравнения $Z(t){=}X^{-1}(t)X'(t)$ относительно неизвестной Z является (правая) хронологическая T-экспонента $T(t) = \mathrm{Texp}\{\int\limits_0^t Z(\tau)\,d\tau\}$[32]. Таким образом, можно построить биекцию $\Phi\colon \Omega \to \Omega'$:

$$\Phi\colon (x(t),X(t)) \mapsto (X^{-1}(t)x'(t), X^{-1}(t)X'(t), x(0), X(0)),\ t \in [0,1].$$

Обратное отображение $\Phi^{-1}\colon \Omega' \to \Omega$ имеет вид

$$\Phi^{-1}\colon (z(t), Z(t), \hat{z}, \hat{Z}) \mapsto \left(\hat{z} + \hat{Z}\int\limits_0^t T(\tau)z(\tau)\,d\tau, \hat{Z}T(t)\right),\ t \in [0,1].$$

Мера μ на Ω' задаётся как $\mu_1{\otimes}\mu_2{\otimes}\mu_3{\otimes}\mu_4$. Существенной часть построения является выбор Винеровской (покомпонентно) меры со свободным концом (то есть произведение меры Лебега на начальной точке траектории и стандартной меры Винера с дисперсией σ^2) на $\mathrm{C}([0,1],\, \mathbb{M}_{\mathrm{d}})$ в качестве μ_2. Для того, чтобы образ был эквивалентен, можно взять в качестве μ_3 и μ_4, например, меры с борелевскими, всюду положительными плотностями ρ_3 и ρ_4 соответственно. В качестве μ_1 в силу равенства $u(t) = z(t)$ берётся произвольная радонова мера. Таким образом, задавая меру μ на Ω', получаем меру ν на Ω с помощью биекции Φ. Ясно, что построенная таким образом мера квазиинвариантна. Однако, для исследования представлений на основе квазиинвариантной меры потребуется явный вид соответствующей производной Радона—Никодима.

Определим индуцированное действие $L'_g\colon \Omega' \to \Omega'$ как $L'_g = \Phi^{-1} \circ L_g \circ \Phi$. Для $g \in \mathrm{Diff}^2(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$ действие L'_g можно представить в виде:

$$L'_g\colon (z(t), Z(t), \hat{z}, \hat{Z}) \mapsto (z(t), Z(t) + Q(t), g(\hat{z}), g'(\hat{z})\hat{Z}),\ t \in [0,1],$$

где $Q(t) = X(t)^{-1}[g'(x(t))]^{-1}[\frac{d}{dt}g'(x(t))]X(t)$, или, в переменных Ω',

$$Q(t) = (\hat{Z}T(t))^{-1}[g'(\hat{z} + \hat{Z}\int\limits_0^t T(\tau)z(\tau)\,d\tau)]^{-1}[\tfrac{d}{dt}g'(\hat{z} + \hat{Z}\int\limits_0^t T(\tau)z(\tau)\,d\tau)]\hat{Z}T(t).$$

Обозначим через μ_g образ меры μ под действием L'_g. По построению $\frac{d\mu^g}{d\mu} = \frac{d\mu_1^g}{d\mu_1}\frac{d\mu_2^g}{d\mu_2}\frac{d\mu_3^g}{d\mu_3}\frac{d\mu_4^g}{d\mu_4}$. В силу инвариантности L'_g на первой компоненте $\frac{d\mu_1^g}{d\mu_1} = 1$, $\frac{d\mu_3^g}{d\mu_3}$ и $\frac{d\mu_4^g}{d\mu_4}$ легко считаются для конкретного выбора конечномерной меры: например, для указанного выбора мер μ_3 и μ_4 имеем $\frac{d\mu_3^g}{d\mu^3}(\hat{z}) = \frac{\rho^3(g(\hat{z}))}{\rho^3(\hat{z})}|g'(\hat{z})|$, $\frac{d\mu_4^g}{d\mu^4}(\hat{z},\hat{Z}) = \frac{\rho^4(g'(\hat{z})\hat{Z})}{\rho^4(\hat{Z})}|g'(\hat{z})|$. Вторая глава посвящена нахождению явного вида для $\frac{d\mu_2^g}{d\mu_2}$.

Следующий раздел первой главы описывает способ построения унитарных представлений на основе квазиинвариантных мер. В данном случае речь идёт о представлениях подгрупп достаточно гладких диффеоморфизмов в $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$, реализуемых в пространстве $\mathrm{H}_\Omega = \mathrm{L}_2(\Omega, \nu)$ квадратично-интегрируемых комплекснозначных функций. Пусть $F \in \mathrm{H}_\Omega$, i-мнимая единица, $\omega = (x,X) \in \Omega$. Тогда данная серия представлений задаётся формулой

$$(U^\lambda_{g^{-1}}F)(\omega) = (\rho_{\nu,g}(\omega))^{\frac{1}{2}+i\lambda}\, F(L_g(\omega)) = M_g\,(F(L_g(\omega))) = M_g\,(R_g(F(\omega))).$$

По построению меры ν, вместе с U^λ_g естественно рассматривать серию представлений V^λ_g, реализуемых аналогичной формулой в пространстве $\mathrm{H}_{\Omega'} = \mathrm{L}_2(\Omega',\mu)$. Вопросы непрерывности и, тем более, неприводимости не могут быть разрешены без явного вида действия, так что предъявляются соответствующие достаточные условия, которые будут использованы в третье главе.

Теорема. Если U^λ_g как функции от g слабо непрерывны по норме на некотором плотном в H_Ω множестве, то они сильно непрерывны.

Теорема. Пусть $S\colon \mathrm{H}_\Omega \to \mathrm{H}_\Omega$ - линейный непрерывный оператор, коммутирующий с всеми операторами представления U_g, $g \in G$, D - некоторое подмножество в H_Ω, содержащее константы, и для $\forall g \in G$ выполнены условия: 1. S коммутирует с M_g на $R_g D$; 2. $M_g^* D$ плотно в H_Ω, где M_g^* — сопряжённый к M_g в H_Ω; 3. Если функционал $F_0 \in \mathrm{H}_\Omega$ инвариантен относительно действия группы G, то он суть константа. Тогда представления U_g неприводимы.

Вторая глава посвящена нахождению явного аналитического выражения для производной Радона—Никодима, соответствующей компоненте пространства Ω', на которой сосредоточена мера Винера. Идея, позволяющая получить такое выражение, заключена в анализе изменения конечномерных проекций построенной меры и нахождения их предельного значения. Для этого оказывается достаточным определить дискретные приближения $T^n(t)$ для хронологической экспоненты $T(t)$ в виде ступенчатой функции, построенной по точкам $T_k = \prod\limits_{l=1}^{k}(E + (t_l - t_{l-1})Z(t_l))$ (Z - траектория из второй компоненты пространства Ω', произведение понимается в порядке возрастания индексов), которые будут сходиться к $T(t)$ в среднеквадратичном по мере Винера.

Окончательно, удаётся показать справедливость следующего результата:

Теорема. Пусть $g \in \mathrm{Diff}^2(\mathbb{R}^\mathrm{d})$, такая, что $\exists g'''$ - ограниченная борелевская функция. Тогда для $\forall z \in \mathrm{C}^1([0,1], \mathbb{M}_\mathrm{d})$, $\forall \hat{z} \in \mathbb{R}^\mathrm{d}$, $\forall \hat{Z} \in \mathbb{M}_\mathrm{d}^*$ существует определённая μ_2-почти всюду (как функция от Z)

$$\tfrac{d\mu_2^g}{d\mu_2}(z,Z,\hat{z},\hat{Z}) = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\langle Q',Q'\rangle - \frac{1}{\sigma^2}\langle Q',Z'\rangle},$$

где $\langle Q', Q'\rangle = \int\limits_0^1 \mathrm{tr}\, Q'(t)Q'^T(t)\,dt$, а $\langle Q', Z'\rangle = \int\limits_0^1 \mathrm{tr}\, Q'(t)\,dZ^T(t)$ понимается как стохастический интеграл Ито [34, 35].

Для пояснения корректности использования интеграла Ито отметим, что изменение начальной точки $Z^0 = Z(0)$ траектории Z под действием L'_g не зависит от Z^1, таким образом можно рассматривать интеграл Ито в том смысле, что вместо стандартной меры Винера $W = W^0$ взята мера $W^{Z(0)}$, сосредоточенная на функциях, выходящих из $Z(0)$.

Использование аппарата стохастического исчисления решает две проблемы: во-первых, даёт инвариантную форму записи для более широкого класса диффеоморфизмов, во-вторых, в силу условия предсказуемости, естественным образом приводит к построению дискретных приближений, якобиан которых равен единице.

В третьей главе для одномерного случая с некоторыми дополнительными ограничениями доказывается непрерывность и неприводимость представлений, индуцированных построенными мерами. Более точно, в качестве группы G рассматривается подгруппа специального вида в $\mathrm{Diff}(\mathbb{R})$:

$$G = \left\{g \in \mathrm{Diff}^2(\mathbb{R})\colon g(0) = 0,\, g'(0) = 1,\, g''(0) = 0\right\}.$$

Заметим, что фиксация положительного значения в качестве $g'(0)$ ведёт к тому, что положительная и отрицательная полупрямые являются инвариантными относительно действия такой группы диффеоморфизмов. Вместе с дальнейшим выбором меры получим $x(t) > 0$, откуда от значения диффеоморфизмов на отрицательной полупрямой ничего зависеть не будет. Таким образом мы рассматриваем, фактически, действие группы диффеоморфизмов положительной полупрямой.

Мера μ на Ω' задаётся так, чтобы она была сосредоточена на $\hat{z} = 0$, $\hat{Z} = 1$ и фиксированной всюду положительной на $[0{,}1]$ кривой z, то есть полагается $\mu_1 = \delta(z)$, $\mu_3 = \delta(0)$, $\mu_4 = \delta(1)$. Фиксация $g''(0) = 0$ даёт $Q(0) = 0$, откуда $Z(0) \to Z(0) + Q(0) = Z(0)$, что позволяет сделать ограничение на компоненту $\mathrm{C}_0([0{,}1])$ пространства $\mathrm{C}([0{,}1]) = \mathbb{R} \times \mathrm{C}_0([0{,}1])$ с помощью отображения $Z(t) \mapsto$ $\mapsto Z(t) - Z(0)$.

В такой конструкции действие на компонентах, соответствующих z, $\hat{z}$ и $\hat{Z}$, инвариантно, мера μ будет квазиинвариантна под действием L'_g, причём

$$Q(t) = \frac{\frac{d}{dt} g'(x(t))}{g'(x(t))} = \frac{d}{dt} \ln g'\Big(\int\limits_0^t T(\tau) z(\tau)\, d\tau\Big).$$

Производная Радона—Никодима, соответственно, имеет вид

$$\rho_g(z,Z,\hat{z},\hat{Z}) = \rho_{\mu,g}(z,Z,\hat{z},\hat{Z}) = \frac{d\mu_g}{d\mu}(z,Z,\hat{z},\hat{Z}) = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\langle Q',Q'\rangle - \frac{1}{\sigma^2}\langle Q',Z'\rangle}.$$

Оператор представления V_g, описание которого дано в первой главе, представляется в виде

$$V_g(F)(Z) = e^{-\frac{1/2+i\lambda}{2\sigma^2}\langle Q',Q'\rangle - \frac{1/2+i\lambda}{\sigma^2}\langle Q',Z'\rangle} F(L'_g(Z)),\ F \in \mathrm{L}_2(\Omega',\mu).$$

Теорема. Представления V_g (как и унитарно им эквивалентные представления U_g) группы диффеоморфизмов полупрямой унитарны, непрерывны и неприводимы.

Доказательство неприводимости заключается в сведении к лемме Шура посредством применения эргодической теоремы для линейных сдвигов относительно меры Винера. Ключевым моментом в этой редукции является переход от факта перестановочности произвольного линейного непрерывного оператора S и оператора представления к перестановочности S и оператора замены аргумента R_g. Для этого оказывается достаточно показать, что оператор S с такими свойствами должен при некоторых дополнительных условиях, обеспечивающих принадлежность результата операции к пространству $\mathrm{H}_{\Omega'}$, коммутировать с оператором умножения на произвольную функцию. Это удаётся реализовать, переставив последовательность диффеоморфизмов g_n такую, что поточечно они сходятся к тождественному, а их среднее по Чезаро сходится к нетривиальному оператору умножения на функцию.

Более точно, пусть $F_1, F_2 \in \mathrm{H}_{\Omega'}$ - ограниченные. Тогда утверждается, что для $\forall x_0 \geqslant 0$ существует такая сходящаяся к x_0 справа последовательность вещественных точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что

$$\lim_{k\to\infty} \left\langle F_1, \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{1} \left(\rho_{g_n}(Z)\right)^{1/2+i\lambda} F_2 \right\rangle = \left\langle F_1, e^{-\frac{1+4\lambda^2}{8\sigma^2}(\widetilde{x}'(t_0))^3} F_2 \right\rangle,$$

где $g_n(x) = x + \frac{(x-x_0)^3\theta(x-x_0)-(x-x_n)^3\theta(x-x_n)}{6\sqrt{x_n-x_0}}$, θ - функция Хевисайда, а $\widetilde{x}'(t_0) = $ $= T(t_0)z(t_0)$ определяется по t_0 из условия $x_0 = \int\limits_0^{t_0} T(\tau)z(\tau)\,d\tau$. Из этого результата уже довольно техническим образом следует искомое. Во-первых, в силу поточечной сходимости таких диффеоморфизмов к тождественным имеем $L'_g \to \mathrm{Id}$, откуда соответствующие диффеоморфизмам g_k операторы представления V_{g_k} в указанном выше смысле (как среднее по Чезаро при действии на непрерывные ограниченные функционалы с ограниченным носителем) будут сходится к операторам умножения на функцию. Во-вторых, такие функции образуют плотное множество, откуда имеем перестановочность оператора S и оператора умножения на произвольную функцию из $\mathrm{H}_{\Omega'}$, что даёт необходимые условия для применения теоремы о необходимом условии неприводимости из первой главы.

Благодарности

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Евгению Тенгизовичу Шавгулидзе за поддержку, обсуждение результатов, научное руководство и постоянное внимание к работе, а также руководителю и соруководителю семинара «Бесконечномерный анализ и математическая физика», доктору физико-математических наук, профессору Олегу Георгиевичу Смолянову и доктору физико-математических наук, доценту Николаю Николаевичу Шамарову за ценные указания, комментарии и помощь в подготовке публикаций.

Глава 1. Квазиинвариантные меры и представления группы диффеоморфизмов

В данной главе определяется основное функциональное пространство, задаётся действие группы диффеоморфизмов на нем и предъявляется способ построения семейства квазиинвариантных под действием указанной группы мер. Далее определяется пространство представлений и предъявляется конструкция, позволяющая получить унитарное представление группы диффеоморфизмов на основе квазиинвариантной меры с известной производной Радона—Никодима. В конце главы исследуются свойства таких представлений, а именно предъявляются достаточные условия для непрерывности и неприводимости таких представлений.

1.1 Основные определения и обозначения

Определение 1.1.1. *Пусть* $(X,\mathfrak{B})$ *- измеримое пространство с выделенной* σ*-алгеброй,* G*-некоторая группа его измеримых автоморфизмов,* μ*-мера на* $(X,\mathfrak{B})$, $\mu_g(B) = \mu(g^{-1}B)$ $\forall B \in \mathfrak{B}$ *- образ* μ *под действием* g*. Тогда* μ *называется квазиинвариантной относительно действия группы* G*, если* $\forall g \in G$ *меры* μ *и* μ_g *эквивалентны, то есть взаимно абсолютно непрерывны.*

Замечание 1.1.1. *Для* σ*-конечных мер квазиинвариантность относительно действия группы* G *следует из существования* μ*-интегрируемой производной Радона—Никодима* $\rho_g(x) = \frac{d\mu_g}{d\mu}(x)$ *такой, что*

$$\mu_g(B) = \int\limits_B \rho_g(x)\mu(dx) = \mu(g^{-1}B) \quad \forall B \in \mathfrak{B}$$

Определение 1.1.2. *Наряду со стандартным пространством* $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ *будут рассматриваться пространства вещественных матриц. Так как на них будет играть роль лишь структура линейного пространства, то примем обозначения* $\mathbb{M}_{\mathrm{d}}$ *и* $\mathbb{M}^*_{\mathrm{d}}$ *для всех вещественных матриц размера* $\mathrm{d}\times\mathrm{d}$ *и невырожденных вещественных матриц размера* $\mathrm{d}\times\mathrm{d}$ *соответственно.*

Определение 1.1.3. *Под* $\mathrm{C}^{\mathrm{n}}([0{,}1], X)$ *будет пониматься пространство всех* n *раз гладких функций, определённых на отрезке* $[0{,}1]$ *со значениями в* X.

Определение 1.1.4. *Для* $A \in \mathbb{M}_{\mathrm{d}}$ *обозначим через* A^* *транспонированную матрицу, тогда скалярное произведение на* $\mathrm{C}([0{,}1],\, \mathbb{M}_{\mathrm{d}})$ *можно представить в виде*

$$\langle A{,}B\rangle = \int\limits_0^1 \mathrm{tr} A(t) B^*(t)\, dt$$

Определение 1.1.5. *Здесь и далее будем обозначать с помощью* W *меру Винера с дисперсией* σ^2*, а через* M *- математическое ожидание по этой мере. В случае, если мера рассматривается не на одномерном пространстве, то предполагается, что мера Винера взята независимо на каждой компоненте.*

1.2 Семейство квазиинвариантных мер

Рассматривается семейство квазиинвариантных под действием группы диффеоморфизмов мер на пространстве

$$\Omega = \mathrm{C}^2([0{,}1],\, \mathbb{R}^{\mathrm{d}}) \times \mathrm{C}^1([0{,}1],\, \mathbb{M}_{\mathrm{d}}^*).$$

В качестве действия рассматривается отображение $L_g\colon \Omega \to \Omega$, задаваемое соотношением

$$L_g\colon (x{,}X) \mapsto (g(x), g'(x)X),\; g \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}).$$

Если понимать матричную компоненту как координатный репер, определённый вдоль компоненты кривой, то такое действие отвечает геометрии пространства: кривая переходит в свой образ, а репер преобразуется под действием дифференциала g в соответствующей точке кривой согласно формуле замены базиса.

Для построения меры используется вспомогательное пространство

$$\Omega' = \mathrm{C}^1([0{,}1],\, \mathbb{R}^{\mathrm{d}}) \times \mathrm{C}([0{,}1],\, \mathbb{M}_{\mathrm{d}}) \times \mathbb{R}^{\mathrm{d}} \times \mathbb{M}_{\mathrm{d}}^*.$$

Пусть $Z \in \mathrm{C}([0,1], \mathbb{M}_\mathrm{d})$, $X \in \mathrm{C}^1([0,1], \mathbb{M}^*_\mathrm{d})$. С точностью до мультипликативной константы решением уравнения $Z(t){=}X^{-1}(t)X'(t)$ относительно неизвестной Z является (правая) хронологическая T-экспонента $T(t) = \mathrm{Texp}\{\int\limits_0^t Z(\tau)\,d\tau\}$, определённая для $\forall Z \in \mathrm{C}([0,1], \mathbb{M}_\mathrm{d})$ [32]. Таким образом, можно построить биекцию $\Phi\colon \Omega \to \Omega'$:

$$\Phi\colon (x(t),X(t)) \mapsto (X^{-1}(t)x'(t), X^{-1}(t)X'(t), x(0), X(0)),\ t \in [0,1].$$

Обратное отображение $\Phi^{-1}\colon \Omega' \to \Omega$ имеет вид

$$\Phi^{-1}\colon (z(t), Z(t), \hat{z}, \hat{Z}) \mapsto \left(\hat{z} + \hat{Z}\int\limits_0^t T(\tau)z(\tau)\,d\tau, \hat{Z}T(t)\right),\ t \in [0,1].$$

Зададим теперь меру μ на Ω' как $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3 \otimes \mu_4$. Существенной часть построения является выбор Винеровской (покомпонентно) меры со свободным концом на $\mathrm{C}([0,1], \mathbb{M}_\mathrm{d})$ в качестве μ_2. Более точно, определим $\mathrm{C}_0([0,1], \mathbb{M}_\mathrm{d}) = \{Z \in \mathrm{C}([0,1], \mathbb{M}_\mathrm{d})\colon Z(0) = 0 = 0_{\mathrm{d}\times\mathrm{d}}\}$, тогда $\mathrm{C}([0,1], \mathbb{M}_\mathrm{d}) \ni Z(\cdot) \simeq \big(Z^0, Z^1\big) = (Z(0), Z(\cdot) - Z(0)) \in \mathbb{M}_\mathrm{d} \times \mathrm{C}_0([0,1], \mathbb{M}_\mathrm{d})$, таким образом $\mathrm{C}([0,1], \mathbb{M}_\mathrm{d}) \simeq \mathbb{M}_\mathrm{d} \times \mathrm{C}_0([0,1], \mathbb{M}_\mathrm{d})$. Полагая на $\mathbb{M}_\mathrm{d}$ меру Лебега, а на $\mathrm{C}_0([0,1], \mathbb{M}_\mathrm{d})$ - стандартную меру Винера W (с дисперсией σ^2), получаем меру Винера со свободным концом. Далее, для того, чтобы образ был эквивалентен, возьмём в качестве μ_3 и μ_4 меры с борелевскими, всюду положительными плотностями ρ_3 и ρ_4 соответственно. В качестве μ_1 в силу равенства $u(t) = z(t)$ возьмём произвольную радонову меру. Таким образом, задав меру μ на Ω', мы получаем меру ν на Ω с помощью биекции Φ.

Отметим, что в общем случае требуются лишь технические ограничения, необходимые для перехода от кратного интеграла по Ω' к повторному по компонентам пространства; однако образ такой меры может оказаться ортогональным исходной. Например, если взять δ-меру Дирака в точке $x(t)$ как μ_1, то образ будет сконцентрирован в точке $g(x(t))$, откуда, вообще говоря, следует ортогональность. Кроме того, при дополнительных ограничениях на группу в качестве меры на $\hat{z}$, $\hat{Z}$ и даже Z^0 можно брать подходящие дельта-меры.

Определим индуцированное действие $L'_g\colon \Omega' \to \Omega'$ как $L'_g = \Phi \circ L_g \circ \Phi^{-1}$. Таким образом, следующая диаграмма будет коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "L_g"] & \Omega \arrow[d, "\Phi"] \\
\Omega' \arrow[u, "\Phi^{-1}"] \arrow[r, "L'_g"] & \Omega'
\end{tikzcd}$$

Для $g \in \mathrm{Diff}^2(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$ действие L'_g можно представить в виде:

$$L'_g\colon (z(t), Z(t), \hat{z}, \hat{Z}) \mapsto (z(t), Z(t) + Q(t), g(\hat{z}), g'(\hat{z})\hat{Z}),\ t \in [0{,}1],$$

где $Q(t) = X(t)^{-1}[g'(x(t))]^{-1}[\frac{d}{dt}g'(x(t))]X(t)$, или, в выражении через переменные пространства Ω',

$$Q(t) = (\hat{Z}T(t))^{-1}[g'(\hat{z} + \hat{Z}\int\limits_0^t T(\tau)z(\tau)\,d\tau)]^{-1}[\tfrac{d}{dt}g'(\hat{z} + \hat{Z}\int\limits_0^t T(\tau)z(\tau)\,d\tau)]\hat{Z}T(t).$$

Теперь можно пояснить мотивацию выбора пространств Ω, Ω' и оператора Φ. С одной стороны, наличие первой компоненты Ω обусловлено желанием иметь множество функций такое, на котором группа диффеоморфизмов действует естественным способом, а именно переводит траекторию в её образ. С другой стороны, согласно изначальной идее на уровне пространства Ω' должна быть компонента, связанная с мерой Винера. Конструкция пространства лишь с одной такой компонентой более бедна, так что решено было рассмотреть две компоненты. С точки зрения механики и соображений типа теоремы Лиувилля довольно логичным оснащением траекторий является определение базиса вдоль них. Таким образом мы приходим к пространству Ω. Далее удаётся подобрать Φ таким образом, чтобы действие L'_g на первой компоненте Ω' было инвариантным, что даёт возможность положить на ней произвольную меру. При этом действие L'_g на второй компоненте имеет вид тождественного с некоторой добавкой, что мотивирует к проверке соответствующих представлений на неприводимость. Наличие конечномерных компонент Ω' носит чисто технический характер и обусловлено желанием иметь в качестве Φ биекцию, однако действие на них может повлечь приводимость получаемых представлений.

Легко видеть, что построенная таким образом мера квазиинвариантна, однако для получения явного вида плотности преобразованной меры относительно исходной потребуются дополнительные ограничения. Обозначим через μ_g образ меры μ под действием L'_g. По построению $\frac{d\mu^g}{d\mu} = \frac{d\mu_1^g}{d\mu_1}\frac{d\mu_2^g}{d\mu_2}\frac{d\mu_3^g}{d\mu_3}\frac{d\mu_4^g}{d\mu_4}$. В силу инвариантности L'_g на первой компоненте $\frac{d\mu_1^g}{d\mu_1} = 1$, $\frac{d\mu_3^g}{d\mu_3}$ и $\frac{d\mu_4^g}{d\mu_4}$ легко считаются для конкретного выбора конечномерной меры: например, для указанного выбора мер μ_3 и μ_4 имеем $\frac{d\mu_3^g}{d\mu^3}(\hat{z}) = \frac{\rho^3(g(\hat{z}))}{\rho^3(\hat{z})}|g'(\hat{z})|$, $\frac{d\mu_4^g}{d\mu^4}(\hat{z},\hat{Z}) = \frac{\rho^4(g'(\hat{z})\hat{Z})}{\rho^4(\hat{Z})}|g'(\hat{z})|$. Содержательной частью является нахождение $\frac{d\mu_2^g}{d\mu_2}$. Этому результату будет посвящена вторая глава настоящей диссертации.

1.3 Представления на основе квазиинвариантных мер

В этом разделе предъявляется общая конструкция представлений на основе квазиинвариантных мер, показывается их унитарность и формулируются достаточные условия для непрерывности и неприводимости.

1.3.1 Общая конструкций представлений

По построенной квазиинвариантной мере можно получить серию унитарных представлений группы диффеоморфизмов. В данном случае речь идёт о представлениях подгрупп достаточно гладких диффеоморфизмов в $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$, реализуемых в пространстве $\mathrm{H}_\Omega = \mathrm{L}_2(\Omega, \nu)$ квадратично-интегрируемых комплекснозначных функций. Пусть $F \in \mathrm{H}_\Omega$, i — мнимая единица, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\omega = (x,X) \in \Omega$. Тогда данная серия представлений задаётся формулой

$$(U^\lambda_{g^{-1}} F)(\omega) = (\rho_{\nu,g}(\omega))^{\frac{1}{2}+i\lambda} F(L_g(\omega)) \tag{1.1}$$

Будем рассматривать случай неотрицательной $\rho_{\nu,g}$, тогда комплексная степень определена однозначно. Такой случай реализуется, например, при выборе гауссовских мер с всюду положительными плотностями в качестве μ_3 и μ_4; кроме того, в данной работе будет рассматривается действие такой подгруппы диффеоморфизмов, что плотность будет положительна при выборе δ-мер в качестве μ_3 и μ_4. По построению меры ν, вместе с U^λ_g естественно рассматривать серию представлений V^λ_g, реализуемых аналогичной формулой в пространстве $\mathrm{H}_{\Omega'} = \mathrm{L}_2(\Omega',\mu)$. Сплетающим оператором представлений V^λ_g и U^λ_g является оператор $\mathcal{T}_\Phi \colon \mathrm{H}_\Omega \to \mathrm{H}_{\Omega'}$ замены аргумента посредством оператора Φ: если $F \in \mathrm{H}_\Omega$, то $\mathcal{T}_\Phi(F)(\omega) = F(\Phi(\omega))$.

Так как мера ν получена из меры μ посредством биекции Φ, то оператор $\mathcal{T}_\Phi$ является унитарным, а представления V^λ_g и U^λ_g — унитарно эквивалентными. Таким образом, основным объектом рассмотрения будут являться V^λ_g, задаваемые формулой:

$$(V_g^\lambda F)(\omega') = (\rho_{\mu,g^{-1}}(\omega'))^{\frac{1}{2}+i\lambda} F(L'_{g^{-1}}(\omega')),\ \omega' \in \mathrm{H}_{\Omega'}.$$

Отметим, что представление выражается через композицию оператора замены аргумента $R_{\mu,g}\colon F(\omega') \mapsto F(L'_{g^{-1}}(\omega'))$ и оператора умножения на функцию $M_{\mu,g}\colon F(\omega') \mapsto (\rho_{\mu,g^{-1}}(\omega'))^{\frac{1}{2}+i\lambda} F(\omega')$.

1.3.2 Унитарность и достаточное условие непрерывности

Определение 1.3.1. *Стандартным образом, под сильной непрерывностью представлений будем понимать непрерывность отображения* $(g, F) \mapsto U_g^\lambda F$, $g \in G$, $F \in \mathrm{H}_\Omega$.

Теорема 1.3.1. *Представления* U_g^λ *группы* G *в* H_Ω*, задаваемые формулой* (1.1)*, унитарны. Если, кроме того,* U_g^λ *как функции от* g *слабо непрерывны по норме на некотором плотном в* H_Ω *множестве, то они сильно непрерывны.*

Доказательство. Пусть $F_1, F_2 \in \mathrm{H}_\Omega$. Унитарность следует из цепочки равенств:

$$\left\langle U_g^\lambda F_1, U_g^\lambda F_2 \right\rangle = \int\limits_\Omega (\rho_{\nu,g^{-1}}(\omega))^{\frac{1}{2}+i\lambda} F_1(L_{g^{-1}}(\omega)) \overline{(\rho_{\nu,g^{-1}}(\omega))^{\frac{1}{2}+i\lambda} F_2(L_{g^{-1}}(\omega))} \nu(d\omega) =$$
$$= \int\limits_\Omega F_1(L_{g^{-1}}(\omega)) \overline{F_2(L_{g^{-1}}(\omega))} \rho_{\nu,g^{-1}}(\omega) \nu(d\omega) = \int\limits_\Omega F_1(\omega) \overline{F_2(\omega)} \nu(d\omega) = \langle F_1, F_2 \rangle$$

Пусть теперь $g_1, g_2 \in G$, F_0 - функция из заданного плотного множества. Имеем

$$\begin{gathered}
\left\| U_{g_1}^\lambda F_1 - U_{g_2}^\lambda F_2 \right\| \leqslant \left\| U_{g_1}^\lambda F_1 - U_{g_1}^\lambda F_2 \right\| + \left\| U_{g_1}^\lambda F_2 - U_{g_2}^\lambda F_2 \right\| = \\
= \|F_1 - F_2\| + \left\| U_{g_1}^\lambda F_2 - U_{g_2}^\lambda F_2 \right\| \leqslant \\
\leqslant \|F_1 - F_2\| + \left\| U_{g_1}^\lambda F_2 - U_{g_1}^\lambda F_0 \right\| + \left\| U_{g_1}^\lambda F_0 - U_{g_2}^\lambda F_0 \right\| + \left\| U_{g_2}^\lambda F_0 - U_{g_2}^\lambda F_2 \right\| = \\
= \|F_1 - F_2\| + 2\|F_2 - F_0\| + \left\| U_{g_1}^\lambda F_0 - U_{g_2}^\lambda F_0 \right\|
\end{gathered}$$

По условию, функцию F_0 можно выбрать сколь угодно близкой по норме к F_2, для определённости положим F_0 так, что $\|F_2 - F_0\| \leqslant \|F_1 - F_2\|$. Далее, в силу слабой непрерывности оператора представления на F_0 имеем $\left\| U_{g_1}^\lambda F_0 - U_{g_2}^\lambda F_0 \right\| \leqslant \varepsilon_1 (\|g_1 - g_2\|) = \overline{o} (\|g_1 - g_2\|)$. Следовательно, для $\|F_1 - F_2\| < \delta$ и $\|g_1 - g_2\| < \delta$ выполнена оценка

$$\left\| U_{g_1}^\lambda F_1 - U_{g_2}^\lambda F_2 \right\| \leqslant \delta + 2\delta + \varepsilon_1(\delta) = \varepsilon_2(\delta),$$

что и означает непрерывность отображения $(g,F)\mapsto U_g^\lambda F$, то есть сильную непрерывность представлений.

$\square$

В качестве плотного множества естественно выбирать ограниченные функционалы, такой подход существенно упрощает рассуждения, так что далее будем предполагать именно этот случай, если не указано иное. В общем же случае могут потребоваться некие дополнительные ограничения.

Замечание 1.3.1. *При проверке непрерывности оператора умножения на плотность достаточно проверить его непрерывность в точке $g=e$.*

Доказательство. Действительно, в этом случае фактически надо показать, что $\left\|\rho_g^{1/2+i\lambda}-\rho_{g_n}^{1/2+i\lambda}F\right\|\to 0$ для $F\in \mathrm{H}_\Omega$. Тогда, тривиальным образом оценивая F его нормой, нужно показаться сходимость $\left\|\rho_g^{1/2+i\lambda}-\rho_{g_n}^{1/2+i\lambda}\right\|\to 0$.

Воспользуемся тем фактом, что

$$\rho_{g_1}(L_{g_2}\omega)\rho_{g_2}(\omega)=\rho_{g_2\circ g_1}(\omega),$$

являющимся тривиальным следствием определения ρ_g как производной Радона—Никодима под действием группы L_g.

Сделаем замену вида $\omega=L_{g^{-1}}(\omega_1)$, тогда

$$\left\|\rho_g^{1/2+i\lambda}-\rho_{g_n}^{1/2+i\lambda}\right\|^2=$$
$$=\int\limits_\Omega \rho_g(\omega)+\rho_{g_n}(\omega)-\rho_g^{1/2+i\lambda}(\omega)\rho_{g_n}^{1/2-i\lambda}(\omega)-\rho_g^{1/2-i\lambda}(\omega)\rho_{g_n}^{1/2+i\lambda}(\omega)\,\nu(d\omega)=$$
$$=\int\limits_\Omega \rho_g(L_{g^{-1}}(\omega_1))\rho_{g^{-1}}(\omega_1)+\rho_{g_n}(L_{g^{-1}}(\omega_1))\rho_{g^{-1}}(\omega_1)-$$
$$-\rho_g^{1/2+i\lambda}(L_{g^{-1}}(\omega_1))\rho_{g_n}^{1/2-i\lambda}(L_{g^{-1}}(\omega_1))\rho_{g^{-1/2+\lambda}}(\omega_1)\rho_{g^{-1/2-\lambda}}(\omega_1)-$$
$$-\rho_g^{1/2-i\lambda}(L_{g^{-1}}(\omega_1))\rho_{g_n}^{1/2+i\lambda}(L_{g^{-1}}(\omega_1))\rho_{g^{-1/2+\lambda}}(\omega_1)\rho_{g^{-1/2-\lambda}}(\omega_1)\,\nu(d\omega_1)=\int\limits_\Omega 1(\omega_1)+$$
$$+\rho_{g^{-1}\circ g_n}(\omega_1)-\rho_{g^{-1}\circ g_n}^{1/2+i\lambda}(\omega_1)-\rho_{g^{-1}\circ g_n}^{1/2-i\lambda}(\omega_1)\,\nu(d\omega_1)=\left\|1-\rho_{g^{-1}\circ g_n}^{1/2+i\lambda}\right\|^2,$$

откуда вытекает искомое утверждение. $\square$

1.3.3 Достаточное условие неприводимости

Доказательство неприводимости представлений, задаваемых формулой 1.1, основывается на сведение к из хорошо известному результату теории представлений:

Утверждение 1.3.1. *(I. Schur's lemma) Пусть V - унитарное представление группы G в комплексном гильбертовом пространстве* H. *Тогда равносильны утверждения:*

1. *Представление V неприводимо.*
2. *Пусть $S\colon \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ - линейный непрерывный оператора такой, что $SV_g = V_g S$ для $\forall g \in G$. Тогда оператор S скалярен.*

В литературе описаны различные варианты данного утверждения, за доказательством в приведённой формулировке см, например, в [33, Proposition 95].

Если удаётся показать, что оператор S из леммы Шура коммутирует с достаточно произвольным оператором умножения на функцию, то это позволяет свести анализ неприводимости к исследованию свойств оператора замены аргумента посредством действия группы. Если оператор этого действия подобран удачно и индуцирует эргодическое действие (как, например $L'_g\colon Z \to Z + Q$, где Q является более гладкой аддитивной добавкой), то он может быть только константой. Следующая теорема даёт полную реализацию описанной схемы.

Теорема 1.3.2. *Рассмотрим представления $U_g = M_g \circ R_g$ группы G в пространстве H_Ω, задаваемые формулой 1.1. Пусть $S\colon \mathrm{H}_\Omega \to \mathrm{H}_\Omega$ - линейный непрерывный оператор, коммутирующий с всеми операторами представления U_g, $g \in G$, D - некоторое подмножество в H_Ω, содержащее константы. Пусть, кроме того, для $\forall g \in G$ выполнены следующие условия:*

1. *S коммутирует с M_g на $R_g D$,*
2. *$M_g^* D$ плотно в H_Ω, где M_g^* — сопряжённый к M_g в H_Ω,*
3. *Если функционал $F_0 \in \mathrm{H}_\Omega$ инвариантен относительно действия группы G, то он суть константа (то есть скалярный оператор на Ω).*

Тогда представления U_g неприводимы.

Доказательство. Пусть $F_1, F_2 \in D$, $g \in G$. По определению U_g имеем

$$\langle F_1, SU_gF_2\rangle = \langle F_1, U_gSF_2\rangle \Leftrightarrow \langle F_1, SM_gR_g, F_2\rangle = \langle F_1, M_gR_gSF_2\rangle.$$

В силу условия 1 оператор S коммутирует с оператором M_g умножения на функцию, откуда

$$\langle F_1, SM_gR_gF_2\rangle = \langle F_1, M_gR_gSF_2\rangle \Leftrightarrow \langle F_1, M_gSR_gF_2\rangle = \langle F_1, M_gR_gSF_2\rangle.$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$\langle F_1, M_gSR_gF_2\rangle = \langle F_1, M_gR_gSF_2\rangle \Leftrightarrow \left\langle M_g^*F_1, SR_gF_2\right\rangle = \left\langle M_g^*F_1, R_gSF_2\right\rangle.$$

Полагая $F_1' = M_g^*F_1$, получаем

$$\left\langle M_g^*F_1, SR_gF_2\right\rangle = \left\langle M_g^*F_1, R_gSF_2\right\rangle \Leftrightarrow \langle F_1', SR_gF_2\rangle = \langle F_1', R_gSF_2\rangle.$$

В силу условия 2 функционалы F_1' плотны в H_Ω, откуда для $\forall g \in G$ и $F_2 \in D$:

$$\langle F_1, SU_gF_2\rangle = \langle F_1, U_gSF_2\rangle \Leftrightarrow SR_gF_2 = R_gSF_2.$$

Пусть $C(Z) = \mathrm{const}$ для $\forall Z \in \Omega$, $C \in \mathrm{H}_{\Omega'}$. Положим $F_0 = SC$. Имеем, согласно определению F_0 и R_g:

$$F_0(L_gZ) = (SC)(L_gZ) = (R_gSC)(Z).$$

Далее, в силу коммутационного соотношения, полученного для оператора R_g,

$$(R_gSC)(Z) = (SR_gC)(Z) = (S(R_gC))(Z) = (SC)(Z) = F_0(Z).$$

Заметим теперь, что константы инварианты относительно действия R_g, таким образом

$$(SR_gC)(Z) = (S(R_gC))(Z) = (SC)(Z) = F_0(Z).$$

Окончательно, $F_0(L_gZ) = F_0(Z)$, то есть функция F_0 инвариантна относительно сдвигов L_g. В силу условия 3 это означает, что F_0 константа, то есть, учитывая определение F_0, что S - константа. Согласно утверждению 1.3.1 это равносильно неприводимости представления U_g в H_Ω.

□

Замечание 1.3.2. *При применении теоремы 1.3.2 основную сложность составляет проверка первого условия, в настоящей диссертации этому, фактически, посвящена отдельная глава. Подбор множества D обычно не является проблемой, типичным образом рассматриваются непрерывные ограниченный функционалы с ограниченным носителем. Проверка последнего же условия сильно зависит от конкретного вида действия. Так, в работе А.А. Дособицкого [29] для этого применяется эргодическая теорема Гросса, а в данной диссертации используется свойство эргодичности меры Винера при линейных сдвигах.*

Глава 2. Явный вид производной Радона—Никодима

Эта глава посвящена нахождению явного аналитического выражения для производной Радона—Никодима, соответствующей компоненте пространства Ω', на которой сосредоточена мера Винера.

Идея, позволяющая получить такое выражение, заключена в анализе изменения конечномерных проекций построенной меры. Для этого оказывается достаточным определить дискретные приближения $T^n(t)$ для хронологической экспоненты $T(t)$ в виде ступенчатой функции, построенной по точкам $T_k = \prod\limits_{l=1}^{k}(E + (t_l - t_{l-1})Z(t_l))$ (Z - траектория из второй компоненты пространства Ω', произведение понимается в порядке возрастания индексов), которые будут сходить к $T(t)$ в среднеквадратичном по мере Винера.

Выражение для производной Радона—Никодима будет представлено с помощью стохастического интеграла Ито, что даёт возможность сформулировать результат в инвариантном виде для более широкого, в смысле гладкости, класса диффеоморфизмов.

2.1 Выражение производной Радона—Никодима с помощью стохастического интеграла Ито

Теорема 2.1.1. *Пусть $g \in \mathrm{Diff}^2(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$, такая, что $\exists g'''$ - ограниченная борелевская функция. Тогда существует определённая μ_2-почти всюду*

$$\tfrac{d\mu_2^g}{d\mu_2}(z,Z,\hat{z},\hat{Z}) = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\langle Q',Q'\rangle - \frac{1}{\sigma^2}\langle Q',Z'\rangle},$$

где $\langle Q', Z'\rangle = \int\limits_0^1 \mathrm{tr}\, Q'(t)\, dZ^*(t)$ понимается как стохастический интеграл Ито [34, 35].

Для пояснения корректности использования интеграла Ито отметим, что изменение начальной точки $Z^0 = Z(0)$ траектории Z под действием L'_g не зависит от Z^1, таким образом можно рассматривать интеграл Ито в том смысле, что вместо стандартной меры Винера $W = W^0$ (с дисперсией σ^2) взята мера $W^{Z(0)}$, сосредоточенная на функциях, выходящих из $Z(0)$.

Кроме того, конструкция стохастического интеграла использована здесь в несколько нестандартной форме и требует дополнительных пояснений. В классическом случае многомерный интеграл Ито определяется для матричных функций f, каждая компонента которых должна удовлетворять следующим условиям:

1. функция $(t, Z) \mapsto f(t, Z)$ является $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ измеримой, где $\mathcal{B}$ - борелевская σ-алгебра на $[0, 1]$, а $\mathcal{F}$ порождена Z
2. Существует возрастающее семейство σ-алгебр $\mathcal{H}_t$ такое, что $Z(t)$ мартингал относительно $\mathcal{H}_t$ и $f(t, \cdot)$ - $\mathcal{H}_t$-согласована. В нашем случае в качестве $\mathcal{H}_t$ рассматривается σ-алгебра, порождённая $\{Z(\tau)\colon \tau < t\}$.
3. $W(Z\colon \int\limits_0^1 f(t,Z)^2\, dt < \infty) = 1$

Далее ясно, что нет принципиальной разницы в представлении винеровского процесса в виде вектор-столба [34], или в представлении через матричную форму, использованном здесь.

Замечание 2.1.1. *Производная Радона-Никодама меры ν задаётся соотношением* $\rho_{\nu,g}(x,X) = \frac{d\nu^g}{d\nu}(x,X) = \frac{d\mu^g}{d\mu}(\Phi(x,X))$.

Доказательство. По построению:

$$\int\limits_{\Omega} F(x,X)\, \nu(dx \times dX) = \int\limits_{\Omega'} F(x(z,Z,\hat{z},\hat{Z}),X(z,Z,\hat{z},\hat{Z}))\, \mu(dz \times dZ \times d\hat{z} \times d\hat{Z})$$

Таким образом, достаточно установить квазиинвариантность μ под действием L'_g.

При указанных ограничениях будет выполнена теорема Фубини. Имеем:

$$\int\limits_{\Omega'} F(z,Z,\hat{z},\hat{Z}) \mu(\, dz \times\, dZ \times\, d\hat{z} \times\, d\hat{Z}) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{M}_\mathrm{d}} \int\limits_{\mathbb{R}^\mathrm{d}} \int\limits_{\mathrm{C}^1([0,1],\ \mathbb{R}^\mathrm{d})} \left(\int\limits_{\mathrm{C}([0,1],\ \mathbb{M}_\mathrm{d})} F(z,Z,\hat{z},\hat{Z})\, \mu_2(dZ) \right) \mu_1(dz)\, \mu_3(d\hat{z})\, \mu_4(d\hat{Z})$$

Прямым вычислением находятся $\frac{d\mu_1^g}{d\mu_1} = 1$, $\frac{d\mu_3^g}{d\mu_3} = \frac{\rho_3(g(\hat{z}))}{\rho_3(\hat{z})}|g'(\hat{z})|$, $\frac{d\mu_4^g}{d\mu_4} = \frac{\rho_4(g'(\hat{z})\hat{Z})}{\rho_4(\hat{Z})}|g'(\hat{z})|$. Изменение начальной точки на $\mathrm{C}([0,1], \mathbb{M}_\mathrm{d})$ описывается соотношением $U(0) = Z(0) + Q(0)$, где $Q(0) = \hat{Z}^{-1}(g'(\hat{z}))^{-1}g''(\hat{z})\hat{Z}z(0)\hat{Z}$ не зависит от Z. Мера Лебега инвариантна относительно сдвигов, так что вклад в производную Радона—Никодима даст только стандартная мера Винера на

$\mathrm{C}_0([0{,}1],\, \mathbb{M}_\mathrm{d})$ (с дисперсией σ^2). Следовательно, для нахождения $\frac{d\mu_2^g}{d\mu_2}$, нужно исследовать изменение стандартной меры Винера W под действия сужения отображения L'_g на $\mathrm{C}_0([0{,}1],\, \mathbb{M}_\mathrm{d})$ при фиксированных z, $\hat{z}$ и $\hat{Z}$. Будем считать, что Z_{C_0} and U_{C_0} обозночает $\mathrm{C}_0([0{,}1],\, \mathbb{M}_\mathrm{d})$ компоненту $\mathbb{M}_\mathrm{d} \times \mathrm{C}_0([0{,}1],\, \mathbb{M}_\mathrm{d})$, то есть $Z_{C_0}(t) := Z(t) - Z(0)$, $U_{C_0}(\cdot) := U(\cdot) - U(0) \in \mathrm{C}_0([0{,}1],\, \mathbb{M}_\mathrm{d})$. Для упрощения обозначений индекс C_0 будем опускать. Итого, нужно найти $\frac{dW^g}{dW}(Z)$ такую, что для борелевского множества $\mathfrak{U} = L_g\mathfrak{Z} \subseteq \mathrm{C}_0([0{,}1],\, \mathbb{M}_\mathrm{d})$ выполнено:

$$W^g(\mathfrak{U}) = W(L'_{g^{-1}}\mathfrak{U}) = \int\limits_{L_g\mathfrak{Z}} \tfrac{dW^g}{dW}(Z)\, W(dZ)$$

Рассмотрим последовательность вложенных разбиений $0{=}t_0{<}t_1{<}\ldots{<}t_n{\leq}1$ отрезка $[0{,}1]$. Здесь и далее будем считать, что стремление $n{\to}\infty$ согласовано со сходимостью диаметра разбиения $\Delta \to 0$.

Введём оператор проекции $p_n : \mathrm{C}_0([0{,}1],\, \mathbb{M}_\mathrm{d}) \to \mathbb{M}_\mathrm{d}^n$:

$$p_n(U) = (U(t_1), \ldots, U(t_n))$$

Для проекции $p_n(U)$ функции $U \in \mathrm{C}_0([0{,}1],\, \mathbb{M}_\mathrm{d})$ построим линейную (покомпонентно) аппроксимацию $l_n(p_n(U))$ с узлами в точках $U_k = U(t_k)$, $k = \overline{1{,}n}$, причем, так как мера Винера сосредоточена на $\mathrm{C}_0([0{,}1],\, \mathbb{M}_\mathrm{d})$, то потребуем $(l_n(p_n(U)))(0) = 0$, то есть положим $U_0 = 0$. Таким образом, $l_n\colon \mathbb{M}_\mathrm{d}^n \to \mathrm{C}_0([0{,}1],\, \mathbb{M}_\mathrm{d})$ является оператором, ставящим линейную аппроксимацию в соответствие проекции. Подразумевая сходимость в равномерной норме, имеем $l_n(U) \to U$.

Рассмотрим непрерывный ограниченный неотрицательный функционал F на $\mathrm{C}_0([0{,}1],\, \mathbb{M}_\mathrm{d})$ и его дискретные приближения $F_n(U) = F(l_n(p_n(U)))$. В силу непрерывности F для любой функции $U \in \mathrm{C}_0([0{,}1],\, \mathbb{M}_\mathrm{d})$ имеем сходимость $F_n(U) \to F(U)$ при $\Delta \to 0$.

Стандартным образом вместо индикаторов можно рассмотреть любое плотное над $\mathrm{C}_0([0{,}1],\, \mathbb{M}_\mathrm{d})$ множество функционалов; в данном случае удобно рассмотреть непрерывные ограниченные неотрицательные с ограниченным носителем. Приблизим меру Винера цилиндрическими мерами, а искомую производную вычислим с помощью предельного перехода. Так как L'_g - непрерывная биекция, то мера квазиинвариантна, и, значит, предел будет существовать и не зависеть от выбора разбиений.

Обозначим с помощью «*» операцию сопряжения (в нашем вещественном случае - транспонирование). Для матрицы $\hat{U} \in \mathbb{M}_{\mathrm{d}}$ имеем $\mathrm{tr}\hat{U}\hat{U}^* = \sum_{i,j=1}^{d} \hat{U}_{i,j}^2$. Под интегралом по $U_k \in \mathbb{M}_{\mathrm{d}}$ будем понимать покомпонентное интегрирование по $(U_k)_{i,j}$, $1 \le i,j \le d$. Тогда интеграл от $F_n(U)$ по мере Винера представляется в виде интеграла Лебега (подробнее в [35]):

$$\int\limits_{\mathrm{C}_0([0,1],\ \mathbb{M}_{\mathrm{d}})} F(l_n(p_n(U)))\,W(dU) =$$
$$= \left((\sigma^2 2\pi)^n \prod_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})\right)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{\mathbb{M}_{\mathrm{d}}^n} F(l_n(U_1,\ldots,U_n)) \cdot$$
$$\cdot\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{tr}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(U_k-U_{k-1})(U_k-U_{k-1})^*}{t_k-t_{k-1}}}\, dU_1,\ldots,dU_n$$

Отображение L'_g приблизим с помощью дискретных отображений L'^n_g. Сокращая на нормирующий множитель, который зависит только от выбора точек разбиения и считая $U_k = \left(L'^n_g(Z_1,\ldots,Z_n)\right)_k$, получаем:

$$\int\limits_{\mathbb{M}_{\mathrm{d}}^n} F(l_n(U_1,\ldots,U_n)) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{tr}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(U_k-U_{k-1})(U_k-U_{k-1})^*}{t_k-t_{k-1}}}\, dU_1\ldots dU_n =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{M}_{\mathrm{d}}^n} F(l_n(U_1,\ldots,U_n)) \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{tr}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(U_k-U_{k-1})(U_k-U_{k-1})^*}{t_k-t_{k-1}}}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{tr}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(Z_k-Z_{k-1})(Z_k-Z_{k-1})^*}{t_k-t_{k-1}}}} \cdot$$
$$\cdot\, J_{L'^n_g}(Z_1,\ldots,Z_n) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{tr}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(Z_k-Z_{k-1})(Z_k-Z_{k-1})^*}{t_k-t_{k-1}}}\, dZ_1\ldots dZ_n$$

Производная Радона—Никодима дискретных отображений имеет вид:

$$\rho_g^n = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{tr}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(U_k-U_{k-1})(U_k-U_{k-1})^* - (Z_k-Z_{k-1})(Z_k-Z_{k-1})^*}{t_k-t_{k-1}}} J_{L'^n_g}(Z_1,\ldots,Z_n)$$

Построим теперь семейство отображений L'^n_g: $(Z_1,\ldots,Z_n) \to (U_1,\ldots,U_n)$. Простой подстановкой имеем:

$$U(t) = Z(t) + Q(t) - Z(0) - Q(0) = Z(t) + (\hat{Z}T(t))^{-1} \left(g'(\hat{z} + \hat{Z}\int\limits_0^t T(\tau)z(\tau)\,d\tau)\right)^{-1} \cdot$$
$$\cdot\, g''(\hat{z} + \hat{Z}\int\limits_0^t T(\tau)z(\tau)\,d\tau)\hat{Z}T(t)z(t)\hat{Z}T(t) - Z(0) - Q(0)$$

$Q(t)$ зависит от Z только через $T(Z)$; задав $T^n(t) = T^n(t, Z_1, \ldots, Z_n)$, получим отображение L'^n_g

Далее, $X(t) = \hat{Z}T(t)$, $Z(t) = X^{-1}(t)X'(t)$, построим дискретное приближение для $X(t)$. Для этого положим $Z_k = X_{k-1}^{-1}\frac{X_k - X_{k-1}}{\Delta_k}$, $k = \overline{1,n}$, $\hat{Z} = X_0$, откуда находится явное выражение X через Z:

$$\hat{Z}T_k := X_k = X_{k-1}(E+\Delta_k Z_k) = \ldots = \hat{Z}\prod_{l=1}^{k}(E+\Delta_l Z_l), \qquad 1 \le k \le n$$

Замечание 2.1.2. *Так как в общем случае* $[Z_i,Z_j] \neq 0$*, то произведения понимаются в порядке возрастания индекса:* $\prod\limits_{l=1}^{k}(E+\Delta_l Z_l) = (E+\Delta_1 Z_1)\cdot(E+\Delta_2 Z_2)\cdot \ldots \cdot (E+\Delta_k Z_k)$*. Это отвечает выбору порядка множителей в определении T-экспоненты. Кроме того, считаем* $T_0 = E$*.*

Определение 2.1.1. *Под* $s_n(\xi_0,\ldots,\xi_{n-1})$ *будем понимать ступенчатую (покомпонентно) функцию, построенную по* $\xi_0,\ldots,\xi_{n-1}$ *в рамках текущего разбиения, то есть* $s_n(\xi_0,\ldots,\xi_{n-1})(t) = \sum\limits_{k=1}^{n}\xi_{k-1}\mathrm{I}_{[t_{k-1},t_k)}(t)$*, где* $\mathrm{I}_{[t_{k-1},t_k)}(t)$ *- индикатор* $[t_{k-1},t_k)$*.*

T^n теперь определим как ступенчатую функцию, построенную по $\{T_k\}$:

$$T^n(t) = s_n(T_0,\ldots,T_{n-1})(t)$$

T^n задаёт $L_g'^n$ заменой $T(t)$ на $T^n(t)$.

Лемма 2.1.1. *Якобиан* $J_{L_g'^n}(Z_1,\ldots,Z_n)$ *отображения* $L_g'^n$ *равен единице.*

Доказательство. $Q^n(t)$ не зависит от Z_k при $t \leqslant t_k$. □

Замечание 2.1.3. *Существенно, что* $T^n(t_k)$ *не зависит от* Z_k*. В противном случае, определённая ниже ступенчатая функция, приближающая* Q' *на* $[t_{k-1},t_k)$ *с помощью* $\frac{Q_k-Q_{k-1}}{\Delta_k}$*, зависела бы от* $Z(t_k)$*. В этом случае её значение в точке* t_{k-1} *зависит от* $Z(t_k)$*, чем нарушает условие измеримости относительно соответствующей Винеровскому процессу* σ*-алгебре в определении интеграла Ито как пределе интегралов от последовательности ступенчатых функций, и утверждаемое ниже было бы не верно.*

Дальнейшее рассуждение аналогично второй части доказательства теоремы 1 из [29] и базируется на технической лемме 2.2.3.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} l_n(p_n(U)) = U$ и $\lim\limits_{n\to\infty} l_n(L_g'^n(p_n(U))) = L_g'(U)$, то в силу выбора F и лемм 2.1.1 и 2.2.3 имеют место сходимости по мере:

$$\lim_{n\to\infty} F(l_n(p_n(U))) = U \qquad \lim_{n\to\infty} F(l_n(L_g'^n(p_n(U))))\rho_g^n(p_n(U)) = F(L_g'(U))\rho_g(U)$$

В силу сходимости по мере можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду. Таким образом, можно считать, что W-пв

$$\lim_{n\to\infty} F(l_n(L_g'^n(p_n(Z))))\rho_g^n(p_n(Z)) = F(L_g'(Z))\rho_g(Z)$$

По теореме Егорова для $\forall m$ найдётся борелевское множество A_m меры $1-2^{-m}$ на котором эта сходимость будет равномерной. Пусть $B_m = \bigcap\limits_{i=m} \infty A_i$, откуда B_m образуют вложенную последовательность, $W(B_m) \geqslant 1-2^{1-m}$, и выполнено:

$$\int\limits_{B_m} F(L'_g(Z))\rho_g(Z)\,W(dZ) = \lim_{\Delta\to 0}\int\limits_{B_m} F(l_n(L'^n_g(p_n(Z))))\rho^n_g(p_n(Z))\,W(dZ) \leq$$
$$\leq \lim_{\Delta\to 0}\int\limits_{\mathrm{C}_0([0,1],\ \mathbb{M}_\mathrm{d})} F(l_n(L'^n_g(p_n(Z))))\rho^n_g(p_n(Z))\,W(dZ) =$$
$$= \lim_{\Delta\to 0}\int\limits_{\mathrm{C}_0([0,1],\ \mathbb{M}_\mathrm{d})} F(l_n(p_n(U)))\,W(dU) = \int\limits_{\mathrm{C}_0([0,1],\ \mathbb{M}_\mathrm{d})} F(U)\,W(dU)$$

где первый переход верен в силу равномерной сходимости на B_m, второй - в силу неотрицательности функций F и ρ_n, третий - в силу определения ρ_n, и четвертый - в силу теоремы Лебега о мажорантной сходимости. Переходя к пределу в полученном неравенстве, по теореме Леви получаем

$$\int\limits_{\mathrm{C}_0([0,1],\ \mathbb{M}_\mathrm{d})} F(L'_g(Z))\rho_g(Z)\,W(dZ) \leqslant \int\limits_{\mathrm{C}_0([0,1],\ \mathbb{M}_\mathrm{d})} F(U)\,W(dU)$$

Далее, применим это неравенство к $F(L'_g(Z))\rho_g(Z)$ вместо $F(U)$ и взяв g^{-1} вместо g. Тогда:

$$\int\limits_{\mathrm{C}_0([0,1],\ \mathbb{M}_\mathrm{d})} F(L'_g(Z))\rho_g(Z)\,W(dZ) \geqslant \int\limits_{\mathrm{C}_0([0,1],\ \mathbb{M}_\mathrm{d})} F(U)\rho_g(L'_{g^{-1}}(U))\rho_{g^{-1}}(U)\,W(dU) =$$
$$= \int\limits_{\mathrm{C}_0([0,1],\ \mathbb{M}_\mathrm{d})} F(U)\,W(dU)$$

Из последних двух неравенств следует утверждение теоремы. □

2.2 Доказательства технических лемм

Доказательство леммы 2.2.3 базируется на известном свойстве Винеровского процесса (лемма 2.2.1) и оценке сходимости дискретных приближений Т-экспоненты с помощью формулы Вика (лемма 2.2.2).

Определение 2.2.1. *Введём векторную норму на* $\mathbb{M}_\mathrm{d}$*:* $\langle A,B\rangle_{\mathbb{M}_\mathrm{d}} = \mathrm{tr}AA^*$, $\|A\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}} = \langle A,A\rangle_{\mathbb{M}_\mathrm{d}} = \mathrm{tr}AA^*$. *Через* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *будем обозначать скалярное произведение (симметрично в силу вещественности пространства) на* $\mathrm{C}([0,1],\ \mathbb{M}_\mathrm{d})$*:*

$$\langle A,B\rangle = \int\limits_0^1 \mathrm{tr}A(t)B^*(t)\,dt = \int\limits_0^1 \langle A(t),B(t)\rangle_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}\,dt,\quad \|A\|^2 = \langle A,A\rangle$$

Данное обозначение для нормы (без уточнения пространства) будем использовать только в этом разделе.

2.2.1 Зависимость приращений в среднем по мере Винера

Лемма 2.2.1. *Пусть $t_1 < t_2$, $t_3 < t_4$,* mes *- мера Лебега,* d *- размерность пространства, E - единичная матрица, W - мера Виннера. Будем понимать интегрирование по $W(dZ)$ покомпонентно, то есть по $W(dZ_{i,j})$, $i,j = \overline{1,d}$. Тогда*

$$\mathsf{M}\left\langle Z(t_2) - Z(t_1), Z(t_4) - Z(t_3)\right\rangle_{\mathbb{M}_\mathrm{d}} =$$
$$= \int\limits_{\mathrm{C}_0([0,1],\ \mathbb{M}_\mathrm{d})} \mathrm{tr}(Z(t_2) - Z(t_1))(Z(t_4) - Z(t_3))^*\, W(dZ) = \ \mathrm{d}^2\sigma^2 \mathrm{mes}\{[t_1,t_2] \cap [t_3,t_4]\}$$

Доказательство. Лемма является тривиальным обобщением одномерного случая: $\int (Z(t_2) - Z(t_1))(Z(t_4) - Z(t_3))\, W(dZ)$ равен $\sigma^2(t_2 - t_1)$ если отрезки $[t_1,t_2]$ и $[t_3,t_4]$ совпадают, и равен нулю, если пересечение их пусто (см [35, с. 38]). Множитель d^2 возникает вследствие того, что в след попадают квадраты всех d^2 матричных элементов. □

2.2.2 Дискретное приближение для хронологической экспоненты

Замечание 2.2.1. *С целью упрощения обозначений, при доказательстве леммы 2.2.2 дисперсию σ^2 будем опускать, так как во всех выражениях она участвует в качестве множителя, что не оказывает влияния на целевое свойство сходимости.*

Утверждение 2.2.1. *(G.C. Wick, [37]) Пусть $x_1, \ldots, x_k$ - гауссов вектор с нулевым математическим ожиданием, $f_1, \ldots, f_{2n}$ - линейный функции от $x_1, \ldots, x_k$. Тогда*

$$\mathsf{M}\left(f_1 \cdot \ldots \cdot f_{2n}\right) = \sum \left(\mathsf{M}(f_{p_1}, f_{q_1}) \cdot \ldots \cdot \mathsf{M}(f_{p_n}, f_{q_n})\right),$$

где суммирование в правой части ведётся по всем разбиениям множества $\{1,\ldots,2n\}$ *на пары* (p_i,q_i) *с* $p_1<\ldots<p_n$ *и* $p_i<q_i$ *для* $\forall i$. *Число слагаемых в правой части равно* $(2n-1)!!$

Лемма 2.2.2. *Пусть* $\Delta = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \Delta_k \to 0$ *при* $n\to\infty$. *Тогда* $\sup\limits_{t\in[0,1]} \mathsf{M}\,\|T(t)-T^n(t)\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}} \to 0$ *по мере* W.

Доказательство. $\sup\limits_{t\in[0,1]} \mathsf{M}\,\|T(t)-T^n(t)\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}} = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \sup\limits_{t\in[t_{k-1},t_k)} \mathsf{M}\,\|T(t)-T_{k-1}\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}$

$$\begin{aligned}\|T(t)-T_{k-1}\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}} &\leqslant 2\,\|T(t)-T(t_{k-1})\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}} + \|T(t_{k-1})-T_{k-1}\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}} = \\ &= 2\,\|T'(\xi)\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}(t-t_{k-1})^2 + 2\,\|T(t_{k-1})-T_{k-1}\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}} = \\ &= 2\,\|T(\xi)Z(\xi)\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}(t-t_{k-1})^2 + 2\,\|T(t_{k-1})-T_{k-1}\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}\end{aligned}$$

Таким образом, перенумеровав индексы, надо доказать, что

$$\mathsf{M}\,\|T(t_k)-T_k\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}} \to 0.$$

Имеет место представление T-экспоненты в виде ряда [32]:

$$T(t) = e^{\int\limits_0^t Z(\tau)\,d\tau} = E + \int\limits_0^t Z(\tau_1)\,d\tau_1 + \ldots + \int\limits_0^t \int\limits_0^{\tau_{k-1}} \ldots \int\limits_0^{\tau_1} Z(\tau_1)\ldots Z(\tau_k)\,d\tau_1\ldots d\tau_k + \ldots$$

Вообще говоря, для случая $\int\limits_0^t \|Z(t)\|_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}\,dt < \infty$ существует $T(t)$ как $\lim\limits_{\Delta\to 0} e^{Z_1\Delta_1}\ldots e^{Z_n\Delta_n}$, откуда корректность нашей аппроксимации очевидна. Однако, в отсутствии хорошей ссылки докажем явно.

Так как $\exists C(\varepsilon)$ такая, что на множестве $1-\varepsilon$ меры $Z(t)\leqslant C$ для $\forall t\in[0,1]$, то данный ряд сходится на нём. Аналогично сходится последовательность T^n при $\max\limits_k \Delta_k \to 0$. Преобразуем T_m в сумму:

$$T_m = \prod_{l=1}^m (E+\Delta_l Z_l) = E + \sum_{l_1=1}^m \Delta_{l_1} Z_{l_1} + \ldots +$$
$$+ \sum_{l_1=1}^m \sum_{l_2<l_1} \ldots \sum_{l_k<l_{k-1}} Z_{l_k}\ldots Z_{l_1}\Delta_{l_k}\ldots\Delta_{l_1} + \ldots + Z_m\ldots Z_1\Delta_m\ldots\Delta_1$$

Для произвольного $\varepsilon>0$ воспользуемся неравенством треугольника и откинем хвосты этих двух рядов. Заметим, что при $\delta<\delta_0=\delta_0(\varepsilon)$ для n-го члена имеет место оценка $(C^n\delta_0)^n$, и, значит, мы можем считать N зависящим только от ε. Оставшихся N пар слагаемых сгруппируем и применим неравенство Йенсена. Предполагая $n>N$, а также зависимость $t_k=t_k(n)$ и $k=k(n)$, получим:

$$\mathsf{M}\left\|T(t_k)-T_k\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}} \leqslant N(\varepsilon)\sum_{m=1}^{N}\mathsf{M}\left\|\int\limits_0^{t_k}\int\limits_0^{\tau_{m-1}}\ldots\int\limits_0^{\tau_1} Z(\tau_1)\ldots Z(\tau_m)\,d\tau_1\ldots d\tau_m - \right.$$

$$\left. -\sum_{l_1=1}^{k}\sum_{l_2<l_1}\ldots\sum_{l_m<l_{m-1}} Z_{l_m}\ldots Z_{l_1}\Delta_{l_m}\ldots\Delta_{l_1}\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}} + \varepsilon$$

Для первой разности можно явно получить более точную оценку:

$$\mathsf{M}\left\|\int\limits_0^{t_k} Z(\tau)\,d\tau - \sum_{l=1}^{k}\Delta_l Z_l\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}} = \mathsf{M}\left\|\sum_{l=1}^{k}\int\limits_{t_{l-1}}^{t_l} Z(\tau)-Z_l\,d\tau\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}} =$$

$$= \mathsf{M}\sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{k}\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p}\int\limits_{t_{q-1}}^{t_q}\mathrm{tr}\,(Z(\tau_p)-Z_p)\,(Z(\tau_q)-Z_q)^*\,d\tau_p\,d\tau_q =$$

$$= \sum_{l=1}^{k}\int\limits_{t_{l-1}}^{t_l}\int\limits_{t_{l-1}}^{t_l}\mathsf{M}\mathrm{tr}\,(Z(\tau_p)-Z_l)\,(Z(\tau_q)-Z_l)^*\,d\tau_p\,d\tau_q =$$

$$= \mathrm{d}^2\sum_{l=1}^{k}\int\limits_{t_{l-1}}^{t_l}\int\limits_{t_{l-1}}^{t_l} t_l-\tau_q-\tau_p+\min(\tau_p,\tau_q)\,d\tau_p\,d\tau_q =$$

$$= \mathrm{d}^2\sum_{l=1}^{k}\int\limits_{t_{l-1}}^{t_l}\int\limits_{t_{l-1}}^{t_l} t_l-\max(\tau_p,\tau_q)\,d\tau_p\,d\tau_q = \sum_{l=1}^{k}\frac{\mathrm{d}^2}{3}\Delta_l^3$$

где в 4ом переходе применена лемма 2.2.1 и учтено, что матожидание на непересекающихся отрезках даёт нулевой вклад.

Разобраться с остальными слагаемыми помогает формула Вика. Переходя, как в первой разности, к $2m$-кратному интегралу, получаем, что нужно вычислить

$$\mathsf{M}\mathrm{tr}\,(Z(\tau_{p_m})\ldots Z(\tau_{p_1})-Z_{p_m}\ldots Z_{p_1})\,(Z(\tau_{q_m})\ldots Z(\tau_{q_1})-Z_{q_m}\ldots Z_{q_1})^* =$$
$$= \mathsf{M}\mathrm{tr}Z(\tau_{p_m})\ldots Z(\tau_{p_1})\,(Z(\tau_{q_m})\ldots Z(\tau_{q_1}))^* - \mathsf{M}\mathrm{tr}Z(\tau_{p_m})\ldots Z(\tau_{p_1})\,(Z_{q_m}\ldots Z_{q_1})^* -$$
$$- \mathsf{M}\mathrm{tr}Z_{p_m}\ldots Z_{p_1}\,(Z(\tau_{q_m})\ldots Z(\tau_{q_1}))^* + \mathsf{M}\mathrm{tr}Z_{p_m}\ldots Z_{p_1}\,(Z_{q_m}\ldots Z_{q_1})^*$$

Применяя (покомпонентно) формулу Вика для каждого из произведений, в результате получаем некоторую сумму по разбиениям множества индексов. Сгруппировав слагаемые, соответствующие одинаковому выбору индексов, получим

$$\sum\prod_{i=1}^{m}\mathsf{M}\mathrm{tr}Z(\tau_{\alpha_i})Z^*(\tau_{\beta_i}) - \prod_{i=1}^{m}\mathsf{M}\mathrm{tr}Z(\tau_{\alpha_i})Z^*_{\beta_i} - \prod_{i=1}^{m}\mathsf{M}\mathrm{tr}Z_{\alpha_i}Z^*(\tau_{\beta_i}) + \prod_{i=1}^{m}\mathsf{M}\mathrm{tr}Z_{\alpha_i}Z^*_{\beta_i}$$

Видно, что каждое слагаемое внешней суммы оценивается как $C\Delta^m$, так как в качестве минимального при вычислении математического ожидания для выбранной пары индексов берётся синхронно левое или правое в каждом из соответствующих множителей. Число слагаемых в сумме по формуле Вика равно $(2m-1)!! < 2m!! = 2^m m!$. Снаружи стоит $2m$-кратное интегрирование и m-кратное (так как перешли только на пересекающиеся отрезки разбиения) суммирование. Итого имеем оценку $\underbrace{\sum \ldots \sum}_{m} C_1 \Delta^m 2^m m! \frac{\Delta^m}{m!} \frac{\Delta^m}{m!} \leqslant C_2(N)\Delta^{2m}$, из которое следует утверждение леммы.

$\square$

2.2.3 Предельное значение дискретных приближений производной Радона—Никодима

Лемма 2.2.3. *$\rho_g^n(p_n(Z))$ сходятся по мере W к $\rho_g(Z) = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\langle Q',Q'\rangle - \frac{1}{\sigma^2}\langle Q',Z'\rangle}$.*

Доказательство. Фактически нужно показать, что W-пн

$$\exists \lim_{\Delta\to 0} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{tr}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{\Delta U_k}{\Delta_k}\frac{\Delta U_k^*}{\Delta_k}\Delta k - \frac{\Delta Z_k}{\Delta_k}\frac{\Delta Z_k^*}{\Delta_k}\Delta_k\right)} = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\langle Q',Q'\rangle} e^{-\frac{1}{\sigma^2}\langle Q',Z'\rangle}$$

Так как пространство вещественное, то $\mathrm{tr}AB^* = \mathrm{tr}A^*B$. Имеем:

$$\mathrm{tr}\frac{\Delta U_k \Delta U_k^* - \Delta Z_k \Delta Z_k^*}{\Delta_k} = \mathrm{tr}\frac{(\Delta Z_k + \Delta Q_k)(\Delta Z_k + \Delta Q_k)^* - \Delta Z_k \Delta Z_k^*}{\Delta_k} = \mathrm{tr}\frac{2\Delta Q_k \Delta Z_k^* + \Delta Q_k \Delta Q_k^*}{\Delta_k},$$

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{tr}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{\Delta U_k}{\Delta_k}\frac{\Delta U_k^*}{\Delta_k}\Delta k - \frac{\Delta Z_k}{\Delta_k}\frac{\Delta Z_k^*}{\Delta_k}\Delta_k\right)} = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{tr}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_k \Delta Q_k^*}{\Delta_k}} e^{-\frac{1}{\sigma^2}\mathrm{tr}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_k \Delta Z_k^*}{\Delta_k}}$$

$$\left| e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{tr}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_k \Delta Q_k^*}{\Delta_k}} e^{-\frac{1}{\sigma^2}\mathrm{tr}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_k \Delta Z_k^*}{\Delta_k}} - e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\langle Q',Q'\rangle} e^{-\frac{1}{\sigma^2}\langle Q',Z'\rangle} \right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{tr}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_k \Delta Q_k^*}{\Delta_k}} \left| e^{-\frac{1}{\sigma^2}\mathrm{tr}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_k \Delta Z_k^*}{\Delta_k}} - e^{-\frac{1}{\sigma^2}\langle Q',Z'\rangle} \right| +$$

$$\left| e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{tr}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_k \Delta Q_k^*}{\Delta_k}} - e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\langle Q',Q'\rangle} \right| e^{-\frac{1}{\sigma^2}\langle Q',Z'\rangle}$$

Показатель первой экспоненты будет стандартным образом всюду сходится к $-\frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{tr}\int\limits_0^1 Q'(t)Q'^*(t)\,dt = -\frac{1}{2\sigma^2}\langle Q',Q'\rangle$. Все необходимые оценки для этого следуют из дальнейшего рассмотрения.

Исследуем сходимость W-пв показателя 2ой экспоненты. Для $d > 1$ выполнено $\frac{d}{dt}f^{-1} = -f^{-1}f'f^{-1}$, таким образом, так как $T'(t) = T(t)Z(t)$, то

$$\frac{d}{dt}T^{-1}(t) = -T^{-1}(t)T'(t)T^{-1}(t) = -T^{-1}(t)T(t)Z(t)T^{-1}(t) = -Z(t)T^{-1}(t).$$

Далее, опуская для краткости аргумент g, получаем выражение для Q':

$$Q'(t) = \left[-Z(t)(\hat{Z}T(t))^{-1}\right](g'())^{-1}g''()\hat{Z}T(t)z(t)\hat{Z}T(t) +$$
$$+ (\hat{Z}T(t))^{-1}\left[-(g'())^{-1}g''()\hat{Z}T(t)z(t)(g'())^{-1}\right]g''()\hat{Z}T(t)z(t)\hat{Z}T(t) +$$
$$+ (\hat{Z}T(t))^{-1}(g'())^{-1}\left[g'''()\hat{Z}T(t)z(t)\right]\hat{Z}T(t)z(t)\hat{Z}T(t) +$$
$$+ (\hat{Z}T(t))^{-1}(g'())^{-1}g''()\hat{Z}\left[T(t)Z(t)\right]z(t)\hat{Z}T(t) +$$
$$+ (\hat{Z}T(t))^{-1}(g'())^{-1}g''()\hat{Z}T(t)\left[z'(t)\right]\hat{Z}T(t) +$$
$$+ (\hat{Z}T(t))^{-1}(g'())^{-1}g''()\hat{Z}T(t)z(t)\hat{Z}\left[T(t)Z(t)\right] = Q'_1 + \ldots + Q'_6.$$

Q' - предсказуемая функция, то есть $Q'(t)$ измерима относительно σ-алгебры, порождённой $\{Z^*(\tau)|\tau\leqslant t\}$. Кроме того $W\left(Z : \|Q'\|^2 \leqslant \infty\right) = 1$, так как Q' зависит от Z не более чем через T или (ограниченную) производную g, то $\mathsf{M}\,\|Z(t)\|_{\mathbb{M}_\mathrm{d}} < C_1$ и $\mathsf{M}\,\|Z(t)\|_{\mathbb{M}_\mathrm{d}} < C_2$, где C_1 и C_2 не зависят от t. Для $d = 1$ легко видеть, что $\mathsf{M}\int\limits_0^1 Q'^2(t)\,dt < \infty$, учитывая ограниченность g, независимость $T(t)$ и $Z(t)$, а также прямое вычисление $\mathsf{M}T(t) = e^{t^3/6}$ [36].

Для сходимости к интегралу Ито воспользуемся конструкцией из [34] или [35]. Легко видеть что Q' принадлежит классу интегрируемых в смысле Ито функций. Так как s_n удовлетворяют условию согласованности, то остаётся показать, что

$$\mathsf{M}\left\|Q'(t) - s_n(\tfrac{\Delta Q_1}{\Delta_1}, \ldots, \tfrac{\Delta Q_n}{\Delta_n})\right\|^2 \to 0.$$

Имеем

$$\mathsf{M}\left\|Q'(t) - s_n(\tfrac{\Delta Q_1}{\Delta_1}, \ldots, \tfrac{\Delta Q_n}{\Delta_n})\right\|^2 = \mathsf{M}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|Q'(t) - \tfrac{Q_k - Q_{k-1}}{\Delta_k}\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}} dt =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\mathsf{M}\left\|Q'(t) - \tfrac{Q_k - Q_{k-1}}{\Delta_k}\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}} dt.$$

Добавим и вычтем выражения, получаемыми последовательной заменой точки приближения с t_k на t_{k-1}. Получим выражение, в котором каждое слагаемое соответствует одному из членов суммы, выражающих Q'

$$\tfrac{Q_k - Q_{k-1}}{\Delta_k} = \left[\tfrac{(\hat{Z}T^n(t_k))^{-1} - (\hat{Z}T^n(t_{k-1}))^{-1}}{\Delta_k}\right]\cdot$$
$$\cdot\left(g'(\hat{z} + \hat{Z}\int\limits_0^{t_k}T^n(\tau)z(\tau)\,d\tau)\right)^{-1} g''\left(\hat{z} + \hat{Z}\int\limits_0^{t_k}T^n(\tau)z(\tau)\,d\tau\right)\hat{Z}T^n(t_k)z(t_k)\hat{Z}T^n(t_k) +$$
$$+ \ldots +$$

$$+\,(\hat{Z}T^n(t_{k-1}))^{-1}\left(g'(\hat{z}+\hat{Z}\int\limits_0^{t_{k-1}}T^n(\tau)z(\tau)\,d\tau)\right)^{-1}g''\left(\hat{z}+\hat{Z}\int\limits_0^{t_{k-1}}T^n(\tau)z(\tau)\,d\tau\right)\cdot$$
$$\cdot\,\hat{Z}T(t_{k-1})z(t_{k-1})\hat{Z}\left[\tfrac{T^n(t_k)-T^n(t_{k-1})}{\Delta_k}\right]=Q_1'^n+\ldots+Q_6'^n$$

Сгруппируем члены этой суммы с соответствующими им из Q' и воспользуется неравенством Йенсена:

$$\mathsf{M}\left\|Q'(t)-\tfrac{Q_k-Q_{k-1}}{\Delta_k}\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}\leqslant 6\left(\mathsf{M}\,\|Q_1'-Q_1'^n\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}+\ldots+\mathsf{M}\,\|Q_6'-Q_6'^n\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}\right)$$

Каждое из слагаемых подвергнем аналогичной процедуре. Получим сумму слагаемых вида $\mathsf{M}\,\|\xi(t)-\xi^n(t)\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}$, где $\xi(t)$ отличается от $\xi^n(t)$ только в одном из множителей. Остальные множители, в силу непрерывности и конечности отрезка, можно на множестве W меры $1-\varepsilon$ ограничить константой, после чего воспользоваться непрерывностью Винеровской меры (достаточно доказать существование предела по мере). В итоге задача сводится к оценке максимума из следующих разностей на $[t_{k-1},t_k)$, где k' обозначает k или $k-1$:

– $\mathsf{M}\left\|T'(t)-\tfrac{T_k-T_{k-1}}{\Delta_k}\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}$,
– $\mathsf{M}\left\|\tfrac{d}{dt}(T^{-1}(t))-\tfrac{T_k^{-1}-T_{k-1}^{-1}}{\Delta_k}\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}$,
– $\mathsf{M}\left\|\tfrac{d}{dt}(g'(t)^{-1})-\tfrac{(g'^n(t_k))^{-1}-(g'^n(t_{k-1}))^{-1}}{\Delta_k}\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}$,
– $\mathsf{M}\left\|\tfrac{d}{dt}g''(t)-\tfrac{g''^n(t_k)-g''^n(t_{k-1})}{\Delta_k}\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}$,
– $\mathsf{M}\left\|z'(t)-\tfrac{z(t_k)-z(t_{k-1})}{\Delta_k}\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}$,
– $\mathsf{M}\left\|T^{-1}(t)-T_{k'}^{-1}\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}$,
– $\mathsf{M}\,\|T(t)-T_{k'}\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}$,
– $\mathsf{M}\,\|Z(t)-Z(t_{k'})\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}$,
– $\mathsf{M}\,\|z(t)-z(t_{k'})\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}$,
– $\mathsf{M}\left\|(g'(t))^{-1}-(g'^n(t_{k'}))^{-1}\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}$,
– $\mathsf{M}\,\|g''(t)-g''^n(t_{k'})\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}$.

Часть представляет простые случаи. Содержащие $z(t)$ и $z'(t)$ сходятся к нулю в силу непрерывности $z'(t)$, явно вычисляется $\mathsf{M}\,\|Z(t)-Z(t_{k'})\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}=\mathrm{d}^2\sigma^2|t-t_{k'}|$. Так как $T_k-T_{k-1}=T_{k-1}\Delta_k Z_k$, а $T'(t)=T(t)Z(t)$, то оценка $\mathsf{M}\left\|T'(t)-\tfrac{T_k-T_{k-1}}{\Delta_k}\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}$ сводится к $\mathsf{M}\,\|T(t)-T_{k-1}\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}$.

Для обратных величин воспользуемся преобразованием Пуанкаре: $A^{-1}-B^{-1}=A^{-1}(B-A)B^{-1}$, таким образом $\mathsf{M}\left\|(g'(t))^{-1}-(g'^n(t_{k'}))^{-1}\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}$ сводится к оценке $\mathsf{M}\left\|g'(t)-g'^n(t_{k'})\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}$, что, в свою очередь, как для $\mathsf{M}\left\|g''(t)-g''^n(t_{k'})\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}$ и $\mathsf{M}\left\|\frac{d}{dt}g''(t)-\frac{g''^n(t_k)-g''^n(t_{k-1})}{\Delta_k}\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}$, в силу ограниченности g''' сводится к оценке разности аргументов, причём:

$$\mathsf{M}\left\|\hat{z}+\hat{Z}\int\limits_0^t T(\tau)z(\tau)\,d\tau-\hat{z}-\hat{Z}\int\limits_0^{t_{k'}} T^n(\tau)z(\tau)\,d\tau\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}\leqslant$$
$$\leqslant C\sup_{t\in[0,1]}\mathsf{M}\left\|T(t)-T^n(t)\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}$$

$$\mathsf{M}\left\|\frac{d}{dt}(T^{-1}(t))-\frac{T_k^{-1}-T_{k-1}^{-1}}{\Delta_k}\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}=\mathsf{M}\left\|T^{-1}(t)T'(t)T^{-1}(t)-\frac{T_k^{-1}(T_k-T_{k-1})T_{k-1}^{-1}}{\Delta_k}\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}=$$
$$=\mathsf{M}\left\|T^{-1}(t)T(t)Z(t)T^{-1}(t)-T_k^{-1}(T_{k-1}Z_k)T_{k-1}^{-1}\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}$$

Последнее выражение сводится с помощью вышеописанной процедуры. Аналогично для

$$\mathsf{M}\left\|\frac{d}{dt}(g'(t)^{-1})-\frac{(g'^n(t_k))^{-1}-(g'^n(t_{k-1}))^{-1}}{\Delta_k}\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}$$

Таким образом, всё свелось к оценке разности $\mathsf{M}\left\|T(t)-T_{k'}\right\|^2_{\mathbb{M}_\mathrm{d}}$, а это даёт лемма 2.2.2. Заметим, что условие на g ($g\in\mathrm{Diff}^2(\mathbb{R}^\mathrm{d})$ и g''' - ограниченная борелевская функция) является достаточным для выполнения оценок выше.

$\square$

Глава 3. Неприводимые представления группы диффеоморфизмов полупрямой

В этой главе доказывается неприводимость представлений, задаваемых с помощью построенной меры в одномерном случае. В качестве группы G рассматривается подгруппа специального вида в $\mathrm{Diff}(\mathbb{R})$:

$$G = \left\{g \in \mathrm{Diff}^2(\mathbb{R})\colon g(0) = 0,\ g'(0) = 1,\ g''(0) = 0\right\}.$$

Ограничение $g''(0) = 0$ существенно, без него представление можно будет разложить в непрерывную прямую сумму по значениям этой производной. Ограничение на $g'(0) = 1$ выбрано в большей степени для упрощения выкладок; можно было бы разрешить в качестве значений этой производной, например, $\mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}_-$, однако тот факт, что $g'(0) \neq 0$, используется содержательным образом. По-видимому, подобные разложения можно сделать и по значению самого диффеоморфизма. Фиксация положительного значения в качестве $g'(0)$ ведёт к тому, что от поведения диффеоморфизмов на $\mathbb{R}_-$ ничего не зависит и мы получаем, фактически, группу диффеоморфизмов положительной полупрямой.

Доказательство неприводимости заключается в сведении к лемме Шура посредством применения эргодической теоремы для линейных сдвигов относительно меры Винера. Ключевым моментом в этой редукции является переход от факта перестановочности произвольного линейного непрерывного оператора S и оператора представления к перестановочности S и оператора сдвига. Для этого оказывается показать, что оператор S с такими свойствами должен при некоторых дополнительных условиях, обеспечивающих принадлежность результата операции к рабочему пространству, коммутировать с оператором умножения на произвольную функцию. Это удаётся реализовать, переставив последовательность диффеоморфизмов g_n такую, что поточечно они сходятся к тождественному, а их среднее по Чезаро сходится к нетривиальному оператору умножения на достаточно хорошую функцию.

3.1 Неприводимые представления специальной подгруппы диффеоморфизмов в одномерном случае

Рассмотрим одномерный случай (d = 1). Тогда $T(t) = e^{\int\limits_0^t Z(\tau)\,d\tau}$ понимается как обычная, а не хронологическая, экспонента. Кроме того, в силу коммутативности умножения выражение для $Q(t)$ упрощается до логарифмической производной:

$$Q(t) = \frac{\frac{d}{dt}g'(x(t))}{g'(x(t))} = \frac{\frac{d}{dt}g'(\hat{z}+\hat{Z}\int\limits_0^t T(\tau)z(\tau)\,d\tau)}{g'(\hat{z}+\hat{Z}\int\limits_0^t T(\tau)z(\tau)\,d\tau)}.$$

В качестве группы G рассмотрим в $\mathrm{Diff}(\mathbb{R})$ подгруппу специального вида:

$$G = \left\{g \in \mathrm{Diff}^2(\mathbb{R})\colon g(0) = 0,\ g'(0) = 1,\ g''(0) = 0\right\}.$$

Определение 3.1.1. *Обозначим за* $\mathrm{C}_0([0{,}1])$ *непрерывные функции с началом в нуле, то есть* $\mathrm{C}_0([0{,}1]) = \{Z \in \mathrm{C}([0{,}1])\colon Z(0) = 0\}$.

Замечание 3.1.1. *Фиксация значений* $g(0)$, $g'(0)$ *и* $g''(0)$ *даёт возможность работать лишь с стандартной мерой Винера на* $\mathrm{C}_0([0{,}1])$, *что и позволяет получить серию неприводимых представлений. Ограничение на гладкость необходимо для реализации используемой конструкции, в противном случае не будет определена плотность* $\rho_{\mu,g}$ *и, следовательно, оператор представления. Более того, так как теорема 2.1.1, дающая явный вид* $\rho_{\mu,g}$, *не применима к элементам* G, *то будем дополнительно рассматривать её подгруппу* G':

$$G' = \{g \in G\colon g''' \text{ — ограниченная борелевская функция}\}.$$

Зададим меру μ на Ω' так, чтобы она была сосредоточена на $\hat{z} = 0$, $\hat{Z} = 1$ и фиксированной всюду положительной на $[0{,}1]$ кривой z, то есть положим $\mu_1 = \delta(z)$, $\mu_3 = \delta(0)$, $\mu_4 = \delta(1)$. Фиксация $g''(0) = 0$ даёт $Q(0) = 0$, откуда $Z(0) \to Z(0) + Q(0) = Z(0)$, что позволяет сделать ограничение на компоненту $\mathrm{C}_0([0{,}1])$ пространства $\mathrm{C}([0{,}1]) = \mathbb{R} \times \mathrm{C}_0([0{,}1])$ с помощью отображения $Z(t) \mapsto Z(t) - Z(0)$. Далее очевидно, что действие на компонентах, соответствующих z, $\hat{z}$ и $\hat{Z}$, инвариантно, откуда в силу теоремы 2.1.1 для $\forall g \in G'$ такая мера будет квазиинвариантна под действием L'_g, причём

$$Q(t) = \frac{\frac{d}{dt}g'(x(t))}{g'(x(t))} = \frac{\frac{d}{dt}g'(\int\limits_0^t T(\tau)z(\tau)\,d\tau)}{g'(\int\limits_0^t T(\tau)z(\tau)\,d\tau)} = \frac{d}{dt}\ln g'(\int\limits_0^t T(\tau)z(\tau)\,d\tau)$$

где последний переход верен, так как из принадлежности к группе диффеоморфизмов следует, что $g'(t) \neq 0\ \forall t \in [0{,}1]$, а для элементов G' фиксировано $g'(0) = 1$. Производная Радона—Никодима, соответственно, имеет вид $\rho_g(z,Z,\hat{z},\hat{Z}) = \rho_{\mu,g}(z,Z,\hat{z},\hat{Z}) = \frac{d\mu_g}{d\mu}(z,Z,\hat{z},\hat{Z}) = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\langle Q',Q'\rangle - \frac{1}{\sigma^2}\langle Q',Z'\rangle}$.

Замечание 3.1.2. *Из выбранных ограничений видно, что аргументом g может быть только положительное число, так что от значений диффеоморфизма на $\mathbb{R}_-$ ничего не зависит и мы фактически получаем представления группы диффеоморфизмов положительной полупрямой $\mathbb{R}_+$.*

Для дальнейшего исследования представлений потребуется работать непосредственно с пространством Ω', так что введём более удобные обозначения:

Определение 3.1.2. *Будем считать, что фиксирована некоторая всюду положительная $z \in \mathrm{C}^1([0{,}1])$. Отождествим базовое пространство Ω' с пространством $\mathrm{C}_0([0{,}1])$, его элементы будем обозначать через Z, таким образом $Z \in \Omega'$. В силу вышесказанного получаем меру μ на Ω', задаваемую соотношением $\mu(Z) = \mu(0,0,z,Z)$ и по построению совпадающую с мерой Винера W; индекс, обозначающий меру у операторов на $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(\Omega',\mu)$ будем опускать. Как и прежде, $T(t) = T_Z(t) = e^{\int\limits_0^t Z(\tau)\,d\tau}$, а для образа компоненты кривой примем обозначение $\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}_Z(t) = \Phi_2^{-1}(0,1,z,Z)(t) = \int\limits_0^t T(\tau)z(\tau)\,d\tau$. Таким образом, $Q(t) = \frac{d}{dt}\ln g'(\widetilde{x}(t)) = \frac{g''(\widetilde{x}(t))\widetilde{x}'(t)}{g'(\widetilde{x}(t))}$, $\widetilde{x}'(t) = T(t)z(t)$. Для производной Радона—Никодима имеем $\rho_g(Z) = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\langle Q',Q'\rangle - \frac{1}{\sigma^2}\langle Q',Z'\rangle}$. Оператор представления V_g, таким образом, имеет вид*

$$V_g(F)(Z) = e^{-\frac{1/2+i\lambda}{2\sigma^2}\langle Q',Q'\rangle - \frac{1/2+i\lambda}{\sigma^2}\langle Q',Z'\rangle}F(L'_g(Z)),\ F \in \mathrm{H}. \tag{3.1}$$

Унитарно-эквивалентные представления U_g задаются аналогичной формулой.

3.1.1 Непрерывность

Покажем, что в данном случае применима теорема 1.3.1, описывающая достаточное условие непрерывности получаемых представлений. Для этого, а именно в доказательствах теоремы 3.1.1 и леммы 3.2.2 потребуется следующий вариант теоремы о предельном переходе под знаком интеграла:

Утверждение 3.1.1. *Пусть $\{G_n\}$ — последовательность измеримых функций на пространстве X с неотрицательной конечной мерой μ. Тогда если $G_n \to G$ по мере μ и для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено $\int\limits_X |G_n(x)|^2\,\mu(dx) \leqslant C < \infty$, то функция G интегрируема и $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X G_n(x)\,\mu(dx) = \int\limits_X G(x)\,\mu(dx)$.*

Теорема 3.1.1. *Представления V_g (и, соответственно, U_g) являются унитарными и непрерывными.*

Доказательство. Унитарность сразу даёт теорема 1.3.1.

Для доказательства непрерывности заметим, что $Q(t) = \frac{d}{dt}\ln g'(\int\limits_0^t T(\tau)z(\tau)\,d\tau)$ непрерывна по g, равно как и её производная $Q'(t)$. В силу теоремы 1.3.1 достаточно показать непрерывность по норме оператора представления по g на непрерывных ограниченных функциях с ограниченным носителем. Так как оператор замены аргумента имеет вид отображения $F(Z(t)) \mapsto F(Z(t) + Q(t))$ и применяется к непрерывной функции, то его непрерывность ясна.

Для оператора умножения на степень производной Радона—Никодима

$$\rho_g(z,Z,\hat{z},\hat{Z}) = e^{-\frac{1/2+i\lambda}{2\sigma^2}\langle Q',Q'\rangle - \frac{1/2+i\lambda}{\sigma^2}\langle Q',Z'\rangle}$$

в силу групповой структуры действия достаточно установить непрерывность в нуле (см замечание 1.3.1). Так как для тождественного диффеоморфизма соответствующая добавка Q равна нулю и действие рассматривается на ограниченных функционалах то достаточно показать, что $\left\|\rho_{g_n}^{1/2+i\lambda} - 1\right\| \to 0$.

По определению ρ_g имеем $\int\limits_{\Omega'} \rho_{g_n}(Z)\,\mu(dZ) = 1$, откуда

$$\left\|\rho_{g_n}^{1/2+i\lambda} - 1\right\|^2 = \int\limits_{\Omega'} \rho_{g_n}(Z)\,\mu(dZ) - \int\limits_{\Omega'} \rho_{g_n}^{1/2+i\lambda}(Z)\,\mu(dZ) - \int\limits_{\Omega'} \rho_{g_n}^{1/2-i\lambda}(Z)\,\mu(dZ) + 1 =$$
$$= 2 - 2\cos(\lambda \log g_n) \int\limits_{\Omega'} \rho_{g_n}^{1/2}(Z)\,\mu(dZ).$$

Покажем, что последнее выражение стремится к нулю.

Заметим, что $\left\|\rho_{g_n}^{-1/2}(Z)-1\right\|^2$ равномерно ограничены. Действительно, это следует из оценки $\left\|\rho_{g_n}^{-1/2}-1\right\|^2 \leqslant 2+2\cos(\lambda\log g_n)\int\limits_{\Omega'}\rho_{g_n}^{-1/2}(Z)\,\mu(dZ) \leqslant 4$ так как $\int\limits_{\Omega'}\rho_{g_n}^{-1/2}(Z)\,\mu(dZ) \leqslant \left(\int\limits_{\Omega'}\rho_{g_n}(Z)\,\mu(dZ)\right)^{1/2} = 1.$

Далее утверждается, что $\int\limits_{\Omega'}\rho_{g_n}^{-1/2+i\lambda}(Z)\,\mu(dZ) \to 1$ по мере. Действительно, выражение для $\langle Q', Q'\rangle$ из показателя экспоненты в силу замеченного выше сходится к нулю. Для оценки стохастического интеграла $\langle Q', Z'\rangle$ применим неравенства Дуба для мартингалов и изометрию Ито [34] (более подробно этот приём описан в лемме 3.2.1). Имеем $P(|\langle Q', Z'\rangle| \geqslant \theta) \leqslant \frac{1}{\theta^2}\mathsf{M}\,\langle Q', Q'\rangle \leqslant \frac{1}{\theta^2}\langle Q', Q'\rangle \to 0.$

Таким образом, применимо утверждение 3.1.1, откуда

$$\int\limits_{\Omega'}\rho_{g_n}^{-1/2+i\lambda}(Z)\,\mu(dZ) \to \int\limits_{\Omega'}\rho_{e}^{-1/2+i\lambda}(Z)\,\mu(dZ) = \int\limits_{\Omega'}\mu(dZ) = 1,$$

то есть выполнены условия теоремы 1.3.1, из чего следует искомое свойство непрерывности. □

3.1.2 Неприводимость

Доказательство неприводимости основано на идее, представленной в теореме 1.3.2. Однако, так как потребуется чуть более аккуратная работа с множеством D и применение к представлениям V_g с учётом особенностей соответствующего оператора умножения на функцию, то проведём доказательство в явном виде.

Для проверки аналога условия 3 теоремы 1.3.2 потребуется классический результат об эргодичности винеровской меры при линейных сдвигах на плотное подпространство:

Утверждение 3.1.2. *(R.H. Cameron, Ross E. Graves, [38]). Пусть $\{\alpha_k(t)\}$ - множество вещественнозначных функций, образующих ортонормированный базис в $L_2([0,1])$, вещественных чисел, имеющее хотя бы одну предельную точку, $\beta_k(t) = \int\limits_0^t a_k(u)\,du$. $\beta_k(t) = \int\limits_0^t a_k(u)\,du$. Пусть F - измеримый функционал на $C([0,1])$ такой, что*

$$F(x + \lambda\beta_k) = F(x) \quad (\lambda \in \Lambda,\ k = 1,2,\dots)$$

Тогда $F(x) = \mathrm{const}$ *почти всюду по мере Винера.*

Теорема 3.1.2. *Представления* V_g *(и, соответственно,* U_g*),* $g \in G$*, неприводимы.*

Доказательство. Пусть $S\colon \mathrm{H}_{\Omega'} \to \mathrm{H}_{\Omega'}$ - непрерывный линейный оператор, коммутирующий с всеми операторами представления V_g, $g \in G$. Напомним, что $V_g = M_g \circ R_g$.

Пусть $F_1, F_2 \in \mathrm{H}_{\Omega'}$ - непрерывные, ограниченные функционалы; потребуем дополнительно, чтобы у F_1 был ограниченный носитель. Тогда, рассматривая $g \in G'$, имеем

$$\langle F_1, SV_g F_2\rangle = \langle F_1, V_g S F_2\rangle \Leftrightarrow \langle F_1, SM_g R_g, F_2\rangle = \langle F_1, M_g R_g S F_2\rangle \overset{\text{лемма 3.2.5}}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{\text{лемма 3.2.5}}{\Leftrightarrow} \langle F_1, M_g S R_g F_2\rangle = \langle F_1, M_g R_g S F_2\rangle \ \Leftrightarrow\ \left\langle M_g^* F_1, S R_g F_2\right\rangle =$$
$$= \left\langle M_g^* F_1, R_g S F_2\right\rangle \overset{F_1' = M_g^* F_1}{\Leftrightarrow} \langle F_1', S R_g F_2\rangle = \langle F_1', R_g S F_2\rangle.$$

Ясно, что функционалы вида F_1' плотны в $\mathrm{H}_{\Omega'}$, откуда $SR_gF_2 = R_gSF_2$ для $\forall g \in G'$ и непрерывных ограниченных $F_2 \in \mathrm{H}_{\Omega'}$.

Пусть $C(Z) = \mathrm{const}$ для $\forall Z \in \Omega'$, $C \in \mathrm{H}_{\Omega'}$. Положим $F_0 = SC$. Имеем

$$F_0(L_g' Z) = (SC)(L_g' Z) = (R_g SC)(Z) = (SR_g C)(Z) = (S(R_g C))(Z) =$$
$$= (SC)(Z) = F_0(Z),$$

то есть функция F_0 инвариантна относительно сдвигов L_g', которые имеют вид $(L_g'(Z))(t) = Z(t) + Q(t)$, где $Q(t) = \frac{d}{dt} \ln g'(x(t))$.

Заметим, что $\forall P \in \mathrm{C}_0^1([0,1])\ \forall Z \in \mathrm{C}_0([0,1])\ \exists g \in G'\colon P(t) = Q(t)$. Действительно, так как $x(0) = 0$, а $g'(0) = 1$, то $e^{\int\limits_0^t P(\tau)\,d\tau} = g'(x(t))$. Далее, $x(t)$ - монотонная функция, следовательно определена обратная $x^{-1}(t)$, откуда $g'(t) = e^{\int\limits_0^{x^{-1}(t)} P(\tau)\,d\tau}$ и, соответственно $g(t) = \int\limits_0^t g(\tau)\,d\tau$ в силу условия $g(0) = 0$. Так как x' гладкая и строго положительна, то g''' непрерывна, и, следовательно, ограничена.

Таким образом, для $\forall P \in \mathrm{C}_0^1([0,1])$ выполнено $F_0(Z) = F_0(Z + P)$ для почти всех $Z \in \mathrm{C}_0([0,1])$, откуда, в силу утверждения 3.1.2, F_0 - константа, что, в силу утверждения 1.3.1, равносильно неприводимости представления V_g в $\mathrm{H}_{\Omega'}$ и, соответственно, унитарно-эквивалентного ему представления U_g в H_{Ω}.

□

3.1.3 Неэквивалентность

Рассмотрим представления $V_g = V_g^{\sigma,\lambda,z}$, задаваемые формулой (3.1). В этом разделе будем явно выделять индекс, если хотим подчеркнуть, что пара представлений построена с различным значением какого-либо параметра. Покажем, что некоторые из построенных представлений не эквивалентны. Так как представления U_g и V_g унитарно-эквивалентны по построению, достаточно исследовать эквивалентность представлений V_g.

Теорема 3.1.3. *Представления $V_g^{\sigma_1,\lambda_1}$ и $V_g^{\sigma_2,\lambda_2}$, построенные на основе одной и той же траектории z, эквивалентны тогда и только тогда, когда параметры совпадают, то есть $\sigma_1 = \sigma_2$ и $\lambda_1 = \lambda_2$.*

Доказательство. Пусть противное, тогда существует унитарный сплетающий оператор S такой, что $V_g^{\sigma_1,\lambda_1} S = S V_g^{\sigma_2,\lambda_2}$. Заметим, что для такого оператора полностью сохраняется рассуждение леммы 3.2.2 (вместо V_k в (3.3) рассматриваем $V_g^{\sigma_1,\lambda_1}$ и $V_g^{\sigma_2,\lambda_2}$ в левой и правой частях тождества соответственно), откуда

$$S M_x^{\sigma_1,\lambda_1} = M_x^{\sigma_2,\lambda_2} S, \ \forall x \geqslant 0.$$

Напомним, что $M_x^{\sigma,\lambda}$ является оператором умножения на постоянную функцию $m_x^{\sigma,\lambda} = e^{-\frac{1+4\lambda^2}{8\sigma^2}(\widetilde{x}'(t_0))^3}$. Рассмотрим $x = 0$. Так как $x = \int\limits_0^{t(x))} \widetilde{x}'(\tau)\, d\tau$, то $t(0) = 0$, таким образом $\widetilde{x}'(0) = T(0)z(0) = z(0)$. Имеем для $F \in \mathrm{H}_{\Omega'}$:

$$\left(S e^{-\frac{1+4\lambda_1^2}{8\sigma_1^2}(z(0))^3} \right) F(Z) = \left(e^{-\frac{1+4\lambda_2^2}{8\sigma_2^2}(z(0))^3} S \right) F(Z) = \left(S e^{-\frac{1+4\lambda_2^2}{8\sigma_2^2}(z(0))^3} \right) F(Z),$$

где последний переход следует из линейности S из того факта, что $e^{-\frac{1+4\lambda^2}{8\sigma^2}(z(0))^3}$ является постоянной функцией от Z. В итоге получаем, что наличие сплетающего оператора S влечёт за собой тождество

$$e^{-\frac{1+4\lambda_1^2}{8\sigma_1^2}(z(0))^3} = e^{-\frac{1+4\lambda_2^2}{8\sigma_2^2}(z(0))^3},$$

которое, так как по построению $z(0) > 0$, выполняется только в случае $\sigma_1 = \sigma_2$ и $\lambda_1 = \lambda_2$. □

Замечание 3.1.3. *По-видимому, не являются эквивалентными и представления, построенные на основе разных траекторий z_1 и z_2, так как соответствующие добавки в оператор представления не выражаются напрямую* *с помощью перепараметризации в пространстве кривых. Более того, если $z_1(0) = z_2(0) > 0$, то представления $V_g^{\sigma_1,\lambda_1,z_1}$ и $V_g^{\sigma_2,\lambda_2,z_2}$ будут эквивалентны тогда и только тогда, когда $\sigma_1 = \sigma_2$, $\lambda_1 = \lambda_2$ и эквиваленты представления $V_g^{1,0,z_1}$ и $V_g^{1,0,z_2}$ (в этом случае полностью проходит рассуждение теоремы 3.1.3). Однако этот подход не может быть обобщен на доказательство неэквивалентности $V_g^{1,0,z_1}$ и $V_g^{1,0,z_2}$, так как соответствующие операторы умножения на функцию будут существенным образом отличны от скалярных, что не даёт возможности воспользоваться линейностью оператора S.*

3.2 Доказательства технических лемм

Ключевой идеей доказательства теоремы 3.1.2 является лемма 3.2.1, из которой довольно техническим образом вытекает лемма 3.2.5, позволяющая перейти от коммутируемости с оператором представления V_g к коммутируемости с оператором замены аргумента R_g. Для получения этого результата оказывается достаточным предъявить последовательности диффеоморфизмов g_n такую, чтобы поточечно $g_n(t) \to t$, но V_{g_n} при этом в слабом смысле сходились к нетривиальному оператору умножения на функцию. Из более детального рассмотрения становится ясно, что для этого, неформально говоря, g^4 должна действовать как нормированная разность δ-функций в двух близких точках, порождая нормально распределённую случайную величину. Так как эти величины будут зависимыми, то потребуется аналог закона больших чисел для слабо коррелированных случайных величин, который и конкретизирует необходимый способ слабой сходимости.

Утверждение 3.2.1. *(С.Н. Бернштейн, [39, 40]) Пусть $\{\xi_k\}$ последовательность случайных величин такая, что $\mathsf{M}\xi_k = 0$, $\mathsf{M}\xi_k^2$ равномерно ограничены, $|\mathrm{Cov}(\xi_k, \xi_m)| = |\mathsf{M}\,(\xi_k\xi_m)| \leqslant \varphi(|k-m|)$, причём $\varphi(m) \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \to 0$ по вероятности.*

3.2.1 Существование последовательности диффеоморфизмов, усреднение действия которой сходится к нетривиальному оператору умножения на функцию

Определение 3.2.1. *Пусть* $x_0 < x_n \in \mathbb{R}$. *Зададим семейство* $g(x,x_0,x_n) \in G'$:

$$\begin{aligned}
g(x,x_0,x_n) &= \; x + \frac{(x-x_0)^3\theta(x-x_0)-(x-x_n)^3\theta(x-x_n)}{6\sqrt{x_n-x_0}} \\
g'(x,x_0,x_n) &= \; 1 + \frac{(x-x_0)^2\theta(x-x_0)-(x-x_n)^2\theta(x-x_n)}{2\sqrt{x_n-x_0}} \\
g''(x,x_0,x_n) &= \; \frac{(x-x_0)\theta(x-x_0)-(x-x_n)\theta(x-x_n)}{\sqrt{x_n-x_0}} \\
g^{(3)}(x,x_0,x_n) &= \; \frac{\theta(x-x_0)-\theta(x-x_n)}{\sqrt{x_n-x_0}} \\
g^{(4)}(x,x_0,x_n) &= \; \frac{\delta(x-x_0)-\delta(x-x_n)}{\sqrt{x_n-x_0}}
\end{aligned}$$

Фиксируем произвольное $x_0 \in \mathbb{R}_+$ *и последовательность* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такую, что* $x_k > x_{k-1}$, $x_k \to x_0$. *Обозначим* $g_n(x) := g(x,x_0,x_n)$. *Так как* $\widetilde{x}(t) = \int\limits_0^t T(\tau)z(\tau)\,d\tau$ *- строго монотонная функция, то можно определить* $t(x) = t_Z(x)$ *из условия* $x = \widetilde{x}(t(x))$, *если такое* t *существует, и нулём иначе.*

Лемма 3.2.1. *Пусть* $F_1, F_2 \in \mathrm{H}_{\Omega'}$ *- ограниченные. Тогда существует последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что* $\lim\limits_{n\to\infty}\left\langle F_1, \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\rho_{g_k}(Z)\right)^{1/2+i\lambda}F_2\right\rangle = \left\langle F_1, e^{-\frac{1+4\lambda^2}{8\sigma^2}(\widetilde{x}'(t_0))^3}F_2\right\rangle = \langle F_1, M_{x_0}F_2\rangle$.

Доказательство. Введём обозначение $\Delta_k := x_k - x_0$. По построению, z является непрерывной положительной функцией при $t \in [0,1]$. Рассмотрим множество ограниченных функций меры $1-\varepsilon$. На неём имеют место следующие оценки:

$$\begin{gathered}
|Z(t)| \leqslant C_1(\varepsilon) \\
0 < C_2^{-1}(\varepsilon) = e^{-C_1(\varepsilon)} \leqslant T(t) = e^{\int\limits_0^t Z(\tau)\,d\tau} \leqslant e^{C_1(\varepsilon)} = C_2(\varepsilon) \\
0 < C_3^{-1}(\varepsilon) \leqslant \widetilde{x}'(t) = T(t)z(t) \leqslant C_2(\varepsilon)\,\|z\| = C_4(\varepsilon) \\
0 \leqslant \widetilde{x}(t) = \int\limits_0^t \widetilde{x}'(\tau)\,d\tau \leqslant C_4(\varepsilon) \\
|\widetilde{x}''(t)| = T(t)Z(t)z(t) + T(t)\,|z'(t)| \leqslant C_2(\varepsilon)C_1(\varepsilon)\,\|z\| + C_2(\varepsilon)\,\|z'\| = C_5(\varepsilon)
\end{gathered}$$

$$1 \leqslant\ g_k'(x) \leqslant 1 + \Delta_k^{1/2}\left(\left|\tfrac{x_0+x_k}{2}\right| + |x|\right) \leqslant 1 + \Delta_k^{1/2} C_6(\varepsilon),\ \ \tfrac{1}{g_k'(x)} \leqslant 1$$
$$0 \leqslant g_k''(x) \leqslant \Delta_k^{\frac{1}{2}}$$

Оценки для g_k' и g_k'' следуют из явного вида путём рассмотрения случаев $x < x_0$, $x_0 \leqslant x \leqslant x_k$ и $x_k < x$. При $x < x_0$: $g_k' = 1$, $g_k'' = 0$. При $x_0 \leqslant x \leqslant x_k$: $g_k' = 1 + \frac{(x-x_0)^2}{2\sqrt{x_k-x_0}} \leqslant 1 + \frac{1}{2}(x_k-x_0)^{3/2} = 1 + \frac{1}{2}\Delta_k^{3/2}$, $g_k'' = \frac{x-x_0}{\sqrt{x_k-x_0}} \leqslant (x_k-x_0)^{1/2} = \Delta_k^{1/2}$. При $x_k < x$: $g_k' = 1 + \frac{(x-x_0)^2-(x-x_k)^2}{2\sqrt{x_k-x_0}} = 1 + \frac{(x_0+x_k-2x)(x_0-x_k)}{2\sqrt{x_k-x_0}} = 1 + (x_0-x_k)^{1/2}\frac{1}{2}(x_0+x_k-2x) \leqslant 1 + \Delta_k^{1/2}\left(\left|\frac{x_0+x_k}{2}\right| + |x|\right)$, $g_k'' = (x_k-x_0)^{1/2} = \Delta_k^{1/2}$.

Далее в доказательстве этой леммы положим $C = \max(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$. Преобразуем выражение для плотности ρ_g ($\ln$ можно понимать как условное обозначение, имеется ввиду соответствующее тождество для экспонент):

$$\begin{aligned}
&\ln \rho_g^{1/2+i\lambda} = -\tfrac{1/2+i\lambda}{2\sigma^2}\int_0^1 (Q'(t))^2\,dt - \tfrac{1/2+i\lambda}{\sigma^2}\int_0^1 Q'(t)\,dZ(t) = \\
&= -\tfrac{1/2+i\lambda}{2\sigma^2}\int_0^1 \left(-\tfrac{\widetilde{x}'(t)^2 g''(\widetilde{x}(t))^2}{g'(\widetilde{x}(t))^2} + \tfrac{g''(\widetilde{x}(t))\widetilde{x}''(t)}{g'(\widetilde{x}(t))} + \tfrac{\widetilde{x}'(t)^2 g^{(3)}(\widetilde{x}(t))}{g'(\widetilde{x}(t))}\right)^2 dt - \\
&- \tfrac{1/2+i\lambda}{\sigma^2}\int_0^1 -\tfrac{\widetilde{x}'(t)^2 g''(\widetilde{x}(t))^2}{g'(\widetilde{x}(t))^2} + \tfrac{g''(\widetilde{x}(t))\widetilde{x}''(t)}{g'(\widetilde{x}(t))} + \tfrac{\widetilde{x}'(t)^2 g^{(3)}(\widetilde{x}(t))}{g'(\widetilde{x}(t))}\,dZ(t) = - \\
&- \tfrac{1/2+i\lambda}{2\sigma^2}\int_0^1 \left(-\tfrac{\widetilde{x}'(t)^2 g''(\widetilde{x}(t))^2}{g'(\widetilde{x}(t))^2}\right)^2 dt - \tfrac{1/2+i\lambda}{2\sigma^2}\int_0^1 \left(\tfrac{g''(\widetilde{x}(t))\widetilde{x}''(t)}{g'(\widetilde{x}(t))}\right)^2 dt - \\
&- \tfrac{1/2+i\lambda}{2\sigma^2}\int_0^1 \left(\tfrac{\widetilde{x}'(t)^2 g^{(3)}(\widetilde{x}(t))}{g'(\widetilde{x}(t))}\right)^2 dt + \tfrac{1/2+i\lambda}{2\sigma^2}\int_0^1 \tfrac{\widetilde{x}'(t)^2 g''(\widetilde{x}(t))^2}{g'(\widetilde{x}(t))^2}\tfrac{g''(\widetilde{x}(t))\widetilde{x}''(t)}{g'(\widetilde{x}(t))}\,dt + \\
&+ \tfrac{1/2+i\lambda}{2\sigma^2}\int_0^1 \tfrac{\widetilde{x}'(t)^2 g''(\widetilde{x}(t))^2}{g'(\widetilde{x}(t))^2}\tfrac{\widetilde{x}'(t)^2 g^{(3)}(\widetilde{x}(t))}{g'(\widetilde{x}(t))}\,dt - \tfrac{1/2+i\lambda}{2\sigma^2}\int_0^1 \tfrac{g''(\widetilde{x}(t))\widetilde{x}''(t)}{g'(\widetilde{x}(t))}\tfrac{\widetilde{x}'(t)^2 g^{(3)}(\widetilde{x}(t))}{g'(\widetilde{x}(t))}\,dt + \\
&+ \tfrac{1/2+i\lambda}{\sigma^2}\int_0^1 \tfrac{\widetilde{x}'(t)^2 g''(\widetilde{x}(t))^2}{g'(\widetilde{x}(t))^2}\,dZ(t) - \tfrac{1/2+i\lambda}{\sigma^2}\int_0^1 \tfrac{g''(\widetilde{x}(t))\widetilde{x}''(t)}{g'(\widetilde{x}(t))}\,dZ(t) - \\
&- \tfrac{1/2+i\lambda}{\sigma^2}\int_0^1 \tfrac{\widetilde{x}'(t)^2 g^{(3)}(\widetilde{x}(t))}{g'(\widetilde{x}(t))}\,dZ(t) = I_1 + \ldots + I_9
\end{aligned}$$

Здесь замена интеграла от суммы на сумме интегралов довольна ясна, некоторую сложность может представлять только стохастическая часть; однако легко видеть, что I_7 и I_8 существуют, а тогда исходная теорема о выражении ρ_g гарантирует существование I_9.

По определению t_k, имеем $\Delta_k = x_k - x_0 = \int\limits_{t_0}^{t_k} \widetilde{x}'(\tau)\,d\tau$, откуда в силу $C^{-1} < \widetilde{x}' < C$ имеем $C^{-1}\Delta_k \leqslant t_k - t_0 \leqslant C\Delta_k$, следовательно все вхождения $t_k - t_0$ с точностью до константы эквивалентны замене на Δ_k. Из слагаемых

$I_1,\ldots,I_6$ через степень Δ_k ограничиваются все, кроме I_3. Учитывая вид g_k, легко видеть, что

$$I_1 = O(\Delta_k^2),\ I_2 = O(\Delta_k),\ I_4 = O(\Delta_k^{3/2}),\ I_5 = O(\Delta_k),\ I_6 = O(\Delta_k^{1/2}).$$

Для I_3 потребуется выделение главной части:

$$I_3 = -\frac{1/2+i\lambda}{2\sigma^2}\int\limits_0^1 \left(\frac{\widetilde{x}'(t)^2 g_k^{(3)}(\widetilde{x}(t))}{g_k'(\widetilde{x}(t))}\right)^2 dt = -\frac{1/2+i\lambda}{2\sigma^2}\int\limits_{\widetilde{x}(0)}^{\widetilde{x}(1)} \left(\frac{g_k^{(3)}(x)}{g_k'(x)}\right)^2 x'(t(x))^3\,dx =$$
$$= -\frac{1/2+i\lambda}{2\sigma^2}\frac{1}{x_k-x_0}\int\limits_{x_0}^{x_k}\frac{x'(t(x))^3}{(g_k'(x))^2}\,dx = -\frac{1/2+i\lambda}{2\sigma^2}\widetilde{x}'(t_0)^3 + O(\Delta_k).$$

Интегралы I_7, I_8, I_9 понимаются в смысле Ито. Для оценки их вклада воспользуемся неравенством Дуба для мартингалов и изометрией Ито [34]. Имеем для $\forall\theta > 0$:

$$W\left(Z\in\Omega'\colon\ \left|\int\limits_0^1 f(\tau,Z)\,dZ_\tau\right| \geqslant \theta\right) = \mathsf{P}\left(\left|\int\limits_0^1 f(\tau,Z)\,dZ_\tau\right| \geqslant \theta\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\int\limits_0^t f(\tau,Z)\,dZ_\tau\right| \geqslant \theta\right) \leqslant \frac{1}{\theta^2}\mathsf{M}\int\limits_0^1 |f(\tau,Z)|^2\,d\tau.$$

Откуда получаем оценки для I_7, I_8:

$$\mathsf{P}\left(|I_7| \geqslant \theta\right) \leqslant \frac{1/4+\lambda^2}{\sigma^2\theta^2}\mathsf{M}\int\limits_0^1 \frac{\widetilde{x}'(t)^4 g_k''(\widetilde{x}(t))^4}{g'(\widetilde{x}(t))^4}\,dt \leqslant \frac{1/4+\lambda^2}{\sigma^2\theta^2}C_3^4\Delta_k^2 \to 0,$$

$$\mathsf{P}\left(|I_8| \geqslant \theta\right) \leqslant \frac{1/4+\lambda^2}{\sigma^2\theta^2}\mathsf{M}\int\limits_0^1 \left(\frac{g_k''(\widetilde{x}(t))\widetilde{x}''(t)}{g'(\widetilde{x}(t))}\right)^2 dt \leqslant \frac{1/4+\lambda^2}{\sigma^2\theta^2}C_4^4\Delta_k^2 \to 0.$$

С I_9 напрямую такой приём не проходит; вообще говоря, если бы он был реализуем, то никакое эргодическое усреднение "по Чезаро"не сходилось бы к чему-либо отличному от константы. Однако удаётся выделить основную часть, имеющую вид нормальной случайной величины, построенной по траектории броуновского движения:

$$I_9 = -\frac{1/2+i\lambda}{\sigma^2}\int\limits_0^1 \frac{\widetilde{x}'(t)^2 g_k^{(3)}(\widetilde{x}(t))}{g_k'(\widetilde{x}(t))}\,dZ(t) = -\frac{1/2+i\lambda}{\sigma^2\Delta_k^{1/2}}\int\limits_{t_0}^{t_k}\frac{\widetilde{x}'(t)^2}{g_k'(\widetilde{x}(t))}\,dZ(t) =$$
$$= -\frac{1/2+i\lambda}{\sigma^2\Delta_k^{1/2}}\int\limits_{t_0}^{t_k}\frac{\widetilde{x}'(t)^2}{g_k'(\widetilde{x}(t))} - \widetilde{x}'(t_0)^2\,dZ(t) - \frac{1/2+i\lambda}{\sigma^2\Delta_k^{1/2}}\int\limits_{t_0}^{t_k}\widetilde{x}'(t_0)^2\,dZ(t) =$$
$$= -\frac{1/2+i\lambda}{\sigma^2\Delta_k^{1/2}}\int\limits_{t_0}^{t_k}\widetilde{x}'(t)^2 - \widetilde{x}'(t_0)^2\,dZ(t) - \frac{1/2+i\lambda}{\sigma^2\Delta_k^{1/2}}\int\limits_{t_0}^{t_k}\frac{\widetilde{x}'(t)^2}{g_k'(\widetilde{x}(t))} - \widetilde{x}'(t)^2\,dZ(t) -$$
$$- \frac{1/2+i\lambda}{\sigma^2}\widetilde{x}'(t_0)^2\frac{Z(t_k)-Z(t_0)}{\sqrt{x_k-x_0}}.$$

Последний переход верен, так как $\widetilde{x}'(t_0)$ не зависит от $Z(t)$ при $t > t_0$. Оценим оба интегральных члена аналогично прочим интегралам Ито. Заметим, что $x'(t) - x'(t_0) = x''(t_\xi)(t - t_0) = O(t - t_0)$ и, кроме того, $\frac{1}{g_k'(x)} - 1 = O(\Delta_k^{1/2})$. Имеем

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{1/2+i\lambda}{\sigma^2\Delta_k^{1/2}}\int\limits_{t_0}^{t_k}\widetilde{x}'(t)^2 - \widetilde{x}'(t_0)^2\,dZ(t)\right| \geqslant \theta\right) \leqslant \frac{1/4+\lambda^2}{\sigma^4\theta^2\Delta_k}\mathsf{M}\int\limits_{t_0}^{t_k}(\widetilde{x}'(t)^2 - \widetilde{x}'(t_0)^2)^2\,dt = \\ = O(\Delta_k^2),$$

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{1/2+i\lambda}{\sigma^2\Delta_k^{1/2}}\int\limits_{t_0}^{t_k}\frac{\widetilde{x}'(t)^2}{g_k'(\widetilde{x}(t))} - \widetilde{x}'(t)^2\,dZ(t)\right| \geqslant \theta\right) \leqslant \frac{1/4+\lambda^2}{\sigma^4\theta^2\Delta_k}\mathsf{M}\int\limits_{t_0}^{t_k}\left(\frac{\widetilde{x}'(t)^2}{g_k'(\widetilde{x}(t))} - \widetilde{x}'(t)^2\right)^2\,dt = \\ = O(\Delta_k).$$

Собирая оценки вместе, получаем

$$\ln\rho_{g_k}^{1/2+i\lambda} = -\frac{1/2+i\lambda}{2\sigma^2}\widetilde{x}'(t_0)^3 - \frac{1/2+i\lambda}{\sigma^2}\widetilde{x}'(t_0)^2\frac{Z(t_k)-Z(t_0)}{\sqrt{x_k-x_0}} + O(\Delta_k^{1/2}).$$

Отметим, что t_k зависит от $Z(t)$ при $t > t_0$. Полагая $t_k^* = t_0 + \frac{x_k-x_0}{\widetilde{x}'(t_0)}$, из

$$x_k - x_0 = \int\limits_{t_0}^{t_k}\widetilde{x}'(\tau)\,d\tau = \widetilde{x}'(t_0)(t_k - t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_k}\widetilde{x}'(\tau) - \widetilde{x}'(t_0)\,d\tau = \widetilde{x}'(t_0)(t_k - t_0) + O(\Delta_k^2)$$

имеем $t_k = t_k^* + O(\Delta_k^2)$, причём t_k^* зависит от $Z(t)$ только при $t < t_0$. Имеем $(t_k - t_0)^{-1/2} - (t_k^* - t_0)^{-1/2} = (t_k^* - t_0)^{-1/2} + O(\Delta_k)$, следовательно

$$\ln\rho_{g_k}^{1/2} = -\frac{1/2+i\lambda}{2\sigma^2}\widetilde{x}'(t_0)^3 - \frac{1/2+i\lambda}{\sigma^2}\widetilde{x}'(t_0)^{3/2}\frac{Z(t_k)-Z(t_0)}{\sqrt{t_k^*-t_0}} + O(\Delta_k^{1/2}).$$

Далее, винеровская мера сосредоточена на гёльдеровых траектория с показателем строго меньше $1/2$, откуда для показателя $1/3$ получаем $Z(t_k) - Z(t_k^*) = O(\Delta_k^{2/3})$. Окончательно, обозначая $\frac{Z(t_k^*)-Z(t_0)}{\sigma\sqrt{t_k^*-t_0}}$ за ξ_k, $\frac{\widetilde{x}'(t_0)^{3/2}}{2\sigma}$ за α, а $1 + 2i\lambda$ за c, получаем представление ρ_k в виде

$$\ln\rho_k^{1/2+1/2\lambda} = -\alpha^2 c - \alpha c\xi_k + f_1(Z)\Delta_k^{1/6} + f_2(Z), \tag{3.2}$$

где $f_1(Z)$ ограничена константой, зависящей только от ε, мера носителя $f_2(Z)$ меньше ε, а α не зависит от ξ_k.

Отметим, что ξ_k является стандартной нормальной величиной относительно меры Винера с дисперсией σ^2: для $\sigma = 1$ это напрямую следует из определения меры Винера, для прочих нормальность, очевидно, сохраняется, а дисперсия такой величины будет равна 1, так как для такой меры $\mathsf{M}\left(Z(t_1) - Z(t_2)\right) = \sigma^2(t_1 - t_2)$.

Положим $q_k = e^{-\alpha^2 c - \alpha c\xi_k}$. Покажем теперь, что $\mathsf{M}\left|\rho_k^{1/2+i\lambda} - q_k\right| \to 0$.

Для начала заметим, что для $\beta \in \mathbb{C}$, η - нормально распределённой случайной величины выполнено $\mathsf{M}e^{\beta\eta} = e^{\beta^2/2}$. Далее, из (3.2) следует, что $\left|\rho_k^{1/2+i\lambda}(Z) - q_k(Z)\right| \to 0$ по мере. Кроме того,

$$\mathsf{M}\left|\rho_k^{1/2+i\lambda} - q_k\right|^2 =$$
$$= \mathsf{M}\left(\rho_k - \rho_k^{1/2+i\lambda}\bar{q}_k - \rho_k^{1/2-i\lambda}q_k + |q_k|^2\right) \leqslant 1+2\mathsf{M}\rho_k\mathsf{M}\,|q_k|^2+\mathsf{M}\,|q_k|^2 = 1+3\mathsf{M}\,|q_k|^2.$$

Для вычисления $\mathsf{M}\,|q_k|^2$ заметим, что α зависит только от значений траектории Z до точки t_0 и определяет длину интервала $t_k^* - t_0$, а значение ξ_k - только от $t_k^* - t_0$ и значение Z после t_0. Таким образом, для любой траектории после точки t_0 мерой на $\{Z(\tau)\colon \tau > t_0\}$ будет обычная мера Винера с соответствующим сдвигом начальной точки.

Пусть $\mathsf{M}_{t,x_0'}(\cdot) = \mathsf{M}\left((\cdot)|t_0 = t, x'(t_0) = x_0'\right)$. Тогда

$$\mathsf{M}\,|q_k|^2 = \mathsf{M}q_k\bar{q}_k = \mathsf{M}e^{-\alpha^2 c-\alpha c\xi_k}e^{-\alpha^2\bar{c}-\alpha\bar{c}\xi_k} = \mathsf{M}e^{-\alpha^2(c+\bar{c})-\alpha(c+\bar{c})\xi_k} = \mathsf{M}e^{-2\alpha^2-2\alpha\xi_k} =$$
$$= \mathsf{M}\mathsf{M}_{t,x_0'}e^{-2\alpha^2-2\alpha\xi_k} = \mathsf{M}\left(e^{-2\alpha^2+(2\alpha)^2/2}\right) = 1.$$

Следовательно, $\mathsf{M}\left|\rho_k^{1/2+i\lambda} - q_k\right|^2 \leqslant 4$, откуда в силу утверждения 3.1.1 заключаем справедливость искомой сходимости $\mathsf{M}\left|\rho_k^{1/2+i\lambda} - q_k\right| \to 0$. Заметим сразу, что из этого следует сходимость $\mathsf{M}\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\rho_k^{1/2+i\lambda} - q_k\right)\right| \to 0$.

Обозначим $q(Z) := M_{x_0}(Z)$. Покажем теперь, что в силу утверждения 3.2.1 следует $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} q_k(Z) \to q(Z) = e^{-\alpha^2 c+\alpha^2c^2/2} = e^{-\alpha^2(1+4\lambda^2)/2} = e^{-\frac{1+4\lambda^2}{8\sigma^2}(\widetilde{x}'(t_0))^3}$ в смысле сходимости по мере. Отметим, что q является вещественнозначной функцией.

Итак, во-первых, $q_k - q$ имеют нулевое среднее в силу цепочки равенств

$$\mathsf{M}(q_k - q) = \mathsf{M}\mathsf{M}_{t,x_0'}(q_k - q) = \mathsf{M}\mathsf{M}_{t,x_0'}\left(e^{-\alpha^2c-\alpha c\xi_k} - q\right) = \mathsf{M}\left(e^{-\alpha^2c+\alpha^2c^2/2} - q\right) =$$
$$= \mathsf{M}(0) = 0.$$

Далее, аналогично предыдущему имеем $\mathsf{M}\,|q_k - q|^2 \leqslant 1 + 3\mathsf{M}q \leqslant \leqslant 4$ так как $q \leqslant 1$ в силу отрицательности показателя. Остается оценить ковариации $\mathsf{M}\left((q_k - q)(q_m - q)\right) = \mathsf{M}\mathsf{M}_{t,x_0'}\left((q_k - q)(q_m - q)\right) = = \mathsf{M}\left(\mathsf{M}_{t,x_0'}q_kq_m - q\mathsf{M}_{t,x_0'}q_k - q\mathsf{M}_{t,x_0'}q_m + q^2\right)$, где последний переход верен в силу независимости q_k и q относительно $\mathsf{M}_{t,x_0'}$. Имеем:

$$\mathsf{M}_{t,x_0'} q_k q_m = e^{-2\alpha^2 c}\mathsf{M}_{t,x_0'} e^{-\alpha c\frac{Z(t_k^*)-Z(t_0)}{\sigma\sqrt{t_k^*-t_0}}-\alpha c\frac{Z(t_m^*)-Z(t_0)}{\sigma\sqrt{t_m^*-t_0}}} =$$
$$= e^{-2\alpha^2 c}\mathsf{M}_{t,x_0'} e^{-\alpha c\frac{Z(t_k^*)-Z(t_m^*)}{\sigma\sqrt{t_k^*-t_0}}-\alpha c\frac{Z(t_m^*)-Z(t_0)}{\sigma\sqrt{t_k^*-t_0}}-\alpha c\frac{Z(t_m^*)-Z(t_0)}{\sigma\sqrt{t_m^*-t_0}}} =$$
$$= e^{-2\alpha^2 c}\mathsf{M}_{t,x_0'} e^{-\alpha c\frac{Z(t_k^*)-Z(t_m^*)}{\sigma\sqrt{t_k^*-t_m^*}}\frac{\sqrt{t_k^*-t_m^*}}{\sqrt{t_k^*-t_0}}-\alpha c\frac{Z(t_m^*)-Z(t_0)}{\sigma\sqrt{t_m^*-t_0}}\left(\frac{\sqrt{t_m^*-t_0}}{\sqrt{t_k^*-t_0}}+1\right)} =$$
$$= e^{-2\alpha^2 c}\mathsf{M}_{t,x_0'} e^{-\alpha c\frac{Z(t_k^*)-Z(t_m^*)}{\sigma\sqrt{t_k^*-t_m^*}}\frac{\sqrt{x_k-x_m}}{\sqrt{x_k-x_0}}-\alpha c\frac{Z(t_m^*)-Z(t_0)}{\sigma\sqrt{t_m^*-t_0}}\left(\frac{\sqrt{x_m-x_0}}{\sqrt{x_k-x_0}}+1\right)} =$$
$$= e^{-2\alpha^2 c} e^{\frac{1}{2}\alpha^2c^2\frac{x_k-x_m}{x_k-x_0}+\frac{1}{2}\alpha^2c^2\left(\frac{x_m-x_0}{x_k-x_0}+2\frac{\sqrt{x_m-x_0}}{\sqrt{x_k-x_0}}+1\right)} =$$
$$= e^{-2\alpha^2 c+\frac{1}{2}\alpha^2c^2\left(\frac{x_k-x_m}{x_k-x_0}+\frac{x_m-x_0}{x_k-x_0}+1+2\frac{\sqrt{x_m-x_0}}{\sqrt{x_k-x_0}}\right)} = e^{-2\alpha^2c+\alpha^2c^2\left(1+\sqrt{\frac{x_m-x_0}{x_k-x_0}}\right)}.$$

Далее, так как $\mathsf{M}_{t,x_0'} q_k = e^{-\alpha^2 c+\frac{1}{2}\alpha^2c^2}$, то получаем для $\beta = \sqrt{\frac{x_m-x_0}{x_k-x_0}}$:

$$\mathsf{M}\left((q_k-q)(q_m-q)\right) \leqslant \mathsf{M}e^{-2\alpha^2c+\alpha^2c^2(1+\beta)} - e^{-\alpha^2c+\frac{1}{2}\alpha^2c^2}e^{-\alpha^2c+\frac{1}{2}\alpha^2c^2} -$$
$$- e^{-\alpha^2c+\frac{1}{2}\alpha^2c^2}e^{-\alpha^2c+\frac{1}{2}\alpha^2c^2} + e^{-2\alpha^2c+\alpha^2c^2} = \mathsf{M}e^{-2\alpha^2c+\alpha^2c^2(1+\beta)} - e^{-2\alpha^2c+\alpha^2c^2} =$$
$$= e^{-2\alpha^2c+\alpha^2c^2+\alpha^2c^2\beta} - e^{-2\alpha^2c+\alpha^2c^2} = e^{-2\alpha^2(1+4\lambda^2)}\left(e^{\alpha^2\beta(1-4\lambda^2)}e^{4i\alpha^2\beta\lambda}-1\right).$$

Рассмотрим отдельно вещественную и мнимую часть полученной разности. Учитывая, что $0<\beta<1$ и всегда $1+4\lambda^2 \geqslant 4\lambda$, $\sin|x| \leqslant |x|$, имеем

$$\left|\mathrm{Im}\, e^{-2\alpha^2(1+4\lambda^2)}\left(e^{\alpha^2\beta(1-4\lambda^2)}e^{4i\alpha^2\beta\lambda}-1\right)\right| = e^{-2\alpha^2(1+4\lambda^2)}e^{\alpha^2\beta(1-4\lambda^2)}\left|\sin 4\alpha^2\beta\lambda\right| \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\alpha^2(1+4\lambda^2)}4\alpha^2\beta\lambda \leqslant e^{-\alpha^2(1+4\lambda^2)}\alpha^2(1+4\lambda^2)\beta \leqslant e^{-1}\beta.$$

Для оценки по модулю действительной части потребуется чуть более содержательное вычисление:

$$\left|\mathrm{Re}\, e^{-2\alpha^2(1+4\lambda^2)}\left(e^{\alpha^2\beta(1-4\lambda^2)}e^{4i\alpha^2\beta\lambda}-1\right)\right| =$$
$$= e^{-2\alpha^2(1+4\lambda^2)}\left|e^{\alpha^2\beta(1-4\lambda^2)}\cos 4\alpha^2\beta\lambda - 1\right| =$$
$$= e^{-2\alpha^2(1+4\lambda^2)}\left|e^{\alpha^2\beta(1-4\lambda^2)}\cos 4\alpha^2\beta\lambda - e^{\alpha^2\beta(1-4\lambda^2)} + e^{\alpha^2\beta(1-4\lambda^2)} - 1\right| \leqslant$$
$$\leqslant e^{-2\alpha^2(1+4\lambda^2)}e^{\alpha^2\beta(1-4\lambda^2)}\left|\cos 4\alpha^2\beta\lambda - 1\right| + e^{-2\alpha^2(1+4\lambda^2)}\left|e^{\alpha^2\beta(1-4\lambda^2)}-1\right|.$$

Первое слагаемое оценивается аналогично мнимой части с использованием оценки $|\cos|x|-1| \leqslant |x|$:

$$e^{-2\alpha^2(1+4\lambda^2)}e^{\alpha^2\beta(1-4\lambda^2)}\left|\cos 4\alpha^2\beta\lambda - 1\right| \leqslant e^{-\alpha^2(1+4\lambda^2)}4\alpha^2\beta\lambda \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\alpha^2(1+4\lambda^2)}\alpha^2(1+4\lambda^2)\beta \leqslant e^{-1}\beta.$$

Для оценки второго удобнее раскрыть модуль. При $1-4\lambda^2<0$ получаем

$$e^{-2\alpha^2(1+4\lambda^2)}\left|e^{\alpha^2\beta(1-4\lambda^2)}-1\right| = e^{-2\alpha^2(1+4\lambda^2)}\left(1-e^{\alpha^2\beta(1-4\lambda^2)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant e^{-2\alpha^2(1+4\lambda^2)}\alpha^2\beta(-1+4\lambda^2) \leqslant e^{-\alpha^2(1+4\lambda^2)}\alpha^2\beta(1+4\lambda^2) \leqslant e^{-1}\beta.$$

Иначе, при $1 - 4\lambda^2 \geqslant 0$, обозначая $\gamma = \alpha^2(1+4\lambda^2)$:

$$e^{-2\alpha^2(1+4\lambda^2)} \left| e^{\alpha^2\beta(1-4\lambda^2)} - 1 \right| = e^{-2\alpha^2(1+4\lambda^2)} \left(e^{\alpha^2\beta(1-4\lambda^2)} - 1 \right) \leqslant$$
$$\leqslant e^{-2\alpha^2(1+4\lambda^2)} \left(e^{\alpha^2\beta(1+4\lambda^2)} - 1 \right) = e^{-2\gamma} \left(e^{\gamma\beta} - 1 \right) \leqslant e^{-1}\beta,$$

так как максимум последнего выражения достигается в точке $\gamma_0 = \frac{1}{\beta} \ln \frac{2}{2-\beta}$, что даёт $e^{-2\gamma_0} \left(e^{\gamma_0\beta} - 1 \right) = (1-\beta/2)^{\beta/2} \left(\frac{2}{2-\beta} - 1 \right) = e^{-1}\frac{\beta}{2-\beta} \leqslant e^{-1}\beta$.

Итого в любом случае $\mathsf{M}\left|(q_k - q)(q_m - q)\right| \leqslant e^{-1}\sqrt{\frac{x_m - x_0}{x_k - x_0}}$. Выбирая, например, $x_{k+1} = \frac{x_k + x_0}{2}$ и задавая $x_1 > x_0$ произвольным образом, получаем искомую оценку ковариации вида

$$\mathsf{M}\left|(q_k - q)(q_m - q)\right| \leqslant e^{-1}(x_1 - x_0)2^{|k-m|/2}.$$

Таким образом все условия утверждения 3.2.1 выполнены, откуда имеет место сходимость $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} q_k(Z) \to q(Z)$ по мере.

Из приведённых оценок легко видеть, что $\mathsf{M}\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} q_k(Z) - q(Z)\right|^2$ равномерно ограничены, откуда в силу утверждения 3.1.1 заключаем, что действительно $\mathsf{M}\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} q_k(Z) - q(Z)\right| \to 0$.

Справедливость утверждения леммы тривиально вытекает из полученных утверждений о сходимости $\mathsf{M}\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\rho_k^{1/2+i\lambda} - q_k\right)\right| \to 0$ и $\mathsf{M}\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} q_k - q\right| \to 0$:

$$\left\langle F_1, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\rho_k^{1/2+i\lambda} - q\right) F_2 \right\rangle =$$
$$= \left\langle F_1, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\rho_k^{1/2+i\lambda} - q_k\right) F_2 \right\rangle + \left\langle F_1, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k - qF_2 \right\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \max|F_1F_2|\,\mathsf{M}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\rho_k^{1/2+i\lambda} - q_k\right)\right| + \max|F_1F_2|\,\mathsf{M}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k - q\right| \to 0.$$

□

Замечание 3.2.1. *Отметим, что важна не только сходимость к нетривиальному оператору умножения на функцию, но и свойство поточечной сходимости самой последовательности к тождественному диффеоморфизму, что влечёт сходимость оператора L'_g к тождественному и, соответственного, среднего операторов представлений к в среднему от операторов умножения на плотность.*

3.2.2 Перестановочность с оператором умножения на функцию специального вида

Лемма 3.2.2. *Пусть* $S\colon \mathrm{H}_{\Omega'} \to \mathrm{H}_{\Omega'}$ *- линейный непрерывный оператор такой, что* $SV_g = V_g S$ *для всех* $g \in G'$. *Пусть* M_x *- оператор умножения на* $m_x(Z) = e^{-\frac{1+4\lambda^2}{8\sigma^2}(\widetilde{x}'(t_0))^3}$. *Тогда для* $\forall x \in \mathbb{R}$, *для выполняется* $SM_x = M_x S$.

Доказательство. Пусть $F_1, F_2 \in \mathrm{H}_{\Omega'}$ - непрерывные ограниченные с ограниченным носителем. Обозначим $V_k := V_{g_k}$. Имеем по определению S:

$$\langle F_1, SV_kF_2\rangle = \langle F_1, V_kSF_2\rangle \tag{3.3}$$

Аналогично, для конечной суммы:

$$\left\langle S^*F_1, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_kF_2\right\rangle = \left\langle F_1, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_kSF_2\right\rangle \tag{3.4}$$

Покажем, что при предельном переходе в правой части (3.4) получим

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle F_1, \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_kSF_2\right\rangle = \langle F_1, M_xSF_2\rangle$$

Пусть задано некое $\varepsilon > 0$ и функция F_1 ограничена константой C_1. Выберем непрерывную ограниченную функцию F_ε так, чтобы $\|F_\varepsilon - SF_2\| < \frac{\varepsilon}{3C_1}$, $\|F_\varepsilon\| < C_2 = C_2(\varepsilon)$. Заметим, что

$$\left\langle F_1, \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_kSF_2\right\rangle - \langle F_1, M_xSF_2\rangle =$$
$$= \left\langle F_1, \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k(SF_2 - F_\varepsilon)\right\rangle + \left\langle F_1, \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_kF_\varepsilon - M_xF_\varepsilon\right\rangle + \langle F_1, M_x(F_\varepsilon - SF_2)\rangle$$

Для первого слагаемого в силу унитарности V_k имеем:

$$\left|\left\langle F_1, \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k(SF_2 - F_\varepsilon)\right\rangle\right| \leqslant \|F_1\|\,\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|V_k(SF_2 - F_\varepsilon)\| \leqslant C_1\tfrac{1}{n}n\tfrac{\varepsilon}{3C_1} = \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

Для третьего слагаемого $x'(t) = T(t)z(t)$, T - всюду неотрицательная по определению, z(t) выбрано всюду положительной, откуда $\|M_x\| \leqslant 1$, следовательно

$$\langle F_1, M_x(F_\varepsilon - SF_2)\rangle \leqslant \|F_1\|\,\|F_\varepsilon - SF_2\| \leqslant C_1\tfrac{\varepsilon}{3C_1} = \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

По лемме 3.2.1, с учётом того что $L'_g \to \mathrm{Id}$, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle F_1, \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k F_\varepsilon\right\rangle = \langle F_1, M_x F_\varepsilon\rangle.$$

То есть, начиная с некоторого n,

$$\left|\left\langle F_1, \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k F_\varepsilon - M_x F_\varepsilon\right\rangle\right| \leqslant \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Собирая последние три оценки вместе, заключаем, что действительно

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle F_1, \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k SF_2\right\rangle = \langle F_1, M_x SF_2\rangle$$

Последний результат можно интерпретировать как то, что для любых непрерывных ограниченных функций $F_1, F_2 \in \mathrm{H}_{\Omega'}$ с ограниченным носителем выполнено ($S = \mathrm{Id}$)

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle F_1, \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k F_2\right\rangle = \langle F_1, M_x F_2\rangle.$$

Найдём теперь предел левой части (3.4). Для этого будем приближать функцию S^*F_1 функциями этого класса (непрерывными ограниченными с ограниченным носителем), откуда сразу получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle S^*F_1, \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k F_2\right\rangle = \langle S^*F_1, M_x F_2\rangle$$

Таким образом, переходя к пределу в (3.4), получаем:

$$\langle S^*F_1, M_xF_2\rangle = \langle F_1, M_xSF_2\rangle\,, \qquad \langle F_1, SM_xF_2\rangle = \langle F_1, M_xSF_2\rangle$$

для любых непрерывных ограниченных функций $F_1, F_2 \in \mathrm{H}_{\Omega'}$ с ограниченным носителем. Так как такие функции плотны в $\mathrm{H}_{\Omega'}$, то $SM_x = M_xS$. □

Замечание 3.2.2. *Можно заметить, что если бы M_x был ограничен лишь на ограниченных траекториях, то утверждение леммы 3.2.2 оставалось бы в силе в том смысле, что $\langle F_1, SM_xF_2\rangle = \langle F_1, M_xSF_2\rangle$ для, например, непрерывных ограниченных F_1, F_2 с дополнительным условием ограниченности носителя для F_1.*

3.2.3 Отделимость точек пространства знакопостоянных непрерывных функций

Для доказательства леммы 3.2.5 необходимо изучить свойства $t(x) = t_Z(x)$ как оператора на Ω'.

Лемма 3.2.3. *Положим* $\mathrm{C}^+([0,1]) = \{f \in \mathrm{C}([0,1])\colon f(t) > 0\ \forall t \in [0,1]\}$ *и рассмотрим на нём семейство функционалов* $F_x(f) := f(t_f(x))$, $x \in \mathbb{R}$, *где* $t_f(x)$ *определяется из условия* $x = \int\limits_0^{t_f(x)} f(\tau)\,d\tau$. *Тогда семейство* F_x *разделяет точки* $\mathrm{C}^+([0,1])$, *то есть для* $\forall f_1 \neq f_2 \in \mathrm{C}^+([0,1])$ *найдётся* $x \in \mathbb{R}$ *такое, что* $F_x(f_1) \neq F_x(f_2)$, *где обе части определены одновременно.*

Доказательство. Допустим противное, то есть что $\exists f_1 \neq f_2 \in \mathrm{C}^+([0,1])$ такие, что $f_1(t_{f_1}(x)) = f_2(t_{f_2}(x))$ для $\forall x \in [0, \min(x_1, x_2)]$, где $x_1 = \int\limits_0^1 f_1(\tau)\,d\tau$, $x_2 = \int\limits_0^1 f_2(\tau)\,d\tau$. Далее, не ограничивая общности, считаем $x_1 \leqslant x_2$.

Обозначая $t_{f_1}(x)$ за t и вводя гладкую параметризацию $\varphi(t) = t_{f_2}(t_{f_1}^{-1}(t))$, можно записать предположение о равенстве функций в виде

$$f_1(t) = f_2(\varphi(t)) \quad \forall t \in [0,1].$$

Далее, по определению моментов t и $\varphi(t)$ имеем $\int\limits_0^t f_1(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^{\varphi(t)} f_2(\tau)\,d\tau$ для $\forall t \in [0,1]$. Дифференцируя последнее тождество по t, получаем

$$f_1(t) = f_2(\varphi(t))\varphi'(t) \quad \forall t \in [0,1].$$

Откуда, учитывая что f_1 и f_2 отличны от нуля, то $\varphi'(t) = 1 \quad \forall t \in [0,1]$, а так как $\varphi(0) = 0$, получаем $\varphi(t) = t \quad \forall t \in [0,1]$. Следовательно $f_1 = f_2$, что даёт противоречие.

Отметим, что аналогичное рассуждение верно для всюду отрицательных функций, то есть для $\mathrm{C}^-([0,1]) = \{f \in \mathrm{C}([0,1])\colon f(t) < 0\ \forall t \in [0,1]\}$.

$\square$

3.2.4 Оператор умножения на непрерывную функцию с сохранением коммутационных свойств

Суть дальнейшего рассуждения состоит в доказательстве факта, что оператор S с указанными свойствами коммутирует не только с оператором умножения на функции специального вида, а и с оператором умножения на произвольную непрерывную функцию. Стандартным образом, для этого используется:

Утверждение 3.2.2. *(Stone–Weierstrass, [41]). Пусть S - компактное хаусдорфово топологическое пространство, $C(S)$ - алгебра непрерывных вещественно значных функций на S. Пусть $D(S)$ - подалгебра $C(S)$, содержащая единичную функцию. Тогда $\overline{D(S)} = C(S)$ тогда и только тогда, когда $D(S)$ разделяет точки S, то есть $\forall s_1 \neq s_2 \in S\ \exists f \in C(S)\colon f(s_1) \neq f(s_2)$.*

Замечание 3.2.3. *Для $\forall x > 0$ оператор M_x не является непрерывным.*

Доказательство. Разрыв наступает на траекториях, для которых в точности выполнено равенство $\widetilde{x}(1) = x_0$. Пусть Z_0 - такая траектория. Рассмотрим траектории Z из достаточно малой окрестности Z_0. Если Z такова, что $\widetilde{x}(1) < x_0$, то соответствующий оператор R равен на этой траектории 1, а иначе, если $\widetilde{x}(1) > x_0$, то он равен $e^{-\frac{1}{8}(\widetilde{x}'(\tau))^3}$, где $\tau \to 1$ при $Z \to Z_0$. Ясно, что $\widetilde{x}'(1) \neq 0$, откуда следует наличия разрыва. □

Таким образом, напрямую применить утверждение 3.2.2 нельзя. Однако по семейству $\{m_x\}$ можно довольно естественным образом построить необходимое семейство непрерывных функционалов.

Лемма 3.2.4. *Пусть $S\colon \mathrm{H}_{\Omega'} \to \mathrm{H}_{\Omega'}$ - линейный непрерывный оператор такой, что $SV_g = V_gS$ для всех $g \in G'$. Положим $\widetilde{M}_{x_0}\colon \mathrm{H}_{\Omega'} \to \mathrm{H}_{\Omega'}\colon F(Z) \mapsto$ $\mapsto \left(\int\limits_0^{x_0} m_x(Z)\,dx\right) F(Z) = \widetilde{m}_{x_0}(Z)F(Z)$. Тогда для $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено $S\widetilde{M}_x =$ $= \widetilde{M}_xS$, причём $\{\widetilde{m}_x\}$ непрерывны и разделяют точки Ω'.*

Доказательство. Ясно, что для $\forall x_0$ траектория Z_0 из замечания 3.2.3 является единственной точно разрыва для функции r_{x_0}, откуда сразу следует непрерывность $\widetilde{m}_{x_0}$ в любой точке Ω'. Далее, оператор $\widetilde{M}_x$ ограничен и является пределом линейных комбинаций операторов M_x, откуда в силу леммы 3.2.2 получаем $S\widetilde{M}_x = \widetilde{M}_xS$.

Покажем, что семейство $\{\widetilde{m}_x\}$ разделяет точки Ω'. По лемме 3.2.3 для $\forall Z_1, Z_2 \in \Omega'$ найдётся m_x такая, что $m_x(Z_1) \neq m_x(Z_2)$, то есть $\{\widetilde{m}_x\}$ разделяют точки $\{\widetilde{x}'(Z)\}_{Z\in\Omega'}$. Заметим во-первых, что семейство функций $\{\widetilde{m}_x\}$ разделяет точки Ω' тогда и только тогда, когда их разделяет семейство $\{m_x\}$. Во-вторых, разделение точек Ω' равносильно разделению точек множества $\{\widetilde{x}'(Z)\}_{Z\in\Omega'}$, так как последние суть экспоненты от первообразных, а умножение на фиксированную всюду положительную z искомого свойства не меняет. В силу двух последних равносильностей получаем искомое. □

3.2.5 Перестановочность с оператором умножения на произвольную функцию

Лемма 3.2.5 получается из леммы 3.2.1 довольно интуитивным образом: сначала показываем наличие коммутационного соотношения для некоторого семейства функций, потом замечаем сохранение коммутационного соотношения для класса непрерывных функций, после чего остаётся лишь применить утверждение 3.2.2. Формализация, однако, требует некоторой аккуратности, так как после умножения на произвольную функцию можно выйти из исходного пространства.

Лемма 3.2.5. *Пусть $S\colon \mathrm{H}_{\Omega'} \to \mathrm{H}_{\Omega'}$ - линейный непрерывный оператор такой, что $SV_g = V_gS$ для всех $g \in G'$. Тогда $SM' = M'S$, где M' - оператор умножения на произвольную непрерывную ограниченную функцию в $\mathrm{H}_{\Omega'}$. Кроме того, если M - оператор умножения на произвольную функцию из $\mathrm{H}_{\Omega'}$ и $F \in \mathrm{H}_{\Omega'}$ - ограниченная, то $SMF = MSF$.*

Доказательство. Пусть F_1, F_2 - непрерывные и ограниченные. Для произвольного компакта K и ограничений $F_1|_K$ и $F_2|_K$ на него выполнено $\left\langle F_1|_K, SM'F_2|_K \right\rangle = \left\langle F_1|_K, M'SF_2|_K \right\rangle$. Действительно, в силу леммы 3.2.4 для функций на K применимо утверждение 3.2.2, откуда замыкание алгебры, порождённой операторами $\widetilde{M}_x$, содержит оператор M'.

Далее, для произвольных непрерывных, ограниченных F_1, F_2 и произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой компакт K, что $\left|\langle F_1, SM'F_2\rangle - \left\langle F_1|_K, SM'F_2|_K \right\rangle\right| < \varepsilon$

и $\left|\langle F_1, M'SF_2\rangle - \left\langle F_1\big|_K, M'SF_2\big|_K\right\rangle\right| < \varepsilon$, откуда заключаем, что $\langle F_1, SM'F_2\rangle = \langle F_1, M'SF_2\rangle$. Так как функции вида F_1, F_2 плотны в $\mathrm{H}_{\Omega'}$, то $SM' = M'S$. Заметим, кроме того, что в силу комплексной линейности оператора S утверждение леммы будет верно и для комплекснозначных функций.

Для доказательства второго утверждения леммы будем приближать произвольную функцию a последовательностью $\{a_n\}$ ограниченных и непрерывных функция, сходящихся к ней в $\mathrm{H}_{\Omega'}$. Пусть F_0 - ограниченная, с ограниченным носителем. Тогда для соответствующих операторов умножения M_a по доказанному выполнено

$$\langle SM_{a_n}F, F_0\rangle = \langle M_{a_n}SF, F_0\rangle \Leftrightarrow \langle M_{a_n}F, S^*F_0\rangle = \langle SF, M_{\overline{a}_n}F_0\rangle$$

откуда, переходя к пределу, в силу теоремы о мажорантной сходимости, получаем

$$\langle M_aF, S^*F_0\rangle = \langle SF, M_{\overline{a}}F_0\rangle \Leftrightarrow \langle SM_aF, F_0\rangle = \langle M_aSF, F_0\rangle$$

Так как функционалы вида F_0 плотны в $\mathrm{H}_{\Omega'}$, то $SMF = MSF$. $\square$

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Построено новое семейство мер, квазиинвариантных относительно действия группы диффеоморфизмов конечномерного евклидова пространства.
2. Предъявлена конструкция унитарных представлений на основе квазиинвариантных мер вместе с достаточными условиями для непрерывности и неприводимости.
3. Для построенных мер получено явное аналитическое выражение соответствующей производной Радона—Никодима на основе аппарата стохастического исчисления.
4. В одномерном случае для группы диффеоморфизмов полупрямой с дополнительными ограничениями на значения диффеоморфизмов в нуле показана неэквивалентность и неприводимость построенных представлений.
5. Развит подход к доказательству неприводимости получаемых представлений для случая, когда производная Радона—Никодима может быть выражена с помощью стохастического интеграла Ито.

С точки зрения автора, для дальнейшего исследования наибольший интерес представляют следующие вопросы:

1. Снятие ограничений на значения диффеоморфизмов в нуле. Особый интерес представляет случай, в котором допустимо $g'(0) = 0$, дающий представления группы диффеоморфизмов всей прямой.
2. Обобщение доказательства неприводимости представлений на многомерный случай.
3. Разложение тензорных произведений полученных представлений на неприводимые.

Список литературы

[1] А. Пресли, Г. Сигал, *Группы петель*, Мир, М., 1990.

[2] A. Weil, *L'integrtion dans les groupes topologiques et ses applications*, Actual. Scient. et Ind., V. 869, Paris: Herman, 1940.

[3] A.A. Kirillov, *Infinite dimensional groups, their representations, orbits, invariants*, Proc. Intern. Congr. of Math. (Helsinki, 1978), Helsinki, 1980, p. 705–708.

[4] Р.С. Исмагилов, *Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов окружности*, Функциональный анализ и приложения, 5, N. 3, 1971, с. 45–53.

[5] Р.С. Исмагилов, *Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов компактного многообразия*, Функциональный анализ и приложения, 6, N. 1, 1972, с. 79–80.

[6] Р.С. Исмагилов, *Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов компактного многообразия*, Известия Академии Наук СССР, Серия математическая, 36, 1972, с. 180–208.

[7] Р.С. Исмагилов, *Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов пространства* $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $\mathrm{n} \geqslant 2$, Функциональный анализ и приложения, 9, N. 2, 1975, с. 71–72.

[8] Р.С. Исмагилов, *Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов пространства* $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $\mathrm{n} \geqslant 2$, Математический сборник, 98(140), N. 1(9), 1975, с. 55–71.

[9] А.М. Вершик, И.М. Гельфанд, М.И. Граев, *Представления группы диффеоморфизмов*, Успехи математических наук, 30, N. 6, 1975, с. 3–50.

[10] O.G. Smolyanov, H.v. Weizsäcker, *Differentiable Families of Measures*, Journal of Funct. An., 1993, 118, N. 2, p. 454–476.

[11] O.G. Smolyanov, H.v. Weizsäcker, *Change of measures and their logarithmic derivatives undersmooth transformations*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, Math., 321, N. 1, 1995, p. 103–108.

[12] O.G. Smolyanov, H.v. Weizsäcker, *Smooth probability measures and associated differential operators*, Inf. Dim. Anal. Quant. Probab., 2, N. 1, 1999, p. 51–78.

[13] Ю.А. Неретин. *Дополнительная серия представлений группы диффеоморфизмов окружности*, Успехи математических наук, 37, N. 2(224), 1982, с. 213–214.

[14] Ю.А. Неретин. *Унитарные представления со старшим весом группы диффеоморфизмов окружности*, Функциональный анализ и приложения, 17, N. 3. 1983, с. 85–86.

[15] Yu.A. Neretin, *Holomorphic extensions of representations of the group of the diffeomorphisms of the circle*, Mat. Sb., 180:5 (1989), 635–657.

[16] Yu.A. Neretin, *Some remarks on quasi-invariant actions of loop groups and the group of diffeomorphisms of the circle*, Communications in Mathematical Physics, 1994, Vol. 164, no. 3, p. 599–626.

[17] Ю.А. Неретин. *Представления алгебры Вирасоро и аффинных алгебр*, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, М.: ВИНИТИ, 22, 1988, с. 163–224.

[18] Yu.A. Neretin, *Categories of symmetries and infinite-dimensional groups*, Oxford, 1996.

[19] Е.Т. Шавгулидзе, *Один пример меры, квазиинвариантной относительно действия группы диффеоморфизмов окружности*, Функциональный анализ и приложения, 12, N. 3, 1978, с. 55–60.

[20] Е.Т. Шавгулидзе, *Об одной мере, квазиинвариантной относительно действия группы диффеоморфизмов конечномерного многообразия*, Доклады Академии Наук СССР, 303, N. 4, 1988, с. 811–814.

[21] Е.Т. Шавгулидзе, *Распределения на бесконечномерных пространствах и вторичное квантование в струнных теориях*, V международная Вильнюсская конференция по теории вероятносткй и математической статистике. Июнь 1989: тезисы кратких сообщений. Вильнюс, 1990. с. 359–360.

[22] Е.Т. Шавгулидзе, *Квазиинвариантные меры на группах диффеоморфизмов*, Труды МИАН им. Стеклова, 217, 1997, с. 189–208.

[23] E.T. Shavgulidze, *Some Properties of Quasi-Invariant Measures on Groups of Diffeomorphisms of the Circle*, Russ. J. Math. Phys., 7, N. 4, 2000, p. 464–472.

[24] E.T. Shavgulidze, *Properties of the convolution operation for quasi-invariant measures on groups of diffeomorphisms of a circle*, Russ. J. Math. Phys., 8, N. 4, 2001, p. 495–498.

[25] M.P. Malliavin, P. Malliavin, *Measures quasi invariantes sur certain groupes de dimension infini*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. 1, 311, 1990, p. 765–768.

[26] M.P. Malliavin, P. Malliavin, *Integration on loop groups. I. Quasi invariant measures*, Journal of Functional Analysis, 93, N. 1, 1990, p. 207–237.

[27] A.V. Kosyak, *Irreducible Regular Gaussian Representations of the Groups of the Interval and Circle Diffeomorphisms*, Journal of Functional Analysis, 125, 1994, p. 493–547.

[28] P.A. Kuzmin, *On circle diffeomorphisms with discontinuous derivatives and quasi-invariancc subgroups of Malliavin-Shavguhdze measures*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 330, 2007, p. 744–750.

[29] A. A. Dosovitskii, *Quasi-Invariant Measures on Sets of Piecewise Smooth Homeomorphisms of Closed Intervals and Circles and Representations of Diffeomorphism Groups*, Russ. J. Math. Phys., 18, N. 3, 2011, p. 258–296.

[30] R. Cont, D.-A. Fournié. *Functional Ito calculus and stochastic integral representation of martingales*, Annals of Probability, Institute of Mathematical Statistics (IMS), 2013, 41 (1), p. 109–133.

[31] H.-H. Kuo, Y. Peng, B. Szozda, *Ito Formula and Girsanov Theorem for Anticipating Stochastic Integrals*, Communication on Stochastic Analysis 7, no. 3 (2013), p. 441–458.

[32] A.A. Agrachev, R.V. Gamkrelidze, *The exponential representation of flows and the chronological calculus*, Math. USSR-Sb., 35:6 (1979), p. 727–785.

[33] M. Libine, *Introduction to Representations of Real Semisimple Lie Groups*, arXiv:1212.2578v2 [math.RT].

[34] B. Oksendal, *Stochastic Differentional Equations*, 5th Edition, 1998, Springer-Verlag Heidelberg New York.

[35] H. -H. Kuo, *Gaussian Measures in Banach Spaces*, Lect. Notes Math., Vol. 463 (Springer-Verlag, Berlin - New York, 1975; Mir, Moscow, 1979).

[36] A. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion—Facts and Formulae*, 2nd edn., Birkhauser, Boston (2002),

[37] Marcus, B. Michael; J. Rosen, *Sample Path Properties of the Local Times of Strongly Symmetric Markov Processes Via Gaussian Processes*, Ann. Probab. 20 (1992), N. 4, p. 1603–1684.

[38] R.H. Cameron, Graves, E. Ross, *Additive functionals on a space of continuous functions*, I. Trans. Amer. Math. Soc. 70, (1951), p 160–176.

[39] S. Bernshtein, *Sur la loi des grands nombres*, Communications de la Société mathématique de Kharkow. 2-ée série, 16:1-2 (1918), p. 82–87.

[40] V.V. Kozlov, T. Madsen, A.A. Sorokin, *On weighted mean values of weakly dependent random variables*, Moscow Univ. Math. Bull., 59:5 (2004), p. 36–39.

[41] M. Reed, B. Simon, *Functional Analysis*, Methods of Mathematical Physics, Vol. I, Academic Press, New York, 1972.

Публикаци автора по теме диссертации

В рецензируемых журналах:

[42] Е.Д. Романов, *Квазиинвариантные меры и представления группы диффеоморфизмов*, Нелинейный мир, 3 т. 14, 2016, 32–39.

[43] E.D. Romanov, *Family of measures on a space of curves that are quasi-invariant with respect to some action of diffeomorphisms group*, Inf. Dim. Anal. Quant. Probab., Vol. 19, No. 03, 2016, 1650019 [15 pages].

[44] E.D. Romanov, *A Series of Irreducible Unitary Representations of a Group of Diffeomorphisms of the Half-Line*, Russ. J. Math. Phys., 23, N. 3, 2016, p. 369–381.

В тезисах конференций:

[45] Е.Д. Романов, *Квазиинвариантная относительно действия гладких диффеоморфизмов мера*, Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2016», М.: МАКС Пресс, 2012.

[46] Е.Д. Романов, *Семейство мер, квазиинвариантных относительно действия группы диффеоморфизмов. Представления*, Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2016», М.: МАКС Пресс, 2012.

[47] Е.Д. Романов, *Об одном представлении группы диффеоморфизмов на основе квазиинвариантной меры*, материалы международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2016», М.: МАКС Пресс, 2016.

[48] Е.Д. Романов, *Семейство квазиинвариантных мер в пространстве траекторий и связанные с ним представления группы диффеоомарфизмов*, труды II Российско-Белорусской научно-технической конференции «Элементная база отечественной радиоэлектроники: импортозамещение и применение» им. О.В. Лосева, Нижний Новгород, 2016.