

## Отзыв

официального оппонента о диссертации Е.Д. Романова «Квазиинвариантные меры и представления группы диффеоморфизмов», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация посвящена исследованиям в области бесконечномерного анализа. Предлагается новое семейство мер, квазиинвариантных относительно действия группы диффеоморфизмов конечномерного евклидова пространства. Строится серия представлений группы диффеоморфизмов в пространствах функций, квадратично интегрируемых по этим мерам. Доказывается неприводимость и попарная неэквивалентность этих представлений.

Теория представлений бесконечномерных групп интересна не только чисто математически, но и с точки зрения приложений к математической физике, в частности, к квантовой теории поля. Различные подходы к построению представлений групп диффеоморфизмов конечномерных многообразий были предложены в работах Р.С. Исмагилова, А.М. Вершика, И.М. Гельфанда, М.И. Граева, А.А. Кириллова. В работах Ю.А. Неретина и Е.Т. Шавгулидзе были развиты подходы к построению представлений групп диффеоморфизмов на основе мер, квазиинвариантных относительно действия этих групп. Конструкции мер, основанные на переносе меры Винера, были предложены А.В. Косяком и Е.Т. Шавгулидзе. Метод Е.Т. Шавгулидзе был развит и расширен в работах П.А. Кузьмина и А.А. Досовицкого. В диссертации используются подходы к изучению мер на бесконечномерных пространствах, близкие к работам О.Г. Смолянова, Г. фон Вайцекера, П. Малявена и М.П. Малявена, а также современные методы стохастического исчисления, сходные с применяемыми в работах Р. Конта. Представленная в диссертации конструкция может быть обобщена с учетом последних результатов Х. Го и Ю. Пенга в области стохастического анализа.

Таким образом, тематика работы актуальна, а используемые методы исследований современны. Полученные результаты могут найти применение не только в математике, но и в математической физике.

Диссертация Е.Д. Романова состоит из введения, трех глав и заключения. Во введении обосновывается актуальность работы, приводится обзор литературы и вкратце излагаются основные результаты диссертации.

Institut für Informatik

Lehrstuhl für Mustererkennung  
und Bildverarbeitung

Albert-Ludwigs-Universität  
Freiburg

Dr. Alexey Dosovitskiy

Georges-Köhler-Allee 052  
79110 Freiburg

Tel. 0761/203-97630.  
Fax 0761/203-8262

[dosovits@cs.uni-freiburg.de](mailto:dosovits@cs.uni-freiburg.de)  
[www.lmb.informatik.uni-freiburg.de](http://www.lmb.informatik.uni-freiburg.de)

Freiburg, 30.11.2016

В первой главе предложен способ построения квазиинвариантных мер, определены соответствующие им представления группы диффеоморфизмов, а также сформулированы достаточные условия непрерывности и неприводимости этих представлений. Квазиинвариантная мера строится на пространстве достаточно гладких функций путем переноса меры Винера при помощи специальным образом сконструированного взаимно-однозначного отображения. Далее, определяется серия унитарных представлений группы диффеоморфизмов конечномерного евклидова пространства в пространстве комплекснозначных функций, квадратично интегрируемых по построенным мерам. Наконец, приводятся достаточные условия непрерывности и неприводимости представлений, которые будут использованы для анализа представлений в третьей главе.

Во второй главе с использованием аппарата стохастического исчисления выводится явное аналитическое выражение для производной Радона-Никодима построенных мер под действием группы диффеоморфизмов. Искомая производная вычисляется путем предельного перехода в последовательности конечномерных проекций построенных мер. В результате доказывается, что производная Радона-Никодима может быть выражена в компактной форме через стохастический интеграл Ито. Применение аппарата стохастического исчисления позволяет, во-первых, значительно сократить количество технических выкладок и, во-вторых, получить результаты в общей форме, применимой к широкому, в смысле гладкости, классу диффеоморфизмов.

В третьей главе анализируются свойства представлений групп диффеоморфизмов, построенных в первой главе. Рассматривается специальный случай: диффеоморфизмы полупрямой с дополнительными ограничениями на производные в нуле. Доказана непрерывность и неприводимость представлений, а также попарная неэквивалентность некоторых из них. Ключевым моментом доказательства является построение серии последовательностей диффеоморфизмов, каждая из которых поточечно сходится к тождественному отображению, но в среднем по Чезаро сходится к нетривиальному оператору поточечного умножения на функцию. Достаточное богатство этого семейства последовательностей позволяет доказать, что коммутирование линейного непрерывного оператора с операторами представление влечет его коммутирование с оператором замены переменной. Далее, неприводимость представлений следует из эргодической теоремы для линейных сдвигов относительно меры Винера и леммы Шура. Попарная неэквивалентность построенных представлений также следует из существования вышеуказанной серии последовательностей.

В заключении суммируются основные результаты диссертации и предлагаются потенциальные направления дальнейших исследований.

Диссертация содержит следующие основные результаты:

1. Построено новое семейство мер, квазиинвариантных относительно действия группы диффеоморфизмов конечномерного евклидова пространства.

2. С помощью аппарата стохастического исчисления вычислено аналитическое выражение для производных Радона-Никодима этих мер при действии диффеоморфизмов.
3. Построена серия представлений групп диффеоморфизмов в пространствах функций, квадратично интегрируемых по построенным мерам.
4. Для группы диффеоморфизмов полупрямой доказана неприводимость и попарная неэквивалентность построенных представлений.

Результаты диссертации являются новыми и актуальными. Доказательства являются строгими, а выводы – обоснованными. Результаты, изложенные в диссертации, были опубликованы в трех печатных работах в изданиях, входящих в список ВАК по специальности, а также обсуждались на научных конференциях и семинарах. Автореферат диссертации правильно отражает ее содержание.

Содержательно диссертация не имеет заметных недостатков, однако встречаются неточности и опечатки: к примеру, во введении достаточные условия называются необходимыми, а в начале главы 2 не определена матрица  $E$ . Эти замечания не влияют на общую высокую оценку работы.

Вышесказанное позволяет заключить, что работа Романова Евгения Дмитриевича «Квазиинвариантные меры и представления группы диффеоморфизмов» удовлетворяет требованиям Положения ВАК, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, а ее автор достоин присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по этой специальности.

Отзыв составил официальный оппонент  
Досовицкий Алексей Алексеевич,  
Кандидат физико-математических наук по специальности 01.01.01,  
научный сотрудник кафедры распознавания образов  
Фрайбургского университета имени Альберта и Людвига

Почтовый адрес: Georges-Koehler-Allee 052, 79110 Freiburg, Germany  
Телефон: +49 162 3809795  
Email: adosovitskiy@gmail.com

30 ноября 2016 г.



Досовицкий Алексей Алексеевич

I verify the signature of Dr. Alexey Dosovitskiy  
Director of the Computer Science Department,  
Professor, Dr-Ing

Albert-Ludwigs-Universität  
Technische Fakultät, Institut für Informatik  
Professur für Mustererkennung u. Bildverarbeitung  
Prof. Dr.-Ing. Thomas Brox  
Georges-Köhler-Allee 052  
79110 Freiburg i. Br.

UNI  
FREIBURG