

ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Е.Д. Романова «Квазиинвариантные меры и представления группы диффеоморфизмов», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Диссертация развивает новые методы исследования мер на пространствах отображений, квазиинвариантных относительно групп диффеоморфизмов конечномерных евклидовых пространств и многообразий. В ней изучаются вопросы построения непрерывных неприводимых унитарных представлений рассматриваемых групп диффеоморфизмов, действующих в пространствах функций, квадратично интегрируемых по квазиинвариантной мере.

В настоящее время теория представлений групп диффеоморфизмов конечномерных многообразий является активно развивающейся областью исследования, представленной, в частности, в работах А.М. Вершика, Р.С. Исмагилова, А.А. Кириллова. Диссертация направлена на развитие методов теории представлений групп диффеоморфизмов конечномерных пространств и многообразий, впервые предложенной в работах Р.С. Исмагилова и разработанной в исследованиях Е.Т. Шавгулидзе и Ю.А. Неретина. Используемые в диссертации методы построения и изучения квазиинвариантных относительно подгрупп диффеоморфизмов мер на пространствах отображений наиболее близки к направлениям, развиваемым в последние годы в работах О.Г. Смолянова и Г. Фон Вайцзекера, П. Маллявена и М.П. Маллявена, П.А. Кузьмина, А.А. Досовицкого. Помимо прочего, в работе успешно применяется и развивается предложенный Е.Т. Шавгулидзе способ получения квазиинвариантных мер на функциональных пространствах, основанный на переносе меры Винера. Таким образом, тема диссертации Е.Д. Романова безусловно является актуальной.

Диссертация Е.Д. Романова посвящена изучению унитарных представлений группы достаточно гладких диффеоморфизмов конечномерного евклидова пространства R^d в группе линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве комплекснозначных квадратично интегрируемых функций на некотором бесконечномерном пространстве отображений, в котором действует рассматриваемая группа диффеоморфизмов. При этом мера на пространстве отображений, в котором действует группа диффеоморфизмов, выбирается такой, чтобы быть квазиинвариантной относительно действия некоторой ее подгруппы, состоящей из достаточно гладких диффеоморфизмов. Такой подход обусловлен, с одной стороны, отсутствием локальной компактности рассматриваемой группы, что в силу теоремы А. Вейля не позволяет рассматривать действие группы целиком на себе, а с другой – техническими требованиями к гладкости диффеоморфизмов, необходимых для реализации рассматриваемой конструкции. В связи с этим для построения представлений группы диффеоморфизмов пространства R^d в диссертации в первую очередь определяется пространство отображений, в котором действует группа диффеоморфизмов, и

определяется новое семейство мер, квазиинвариантных относительно действия подгрупп достаточно гладких диффеоморфизмов пространства R^d . Существенным достижением и продвижением диссертации является применимость предложенной конструкции к пространствам произвольной конечной размерности d .

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Во введении определены цели работы, дан обзор литературы по исследуемым задачам и приведены основные результаты диссертации.

В первой главе предложен выбор внешнего по отношению к группе диффеоморфизмов функционального пространства, с помощью переноса меры Винера на которое определяются квазиинвариантные по отношению к достаточно гладким диффеоморфизмам меры. Получены унитарные представления группы диффеоморфизмов в гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых по квазиинвариантной мере комплекснозначных функций на пространстве отображений, в котором действует группа диффеоморфизмов. В абстрактной форме получены достаточные условия непрерывности и неприводимости полученных представлений.

Во второй главе диссертации с помощью достигнутого свойства квазиинвариантности меры относительно действия подгруппы диффеоморфизмов определяется и исследуется производная Радона-Никодима меры, полученной действием элемента группы, относительно исходной квазиинвариантной меры. В диссертации получено явное выражение для производной Радона-Никодима. Применение стохастического интеграла Ито и аппарата стохастического исчисления позволило понизить требования к гладкости рассматриваемых диффеоморфизмов.

В третьей главе диссертации свойства непрерывности и неприводимости представлений, индуцированных построенными мерами, установлены для случая диффеоморфизмов одномерного пространства, удовлетворяющих некоторым дополнительным ограничениям (за счет которых задача сводится к рассмотрению группы диффеоморфизмов полупрямой). Устанавливается существование последовательностей диффеоморфизмов таких, что их среднее по Чезаро в некотором слабом смысле сходится к операторам умножения на функцию с сохранением коммутационных свойств. С помощью теоремы Стоуна-Вейерштрасса показано, что из этого следует существование достаточно широкого семейства операторов умножения на функцию, перестановочных с оператором представления. С помощью теоремы об эргодичности меры Винера при линейных сдвигах на плотное подпространство и леммы Шура доказана неприводимость представлений, полученных с использованием квазиинвариантных мер специального вида. Для рассматриваемого в третьей главе класса диффеоморфизмов устанавливается неэквивалентность полученных представлений, соответствующих различным параметрам представления и параметрам мер.

В целом диссертация Е.Д. Романова представляет развитие аппарата стохастического анализа и новых методов задания квазиинвариантных относительно групп диффеоморфизмов мер на пространстве отображений. Она содержит интересные находки по применению таких методов стохастического анализа, как интеграл Ито и закон больших чисел для слабо коррелированных случайных величин, в изучении свойств производной Радона-Никодима квазиинвариантных мер по отношению к диффеоморфизмам и свойства неприводимости

представлений группы диффеоморфизмов в пространстве функций, квадратично интегрируемых по квазиинвариантным мерам специального вида.

В диссертации и автореферате имеются недостатки редакционного характера (например, используемые в третьей главе достаточные условия неприводимости из первой главы называются необходимыми). В качестве пожеланий для дальнейших исследований по теме диссертации хотелось бы предложить описать множество всех неэквивалентных представлений группы диффеоморфизмов полупрямой (в частности, представлений, порожденных мерами, сосредоточенными на разных траекториях), а также перенести результаты о неприводимости представлений из третьей главы на многомерный случай

Указанные замечания не влияют на общую положительную оценку работы. Диссертация выполнена на высоком научном уровне и содержит решение важной и сложной задачи, связанной с описанием квазиинвариантных относительно групп диффеоморфизмов мер и получением унитарных представлений группы диффеоморфизмов. Результаты диссертации Е.Д. Романова полно представлены в его публикациях и правильно отражены в автореферате.

Считаю, что работа «Квазиинвариантные меры и представления группы диффеоморфизмов» удовлетворяет требованиям Положения ВАК, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, а ее автор – Романов Евгений Дмитриевич – достоин присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по этой специальности.

Отзыв составил официальный оппонент Сакбаев Всеволод Жанович, доктор физико-математических наук по специальности 01.01.02, доцент, профессор кафедры высшей математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»
Почтовый адрес: 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д.9

Телефон: +7(495)408-81-72

Эл. почта: fumi2003@mail.ru.



Сакбаев Всеволод Жанович

21 ноября 2016 г.

Подпись В.Ж. Сакбаева удостоверяю,

Ученый секретарь МФТИ

к.ф.-м.н., доцент




Ю.И. Скалько