ФГБОУ ВО
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Механико–математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.213.22 + 519.233.32

Савелов Максим Павлович

Экстремальные характеристики критериев выбора статистических гипотез

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Зубков Андрей Михайлович

Москва — 2016

Содержание

Введение

Общая характеристика работы

Диссертация подготовлена на кафедре теории математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова".

Актуальность темы.

Настоящая диссертация посвящена изучению экстремальных характеристик критериев выбора статистических гипотез.

Одной из важных статистических задач является задача о различении нескольких (скажем, n) простых гипотез. Если $n = 2$, то ее решение (для широкого класса случаев) может быть получено с помощью леммы Неймана-Пирсона. Рассмотрим ситуацию, когда $n = 3$. Для любой фиксированной тройки вероятностных мер $\vec{\mu} := (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ можно найти оптимальный в том или ином смысле критерий и определить его «качество» (например, понимая под качеством вероятность ошибки в худшем случае) как функцию от тройки мер. В связи с этим естественным образом возникает вопрос: в каких пределах меняется качество критерия, если тройки вероятностных мер принадлежат некоторому множеству. Формализуем вышесказанное.

Пусть M - множество вероятностных мер на измеримом пространстве (Ω, Σ). Для любых трех вероятностных мер μ_1, μ_2, μ_3 на (Ω, Σ) можно рассмотреть задачу различения гипотез H_i: наблюдение ξ имеет распределение μ_i $(i = 1, 2, 3)$. Каждому нерандомизированному критерию в этой задаче соответствуют измеримое разбиение $\vec{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$ пространства Ω $(\bigsqcup_{i=1}^{3} C_i = \Omega$; если наблюдение $\xi \in C_i$, то принимается гипотеза H_i, $i = 1, 2, 3)$ и вероятности $\mu_j(C_k)$ принятия гипотезы H_k в случае, когда верна гипотеза H_j, $j, k \in \{1, 2, 3\}$. Совокупность всех разбиений Ω на три не пересекающихся измеримых подмножества обозначим $\mathcal{C}(\Omega)$. Далее, через $\vec{\mu}$ обозначим тройку (μ_1, μ_2, μ_3), через $\vec{\mu}(\vec{C})$ обозначим упорядоченный набор $(\mu_1(C_1), \mu_1(C_2), ..., \mu_3(C_3))$. Будем считать, что качество критерия можно представить функцией $f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ со значениями в $\mathbb{R}$; иногда будет использоваться также обозначение $f(\{\mu_j(C_k)\}_{j,k=1}^{3})$. Фиксируем такие числа r_{ij},

$1 \leqslant i < j \leqslant 3$, что $0 \leqslant r_{ij} \leqslant 1$, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, $r_{12}+r_{13} \geqslant r_{23}$, $r_{12}+r_{23} \geqslant r_{13}$ и $r_{13}+r_{23} \geqslant r_{12}$. Рассмотрим семейство всевозможных троек вероятностных мер на Σ, между которыми заданы попарные расстояния по вариации следующим образом: $\rho(\mu_i, \mu_j) = r_{ij}$, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, где

$$\rho(\mu_i, \mu_j) := \sup_{A \in \Sigma} |\mu_i(A) - \mu_j(A)|.$$

Будем называть такие тройки мер $\vec{r}$-согласованными и обозначать это следующим образом: $\vec{\mu} \in D(\vec{r})$. Естественным образом возникает вопрос о получении удобных выражений для чисел

$$\bar{R} = \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})), \quad \underline{R} = \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})). \tag{1}$$

Отметим, что величины

$$\inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \inf_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \quad \text{и} \quad \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \inf_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$$

сразу получаются из величин $\bar{R}$ и $\underline{R}$ за счет замены f на $-f$.

Величины $\bar{R}$ и $\underline{R}$ характеризуют качество оптимального нерандомизированного критерия в условиях, когда известны только попарные расстояния по вариации между мерами μ_1, μ_2, μ_3.

Одним из классических результатов в обсуждаемой тематике является лемма Фано (см. [14]), позволяющая оценить вероятности ошибок в терминах расстояния Кульбака-Лейблера. Усиление этого результата (также в терминах расстояния Кульбака-Лейблера) есть в статье L.Birge [12]. Оценка вероятностей ошибок через более общие f-дивергентные расстояния приведена в статье А.А. Гущина [17], результаты которой позволяют усилить результаты статьи [12], а также получить следующие оценки вероятностей ошибок в терминах расстояний по вариации.

Пусть $\mathbb{E} = (\Omega, \mathbb{F}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$— статистическая модель, причем $\Theta = \{1, 2, ..., n\}$ и пространство D решений совпадает с множеством Θ, функция потерь $L(\theta, d) = \mathbb{I}_{\theta \neq d}$, функция $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$ задает рандомизированный критерий ($\phi_i : \Omega \to [0,1]$ измеримы для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ и $\sum_{i=1}^n \phi_i = 1$) следующим образом: $\phi_i(\omega)$ - это вероятность принять решение под номером i, если происходит ω. Множество таких критериев обозначим через Φ. Далее, $a_M := \sup_{\phi \in \Phi} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathbf{E}_{P_i} \phi_i$ (число $1 - a_M$ равно вероятности ошибки «в худшем случае»). Положим $\bar{a} := \sup_{\phi\in\Phi} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_{P_i}\phi_i$. С помощью теоремы 1 из статьи А.А. Гущина [17] легко получить следующую оценку:

$$a_M \leqslant \bar{a} \leqslant \frac{1}{n}\cdot(1+\min_j \sum_{i=1}^{n} \rho(P_i, P_j)). \tag{2}$$

В случае, когда $n = 2$ и критерии рандомизированные, величина $\bar{a}$ выражается через расстояние по вариации (см. [10], стр. 461-462): $\bar{a} = \frac{1+\rho(P_1,P_2)}{2}$.

Ряд результатов, связывающих вероятность ошибки и характеристики соответствующих распределений (например, энтропию), представлен в работах [11], [15], [16]. Схожие вопросы рассмотрены также в статье [13], основная теорема которой состоит в следующем. Пусть $\mu_1, ..., \mu_n$ - безатомные вероятностные меры на измеримом пространстве $(S, \mathcal{B})$, Π_S - множество измеримых разбиений S,

$$M = M(\mu_1, ..., \mu_n) := \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(A_i) : \{A_i\}_{i=1}^{n} \in \Pi_S\right\},$$

$$v = v(\mu_1, ..., \mu_n) := \sup\left\{\min_{1\leqslant i\leqslant n} \mu_i(A_i) : \{A_i\}_{i=1}^{n} \in \Pi_S\right\},$$

тогда $(n - M + 1)^{-1} \leqslant v \leqslant Mn^{-1}$.

Задача, решаемая в первой главе диссертации, отличается от вышеперечисленных тем, что, ограничившись только множеством Φ^* нерандомизированных критериев, мы получим удобные формулы для величин $\underline{R}$ и $\bar{R}$, которые дают неулучшаемые оценки для величины $\sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ в условиях, когда заданы только расстояния по вариации r_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$. Будет показано, что нахождение экстремальных значений кусочно-непрерывных функций от вероятностей ошибок в широком классе случаев сводится к решению конечномерной задачи линейного программирования.

Некоторые результаты диссертации относятся и к случаю с рандомизированными критериями. В частности, мы докажем, что в условиях, когда $n = 3$ и известны только расстояния по вариации между мерами, оценка (2) является неулучшаемой, причем доказательство позволяет одновременно получить нижнюю оценку для $\bar{a}$ (в том числе и для произвольного n).

Отметим, что рассматриваемая тематика отчасти связана с проблемой деления торта (cake-cutting problem), см., например, [13]. В самом деле, задача о делении торта (Ω) на куски (измеримые множества C_i) между несколькими людьми (каждому человеку соответствует вероятностная мера μ_i на Ω, $1 \leqslant i \leqslant n$) может быть формализована, в частности, одним из следующих способов ([19], стр.62). Можно назвать деление «честным», если, например, выполняется одно из следующих условий:

1. $\mu_i(C_i) \geqslant \frac{1}{n}$ для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$ (обычное честное деление),
2. $\mu_i(C_i) \geqslant \mu_i(C_j)$ для всех пар $1 \leqslant i, j \leqslant n$ («отсутствие зависти»).

Кроме того, естественно считать, что деление тем лучше, чем больше величина $\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \mu_i(C_i)$ («суммарная удовлетворенность»). В рамках этих трех подходов естественно полагать, что деление тем лучше, чем больше значения следующих функций:

1. $f_+(\vec{\mu}(\vec{C})) = f_1(\vec{\mu}(\vec{C})) = \sum_i \mu_i(C_i)$,
2. $f_\Delta(\vec{\mu}(\vec{C})) = f_2(\vec{\mu}(\vec{C})) = \min_{i\neq j}(\mu_i(C_i) - \mu_i(C_j))$,
3. $f_{\min}(\vec{\mu}(\vec{C})) = f_3(\vec{\mu}(\vec{C})) = \min_i \mu_i(C_i)$.

Далее, естественным образом возникает задача о нахождении числовых характеристик оптимальных разбиений, т.е. задача о нахождении

$$\inf_{\vec{\mu}\in A} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f_l(\vec{\mu}(\vec{C})) \quad \text{и} \quad \sup_{\vec{\mu}\in A} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f_l(\vec{\mu}(\vec{C})), \quad 1 \leqslant l \leqslant n,$$

где A — некое множество наборов из n мер на Ω. Мы будем рассматривать случай, когда $A = D(\vec{r})$, и использовать следующие обозначения:

$$\underline{R}^+ := \inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f_+(\vec{\mu}(\vec{C})), \quad \bar{R}^+ := \sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f_+(\vec{\mu}(\vec{C})), \tag{3}$$

$$\underline{R}^\Delta := \inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f_\Delta(\vec{\mu}(\vec{C})), \quad \bar{R}^\Delta := \sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f_\Delta(\vec{\mu}(\vec{C})), \tag{4}$$

$$\underline{R}^{\min} := \inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f_{\min}(\vec{\mu}(\vec{C})), \quad \bar{R}^{\min} := \sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f_{\min}(\vec{\mu}(\vec{C})). \tag{5}$$

Задача о нахождении этих величин также освещена в диссертации.

Другой круг исследованных в диссертации задач связан с r-кратным критерием χ^2 (см., например, [4], [8], [7], [3], [9]).

Рассмотрим схему независимых испытаний с N исходами. Будем считать, что вероятность j-го исхода равна $p_j > 0, j = 1, ..., N$. Рассмотрим величины $I_j(t)$, которые равны 1, если при t-м испытании осуществился j-й исход, и $I_j(t) = 0$ в остальных случаях. Статистика Пирсона вычисляется по формуле $X(n) := \sum_{j=1}^N \frac{1}{np_j}(\sum_{t=1}^n I_j(t) - np_j)^2$. На основании набора статистик

$$X = (X(n_1), X(n_2), \ldots, X(n_r)), \quad n_1 < n_2 < \ldots < n_r,$$

строится последовательный r-кратный критерий согласия χ^2. Рассмотрим случайный процесс с дискретным временем $X(n)$, $n \geqslant 1$. Мы докажем, что при надлежащей нормировке по времени конечномерные распределения процесса, образованного последовательными значениями статистики Пирсона для выборок увеличивающихся со временем объемов, сходятся к конечномерным распределениям стационарного случайного процесса — нормированного квадрата процесса Бесселя. Полученные в [4] результаты о предельных совместных распределениях статистики Пирсона используются для вывода явных формул для плотности совместных распределений процесса Бесселя.

Цели работы. Нахождение экстремальных и асимптотических характеристик критериев выбора и проверки некоторых статистических гипотез.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

- В задаче различения $n \geqslant 3$ гипотез с заданными расстояниями по вариации между распределениями наблюдений:
  А) показано, что нахождение экстремальных значений произвольных кусочно-линейных непрерывных функций от вероятностей ошибок сводится к решению конечномерной задачи линейного программирования;
  Б) для экстремальных значений нескольких конкретных функций от вероятностей ошибок найдены точные формулы (при $n = 3$) и оценки (при $n \geqslant 3$).

- Доказано, что конечномерные распределения последовательности значений статистики Пирсона, построенных по выборкам растущих объемов при надлежащей нормировке по времени сходятся к конечномерным распределениям стационарного случайного процесса (нормированного квадрата процесса Бесселя). Опубликованные в 1969 г. формулы для предельных совместных распределений статистики Пирсона использованы при выводе явных формул для плотности совместных распределений процесса Бесселя.

Основные методы исследования. В работе используются аналитические методы теории вероятностей, теории случайных процессов и методы оптимизации.

Практическая значимость полученных результатов. Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть полезны специалистам в области математической статистики.

Апробация работы. Результаты настоящей диссертации докладывались автором на следующих конференциях:

- Международная конференция «Statistics meets Stochastics», Снегири, Россия, 26.11.2014-29.11.2014.
- Международная конференция «Ломоносов», Москва, Россия, 11.04.2016-15.04.2016.
- Научная конференция «Ломоносовские чтения», Москва, Россия, 18.04.2016-27.04.2016.
- Международная конференция «Computer Data Analysis & Modeling», Минск, Беларусь, 06.09.2016-10.09.2016.
- Международная конференция «Анализ, вероятность и геометрия», Москва, Россия, 26.09.2016-01.10.2016.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в четырех работах [21]- [24], три из которых опубликованы в научных журналах из списка, рекомендованного ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 24 наименований. Общий объем диссертации составляет 92 страницы.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** приведен обзор литературы по тематике работы, изложены цели исследования, а также перечислены основные полученные результаты.

Первая глава диссертации посвящена изучению чисел $\bar{R}$ и $\underline{R}$, которые определены в (1) и являются экстремальными значениями характеристик нерандомизированных статистических критериев выбора одной из n гипотез в случае, когда известны только попарные расстояния по вариации между соответствующими им распределениями.

Во-первых, мы рассмотрим конкретную функцию качества критерия, которая имеет вид $f_+(\vec{\mu}(\vec{C})) = \sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i)$. Выбор ее связан с тем, что, как показано в приведенной ниже лемме 4, оптимальным с точки зрения этой функции f_+ будет критерий, который тесно связан с оценкой максимального правдоподобия.

Кроме введенных выше величин $\bar{R}^+$, $\underline{R}^+$, $\bar{R}^\Delta$, $\underline{R}^\Delta$, $\bar{R}^{\min}$ и $\underline{R}^{\min}$ (см. (3)–(5)) нам потребуется новое обозначение. Перенумеруем три числа r_{12}, r_{13}, r_{23} в порядке неубывания, получим

$$r^{(1)} \leqslant r^{(2)} \leqslant r^{(3)}, \quad \left\{r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}\right\} = \{r_{12}, r_{13}, r_{23}\}\,.$$

В главе 1 установлена следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $n = 3$ и в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 6 непустых попарно не пересекающихся множеств. Тогда выполняются следующие равенства:*

$$\underline{R}^+ = \max(r^{(1)} + r^{(2)} + r^{(3)}, 1 + r^{(3)}), \quad \bar{R}^+ = 1 + r^{(1)} + r^{(2)}.$$

Более того, будет показано, что экстремальные значения функции f_+ не изменятся и в случае, если экстремум берется по множеству рандомизированных критериев.

В главе 1 также установлены следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть $n = 3$ и в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 6 непустых попарно не пересекающихся множеств. Пусть $r^{(1)} = r^{(2)}$ и $r^{(3)} \leqslant \frac{2r^{(1)}+1}{3}$. Тогда $\bar{R}^\Delta = \frac{\bar{R}^+-1}{2} = \frac{r^{(1)}+r^{(2)}}{2}$.*

Теорема 3. *Пусть $n = 3$ и в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 6 непустых попарно не пересекающихся множеств. Пусть $r^{(2)} \leqslant \frac{r^{(1)}+1}{2}$. Тогда $\bar{R}^{\min} = \frac{\bar{R}^+}{3} = \frac{1+r^{(1)}+r^{(2)}}{3}$.*

Отметим, что условия теоремы 2 сильнее, чем условия теоремы 3, которые, в свою очередь, очевидно сильнее, чем условия теоремы 1.

Пример 1. *Пусть $n = 3$ и все $r_{ij} = r$, тогда $\bar{R}^\Delta = r$, $\bar{R}^{\min} = \frac{1+2r}{3}$, $\bar{R}^+ = 1 + 2r$, $\underline{R}^+ = \max(3r, 1 + r)$.*

В первой главе диссертации доказано, что в случае $n = 3$ можно провести «понижение размерности», т.е. свести исходную задачу о нахождении чисел $\bar{R}$ и $\underline{R}$ к поиску экстремума функции на выпуклых замкнутых многогранниках (полное описание которых см. на стр. 27 и стр. 30) $N_{18} \subset [0, 1]^{54}$ и $N_6 \subset [0, 1]^{18}$ соответственно, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Предположим, что в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 18 непустых попарно не пересекающихся множеств. Тогда для любой функции $f : [0,1]^9 \to \mathbb{R}$ выполнены следующие равенства:*

$$\bar{R} = \sup_{\vec{x} \in N_{18}} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in S_3} x_\sigma^{(j),k}\right\}_{j,k=1}^{3}\right),$$

$$\underline{R} = \inf_{\vec{x} \in N_6} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in C_k} x_\sigma^{(j)}\right\}_{j,k=1}^{3}\right),$$

где S_3 - множество перестановок третьего порядка.

Эта теорема обобщается на случай произвольного конечного числа мер (теорема 9).

Таким образом, задача о нахождении $\bar{R}$ сводится к задаче о нахождении супремума по подмножеству $\mathbb{R}^{54}$, а задачу о нахождении $\underline{R}$ удается свести к задаче о нахождении минимакса в $\mathbb{R}^{18}$. Для непрерывных кусочно-линейных функций f обе полученные формулы сводят задачу о нахождении $\bar{R}$ и $\underline{R}$ к задачам линейного программирования.

Кроме того, в первой главе диссертации доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть $Q_6, G_6 \subset \mathbb{R}^6$ - множества, определенные на стр. 31 и 33 соответственно. Пусть в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 18 непустых попарно не пересекающихся множеств. Для любого $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \in Q_6 \bigcup G_6$ положим*

$$f^*(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) := f(z_1, z_2, 1 - z_1 - z_2, z_3, z_4, 1 - z_3 - z_4, z_5, z_6, 1 - z_5 - z_6).$$

Тогда

$$\bar{R} = \sup_{\vec{z} \in Q_6} f^*(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6),$$

$$\underline{R} = \inf_{\vec{z} \in G_6} f^*(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6).$$

Отметим, что в теореме 4 множества, по которым берется экстремум (т.е. N_6 и N_{18}), устроены в некотором смысле проще, чем множества G_6 и Q_6 из теоремы 5, однако последние, в отличие от первых, лежат в пространстве меньшей размерности.

Кроме того, будет доказано, что если в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 18 непустых попарно не пересекающихся множеств, то экстремум в задаче о нахождении чисел $\underline{R}$ и $\bar{R}$ достигается на множестве дискретных мер.

Для случая произвольного $n \geqslant 3$ в первой главе получены следующие результаты.

Теорема 7. *Пусть в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере $n!$ непустых попарно не пересекающихся множеств. Тогда*

$$1 + \frac{2 \cdot \sum_{i<j} r_{ij}}{n(n-1)} \leqslant \underline{R}^+ \leqslant \bar{R}^+ \leqslant 1 + \frac{2 \cdot \sum_{i<j} r_{ij}}{n}.$$

Отметим, что верхняя оценка для $\bar{R}^+$ совпадает с верхней оценкой для экстремума по множеству рандомизированных критериев, которая установлена в теореме 3 статьи [17], но слабее оценки $\bar{R}^+ \leqslant 1 + \min_i \sum_j r_{ij}$, которую легко получить из теоремы 1 (статьи [17]).

Установлена следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть* $\delta := \left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(1 + \max_{i<j} r_{ij}\right) + 1 + \frac{(\max_{i<j} r_{ij} - 1)}{2} \cdot (n \mod 2)$. *Для чисел $\underline{R}^+$, $\underline{R}^\Delta$, $\underline{R}^{\min}$, $\bar{R}^+$, $\bar{R}^\Delta$ и $\bar{R}^{\min}$ выполняются следующие соотношения:*

$$\underline{R}^+ - \delta \leqslant \underline{R}^{\min} \leqslant \frac{\underline{R}^+}{n}, \quad \bar{R}^+ - \delta \leqslant \bar{R}^{\min} \leqslant \frac{\bar{R}^+}{n},$$
$$2\underline{R}^+ - 1 - 2\delta \leqslant \underline{R}^\Delta \leqslant \frac{\underline{R}^+ - 1}{n-1}, \quad 2\bar{R}^+ - 1 - 2\delta \leqslant \bar{R}^\Delta \leqslant \frac{\bar{R}^+ - 1}{n-1},$$
$$2\underline{R}^{\min} - 1 \leqslant \underline{R}^\Delta \leqslant \frac{n\underline{R}^{\min} - 1}{n-1}, \quad 2\bar{R}^{\min} - 1 \leqslant \bar{R}^\Delta \leqslant \frac{n\bar{R}^{\min} - 1}{n-1}.$$

Далее, пусть $\mathbb{E} = (\Omega, \mathbb{F}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ — статистическая модель, причем $\Theta = \{1, 2, ..., n\}$ и пространство D решений совпадает с множеством Θ, функция потерь $L(\theta, d) = \mathbb{I}_{\theta \neq d}$, функция $\phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)$ задает рандомизированный критерий ($\phi_i : \Omega \to [0, 1]$ измеримы для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ и $\sum_{i=1}^n \phi_i = 1$) следующим образом: $\phi_i(\omega)$ - это вероятность принять решение под номером i, если происходит ω. Множество таких критериев обозначим через Φ, а множество нерандомизированных критериев обозначим через Φ^*. В «рандомизированном» случае байесовский риск p, соответствующий равномерному распределению на Θ, равен $\inf_{\phi \in \Phi} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_{P_i}(1 - \phi_i)$. Удобнее рассматривать величину $\bar{a} := 1-p = \sup_{\phi\in\Phi} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}_{P_i}\phi_i$. Аналогом величины $\bar{a}$ в нерандомизированном случае является величина $\bar{a}^* = \sup_{\phi\in\Phi^*} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}_{P_i}\phi_i$. Неулучшаемые оценки величин $\bar{a}$ и $\bar{a}^*$ позволяет получить следующая теорема из главы 1.

Теорема 10. *Выполнены следующие равенства:*

$$\sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\phi\in\Phi} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_{P_i}\phi_i = \sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\phi\in\Phi^*} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_{P_i}\phi_i = \bar{R}^+,$$
$$\inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\phi\in\Phi} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_{P_i}\phi_i = \inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\phi\in\Phi^*} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_{P_i}\phi_i = \underline{R}^+.$$

Другими словами, установлено, что рандомизация не позволяет улучшить оптимальный нерандомизированный критерий, если качество критерия понимать как сумму вероятностей принятия правильных решений.

Во **второй главе** рассмотрено обобщение предыдущей задачи на случай «интервальных критериев».

Пусть M - множество вероятностных мер на измеримом пространстве (Ω, Σ). Для любых трех вероятностных мер μ_1, μ_2, μ_3 на (Ω, Σ) можно, как в главе 1, рассмотреть задачу различения трех гипотез H_i: наблюдение ξ имеет распределение μ_i, $i = 1, 2, 3$. Теперь мы рассмотрим «интервальные критерии». Каждому нерандомизированному интервальному критерию в этой задаче соответствуют измеримое разбиение $\vec{C} = \{C_1, C_2, ..., C_7\}$ пространства Ω ($C_i : \bigsqcup_{i=1}^7 C_i = \Omega$), где через C_1, C_2, C_3, $C_4 = C_{12}$, $C_5 = C_{13}$, $C_6 = C_{23}$, $C_7 = C_{123}$ обозначены множества, определяющие критерий: если $\omega \in C_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, то принимается решение о том, что наблюдение не противоречит гипотезе H_i и противоречит остальным гипотезам (сокращенно запишем: $C_i = \{\omega : H_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant 3$), аналогично $C_{ij} = \{\omega : H_i \text{ или } H_j\}$, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, $C_{123} = \{\omega : H_1 \text{ или } H_2 \text{ или } H_3\}$, т.е. при $\omega \in C_{ij}$ принимается решение о том, что наблюдение не противоречит гипотезам H_i и H_j и противоречит третьей гипотезе; при $\omega \in C_{123}$ принимается решение о том, что наблюдение не противоречит ни одной из трех гипотез.

Далее, через $\vec{\mu}$ обозначим тройку мер (μ_1, μ_2, μ_3), через $\vec{\mu}(\vec{C})$ обозначим упорядоченный набор $(\mu_1(C_1), \mu_1(C_2), ..., \mu_3(C_7))$. Будем считать, что качество критерия можно представить функцией $f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ со значениями в $\mathbb{R}$; иногда будет использоваться также обозначение $f(\{\mu_j(C_k)\}_{1\leqslant j\leqslant 3}^{1\leqslant k\leqslant 7})$. Фиксируем такие числа r_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, что $0 \leqslant r_{ij} \leqslant 1$, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, $r_{12}+r_{13} \geqslant r_{23}$,

$r_{12}+r_{23} \geqslant r_{13}$ и $r_{13}+r_{23} \geqslant r_{12}$. Рассмотрим семейство всевозможных троек вероятностных мер на Σ, между которыми заданы попарные расстояния по вариации следующим образом: $\rho(\mu_i, \mu_j) = r_{ij}$, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, где

$$\rho(\mu_i, \mu_j) := \sup_{A \in \Sigma} |\mu_i(A) - \mu_j(A)|.$$

Будем называть такие тройки мер $\vec{r}$-согласованными и обозначать это следующим образом: $\vec{\mu} \in D(\vec{r})$. Далее, для фиксированной тройки мер, числа α и функций $f, g : [0,1]^{21} \to \mathbb{R}$ обозначим через $\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})$ класс таких разбиений $\vec{C} = \{C_1, C_2, ..., C_7\}$ пространства Ω, которые удовлетворяют условию $g(\vec{\mu}(\vec{C})) \geqslant \alpha$. Через $\underline{Ri}$ и $\overline{Ri}$ обозначим следующие величины:

$$\underline{Ri} = \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \inf_{\vec{C} \in \mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})), \quad \overline{Ri} = \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \inf_{\vec{C} \in \mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})).$$

При этом по определению полагаем, что инфимум по пустому множеству равен $+\infty$.

Теперь приведем примеры функций f и g, рассмотрение которых естественно. Для этого нам потребуются следующие определения:

$$C^{(1)} := C_1 \bigsqcup C_{12} \bigsqcup C_{13} \bigsqcup C_{123}, \quad C^{(2)} := C_2 \bigsqcup C_{12} \bigsqcup C_{23} \bigsqcup C_{123},$$
$$C^{(3)} := C_3 \bigsqcup C_{13} \bigsqcup C_{23} \bigsqcup C_{123}.$$

Другими словами, $C^{(i)}$ - это такое множество, на котором не отвергается гипотеза H_i (и, быть может, еще некоторые гипотезы). Далее, рассмотрим случайную величину $\#C$ (число неотвергаемых гипотез), которая равна 1 на C_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, равна 2 на C_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$ и равна 3 на C_{123}. Пусть $g(\vec{\mu}(\vec{C})) = \min_{1 \leqslant i \leqslant 3}(\mu_i(C^{(i)}))$ и $f = \max_i(\mathbf{E}_i(\#C))$ (где символ $\mathbf{E}_i$ означает математическое ожидание по i-й мере). Тогда условие $g = \min_{1 \leqslant i \leqslant 3}(\mu_i(C^{(i)})) \geqslant \alpha$ означает, что правильная гипотеза гарантированно принимается с вероятностью, не меньшей α (заданный уровень значимости), а минимизация f означает, что минимизируется максимум средних чисел принятых гипотез. Наряду с указанной парой функций f и g естественно рассмотреть пару функций $g = \sum_i \mu_i(C^{(i)})$, $f = \sum_i \mathbf{E}_i(\#C)$.

Итак, задача, решенная во второй главе диссертации, состоит в следующем: для заданных чисел r_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, числа α и функций $f, g : [0,1]^{21} \to \mathbb{R}$ требуется получить удобные формулы для величин $\underline{Ri}$ и $\overline{Ri}$.

Отметим, что величины

$$\underline{Ri} = \inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^{\alpha}(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \quad \text{и} \quad \overline{Ri} = \sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^{\alpha}(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$$

сразу получаются из величин $\underline{Ri}$ и $\overline{Ri}$ за счет замены f на $-f$.

Во второй главе диссертации установлено, что в случае, когда функции f и g являются кусочно-линейными, данная задача сводится к стандартной задаче линейного программирования. Получено обобщение данного результата на случай произвольного конечного количества мер.

В **третьей главе** изучается случайный процесс, связанный с последовательным критерием χ^2 (см. [4]).

Рассмотрим схему независимых испытаний с $N \geqslant 2$ исходами. Будем считать, что вероятность j-го исхода равна $p_j > 0, j = 1, \dots, N$. Для $t = 1, 2, \dots$ и $j \in \{1, \dots, N\}$ введем индикаторы $I_j(t)$: $I_j(t) = 1$, если при t-м испытании осуществился j-й исход, и $I_j(t) = 0$ в противном случае. Тогда $\sum_{t=1}^n I_j(t)$ — частота исхода j в первых n испытаниях. Выражение

$$X(n) := \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{np_j} \left(\sum\nolimits_{t=1}^{n} I_j(t) - np_j\right)^2$$

называется статистикой Пирсона. Рассмотрим случайный процесс с дискретным временем $X(n)$, $n \geqslant 1$. Установлена следующая теорема.

Теорема 15. *Если* $1 \leqslant s \leqslant t$, *то*

$$\mathbf{E}X(s) = N - 1,\ \operatorname{cov}(X(s), X(t)) = 2(N-1)\frac{s}{t} + \frac{1}{t}\left(2 - 2N - N^2 + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{p_k}\right).$$

В частности, если $s, t \to \infty$ *так, что* $\frac{t}{s} \to C \geqslant 1$, *то*

$$\operatorname{cov}(X(s), X(t)) = \frac{2}{C}(N-1) + O(t^{-1}).$$

В силу теоремы 15 дисперсия $\mathbf{D}X(t) = 2(N-1) + \frac{1}{t}\cdot(2 - 2N - N^2 + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{p_k})$; это выражение для дисперсии хорошо известно, см., например, [5], [9], [1].

Следствие 2. *Пусть* $s \geqslant 1$ *фиксировано. Тогда* $\operatorname{cov}(X(s), X(t))$ *строго монотонно убывает по* t *при* $t \geqslant s$, *за исключением случая* $s = 1$, $p_1 = \ldots = p_N = \frac{1}{N}$: *тогда* $\operatorname{cov}(X(1), X(t)) = 0$ *при всех* $t \geqslant 1$.

Пусть $W_1(t), W_2(t), \ldots$ — независимые стандартные винеровские процессы, т. е. независимые процессы с независимыми приращениями, $W_k(0) = 0$ и приращение $W_k(t+s) - W_k(t)$ имеет нормальное распределение со средним 0 и дисперсией s при любых $k = 1, 2, \ldots$ и $t, s \geqslant 0$. При любом целом $M > 0$ случайный процесс $W^{(M)}(t) = (W_1(t), \ldots, W_M(t))$ является стандартным винеровским M-мерным процессом. Случайный процесс

$$\mathrm{Bes}_M(t) = \|W^{(M)}(t)\|_2 = \left(\sum\nolimits_{k=1}^{M} W_k^2(t)\right)^{1/2}$$

называется M-мерным процессом Бесселя; очевидно, $\mathrm{Bes}_M^2(t) = \sum_{k=1}^{M} W_k^2(t)$ и поэтому $\frac{1}{t}\,\mathrm{Bes}_M^2(t)$ имеет распределение хи-квадрат с M степенями свободы. В третьей главе диссертации установлена следующая теорема.

Теорема 16. *Последовательность случайных процессов $X(\lfloor nt \rfloor)$, $t > 0$, при $n \to \infty$ сходится в смысле конечномерных распределений к процессу $\frac{1}{t}\,\mathrm{Bes}_{N-1}^2(t)$.*

Теорема 16, очевидно, является естественным обобщением общеизвестной теоремы о предельном распределении статистики Пирсона.

Кроме того, установлено, что теорему 16 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 16а. *Конечномерные распределения случайных процессов $X(\lfloor ne^t \rfloor)$, $t \in \mathbb{R}$, при $n \to \infty$ сходятся к конечномерным распределениям стационарного в узком смысле процесса $e^{-t}\mathrm{Bes}_{N-1}^2(e^t)$.*

Тем самым доказано, что при надлежащей нормировке по времени конечномерные распределения процесса, образованного последовательными значениями статистики Пирсона для выборок увеличивающихся со временем объемов, сходятся к конечномерным распределениям стационарного случайного процесса — нормированного квадрата процесса Бесселя.

Далее, обозначим через $I_\delta(x)$ функцию Инфельда, т. е. модифицированную функцию Бесселя первого рода (см., например, [2]; [6], с. 139); она является каноническим решением дифференциального уравнения

$$x^2 \frac{d^2\omega}{dx^2} + x\frac{d\omega}{dx} - (x^2 + \delta^2)\omega = 0,$$

разлагается в степенной ряд: $I_\delta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+\delta}}{k!\Gamma(k+\delta+1)}$ и имеет различные интегральные представления. В третьей главе диссертации получены явные формулы для плотностей конечномерных распределений процесса Бесселя. А именно, верна следующая теорема.

Теорема 17. *При любом* $k \geqslant 2$ *и любых* $0 < t_1 < \ldots < t_k$ *совместное распределение* $(\mathrm{Bes}_N(t_1), \ldots, \mathrm{Bes}_N(t_k))$ *имеет плотность распределения*

$$b_{t_1,\ldots,t_k}(x_1, \ldots, x_k) =$$

$$= \frac{x_1}{t_1} \left(\frac{x_1^2 x_k^2}{4t_1^2} \right)^{\frac{N-2}{4}} \frac{e^{\frac{x_2^2}{2t_2} + \ldots + \frac{x_{k-1}^2}{2t_{k-1}}}}{\Gamma(\frac{N}{2})} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{x_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} \exp\left\{ - \frac{\frac{x_i^2}{2t_i} + \frac{x_{i+1}^2}{2t_{i+1}}}{1 - \frac{t_i}{t_{i+1}}} \right\} I_{\frac{N}{2}-1} \left(\frac{x_i x_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} \right)$$

при $x_1, \ldots, x_k \geqslant 0$*;* $b_{t_1,\ldots,t_k}(x_1, \ldots, x_k) = 0$*, если* $\min\{x_1, \ldots, x_k\} < 0$.

Доказательство теоремы 17 опирается на теорему 16 и результаты статьи [4].

Благодарности. Автор благодарит своего научного руководителя А.М. Зубкова за постановку задач, ценные советы и постоянное внимание к работе.

Глава 1. Экстремальные характеристики критериев выбора гипотез с заданными попарными расстояниями по вариации

В настоящей главе изучаются экстремальные значения характеристик нерандомизированных статистических критериев выбора одной из n гипотез в случае, когда известны только попарные расстояния по вариации между соответствующими им распределениями. Показано, что нахождение экстремальных значений кусочно-линейных непрерывных функций от вероятностей ошибок сводится к решению конечномерной задачи линейного программирования. В случае $n = 3$ найдены точные формулы, а в случае произвольного $n \geqslant 3$ получены оценки для экстремальных значений нескольких конкретных функций от вероятностей ошибок. Доказано также (см. стр.60), что при любом $n \geqslant 2$ существуют непрерывные функции f качества критерия, для которых решение экстремальной задачи (в случае с n мерами) в классе мер без атомов (более узком) качественно отличается от решения той же задачи в случае, когда наличие атомов у мер допускается.

1.1 Вспомогательные определения и постановка задачи

Одной из важных статистических задач является задача о различении нескольких (скажем, n) простых гипотез. Если $n = 2$, то ее решение (для широкого класса случаев) может быть получено с помощью леммы Неймана-Пирсона. Рассмотрим ситуацию, когда $n = 3$. Для любой фиксированной тройки вероятностных мер $\vec{\mu} := (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ можно найти оптимальный в том или ином смысле критерий и определить его «качество» (например, понимая под качеством вероятность ошибки в худшем случае) как функцию от тройки мер. В связи с этим естественным образом возникает вопрос: в каких пределах меняется качество критерия, если тройки вероятностных мер принадлежат некоторому множеству D. Формализуем вышесказанное.

Пусть M - множество вероятностных мер на измеримом пространстве (Ω, Σ). Для любых трех вероятностных мер μ_1, μ_2, μ_3 на (Ω, Σ) можно рассмотреть задачу различения трех гипотез H_i: наблюдение ξ имеет распределение μ_i ($i = 1,2,3$). Каждому нерандомизированному критерию в этой задаче соответствуют измеримое разбиение $\vec{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$ пространства Ω ($\bigsqcup_{i=1}^3 C_i = \Omega$; если наблюдение $\xi \in C_i$, то принимается гипотеза H_i, $i = 1,2,3$) и вероятности $\mu_j(C_k)$ принятия гипотезы H_k в случае, когда верна гипотеза H_j, $j,k \in \{1,2,3\}$. Совокупность всех разбиений Ω на три не пересекающихся измеримых подмножества обозначим $\mathcal{C}(\Omega)$. Далее, через $\vec{\mu}$ обозначим тройку (μ_1, μ_2, μ_3), через $\vec{\mu}(\vec{C})$ обозначим упорядоченный набор $(\mu_1(C_1), \mu_1(C_2), ..., \mu_3(C_3))$. Будем считать, что качество критерия можно представить функцией $f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ со значениями в $\mathbb{R}$; иногда будет использоваться также обозначение $f(\{\mu_j(C_k)\}_{j,k=1}^3)$. Фиксируем такие числа r_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, что $0 \leqslant r_{ij} \leqslant 1$, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, $r_{12} + r_{13} \geqslant r_{23}$, $r_{12} + r_{23} \geqslant r_{13}$ и $r_{13} + r_{23} \geqslant r_{12}$. Рассмотрим семейство всевозможных троек вероятностных мер на Σ, между которыми заданы попарные расстояния по вариации следующим образом: $\rho(\mu_i, \mu_j) = r_{ij}$, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, где

$$\rho(\mu_i, \mu_j) := \sup_{A \in \Sigma} |\mu_i(A) - \mu_j(A)|.$$

Будем называть такие тройки мер $\vec{r}$-согласованными и обозначать это следующим образом: $\vec{\mu} \in D(\vec{r})$. Естественным образом возникает вопрос о получении удобных выражений для чисел $\bar{R} = \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ и $\underline{R} = \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. Отметим, что величины $\inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \inf_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ и $\sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \inf_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ сразу получаются из величин $\bar{R}$ и $\underline{R}$ за счет замены f на $-f$.

Отметим, что рассматриваемая тематика отчасти связана с проблемой деления торта (cake-cutting problem), см., например, [13]. В самом деле, задача о делении торта (Ω) на куски (измеримые множества C_i) между несколькими людьми (i-му человеку соответствует вероятностная мера на торте μ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$) может быть формализована одним из следующих способов ([19], стр.62). Можно назвать деление «честным», если, например, выполняется одно из следующих условий:

1. $\mu_i(C_i) \geqslant \frac{1}{n}$ для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$ (обычное честное деление),
2. $\mu_i(C_i) \geqslant \mu_i(C_j)$ для всех пар $1 \leqslant i, j \leqslant n$ («отсутствие зависти»).

Кроме того, естественно считать, что деление тем лучше, чем больше величина $\sum_{i=1}^n \mu_i(C_i)$ («суммарная удовлетворенность»). В рамках этих трех подходов естественно полагать, что деление тем лучше, чем больше значения

следующих функций:
1. $f_+(\vec{\mu}(\vec{C})) = f_1(\vec{\mu}(\vec{C})) = \sum_i \mu_i(C_i)$,
2. $f_\Delta(\vec{\mu}(\vec{C})) = f_2(\vec{\mu}(\vec{C})) = \min_{i\neq j}(\mu_i(C_i) - \mu_i(C_j))$,
3. $f_{\min}(\vec{\mu}(\vec{C})) = f_3(\vec{\mu}(\vec{C})) = \min_i \mu_i(C_i)$.
Далее, естественным образом возникает задача о нахождении числовых характеристик оптимальных разбиений, т.е. задача о нахождении

$$\inf_{\vec{\mu}\in A} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f_l(\vec{\mu}(\vec{C})) \quad \text{и} \quad \sup_{\vec{\mu}\in A} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f_l(\vec{\mu}(\vec{C})), \quad 1 \leqslant l \leqslant 3$$

(отметим, что функции f_l непрерывны и кусочно-линейны), где A — некое множество наборов из n мер на Ω. Мы будем рассматривать случай, когда $A = D(\vec{r})$, $n = 3$ и использовать следующие обозначения:

$$\underline{R}^+ := \inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f_+(\vec{\mu}(\vec{C})), \quad \bar{R}^+ := \sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f_+(\vec{\mu}(\vec{C})),$$
$$\underline{R}^\Delta := \inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f_\Delta(\vec{\mu}(\vec{C})), \quad \bar{R}^\Delta := \sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f_\Delta(\vec{\mu}(\vec{C})),$$
$$\underline{R}^{\min} := \inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f_{\min}(\vec{\mu}(\vec{C})), \quad \bar{R}^{\min} := \sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f_{\min}(\vec{\mu}(\vec{C})).$$

1.2 Экстремальные значения некоторых конкретных функций качества для случая трех мер

Теперь мы можем сформулировать основные теоремы. Сначала рассмотрим конкретную функцию качества критерия $f_+(\vec{\mu}(\vec{C})) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i)$. Выбор ее связан с тем, что, как показано в приведенной ниже лемме 4 (стр. 34), критерий, оптимизирующий значение функции f_+, тесно связан с оценкой максимального правдоподобия.

Нам потребуется новое обозначение. Перенумеруем три числа r_{12}, r_{13}, r_{23} в порядке неубывания:

$$r^{(1)} \leqslant r^{(2)} \leqslant r^{(3)}, \quad \left\{r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}\right\} = \{r_{12}, r_{13}, r_{23}\}.$$

Теорема 1. *Пусть $n = 3$ и в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 6 непустых попарно не пересекающихся множеств. Тогда выполняются следующие равенства:*

$$\underline{R}^+ = \max(r^{(1)} + r^{(2)} + r^{(3)}, 1 + r^{(3)}), \quad \bar{R}^+ = 1 + r^{(1)} + r^{(2)}.$$

Доказательство см. на стр. 33.

Более того, будет показано (см. стр. 62, замечание 6 к теореме 10), что в случае, когда экстремум берется по множеству рандомизированных критериев, экстремальные значения функции f_+ определяются теми же формулами.

Кроме того, верны следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть $n = 3$ и в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 6 непустых попарно не пересекающихся множеств. Пусть $r^{(1)} = r^{(2)}$ и $r^{(3)} \leqslant \frac{2r^{(1)}+1}{3}$. Тогда $\bar{R}^{\Delta} = \frac{\bar{R}^{+}-1}{2} = \frac{r^{(1)}+r^{(2)}}{2}$.*

Доказательство см. на стр. 46.

Теорема 3. *Пусть $n = 3$ и в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 6 непустых попарно не пересекающихся множеств. Пусть $r^{(2)} \leqslant \frac{r^{(1)}+1}{2}$. Тогда $\bar{R}^{\min} = \frac{\bar{R}^{+}}{3} = \frac{1+r^{(1)}+r^{(2)}}{3}$.*

Доказательство см. на стр. 51.

Отметим, что (как показано ниже на стр. 53) условия теоремы 2 жестче, чем условия теоремы 3, которые, в свою очередь, очевидно жестче, чем условия теоремы 1.

1.3 Понижение размерности экстремальной задачи в случае $n = 3$

Покажем, что в общем случае можно провести «понижение размерности», т.е. свести исходную бесконечномерную задачу о нахождении чисел $\bar{R}$ и $\underline{R}$ к поиску экстремума функции на выпуклых замкнутых многогранниках (полное описание которых см. на стр. 27 и стр. 30) $N_{18} \subset [0,1]^{54}$ и $N_6 \subset [0,1]^{18}$ соответственно, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Предположим, что в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 18 непустых попарно не пересекающихся множеств. Тогда для любой функции $f : [0,1]^9 \to \mathbb{R}$ выполнены следующие равенства:*

$$\bar{R} = \sup_{\vec{x} \in N_{18}} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in S_3} x_{\sigma}^{(j),k}\right\}_{j,k=1}^{3}\right),$$

$$\underline{R} = \inf_{\vec{x} \in N_6} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in C_k} x_\sigma^{(j)}\right\}_{j,k=1}^{3}\right),$$

где S_3 - множество перестановок третьего порядка.

Доказательство см. на стр. 22. (Приведенная на стр. 59 теорема 9 обобщает этот результат на случай произвольного количества мер.)

Таким образом, задача о нахождении $\bar{R}$ сводится к задаче о нахождении супремума по подмножеству $\mathbb{R}^{54}$, а задачу о нахождении $\underline{R}$ удается свести к задаче о нахождении минимакса в $\mathbb{R}^{18}$. Для непрерывных кусочно-линейных функций f обе полученные формулы сводят задачу о нахождении $\bar{R}$ и $\underline{R}$ к задачам линейного программирования.

Кроме того, будет доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть Q_6, $G_6 \subset \mathbb{R}^6$ - множества, определенные на стр. 31 и 33 соответственно. Пусть в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 18 непустых попарно не пересекающихся множеств. Для любого $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \in Q_6 \bigcup G_6$ положим*

$$f^*(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) := f(z_1, z_2, 1 - z_1 - z_2, z_3, z_4, 1 - z_3 - z_4, z_5, z_6, 1 - z_5 - z_6).$$

Тогда

$$\bar{R} = \sup_{\vec{z} \in Q_6} f^*(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6),$$
$$\underline{R} = \inf_{\vec{z} \in G_6} f^*(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6).$$

Доказательство см. на стр. 31.

Отметим, что в теореме 4 множества, по которым берется экстремум (т.е. N_6 и N_{18}), устроены в некотором смысле проще, чем множества G_6 и Q_6 из теоремы 5, однако последние, в отличие от первых, лежат в пространстве меньшей размерности.

1.3.1 Доказательство теоремы 4 о понижении размерности для трех мер

Пусть $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ - тройка мер на измеримом пространстве (Ω, Σ). Будем называть множество E отрицательным относительно некоторой знакопеременной меры Φ, если $\Phi(E \bigcap F) \leqslant 0$ для любого $F \in \Sigma$; аналогично будем называть множество E положительным относительно Φ, если $\Phi(E\bigcap F)\geqslant 0$ для любого $F\in\Sigma$. В силу теоремы Хана о разложении (для знакопеременной меры $\mu_1-\mu_2$) существует такое измеримое множество R_1, что оно положительно относительно $\mu_1-\mu_2$, а его дополнение $\Omega\backslash R_1$ - отрицательно. Другими словами, для любого $F\in\Sigma$ выполнены следующие неравенства: $\mu_1(R_1\bigcap F)\geqslant\mu_2(R_1\bigcap F)$ и $\mu_2((\Omega\backslash R_1)\bigcap F)\geqslant\mu_1((\Omega\backslash R_1)\bigcap F)$. Аналогично (в силу теоремы Хана о разложении) существуют такие множества R_2 и R_3, что $\mu_2(R_2\bigcap F)\geqslant\mu_3(R_2\bigcap F)$, $\mu_3((\Omega\backslash R_2)\bigcap F)\geqslant\mu_2((\Omega\backslash R_2)\bigcap F)$, $\mu_1(R_3\bigcap F)\geqslant\mu_3(R_3\bigcap F)$ и, наконец, $\mu_3((\Omega\backslash R_3)\bigcap F)\geqslant\mu_1((\Omega\backslash R_3)\bigcap F)$. Положим по определению

$$\begin{gathered}B_{123}:=R_1R_2R_3,\ B_{132}:=R_1\bar R_2R_3,\\ B_{312}:=R_1\bar R_2\bar R_3,\ B_{213}:=\bar R_1R_2R_3,\\ B_{231}:=\bar R_1R_2\bar R_3,\ B_{321}:=\bar R_1\bar R_2\bar R_3,\\ (R_1R_2\bar R_3=\varnothing,\ \bar R_1\bar R_2R_3=\varnothing),\end{gathered}$$

где последние равенства можно считать выполненными без ограничения общности (в самом деле, если множество $R_1R_2\bar R_3$ или $\bar R_1\bar R_2R_3$ не является пустым, то его можно «присоедить» к B_{123}, так как и на $R_1R_2\bar R_3$, и на $\bar R_1\bar R_2R_3$ все меры совпадают). Далее, пусть $S_3=\{123,132,213,231,312,321\}$ - множество перестановок (индексов множеств B_{ijk}). Несложно видеть, что набор множеств B_σ, $\sigma\in S_3$, является разбиением пространства Ω, и если $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\in S_3$, то $\mu_{\sigma_1}(F\bigcap B_\sigma)\geqslant\mu_{\sigma_2}(F\bigcap B_\sigma)\geqslant\mu_{\sigma_3}(F\bigcap B_\sigma)$ при всех $F\in\Sigma$. Таким образом, для каждой тройки мер определены множества $B_\sigma(\vec\mu,\Omega)$, задающие разбиение пространства Ω, на котором эти меры заданы. Далее, нам потребуется новое обозначение. Пусть $\sigma=(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)\in S_3$, тогда σ_i $(1\leqslant i\leqslant 3)$ - это числа от 1 до 3. Рассмотрим подстановку, которая переводит единицу в σ_1, двойку в σ_2, а тройку в σ_3. Тогда обратная ей переводит число i в число, которое мы будем обозначать σ_i^{-1}.

Заметим, что расстояния по вариации между мерами μ_1,μ_2,μ_3 определяются значениями $\mu_i(B_\sigma)$, так как

$$2r_{ij}=\sum_{\sigma\in S_3}\bigl|\mu_i(B_\sigma)-\mu_j(B_\sigma)\bigr|=$$
$$=\sum_{\sigma\in S_3}\left(\mu_i(B_\sigma)-\mu_j(B_\sigma)\right)\cdot(-1)^{I\left\{\sigma_i^{-1}>\sigma_j^{-1}\right\}},\ 1\leqslant i<j\leqslant 3.$$

Каждое разбиение $\vec{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$ пространства Ω, вообще говоря, разбивает каждое множество B_σ на три подмножества $B_\sigma^j = B_\sigma \bigcap C_j$, $1 \leqslant j \leqslant 3$, и набор аргументов $\vec{\mu}(\vec{C})$ функции f полностью определяется 54 значениями $\mu_i(B_\sigma^j) : \mu_i(C_j) = \sum_{\sigma \in S_3} \mu_i(B_\sigma^j)$. Поэтому задача поиска экстремальных значений $f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ сводится к задаче поиска экстремума на подмножестве $\mathbb{R}^{54}$, определяемом условиями на то, что меры μ_1, μ_2, μ_3 - вероятностные с заданными расстояниями по вариации (и неравенствами, входящими в определения множеств B_σ).

Теперь перейдем к вопросу о нахождении $\bar{R}$. Рассмотрим пространство $\Omega_{18} = \{\omega_\sigma^m, \sigma \in S_3, 1 \leqslant m \leqslant 3\}$, состоящее из 18 элементов, и σ-алгебру $2^{\Omega_{18}}$ на нем. Через Z_{18} обозначим семейство $\vec{r}$-согласованных троек мер μ_1, μ_2, μ_3 на Ω_{18}, т.е.

$$Z_{18} = \left\{ \{\mu_i\}_{i=1}^3 : \rho(\mu_s, \mu_l) = r_{sl},\ 1 \leqslant s < l \leqslant 3 \right\}.$$

Рассмотрим (по аналогии с введением множеств B_{ijk}) те тройки мер из Z_{18}, для которых при любых $1 \leqslant m \leqslant 3$ и $\sigma \in S_3$ выполнены следующие условия:

$$\mu_{\sigma_1}(\omega_\sigma^m) \geqslant \mu_{\sigma_2}(\omega_\sigma^m) \geqslant \mu_{\sigma_3}(\omega_\sigma^m). \tag{1.1}$$

Множество таких троек мер обозначим через Λ_{18}.

Далее, рассмотрим разбиение $\vec{C}^0 := \left\{C_1^0, C_2^0, C_3^0\right\}$, где $C_m^0 = \bigsqcup_{\sigma \in S_3} \omega_\sigma^m$. Напомним, что по определению $\bar{R} = \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. Верна следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 18 непустых попарно не пересекающихся множеств K_σ^i, $\sigma \in S_3$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Тогда для любой функции $f : [0,1]^9 \to \mathbb{R}$ выполняется следующее равенство:*

$$\bar{R} = \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0)).$$

Доказательство. Докажем сначала, что $\bar{R} \geqslant \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0))$. Так как $K_\sigma^i \neq \varnothing$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, $\sigma \in S_3$, то существуют такие элементы $v_{i,\sigma}$, что $v_{i,\sigma} \in K_\sigma^i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, $\sigma \in S_3$. Для любой $\vec{r}$-согласованной тройки $\vec{\mu}$ мер на Ω_{18} построим соответствующую тройку $\vec{\mu}^*$ мер на Ω следующим образом:

$\mu_i^*(A) = \sum_{(m,\sigma):v_{m,\sigma}\in A} \mu_i(\omega_\sigma^m)$ при любом $A \in \Sigma$. Заметим, что

$$\sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}^*(\vec{C})) \quad \text{и} \quad \vec{\mu}^* \in D(\vec{r}).$$

Другими словами, для любой $\vec{r}$-согласованной тройки $\vec{\mu}$ мер на Ω_{18} найдется такая $\vec{r}$-согласованная тройка $\vec{\mu}^*$ мер на Ω, что $\sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}^*(\vec{C}))$. Значит,

$$\sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \geqslant \sup_{\vec{\mu}\in Z_{18}} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C})).$$

Далее, несложно видеть, что

$$\sup_{\vec{\mu}\in Z_{18}} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \geqslant \sup_{\vec{\mu}\in Z_{18}} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0)) \geqslant \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_{18}} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0))$$

в силу того, что $\Lambda_{18} \subset Z_{18}$. Значит,

$$\sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \geqslant \sup_{\vec{\mu}\in Z_{18}} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \geqslant \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_{18}} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0)),$$

причем в левой части последнего неравенства стоит не что иное, как величина $\bar{R}$. Таким образом, $\bar{R} \geqslant \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_{18}} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0))$, и нам осталось доказать, что $\bar{R} \leqslant \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_{18}} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0))$. В самом деле, рассмотрим любую тройку $\vec{\mu} \in D(\vec{r})$ мер на Ω и любое разбиение $\vec{C}$ пространства Ω. Построим тройку $\vec{\mu}^*$ мер на пространстве Ω_{18} следующим образом: $\mu_i^*(\omega_\sigma^m) := \mu_i(B_\sigma \bigcap C_m)$, где множества $B_\sigma = B_\sigma(\vec{\mu}, \Omega)$ строятся на основании разложения Хана так, как это сделано выше. Напомним, что по определению $C_m^0 := \bigsqcup_\sigma \omega_\sigma^m$, значит, $\mu_i(C_m) = \sum_{\sigma\in S_3} \mu_i(B_\sigma \bigcap C_m) = \sum_{\sigma\in S_3} \mu_i^*(\omega_\sigma^m) = \mu_i^*(C_m^0)$, поэтому $\vec{\mu}(\vec{C}) = \vec{\mu}^*(\vec{C}^0)$, откуда $f(\vec{\mu}(\vec{C})) = f(\vec{\mu}^*(\vec{C}^0))$. Кроме того, из $\vec{r}$-согласованности тройки мер $\vec{\mu}$ следует (в силу непосредственной проверки) $\vec{r}$-согласованность тройки $\vec{\mu}^*$. Убедимся, что $\vec{\mu}^* \in \Lambda_{18}$, проверив, что для этой тройки мер выполняется соотношение (1.1). В силу определения множеств B_σ выполняются следующие неравенства:

$$\mu_{\sigma_1}(B_\sigma \bigcap C_m) \geqslant \mu_{\sigma_2}(B_\sigma \bigcap C_m) \geqslant \mu_{\sigma_3}(B_\sigma \bigcap C_m),$$
$$1 \leqslant m \leqslant 3,\ \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in S_3,$$

значит $\mu_{\sigma_1}^*(\omega_\sigma^m) \geqslant \mu_{\sigma_2}^*(\omega_\sigma^m) \geqslant \mu_{\sigma_3}^*(\omega_\sigma^m)$ при всех $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in S_3, 1 \leqslant m \leqslant 3$. Итак, мы получили, что для каждой $\vec{r}$-согласованной тройки $\vec{\mu}$ мер на Ω

и любого разбиения $\vec{C}$ пространства Ω найдется такая тройка $\vec{\mu}^*$ мер на Ω_{18}, что $\vec{\mu}^* \in \Lambda_{18}$, $f(\vec{\mu}(\vec{C})) = f(\vec{\mu}^*(\vec{C}^0))$. Отсюда сразу следует, что

$$\sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \leqslant \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_{18}} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0)),$$

причем в левой части последнего неравенства стоит, очевидно, величина $\bar{R}$. Таким образом, $\bar{R} \leqslant \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_{18}} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0))$. Лемма 1 полностью доказана. $\square$

Заметим, что лемма 1 существенно упрощает задачу о нахождении числа $\bar{R}$: можно считать, что $\Omega = \Omega_{18}$, $\Sigma = 2^{\Omega_{18}}$ и тройка мер (μ_1, μ_2, μ_3) принадлежит множеству Λ_{18}. К тому же, лемма 1 позволяет избавиться от инфимума по разбиениям.

Теперь докажем первую формулу (для величины $\bar{R}$) из теоремы 4, т.е. сведем задачу о нахождении $\bar{R}$ к поиску условного экстремума в $\mathbb{R}^{54}$ (предполагая, что условие теоремы 4 выполнено). Для этого фиксируем произвольную тройку мер $\{\mu_l\}_{l=1}^3$ из Λ_{18} и любое разбиение $\vec{C}$ пространства Ω_{18}. По тройке мер построим множества $B_\sigma(\vec{\mu}, \Omega_{18})$. Введем обозначение $D_\sigma^m = C_m \bigcap B_\sigma$, $x_\sigma^{(l),m} = \mu_l(D_\sigma^m)$. Тогда на множествах D_{ijk}^m выполнены неравенства $\mu_i(D_{ijk}^m) \geqslant \mu_j(D_{ijk}^m) \geqslant \mu_k(D_{ijk}^m)$. (Кроме того, несложно видеть, что на множествах D_{ijk}^m, $1 \leqslant m \leqslant 3$, принимается m-я гипотеза.) Отсюда получаем соотношения между числами $x_{ijk}^{(l),m}$ (для всех $1 \leqslant m \leqslant 3, \sigma \in S_3$):

$$x_\sigma^{(\sigma_1),m} \geqslant x_\sigma^{(\sigma_2),m} \geqslant x_\sigma^{(\sigma_3),m}. \tag{1.2}$$

Далее, для любых $\sigma \in S_3$, $F \in 2^{\Omega_{18}}$ выполнены неравенства $\mu_{\sigma_1}(B_\sigma \bigcap F) \geqslant \mu_{\sigma_2}(B_\sigma \bigcap F) \geqslant \mu_{\sigma_3}(B_\sigma \bigcap F)$ и в силу $\vec{r}$-согласованности

$$2r_{ij} = \sum_{\sigma\in S_3} \left|\mu_i(B_\sigma) - \mu_j(B_\sigma)\right| =$$
$$= \sum_{\sigma\in S_3} (\mu_i(B_\sigma) - \mu_j(B_\sigma)) \cdot (-1)^{I\left\{\sigma_i^{-1} > \sigma_j^{-1}\right\}},\ 1 \leqslant i < j \leqslant 3.$$

Обозначим $x_\sigma^{(l)} := \sum_{m=1}^3 x_\sigma^{(l),m}$. Тогда $x_\sigma^{(l)} = \sum_{m=1}^3 \mu_l(C_m \bigcap B_\sigma) = \mu_l(B_\sigma)$. Таким образом, расписывая условие $\vec{r}$-согласованности, получаем:

$$2r_{ij} = \sum_{\sigma\in S_3} (x_\sigma^{(i)} - x_\sigma^{(j)})(-1)^{I\left\{\sigma_i^{-1} > \sigma_j^{-1}\right\}},\ 1 \leqslant i < j \leqslant 3.$$

Кроме того, так как μ_i являются вероятностными мерами, то

$$\sum_{\sigma\in S_3} x_\sigma^{(l)} = 1, 0 \leqslant x_\sigma^{(l)} \leqslant 1, 1 \leqslant l \leqslant 3,\ \sigma \in S_3.$$

Значит,

$$2r_{ij} = \sum_{\sigma\in S_3}\left(\sum_m x_\sigma^{(i),m} - \sum_m x_\sigma^{(j),m}\right)(-1)^{I\left\{\sigma_i^{-1}>\sigma_j^{-1}\right\}},\ 1 \leqslant i < j \leqslant 3, \tag{1.3}$$

$$\sum_{\sigma\in S_3}\sum_m x_\sigma^{(l),m} = 1, 0 \leqslant x_\sigma^{(l),m} \leqslant 1, 1 \leqslant l \leqslant 3,\ 1 \leqslant m \leqslant 3,\ \sigma \in S_3. \tag{1.4}$$

Пусть $\mathbb{T}$ - множество троек произвольных отображений T_i, $T_i : \Omega_{18} \to [0,1]$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Пусть $\phi_{18} : \mathbb{T} \to [0,1]^{54}$ и $\phi_{18}(T_1, T_2, T_3) = \vec{x}$, где

$$\vec{x} = (x_{123}^{(1),1}, x_{123}^{(1),2}, x_{123}^{(1),3}, x_{123}^{(2),1}, ..., x_{321}^{(3),1}, x_{321}^{(3),2}, x_{321}^{(3),3})$$

и $x_{ijk}^{(l),m} = T_l(\omega_{ijk}^m)$. Несложно видеть, что такое отображение является биективным (как отображение из $\mathbb{T}$ в $[0,1]^{54}$). Далее, обозначим через $N_{18} \subset [0,1]^{54}$ множество векторов $\vec{x}$, удовлетворяющих условиям (1.2)-(1.4). Заметим, что отображение ϕ_{18} устанавливает биекцию между множеством Λ_{18} и множеством N_{18}, так как условия принадлежности тройки мер множеству Λ_{18} равносильны условиям (1.2)-(1.4) принадлежности вектора $\vec{x}$ множеству N_{18}. Далее, множество $N_{18} \subset [0,1]^{54}$ представимо в виде конечного пересечения (замкнутых) полупространств и гиперплоскостей, пересечение замкнутых множеств замкнуто, пересечение выпуклых множеств выпукло, поэтому N_{18} - замкнутый выпуклый многогранник. В силу леммы 1, биективности отображения ϕ_{18} и в силу того, что $\mu_j(C_k^0) = \sum_\sigma \mu_j(C_k^0 \bigcap B_\sigma) = \sum_\sigma x_\sigma^{(j),k}$, выполнены следующие равенства:

$$\bar{R} = \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_{18}} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0)) = \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_{18}} f(\left\{\mu_j(C_k^0)\right\}_{j,k=1}^3) =$$
$$= \sup_{\vec{x}\in N_{18}} f(\left\{\sum_{\sigma\in S_3} x_\sigma^{(j),k}\right\}_{j,k=1}^3).$$

Таким образом, формула для величины $\bar{R}$ из теоремы 4 доказана, и задача о нахождении величины $\bar{R}$ свелась к задаче о поиске экстремума на подмножестве множества $[0,1]^{54}$.

Теперь перейдем к вопросу о нахождении $\underline{R}$. Рассмотрим пространство $S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$ и σ-алгебру 2^{S_3} на нем. Через Z_6 обозначим семейство $\vec{r}$-согласованных троек мер μ_1, μ_2, μ_3 на S_3, т.е.

$$Z_6 = \left\{ \{\mu_i\}_{i=1}^3 : \rho(\mu_s, \mu_l) = r_{sl},\ 1 \leqslant s < l \leqslant 3 \right\}.$$

Рассмотрим (по аналогии с введением множеств B_{ijk}) те тройки мер из Z_6, для которых при любом $\sigma \in S_3$ выполнены следующие соотношения:

$$\mu_{\sigma_1}(\sigma) \geqslant \mu_{\sigma_2}(\sigma) \geqslant \mu_{\sigma_3}(\sigma). \tag{1.5}$$

Множество таких троек мер обозначим через Λ_6.

Напомним, что по определению $\underline{R} = \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. Верна следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 6 непустых попарно не пересекающихся множеств K_σ, $\sigma \in S_3$. Тогда для любой функции $f : [0,1]^9 \to \mathbb{R}$ выполняется следующее равенство:*

$$\underline{R} = \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C})).$$

Доказательство. Докажем сначала, что $\underline{R} \leqslant \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. Так как $K_\sigma \neq \varnothing$, $\sigma \in S_3$, то существуют такие элементы v_σ, что $v_\sigma \in K_\sigma$, $\sigma \in S_3$. Для любой $\vec{r}$-согласованной тройки $\vec{\mu}$ мер на S_3 построим соответствующую тройку $\vec{\mu}^*$ мер на Ω следующим образом: $\mu_i^*(A) = \sum_{\sigma : v_\sigma \in A} \mu_i(\sigma)$ при любом $A \in \Sigma$. Заметим, что $\sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}^*(\vec{C}))$ и $\vec{\mu}^* \in D(\vec{r})$. Другими словами, для любой $\vec{r}$-согласованной тройки $\vec{\mu}$ мер на S_3 найдется такая $\vec{r}$-согласованная тройка $\vec{\mu}^*$ мер на Ω, что $\sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}^*(\vec{C}))$. Значит,

$$\inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \leqslant \inf_{\vec{\mu} \in Z_6} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C})).$$

Далее, $\inf_{\vec{\mu} \in Z_6} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \leqslant \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$, так как $\Lambda_6 \subset Z_6$. Таким образом,

$$\inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \leqslant \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C})),$$

причем в левой части последнего неравенства стоит не что иное, как величина $\underline{R}$.

Покажем теперь, что $\underline{R} \geqslant \inf_{\vec{\mu}\in\Lambda_6} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. В самом деле, пусть $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ - тройка мер на измеримом пространстве (Ω, Σ). Для этой тройки мер определим множества B_σ так же, как это было сделано выше (с помощью теоремы Хана о разложении). Далее, рассмотрим такие множества C_m, что $\bigsqcup_{m=1}^{3} C_m = \Omega$ и каждое C_m является объединением нескольких множеств B_σ (или же является пустым). Класс таких разбиений пространства Ω обозначим через Γ. Очевидно, что $\sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \geqslant \sup_{\vec{C}\in\Gamma} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. Далее, рассмотрим меры μ_k^* $(1 \leqslant k \leqslant 3)$ на S_3, определенные так: $\mu_k^*(\sigma) = \mu_k(B_\sigma)$. Несложно видеть, что определенные так μ_k^*, $1 \leqslant k \leqslant 3$, будут $\vec{r}$-согласованными (так как $\{\mu_i\}_{i=1}^{3}$ являются $\vec{r}$-согласованными, а условия на r_{ij} дают ограничения не более, чем на соотношения между мерами на множествах B_{ijk}). Кроме того, непосредственной проверкой можно убедиться, что $\sup_{\vec{C}\in\Gamma} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}^*(\vec{C}))$. Отсюда следует, что

$$\sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \geqslant \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}^*(\vec{C})).$$

Далее, покажем, что $\vec{\mu}^* \in \Lambda_6$, проверив выполнение условия (1.5) для тройки мер $\vec{\mu}^*$. В самом деле, в силу определения множеств B_σ выполняются следующие неравенства: $\mu_{\sigma_1}(B_\sigma) \geqslant \mu_{\sigma_2}(B_\sigma) \geqslant \mu_{\sigma_3}(B_\sigma)$, поэтому $\mu_{\sigma_1}^*(\sigma) \geqslant \mu_{\sigma_2}^*(\sigma) \geqslant \mu_{\sigma_3}^*(\sigma)$. Значит, $\vec{\mu}^* \in \Lambda_6$. Таким образом, для любой $\vec{r}$-согласованной тройки $\vec{\mu}$ мер на Ω найдется такая $\vec{r}$-согласованная тройка $\vec{\mu}^*$ мер (из Λ_6) на S_3, что $\sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \geqslant \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}^*(\vec{C}))$. Значит,

$$\inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \geqslant \inf_{\vec{\mu}\in\Lambda_6} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C})),$$

причем в левой части последнего неравенства стоит не что иное, как величина $\underline{R}$. Таким образом, $\underline{R} \geqslant \inf_{\vec{\mu}\in\Lambda_6} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. Значит,

$$\underline{R} = \inf_{\vec{\mu}\in\Lambda_6} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C})).$$

Так как S_3 конечно, то sup и max по $\mathcal{C}(S_3)$ совпадают, что завершает доказательство леммы. □

Заметим, что лемма 2 существенно упрощает задачу о нахождении числа $\underline{R}$: можно считать, что $\Omega = S_3$, $\Sigma = 2^{S_3}$ и что тройка мер (μ_1, μ_2, μ_3) принадлежит множеству Λ_6.

Теперь докажем формулу для величины $\underline{R}$ из теоремы 4, т.е. сведем задачу о поиске $\underline{R}$ к поиску экстремума в $\mathbb{R}^{18}$ (предполагая, что условия теоремы 4 выполнены). Рассмотрим множество $\mathbb{T}$ троек произвольных отображений T_i, $T_i : S_3 \to [0,1]$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Пусть $\phi_6 : \mathbb{T} \to [0,1]^{18}$ и $\phi_6(T_1, T_2, T_3) = \vec{x}$, где $\vec{x} = (x^{(1)}_{123}, x^{(1)}_{132}, x^{(1)}_{213}, x^{(1)}_{231}, x^{(1)}_{312}, x^{(1)}_{321}, x^{(2)}_{123}, x^{(2)}_{132}, x^{(2)}_{213}, x^{(2)}_{231}, x^{(2)}_{312}, x^{(2)}_{321}, x^{(3)}_{123}, x^{(3)}_{132}, x^{(3)}_{213}, x^{(3)}_{231}, x^{(3)}_{312}, x^{(3)}_{321})$ и где, в свою очередь, $x^{(l)}_{ijk} = T_l(\omega_{ijk})$. Несложно видеть, что такое отображение является биекцией между $\mathbb{T}$ и $[0,1]^{18}$.

Найдем образ множества Λ_6 при отображении ϕ_6. Фиксируем тройку мер $\{\mu_i\}_{i=1}^3 \in \Lambda_6$. Тогда $x^{(i)}_\sigma = \mu_i(\sigma)$, где $1 \leqslant i \leqslant 3$, $\sigma = (\sigma_1\sigma_2\sigma_3) \in S_3$. Далее, расписывая r_{ij} по определению, получаем:

$$2r_{ij} = \sum_{\sigma \in S_3} (x^{(i)}_\sigma - x^{(j)}_\sigma)(-1)^{I\left\{\sigma_i^{-1} > \sigma_j^{-1}\right\}},\ 1 \leqslant i < j \leqslant 3. \tag{1.6}$$

Несложно видеть, что так как $\vec{\mu} \in \Lambda_6$, то

$$x^{(\sigma_1)}_\sigma \geqslant x^{(\sigma_2)}_\sigma \geqslant x^{(\sigma_3)}_\sigma. \tag{1.7}$$

Кроме того, в силу того, что μ_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, являются вероятностными мерами, выполняются следующие соотношения:

$$\sum_{\sigma \in S_3} x^{(l)}_\sigma = 1 \quad (0 \leqslant x^{(l)}_\sigma \leqslant 1, 1 \leqslant l \leqslant 3,\ \sigma \in S_3). \tag{1.8}$$

Обозначим через $N_6 \subset [0,1]^{18}$ множество таких векторов $\vec{x} = (x^{(1)}_{123}, x^{(1)}_{132}, x^{(1)}_{213}, x^{(1)}_{231}, x^{(1)}_{312},\ x^{(1)}_{321}, x^{(2)}_{123}, x^{(2)}_{132}, x^{(2)}_{213}, x^{(2)}_{231}, x^{(2)}_{312}, x^{(2)}_{321}, x^{(3)}_{123}, x^{(3)}_{132}, x^{(3)}_{213}, x^{(3)}_{231}, x^{(3)}_{312}, x^{(3)}_{321})$, для которых выполнены условия (1.6)-(1.8). Далее, множество N_6 представимо в виде конечного пересечения (замкнутых) полупространств и гиперплоскостей, пересечение замкнутых множеств - замкнуто, пересечение выпуклых множеств - выпукло, поэтому N_6 - замкнутый выпуклый многогранник. Заметим, что отображение ϕ_6 устанавливает биекцию между Λ_6 и множеством N_6, так как условие принадлежности тройки мер множеству Λ_6 равносильно условиям (1.6)-(1.8) принадлежности вектора $\vec{x}$ множеству N_6. В силу леммы 2 выполнено следующее равенство:

$$\underline{R} = \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C})).$$

Напомним, что через $\mathcal{C}(S_3)$ мы обозначили множество всевозможных разбиений S_3 на 3 непересекающихся множества, т.е. разбиений вида

$\vec{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$, где $\bigsqcup_{k=1}^{3} C_k = S_3$. Так как ϕ_6 - биекция и так как $\mu_l(\sigma) = x_\sigma^{(l)}$, $1 \leqslant l \leqslant 3$, $\sigma \in S_3$, получаем:

$$\underline{R} = \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f(\{\mu_j(C_k)\}_{j,k=1}^{3}) =$$

$$= \inf_{\vec{x} \in N_6} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in C_k} x_\sigma^{(j)}\right\}_{j,k=1}^{3}\right).$$

Таким образом, теорема 4 доказана, а задача о нахождении величины $\underline{R}$ свелась к задаче о поиске экстремума на подмножестве множества $[0,1]^{18}$.

Заметим, что леммы 1 и 2, сформулированные выше, доказывают, что если в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 18 непустых попарно не пересекающихся множеств, то экстремум в задаче о нахождении чисел $\underline{R}$ и $\bar{R}$ достигается на множестве дискретных мер.

1.3.2 Доказательство теоремы 5 о понижении размерности для трех мер

Перейдем к получению формулы для величины $\bar{R}$ из теоремы 5. В силу теоремы 4 выполнено следующее соотношение:

$$\bar{R} = \sup_{\vec{x} \in N_{18}} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in S_3} x_\sigma^{(j),k}\right\}_{j,k=1}^{3}\right).$$

Рассмотрим линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^{54} \to \mathbb{R}^9$, при котором каждому вектору $\vec{x} \in \mathbb{R}^{54}$ сопоставляется вектор $\vec{y} = (y_1, ..., y_9)$ так, что $y_1 = \sum_{\sigma \in S_3} x_\sigma^{(1),1}$, $y_2 = \sum_{\sigma \in S_3} x_\sigma^{(1),2}$, ..., $y_9 = \sum_{\sigma \in S_3} x_\sigma^{(3),3}$. Так как N_{18} - выпуклый замкнутый многогранник в $\mathbb{R}^{54}$, то его образ P при данном отображении тоже является выпуклым замкнутым многогранником. Тогда

$$\bar{R} = \sup_{\vec{x} \in N_{18}} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in S_3} x_\sigma^{(j),k}\right\}_{j,k=1}^{3}\right) = \sup_{\vec{y} \in P} f(y_1, ..., y_9).$$

Кроме того, если $\vec{x} \in N_{18}$, то $\sum_{j=1}^{3} \sum_{\sigma \in S_3} x_\sigma^{(i),j} = 1$, $i = 1, 2, 3$, поэтому если $\vec{y} \in P$, то $y_1 + y_2 + y_3 = 1$, $y_4 + y_5 + y_6 = 1$ и $y_7 + y_8 + y_9 = 1$. Пусть $Q_6 \subset \mathbb{R}^6$ - проекция P на подпространство пространства $\mathbb{R}^9$, порожденное координатами под номерами 1, 2, 4, 5, 7 и 8. Тогда Q_6 - выпуклый замкнутый многогранник. При любом $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \in Q_6$ положим $f^*(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) := f(z_1, z_2, 1 - z_1 - z_2, z_3, z_4, 1 - z_3 - z_4, z_5, z_6, 1 - z_5 - z_6)$, тогда $\bar{R} = \sup_{\vec{z} \in Q_6} f^*(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)$. Отметим, что множество Q_6 (как и множество P) строится независимо от функции f (другими словами, множество Q_6 одно и то же для всех функций f). Итак, формула для $\bar{R}$ из теоремы 5 доказана.

Перейдем к доказательству формулы для $\underline{R}$ из теоремы 5. В силу теоремы 4 имеем: $\underline{R} = \inf_{\vec{x} \in N_6} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in C_k} x_\sigma^{(j)}\right\}_{j,k=1}^3\right)$. Обозначим через $V_1 \subset N_6$ такое (возможно, пустое) множество, что при всех $\vec{x} \in V_1$ выполнено соотношение
$\max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in C_k} x_\sigma^{(j)}\right\}_{j,k=1}^3\right) = f\left(\left\{\sum_{\sigma \in C_k^*} x_\sigma^{(j)}\right\}_{j,k=1}^3\right)$, где
$C_1^* = \{(123), (231), (312)\}$, $C_2^* = \{(132), (321)\}$, $C_3^* = \{(213)\}$. Рассмотрим (вырожденное) линейное отображение $\beta_1\colon \mathbb{R}^{18} \to \mathbb{R}^9$, при котором каждому вектору $\vec{x} \in N_6$ сопоставляется вектор $\vec{y} \in \mathbb{R}^9$ так, что

$$\begin{gathered}
y_1 = x_{123}^1 + x_{231}^1 + x_{312}^1,\ y_2 = x_{132}^1 + x_{321}^1,\ y_3 = x_{213}^1,\\
y_4 = x_{123}^2 + x_{231}^2 + x_{312}^2,\ y_5 = x_{132}^2 + x_{321}^2,\ y_6 = x_{213}^2,\\
y_7 = x_{123}^3 + x_{231}^3 + x_{312}^3, y_8 = x_{132}^3 + x_{321}^3,\ y_9 = x_{213}^3.
\end{gathered}$$

Обозначим через $U_1 \subset \mathbb{R}^9$ образ V_1 при отображении β_1. Рассматривая всевозможные разбиения S_3 на 3 подмножества (число таких разбиений обозначим через T), получаем набор $\{V_i\}_{i=1}^T$ таких множеств, что $V_i \subset N_6$ при $1 \leqslant i \leqslant T, \bigcup_{i=1}^T V_i = N_6$ и для каждого V_i, $1 \leqslant i \leqslant T$, определено соответствующее (вырожденное) линейное преобразование β_i. Образ V_i при отображении β_i обозначим через U_i. Пусть $F := \bigcup_{i=1}^T U_i$. Тогда $F \subset \mathbb{R}^9$ и

$$\underline{R} = \inf_{\vec{x} \in N_6} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in C_k} x_\sigma^{(j)}\right\}_{j,k=1}^3\right) =$$

$$= \inf_{\vec{x} \in \bigcup_{i=1}^T V_i} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in C_k} x_\sigma^{(j)}\right\}_{j,k=1}^3\right) =$$

$$= \min_{1 \leqslant i \leqslant T} \inf_{\vec{x} \in V_i} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_3)} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in C_k} x_\sigma^{(j)}\right\}_{j,k=1}^3\right) = \min_{1 \leqslant i \leqslant T} \inf_{\vec{y} \in U_i} f(y_1, y_2, ..., y_9) =$$

$$= \inf_{\vec{y} \in \bigcup_{i=1}^T U_i} f(y_1, y_2, ..., y_9) = \inf_{\vec{y} \in F} f(y_1, y_2, ..., y_9).$$

Отметим, что (как и ранее) если $\vec{y} \in F$, то $y_1 + y_2 + y_3 = 1$, $y_4 + y_5 + y_6 = 1$ и $y_7 + y_8 + y_9 = 1$. Далее, пусть $G_6 \subset \mathbb{R}^6$ - проекция F на подпространство пространства $\mathbb{R}^9$, порожденное координатами под номерами 1, 2, 4, 5, 7, 8. При любом $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \in G_6$ положим (как и ранее) $f^*(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) := f(z_1, z_2, 1 - z_1 - z_2, z_3, z_4, 1 - z_3 - z_4, z_5, z_6, 1 - z_5 - z_6)$, тогда $\underline{R} = \inf_{\vec{z} \in G_6} f^*(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)$. Теорема 5 доказана.

Отметим, что в отличие от множества Q_6 множество G_6 зависит от функции f, и в этом смысле формула, сводящая задачу о нахождении $\underline{R}$ к поиску экстремума на G_6, менее удобна, чем соответствующая формула для $\bar{R}$ из теоремы 5. Более того, в отличие от множества P_6, которое является замкнутым выпуклым многогранником, множество G_6, вообще говоря, устроено значительно сложнее.

Отметим также, что формулы для величины $\underline{R}$ в теоремах 4 и 5 останутся в силе, если в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 6 непустых попарно не пересекающихся множеств.

1.3.3 Доказательство теорем 1 и 6 о точных формулах для экстремальных значений f_+ в случае трех мер

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 1, мы докажем следующую несколько более слабую вспомогательную теорему.

Теорема 6. *Предположим, что в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 18 непустых попарно не пересекающихся множеств. Пусть $f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i)$. Тогда для величин*

$$\bar{R}^+ = \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i) \quad \text{и} \quad \underline{R}^+ = \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i)$$

выполняются следующие равенства:

$$\bar{R}^+ = 1 + \min(r_{13} + r_{23}, r_{12} + r_{23}, r_{12} + r_{13}),$$
$$\underline{R}^+ = \max(r_{12} + r_{13} + r_{23}, 1 + \max(r_{12}, r_{13}, r_{23})).$$

Доказательство. Верна следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 18 непустых попарно не пересекающихся множеств.*

Тогда для любой функции f, определенной на множестве $[0,1]^9$, выполнены следующие равенства:

$$\underline{R} = \inf_{\vec{\mu}\in\Lambda_{18}} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C})), \quad \bar{R} = \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_{18}} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C})).$$

Доказательство. Несложно видеть, что $\underline{R} \leqslant \inf_{\vec{\mu}\in\Lambda_{18}} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ (в силу тех же соображений, с помощью которых в лемме 2 устанавливается неравенство $\underline{R} \leqslant \inf_{\vec{\mu}\in\Lambda_6} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. Далее, без ограничения общности можно считать, что $S_3 \subset \Omega_{18}$, поэтому $\Lambda_6 \subset \Lambda_{18}$. В силу леммы 2 и конечности S_3 получаем, что

$$\underline{R} = \inf_{\vec{\mu}\in\Lambda_6} \max_{\vec{C}\in\mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \inf_{\vec{\mu}\in\Lambda_6} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(S_3)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \geqslant \inf_{\vec{\mu}\in\Lambda_{18}} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \geqslant \underline{R}.$$

Таким образом, $\underline{R} = \inf_{\vec{\mu}\in\Lambda_{18}} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. Аналогичным образом с помощью леммы 1 получаем, что

$$\bar{R} = \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_{18}} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0)) \leqslant \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_{18}} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \leqslant \sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \bar{R},$$

поэтому $\bar{R} = \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_{18}} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$, что завершает доказательство леммы. □

Далее, упомянем результат, который не будет использоваться в дальнейшем, хотя и представляет определенный интерес.

Замечание 1. Пусть выполнены условия теоремы 6 и функция f непрерывна. Тогда для любого числа a такого, что $a \in [\underline{R}, \bar{R}]$, существует такая тройка мер $\vec{\mu} \in \Lambda_{18}$, что $\max_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega_{18})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = a$.

Далее, для доказательства теоремы 6 нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4. *Пусть Ω не более чем счетно, $\Sigma = 2^\Omega$, пусть $\bigsqcup_{i=1}^3 C_i^{opt} = \Omega$ и на множестве C_i^{opt} мера μ_i не меньше других мер, т.е. для любого $\omega \in C_i^{opt}$ выполняется соотношение $\mu_i(\omega) \geqslant \max_j \mu_j(\omega)$. Тогда*

$$\sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(C_i^{opt}).$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого разбиения C_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, $\bigsqcup C_i = \Omega$, справедливо неравенство $\sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i) \leqslant \sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i^{opt})$. Положим $D_{ij} := C_i^{opt} \bigcap C_j$, $x_{ij}^k := \mu_k(D_{ij})$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{3} \mu_j(C_j) = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \mu_j(D_{ij}) = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} x_{ij}^j \leqslant \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^i,$$

так как из определения C_i^{opt} следует, что $x_{ij}^i \geqslant x_{ij}^j$. Далее,

$$\sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i^{opt}) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \mu_i(D_{ij}) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^i,$$

поэтому $\sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i) \leqslant \sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i^{opt})$ что завершает доказательство леммы. □

Теперь докажем теорему 6, получив удобные формулы для величин $\underline{R}^+ = \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i)$ и $\bar{R}^+ = \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i)$. Пусть выполнены условия теоремы 6. В силу леммы 3 в этом случае $\underline{R}^+ = \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega_{18})} \sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i)$ и $\bar{R}^+ = \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega_{18})} \sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i)$. Заметим, что множества $C_i^* = \bigsqcup_{m=1}^{3} \left(\omega_{ijk}^m \bigsqcup \omega_{ikj}^m\right)$ (для $(ijk) \in S_3$) подходят в качестве C_i^{opt} для любой тройки мер $\vec{\mu} \in \Lambda_{18}$ (в силу определения Λ_{18} - см. стр. 24). Например, для ω_{123}^m, $1 \leqslant m \leqslant 3$, имеем: $\mu_1(w_{123}^m) \geqslant \mu_2(w_{123}^m) \geqslant \mu_3(w_{123}^m)$.

Поэтому в силу леммы 4

$$\underline{R}^+ = \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega_{18})} \sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i) = \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} \sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i^*),$$

$$\bar{R}^+ = \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega_{18})} \sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i) = \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} \sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i^*).$$

В силу биективности отображения ϕ_{18}, используя обозначения для векторов из N_{18}, получаем:

$$\underline{R}^+ = \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} \sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i^*) = \inf_{\vec{x} \in N_{18}} \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{m=1}^{3} (x_{ijk}^{(i),m} + x_{ikj}^{(i),m}) \right),$$

$$\bar{R}^+ = \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_{18}} \sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i^*) = \sup_{\vec{x} \in N_{18}} \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{m=1}^{3} (x_{ijk}^{(i),m} + x_{ikj}^{(i),m}) \right)$$

для $(ijk) \in S_3$. Пусть $x^{(i)}_\sigma := \sum_m x^{(i),m}_\sigma$. Несложно проверить, что в новых обозначениях задача о нахождении $\underline{R}^+$ и $\bar{R}^+$ перепишется следующим образом:

$$\underline{R}^+ = \inf_{\vec{x}\in N_6} \sum_{i=1}^{3} \left(x^{(i)}_{ijk} + x^{(i)}_{ikj} \right),$$

$$\bar{R}^+ = \sup_{\vec{x}\in N_6} \sum_{i=1}^{3} \left(x^{(i)}_{ijk} + x^{(i)}_{ikj} \right).$$

Напомним, что множество N_6 задается системой из соотношений (1.6), (1.8), а также шестью двойными неравенствами:

$$x^{(\sigma_1)}_\sigma \geqslant x^{(\sigma_2)}_\sigma \geqslant x^{(\sigma_3)}_\sigma,\ \sigma \in S_3.$$

Введем новые переменные $\varepsilon_{ijk}(\vec{x})$, $\delta_{ijk}(\vec{x})$, $t_{ijk}(\vec{x})$ следующим образом: $x^{(\sigma_1)}_\sigma = x^{(\sigma_2)}_\sigma + \delta_\sigma(\vec{x})$, $x^{(\sigma_2)}_\sigma = x^{(\sigma_3)}_\sigma + \varepsilon_\sigma(\vec{x})$, $x^{(\sigma_3)}_\sigma = t_\sigma(\vec{x})$, $\sigma \in S_3$, причем в дальнейшем вместо $\varepsilon_{ijk}(\vec{x})$, $\delta_{ijk}(\vec{x})$, $t_{ijk}(\vec{x})$ будем писать ε_{ijk}, δ_{ijk}, t_{ijk} соответственно. В новых переменных множество N_6 описывается условиями

$$2r_{12} = \delta_{123} + \varepsilon_{132} + \delta_{132} + \varepsilon_{312} + \delta_{213} + \varepsilon_{231} + \delta_{231} + \varepsilon_{321}, \tag{1.9}$$

$$2r_{13} = \varepsilon_{123} + \delta_{123} + \delta_{132} + \varepsilon_{213} + \delta_{312} + \varepsilon_{321} + \delta_{321} + \varepsilon_{231}, \tag{1.10}$$

$$2r_{23} = \varepsilon_{213} + \delta_{213} + \delta_{231} + \varepsilon_{123} + \varepsilon_{312} + \delta_{312} + \delta_{321} + \varepsilon_{132}, \tag{1.11}$$

$$1 = \sum_{\sigma\in S_3} t_\sigma + \varepsilon_{123} + \delta_{123} + \varepsilon_{132} + \delta_{132} + \varepsilon_{213} + \varepsilon_{312}, \tag{1.12}$$

$$1 = \sum_{\sigma\in S_3} t_\sigma + \varepsilon_{123} + \varepsilon_{213} + \delta_{213} + \varepsilon_{231} + \delta_{231} + \varepsilon_{321}, \tag{1.13}$$

$$1 = \sum_{\sigma\in S_3} t_\sigma + \varepsilon_{132} + \varepsilon_{231} + \varepsilon_{312} + \delta_{312} + \varepsilon_{321} + \delta_{321}, \tag{1.14}$$

$$\varepsilon_{ijk} \geqslant 0,\ \delta_{ijk} \geqslant 0,\ t_{ijk} \geqslant 0. \tag{1.15}$$

При этом $\underline{R}^+ = \min_{N_6}(\sum_{\sigma\in S_3}(t_\sigma + \varepsilon_\sigma + \delta_\sigma))$. Положим $t = \sum_{\sigma\in S_3} t_\sigma$, $\varepsilon = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma$, $\delta = \sum_\sigma \delta_\sigma$. Сложив (1.9)-(1.11), а также (1.12)-(1.14), получим $2\varepsilon + 2\delta = 2(r_{12} + r_{13} + r_{23})$ и $3t + 2\varepsilon + \delta = 3$ соответственно. Значит, $\underline{R}^+ = \min_{N_6}(t+\varepsilon+\delta)$. Учитывая (1.15), получаем, что $1+\frac{r_{12}+r_{13}+r_{23}}{3} = \frac{3+(r_{12}+r_{13}+r_{23})}{3} = \frac{(3t+2\varepsilon+\delta)+(\varepsilon+\delta)}{3} \leqslant t+\varepsilon+\delta$. Кроме того, $t+\varepsilon+\delta \leqslant \frac{(3t+2\varepsilon+\delta)+2(\varepsilon+\delta)}{3} = \frac{3+2(r_{12}+r_{13}+r_{23})}{3} = 1 + \frac{2}{3}(r_{12} + r_{13} + r_{23})$. Далее, несложно видеть, что $\bar{R}^+ = \max_{N_6}(t + \varepsilon + \delta)$. Таким образом, нами доказано следующее предложение.

Предложение 1. *В условиях теоремы 6 верны следующие неравенства:*

$$1 + \frac{1}{3}(r_{12} + r_{13} + r_{23}) \leqslant \underline{R}^+ \leqslant \bar{R}^+ \leqslant 1 + \frac{2}{3}(r_{12} + r_{13} + r_{23}).$$

Далее, положим $\delta_i = \delta_{ikl} + \delta_{ilk}$, $\varepsilon_i = \varepsilon_{kli} + \varepsilon_{lki}$, $(ikl) \in S_3$. Получаем, что теперь задача сводится к следующей: множество $K \subset \mathbb{R}^7$, состоящее из наборов чисел $(t, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, задано следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}(\delta_k + \varepsilon_k) + (\delta_l + \varepsilon_l) = 2r_{kl}, k < l,\\ 1 = t + \delta_i + \varepsilon_k + \varepsilon_l, (ikl) \in S_3, k < l,\\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\ 0 \leqslant \delta_i \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant 3.\end{gathered}$$

Нужно найти $\underline{R}^+ = \min_K(t + \sum_{i=1}^3(\delta_i + \varepsilon_i))$ и $\bar{R}^+ = \max_K(t + \sum_{i=1}^3(\delta_i + \varepsilon_i))$. Но $r_{12} + r_{13} + r_{23} = (\delta_i + \varepsilon_i) + (\delta_k + \varepsilon_k) + (\delta_l + \varepsilon_l) = 2r_{kl} + (\delta_i + \varepsilon_i)$. Значит, множество $K \subset \mathbb{R}^7$ задается условиями

$$\delta_i + \varepsilon_i = r_{12} + r_{13} + r_{23} - 2r_{kl} =: r_i, (ikl) \in S_3, k < l, \tag{1.16}$$

$$1 = t + \delta_i + \varepsilon_k + \varepsilon_l, (ikl) \in S_3, k < l, \tag{1.17}$$

$$0 \leqslant t \leqslant 1,\ 0 \leqslant \delta_i \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant 3.$$

При этом в (1.16) $r_i = r_{12} + r_{13} + r_{23} - 2r_{kl} \geqslant 0$ по неравенству треугольника. Однако $\varepsilon + \delta = r_{12} + r_{13} + r_{23}$, поэтому $\underline{R}^+ = r_{12} + r_{13} + r_{23} + \min_K t$ и, аналогично, $\bar{R}^+ = r_{12} + r_{13} + r_{23} + \max_K t$.

Упростим задачу, выразив все через ε_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Из (1.17) следует, что $1 + \varepsilon_i = 1 + t + \delta_i + \varepsilon_k + \varepsilon_l + \varepsilon_i$, поэтому $\varepsilon_i - \delta_i$ не зависит от i, т.е. $\delta_1 - \varepsilon_1 = \delta_i - \varepsilon_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Но $\delta_i + \varepsilon_i = r_i$, поэтому $\delta_i = \delta_1 - \varepsilon_1 + \varepsilon_i = (r_1 - \varepsilon_1) - \varepsilon_1 + \varepsilon_i$, значит, $\delta_i = r_1 + \varepsilon_i - 2\varepsilon_1$. Поэтому $r_i = \delta_i + \varepsilon_i = (r_1 + \varepsilon_i - 2\varepsilon_1) + \varepsilon_i$, откуда $\varepsilon_i = \varepsilon_1 + \frac{r_i - r_1}{2}$. Далее, учтем, что $\varepsilon_i \in [0, 1]$ и что $\delta_i = r_i - \varepsilon_i \in [0, 1]$. Тогда $0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant \min(r_i, 1)$ и $\delta_i \leqslant 1$. При этом $t = 1 - \delta_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 1 - (r_1 - \varepsilon_1) - \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ (и в силу равенства $t = 1 - \delta_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ получаем, что t будет не больше единицы при неотрицательных δ_i и ε_i). Получаем, что теперь необходимо решить следующую задачу:

$$\begin{aligned}0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant \min(r_i, 1),\ t \geqslant 0,\ r_1 + \varepsilon_i - 2\varepsilon_1 \leqslant 1,\ 1 \leqslant i \leqslant 3,\\ \varepsilon_i = \varepsilon_1 + \frac{r_i - r_1}{2},\ 1 \leqslant i \leqslant 3,\\ t = 1 - r_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \to extr.\end{aligned}$$

Выразим все через переменную ε_1 и сведем задачу к такой:

$$\frac{r_1 - r_i}{2} \leqslant \varepsilon_1 \leqslant \frac{r_1 + r_i}{2},\ \varepsilon_1 \geqslant \frac{r_1 + r_i}{2} - 1,\ \varepsilon_1 + \frac{r_i - r_1}{2} \leqslant 1,\ 1 \leqslant i \leqslant 3,$$

$$0 \leqslant t = 1 - r_1 + \varepsilon_1 - (\varepsilon_1 + \frac{r_2 - r_1}{2} + \varepsilon_1 + \frac{r_3 - r_1}{2}) = 1 - \frac{r_2 + r_3}{2} - \varepsilon_1 \to extr.$$

Подведем итог: для того, чтобы выполнялось условие $\vec{x} \in N_6$, необходимо, чтобы построенное по данному $\vec{x}$ число ε_1 удовлетворяло следующим условиям:

$$\max_i \max\left(\frac{r_1 - r_i}{2}, \frac{r_1 + r_i}{2} - 1\right) \leqslant \varepsilon_1,$$
$$\varepsilon_1 \leqslant \min_i \min\left(\frac{r_1 + r_i}{2}, 1 + \frac{r_1 - r_i}{2}, 1 - \frac{r_2 + r_3}{2}\right). \tag{1.18}$$

И в рамках данных ограничений на ε_1 требуется найти экстремум выражения $1 - \frac{r_2+r_3}{2} - \varepsilon_1 \to extr$. Более того, несложно видеть (так как t и все δ_j выражаются через ε_i, а все ε_i выражаются через ε_1), что если ε_1, удовлетворяющее таким условиям, найдется, то по нему можно будет построить вектор из N_6.

Начиная с этого момента, без ограничения общности будем считать, что $r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3$ (это возможно, так как функционал f инвариантен относительно перестановок мер). Другими словами, будем считать, что изначально меры были перенумерованы так, чтобы выполнялось соотношение $r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3$. Тогда (1.18) равносильно тому, что $\max(\frac{r_1-r_3}{2}, r_1 - 1) \leqslant \varepsilon_1 \leqslant \min(\frac{r_1+r_3}{2}, 1, 1 - \frac{r_2+r_3}{2})$. Однако $\frac{r_1+r_3}{2} = r_{13} \leqslant 1$, поэтому $2 - r_3 \geqslant r_1$, откуда $r_1 - r_3 \geqslant 2r_1 - 2$. Значит, $\frac{r_1-r_3}{2} \geqslant r_1 - 1$. Кроме того, $r_{13} = \frac{r_1+r_3}{2} \leqslant 1$, поэтому (1.18) равносильно тому, что $\varepsilon_1 \in [\frac{r_1-r_3}{2}, \min(\frac{r_1+r_3}{2}, 1 - \frac{r_2+r_3}{2})]$. Отметим, что данное множество непусто, так как $\frac{r_1-r_3}{2} \leqslant 1 - \frac{r_2+r_3}{2}$ в силу того, что $r_{12} = \frac{r_1+r_2}{2} \leqslant 1$. Ранее мы получили, что $\underline{R}^+ = r_{12} + r_{13} + r_{23} + \min_K t$ и $\bar{R}^+ = r_{12} + r_{13} + r_{23} + \max_K t$, при этом $t = 1 - \frac{r_2+r_3}{2} - \varepsilon_1$, значит, $\bar{R}^+ = r_{12} + r_{13} + r_{23} + 1 - \frac{r_2+r_3}{2} - \frac{r_1-r_3}{2}$ и, аналогично, $\underline{R}^+ = r_{12} + r_{13} + r_{23} + 1 - \frac{r_2+r_3}{2} - \min(\frac{r_1+r_3}{2}, 1 - \frac{r_2+r_3}{2})$.

Поэтому (так как $-\min_Z x = \max_Z(-x)$)

$$\underline{R}^+ = r_{12} + r_{13} + r_{23} + 1 - \frac{r_2 + r_3}{2} + \max(-\frac{r_1 + r_3}{2}, \frac{r_2 + r_3}{2} - 1) =$$
$$= r_{12} + r_{13} + r_{23} + 1 - r_{23} + \max(-r_{13}, r_{23} - 1) =$$
$$= \max(1 + r_{12}, r_{12} + r_{13} + r_{23}).$$

Далее, так как $r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3$, то $r_{12}+r_{13}-r_{23} \geqslant r_{12}+r_{23}-r_{13} \geqslant r_{13}+r_{23}-r_{12}$, поэтому $r_{12} \geqslant r_{13} \geqslant r_{23}$. Окончательно имеем: $\underline{R}^+ = \max(r_{12} + r_{13} + r_{23}, 1 + \max(r_{12}, r_{13}, r_{23}))$. Наконец,

$$\begin{gathered}
\bar{R}^+ = r_{12} + r_{13} + r_{23} + 1 - \frac{r_2 + r_3}{2} - \frac{r_1 - r_3}{2} = \\
= r_{12} + r_{13} + r_{23} + 1 - r_{23} - \frac{(r_{12} + r_{13} - r_{23}) - (r_{13} + r_{23} - r_{12})}{2} = \\
= r_{12} + r_{13} + r_{23} + 1 - r_{23} - (r_{12} - r_{23}) = \\
= 1 + \min(r_{13} + r_{23}, r_{12} + r_{23}, r_{12} + r_{13}).
\end{gathered}$$

Итак, мы доказали, что $\underline{R}^+ = \max(r_{12}+r_{13}+r_{23}, 1+\max(r_{12}, r_{13}, r_{23}))$ и $\bar{R}^+ = 1 + \min(r_{13} + r_{23}, r_{12} + r_{23}, r_{12} + r_{13})$, предполагая, что меры перенумерованы так, чтобы выполнялось соотношение $r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3$. Однако очевидно, что если вернуть мерам исходный порядок, то полученные формулы для $\underline{R}^+$ и для $\bar{R}^+$ не изменятся. Таким образом, доказано, что если $f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i)$, $\underline{R}^+ = \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i)$, $\bar{R}^+ = \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i)$, то выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned}
\underline{R}^+ &= \max(r_{12} + r_{13} + r_{23}, 1 + \max(r_{12}, r_{13}, r_{23})), \\
\bar{R}^+ &= 1 + \min(r_{13} + r_{23}, r_{12} + r_{23}, r_{12} + r_{13}).
\end{aligned}$$

Таким образом, теорема 6 доказана. □

Замечание 2. Теорема 6 была доказана с помощью леммы 3, которая опирается на лемму 1. Таким образом, доказательство теоремы 6 опирается на результаты, верные для произвольной функции f. Несложно показать, что условия теоремы 6 можно ослабить и требовать наличие лишь 6 непересекающихся множеств в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ). Для этого нужно доказывать теорему 6 не с помощью ссылки на общий случай, а «напрямую» (однако в этом случае доказательство уже не будет применимо к произвольной f). В самом деле, лемма 4 легко обобщается на случай произвольного Ω, вследствие чего рассуждения, аналогичные лемме 2, позволяют свести задачу о нахождении $\underline{R}^+$ и $\bar{R}^+$ к задаче о поиске экстремума по множеству Λ_6, которая решена выше.

Наконец, заметим, что теорема 6 с учетом замечания 2 превращается в теорему 1. Тем самым, теорема 1 доказана.

Таблица 1: Меры, на которых достигается экстремум.

	σ	μ_1^*	μ_2^*	μ_3^*
C_1^*	(123)	$1-r^{(1)}-\varepsilon_1$	$1-r^{(1)}-\varepsilon_1$	$1-r^{(1)}-\varepsilon_1$
	(132)	$r^{(3)}+r^{(2)}-r^{(1)}-\varepsilon_1$	0	0
C_2^*	(213)	$r^{(1)}-r^{(3)}+\varepsilon_1$	$r^{(1)}-r^{(3)}+\varepsilon_1$	0
	(231)	0	$r^{(3)}-\varepsilon_1$	0
C_3^*	(312)	$r^{(1)}-r^{(2)}+\varepsilon_1$	0	$r^{(1)}-r^{(2)}+\varepsilon_1$
	(321)	0	ε_1	$r^{(2)}$

Замечание 3. Предъявим набор мер, на которых достигается экстремум в задаче о нахождении чисел $\underline{R}^+$ и $\bar{R}^+$. Напомним введенное выше обозначение. Перенумеруем три числа r_{12}, r_{13}, r_{23} в порядке неубывания, получим $r^{(1)} \leqslant r^{(2)} \leqslant r^{(3)}$, $\left\{r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}\right\} = \{r_{12}, r_{13}, r_{23}\}$. Далее, рассмотрим тройку $\vec{\mu}^*$ мер на $(S_3, 2^{S_3})$, заданную с помощью таблицы 1. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что тройка $\vec{\mu}^*$ является $\vec{r}$-согласованной (при этом $\vec{\mu}^* \in \Lambda_6$). Далее, если $\varepsilon_1 = r^{(3)} - r^{(1)}$, то $\sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^3 \mu_i^*(C_i) = \bar{R}^+$. Если же $\varepsilon_1 = \min(r^{(2)}, 1 - r^{(1)})$, то $\sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^3 \mu_i^*(C_i) = \underline{R}^+$. Отметим, что в силу леммы 4 в обоих случаях $\sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^3 \mu_i^*(C_i) = \sum_{i=1}^3 \mu_i^*(C_i^*)$ (множества C_i^*, $1 \leqslant i \leqslant 3$, определены в таблице 1).

Таким образом, мы предъявили набор мер, на которых достигается экстремум в задаче о нахождении чисел $\underline{R}^+$ и $\bar{R}^+$.

1.4 Экстремальные значения некоторых конкретных функций качества для произвольного числа мер

Для случая произвольного $n \geqslant 3$ получены следующие результаты.

Теорема 7. *Пусть в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере $n!$ непустых попарно не пересекающихся множеств. Тогда*

$$1 + \frac{2 \cdot \sum_{i<j} r_{ij}}{n(n-1)} \leqslant \underline{R}^+ \leqslant \bar{R}^+ \leqslant 1 + \frac{2 \cdot \sum_{i<j} r_{ij}}{n}.$$

Доказательство см. на стр. 54.

Далее, верна следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть* $\delta := \left(\frac{n}{2}-1\right)(1+\max_{i<j} r_{ij})+1+\frac{(\max_{i<j} r_{ij}-1)}{2}\cdot(n \mod 2)$. *Для чисел* $\underline{R}^{+}$, $\underline{R}^{\Delta}$, $\underline{R}^{\min}$, $\bar{R}^{+}$, $\bar{R}^{\Delta}$ *и* $\bar{R}^{\min}$ *выполняются следующие соотношения:*

$$\underline{R}^{+}-\delta \leqslant \underline{R}^{\min} \leqslant \frac{\underline{R}^{+}}{n}, \quad \bar{R}^{+}-\delta \leqslant \bar{R}^{\min} \leqslant \frac{\bar{R}^{+}}{n},$$

$$2\underline{R}^{+}-1-2\delta \leqslant \underline{R}^{\Delta} \leqslant \frac{\underline{R}^{+}-1}{n-1}, \quad 2\bar{R}^{+}-1-2\delta \leqslant \bar{R}^{\Delta} \leqslant \frac{\bar{R}^{+}-1}{n-1},$$

$$2\underline{R}^{\min}-1 \leqslant \underline{R}^{\Delta} \leqslant \frac{n\underline{R}^{\min}-1}{n-1}, \quad 2\bar{R}^{\min}-1 \leqslant \bar{R}^{\Delta} \leqslant \frac{n\bar{R}^{\min}-1}{n-1}.$$

1.4.1 Доказательство теоремы 8 о неравенствах между экстремальными значениями f_{+}, f_{Δ} и $f_{\min}$ для произвольного числа мер

Доказательство. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть* $0 \leqslant r \leqslant 1$, *а неотрицательные числа* a_1, b_1, a_2, b_2 *таковы, что*

$$a_1+b_1 \leqslant 1, \quad a_2+b_2 \leqslant 1, \quad |a_1-a_2|+|b_1-b_2| \leqslant 2r.$$

Тогда $a_1+b_2 \leqslant 1+r$.

Доказательство. Пусть $a_2 \geqslant a_1$, $b_2 \geqslant b_1$. Тогда

$$\begin{cases} a_1+b_1 \leqslant 1, \\ a_2+b_2 \leqslant 1, \\ a_1-a_2 \leqslant 0, \\ b_1-b_2 \leqslant 0, \\ a_2-a_1+b_2-b_1 \leqslant 2r. \end{cases}$$

Сложим первое, второе, пятое и удвоенное третье неравенство полученной системы. Получим: $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_2-a_1+b_2-b_1)+2(a_1-a_2) \leqslant 2+2r$, т.е. $2(a_1+b_2) \leqslant 2+2r$, что и требовалось.

Пусть теперь $a_2 \geqslant a_1$, $b_2 \leqslant b_1$. Тогда

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \leqslant 1, \\ a_2 + b_2 \leqslant 1, \\ a_1 - a_2 \leqslant 0, \\ b_2 - b_1 \leqslant 0, \\ a_2 - a_1 + b_1 - b_2 \leqslant 2r. \end{cases}$$

Сложим четвертое, пятое, удвоенное второе и утроенное третье неравенство полученной системы. Получим: $(b_2 - b_1) + (a_2 - a_1 + b_1 - b_2) + 2(a_2 + b_2) + 3(a_1 - a_2) \leqslant 2 + 2r$, т.е. $2(a_1 + b_2) \leqslant 2 + 2r$, что и требовалось.

Пусть $a_2 \leqslant a_1$, $b_2 \geqslant b_1$. Тогда

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \leqslant 1, \\ a_2 + b_2 \leqslant 1, \\ a_2 - a_1 \leqslant 0, \\ b_1 - b_2 \leqslant 0, \\ a_1 - a_2 + b_2 - b_1 \leqslant 2r. \end{cases}$$

Сложим первое, второе и пятое неравенство полученной системы. Получим: $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_1 - a_2 + b_2 - b_1) \leqslant 2 + 2r$, т.е. $2(a_1 + b_2) \leqslant 2 + 2r$, что и требовалось.

Пусть, наконец, $a_2 \leqslant a_1$, $b_2 \leqslant b_1$. Тогда

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \leqslant 1, \\ a_2 + b_2 \leqslant 1, \\ a_2 - a_1 \leqslant 0, \\ b_2 - b_1 \leqslant 0, \\ a_1 - a_2 + b_1 - b_2 \leqslant 2r. \end{cases}$$

Сложим первое, второе, пятое и удвоенное четвертое неравенство полученной системы. Получим: $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_1 - a_2 + b_1 - b_2) + 2(b_2 - b_1) \leqslant 2 + 2r$, т.е. $2(a_1 + b_2) \leqslant 2 + 2r$, что и требовалось. Лемма полностью доказана. $\square$

Несложно видеть, что в условиях леммы неравенство $a_1 + b_2 \leqslant 1 + r$ усилить нельзя (достаточно рассмотреть набор чисел $a_1 = r$, $b_1 = 1 - r$, $a_2 = 0$, $b_2 = 1$).

Перейдем к доказательству теоремы 8. Будем считать, что количество мер $n \geqslant 3$.

Замечание 4. Пусть функции h_1, h_2 определены на $[0,1]^{n^2}$ и $h_1 \leqslant h_2$. Пусть Λ - произвольное множество наборов из n мер. Тогда

$$\inf_{\vec{\mu}\in\Lambda} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} h_1(\vec{\mu}(\vec{C})) \leqslant \inf_{\vec{\mu}\in\Lambda} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} h_2(\vec{\mu}(\vec{C})),$$
$$\sup_{\vec{\mu}\in\Lambda} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} h_1(\vec{\mu}(\vec{C})) \leqslant \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} h_2(\vec{\mu}(\vec{C})).$$

Далее, зафиксируем набор из n мер $(\mu_1, ..., \mu_n) \in D(\vec{r})$ и разбиение $\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)$. Заметим, что $n \cdot \min_i(\mu_i(C_i)) \leqslant \sum_i \mu_i(C_i)$, причем неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда $\mu_1(C_1) = \mu_2(C_2) = ... = \mu_n(C_n)$. Далее, $\sum_i \mu_i(C_i) \leqslant n - 1 + \min_i(\mu_i(C_i))$, так как среди чисел $\mu_i(C_i)$ есть минимальное, а остальные не превосходят единицы. При этом неравенство превращается в равенство, если $\mu_i(C_i) = 1$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. В силу замечания 4 имеем: $n\underline{R}^{\min} \leqslant \underline{R}^{+} \leqslant n - 1 + \underline{R}^{\min}$, т.е. $\underline{R}^{+} + 1 - n \leqslant \underline{R}^{\min} \leqslant \frac{\underline{R}^{+}}{n}$. Аналогично получаем: $\bar{R}^{+} + 1 - n \leqslant \bar{R}^{\min} \leqslant \frac{\bar{R}^{+}}{n}$.

Полученные неравенства можно несколько усилить. В самом деле, фиксируем такие числа j и k, что $1 \leqslant j, k \leqslant n$, $j < k$. Тогда $\mu_j(C_j) + \mu_j(C_k) \leqslant 1$, $\mu_k(C_j) + \mu_k(C_k) \leqslant 1$, $|\mu_j(C_j) - \mu_k(C_j)| + |\mu_j(C_k) - \mu_k(C_k)| \leqslant 2r_{jk}$, откуда в силу леммы 5 имеем: $\mu_j(C_j) + \mu_k(C_k) \leqslant 1 + r_{jk}$.

Далее, пусть $\min_i \mu_i(C_i) = \mu_{i_0}(C_{i_0}) = \alpha$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(C_i) = \alpha + \sum_{i\neq i_0} \mu_i(C_i).$$

Рассмотрим все меры от 1-й до n-й, исключая i_0-ю. Если n нечетно, то все их можно разбить на пары. Если n четно, то исключим не только i_0-ю меру, но и еще одну (любую) меру, тогда оставшиеся можно разбить на пары. Отсюда (в силу соотношения $\mu_j(C_j) + \mu_k(C_k) \leqslant 1 + r_{jk}$) получаем, что если n нечетно, то

$$\sum_{i\neq i_0} \mu_i(C_i) \leqslant \frac{n-1}{2} \cdot \max_{i,j:i<j}(1 + r_{ij}),$$

а если n четно, то

$$\sum_{i\neq i_0} \mu_i(C_i) \leqslant \frac{n-2}{2} \cdot \max_{i,j:i<j}(1 + r_{ij}) + 1.$$

Следовательно,

$$\sum_{i\neq i_0}\mu_i(C_i)\leqslant(\frac{n}{2}-1)(1+\max_{i<j}r_{ij})+1+\frac{(\max_{i<j}r_{ij}-1)}{2}\cdot(n\mod 2).$$

Значит, $\sum_{i=1}^{n}\mu_i(C_i)\leqslant\min_i\mu_i(C_i)+\delta$, где

$$\delta:=\left(\frac{n}{2}-1\right)(1+\max_{i<j}r_{ij})+1+\frac{(\max_{i<j}r_{ij}-1)}{2}\cdot(n\mod 2).$$

Поэтому

$$\underline{R}^{+}-\delta\leqslant\underline{R}^{\min}\leqslant\frac{\underline{R}^{+}}{n},$$
$$\bar{R}^{+}-\delta\leqslant\bar{R}^{\min}\leqslant\frac{\bar{R}^{+}}{n}.$$

Далее, для фиксированного набора мер $\vec{\mu}$ и разбиения $\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)$ рассмотрим величину $\alpha:=\min_{i\neq j}(\mu_i(C_i)-\mu_i(C_j))$, тогда при всех $1\leqslant i\leqslant n$ выполнены следующие соотношения:

$$\sum_j(\mu_i(C_i)-\mu_i(C_j))=\sum_{j:j\neq i}(\mu_i(C_i)-\mu_i(C_j))\geqslant(n-1)\alpha.$$

При этом $\sum_j\mu_i(C_j)=1$. Поэтому $n\cdot\mu_i(C_i)-1\geqslant(n-1)\alpha$, $\mu_i(C_i)\geqslant\frac{(n-1)\alpha+1}{n}$. Значит, $\min_i\mu_i(C_i)\geqslant\frac{(n-1)\alpha+1}{n}$ и $\sum_i\mu_i(C_i)\geqslant(n-1)\alpha+1$.

Далее, заметим, что для любых $1\leqslant i,j\leqslant n$ выполняется следующее соотношение: $0\leqslant\mu_i(C_j)\leqslant 1$, поэтому $-1\leqslant\mu_i(C_i)-\mu_i(C_j)\leqslant 1$. Значит, $-1\leqslant\alpha\leqslant 1$.

Итак, мы получили, что $\min_i\mu_i(C_i)\geqslant\frac{(n-1)\alpha+1}{n}$, $\sum_i\mu_i(C_i)\geqslant(n-1)\alpha+1$, причем, как несложно видеть, если $\alpha\geqslant\frac{-1}{n-1}$, то оба неравенства превращаются в равенства при $\mu_i(C_i)=\frac{(n-1)\alpha+1}{n}$, $\mu_i(C_j)=\frac{1-\alpha}{n}$, $i\neq j$ (при таком α величины $\frac{(n-1)\alpha+1}{n}$ и $\frac{1-\alpha}{n}$, очевидно, попадают в отрезок $[0,1]$). Значит, в силу замечания 4 получаем: $\underline{R}^{\min}\geqslant\frac{\underline{R}^{\Delta}(n-1)+1}{n}$, $\underline{R}^{+}\geqslant\underline{R}^{\Delta}(n-1)+1$, т.е.

$$\underline{R}^{\Delta}\leqslant\frac{n\underline{R}^{\min}-1}{n-1},\quad\underline{R}^{\Delta}\leqslant\frac{\underline{R}^{+}-1}{n-1}.$$

Аналогично получаем:

$$\bar{R}^{\Delta}\leqslant\frac{n\bar{R}^{\min}-1}{n-1},\quad\bar{R}^{\Delta}\leqslant\frac{\bar{R}^{+}-1}{n-1}.$$

Далее, пусть, как и ранее, $\alpha := \min_{i \neq j}(\mu_i(C_i) - \mu_i(C_j))$. Значит, найдутся такие номера $i_0 \neq j_0$, что $\mu_{i_0}(C_{i_0}) - \mu_{i_0}(C_{j_0}) = \alpha$. Несложно видеть (в силу соображений, изложенных выше), что $\sum_i \mu_i(C_i) \leqslant \delta + \mu_{i_0}(C_{i_0})$. Далее, $1 = \sum_i \mu_{i_0}(C_i) = \mu_{i_0}(C_{i_0}) + \mu_{i_0}(C_{j_0}) + \varepsilon$, где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. При этом $\mu_{i_0}(C_{i_0}) - \mu_{i_0}(C_{j_0}) = \alpha$. Значит, $\mu_{i_0}(C_{i_0}) = \frac{\alpha+1-\varepsilon}{2} \leqslant \frac{1+\alpha}{2}$. Поэтому $\sum_i \mu_i(C_i) \leqslant \delta + \frac{\alpha+1}{2}$ и $\min_i(\mu_i(C_i)) \leqslant \frac{1+\alpha}{2}$. Неравенства превращаются в равенства при $\mu_1(C_1) = \frac{1+\alpha}{2}$, $\mu_1(C_2) = \frac{1-\alpha}{2}$, $\mu_1(C_j) = 0$, $3 \leqslant j \leqslant n$, $\mu_i(C_i) = 1$ для $2 \leqslant i \leqslant n$ и $\mu_i(C_j) = 0$ для всех $1 \leqslant j \leqslant n$: $j \neq i$, $2 \leqslant i \leqslant n$. Значит, (в силу утверждения 4)

$$\underline{R}^+ \leqslant \delta + \frac{1 + \underline{R}^\Delta}{2}, \quad \underline{R}^{\min} \leqslant \frac{1 + \underline{R}^\Delta}{2}.$$

Аналогично получаем, что

$$\bar{R}^+ \leqslant \delta + \frac{1 + \bar{R}^\Delta}{2}, \quad \bar{R}^{\min} \leqslant \frac{1 + \bar{R}^\Delta}{2}.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\underline{R}^+ - \delta \leqslant \underline{R}^{\min} \leqslant \frac{\underline{R}^+}{n}, \quad \bar{R}^+ - \delta \leqslant \bar{R}^{\min} \leqslant \frac{\bar{R}^+}{n},$$
$$\underline{R}^\Delta(n-1) + 1 \leqslant \underline{R}^+ \leqslant \frac{2\delta + 1 + \underline{R}^\Delta}{2}, \quad \bar{R}^\Delta(n-1) + 1 \leqslant \bar{R}^+ \leqslant \frac{2\delta + 1 + \bar{R}^\Delta}{2},$$
$$2\underline{R}^{\min} - 1 \leqslant \underline{R}^\Delta \leqslant \frac{n\underline{R}^{\min} - 1}{n-1}, \quad 2\bar{R}^{\min} - 1 \leqslant \bar{R}^\Delta \leqslant \frac{n\bar{R}^{\min} - 1}{n-1}.$$

Несложно видеть, что полученная система неравенств эквивалентна системе неравенств из теоремы 8. Тем самым, теорема 8 доказана. □

Следствие 1. *При $n = 3$ выполнены следующие соотношения:*

$$\underline{R}^+ - 1 - r^{(3)} \leqslant \underline{R}^{\min} \leqslant \frac{\underline{R}^+}{3}, \quad \bar{R}^+ - 1 - r^{(3)} \leqslant \bar{R}^{\min} \leqslant \frac{\bar{R}^+}{3},$$
$$2\underline{R}^+ - 3 - 2r^{(3)} \leqslant \underline{R}^\Delta \leqslant \frac{\underline{R}^+ - 1}{2}, \quad 2\bar{R}^+ - 3 - 2r^{(3)} \leqslant \bar{R}^\Delta \leqslant \frac{\bar{R}^+ - 1}{2},$$
$$2\underline{R}^{\min} - 1 \leqslant \underline{R}^\Delta \leqslant \frac{3\underline{R}^{\min} - 1}{2}, \quad 2\bar{R}^{\min} - 1 \leqslant \bar{R}^\Delta \leqslant \frac{3\bar{R}^{\min} - 1}{2}.$$

1.4.2 Доказательство теоремы 2 о точных формулах для экстремальных значений f_Δ для трех мер

Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда $n = 3$. Напомним, что по определению

$$\bar{R}^\Delta = \sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} \min_{1\leqslant i,j\leqslant 3,\ i\neq j} f_\Delta(\vec{\mu}(\vec{C})) =$$
$$= \sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} \min_{1\leqslant i,j\leqslant 3,\ i\neq j} (\mu_i(C_i) - \mu_i(C_j)).$$

Ниже мы найдем значение величины $\bar{R}^\Delta$ при некоторых дополнительных ограничениях.

Итак, нами было доказано, что $\bar{R}^\Delta \leqslant \frac{\bar{R}^+-1}{2}$. Заметим, что если существуют такая тройка мер $\{\tilde{\mu}_i\}_{i=1}^3$ и разбиение $\left\{\tilde{C}_i\right\}_{i=1}^3 \in \mathcal{C}(\Omega)$, что $\tilde{\mu}_i(\tilde{C}_i) - \tilde{\mu}_i(\tilde{C}_j) = \frac{\bar{R}^+-1}{2}$ для всех $1 \leqslant i,j \leqslant 3$, $i \neq j$, то $\bar{R}^\Delta = \frac{\bar{R}^+-1}{2}$. В самом деле, в этом случае

$$\frac{\bar{R}^+-1}{2} \geqslant \bar{R}^\Delta = \sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} \min_{1\leqslant i,j\leqslant n,\ i\neq j} (\mu_i(C_i) - \mu_i(C_j)) \geqslant$$
$$\geqslant \tilde{\mu}_i(\tilde{C}_i) - \tilde{\mu}_i(\tilde{C}_j) = \frac{\bar{R}^+-1}{2},$$

откуда $\bar{R}^\Delta = \frac{\bar{R}^+-1}{2}$. Сформулированному выше условию на тройку мер $\{\tilde{\mu}_i\}_{i=1}^3$ и разбиение $\left\{\tilde{C}_i\right\}_{i=1}^3 \in \mathcal{C}(\Omega)$ можно придать более удобный вид, как показывает следующая лемма.

Лемма 6. *Для выполнения равенств* $\tilde{\mu}_i(\tilde{C}_i) - \tilde{\mu}_i(\tilde{C}_j) = \frac{\bar{R}^+-1}{2}$ *при всех* $1 \leqslant i,j \leqslant 3$, $i \neq j$ *необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия:* $\tilde{\mu}_i(\tilde{C}_i) = \frac{\bar{R}^+}{3}$, $\tilde{\mu}_i(\tilde{C}_j) = \frac{1}{2} - \frac{\bar{R}^+}{6}$, $1 \leqslant i,j \leqslant 3$, $i \neq j$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть $\tilde{\mu}_i(\tilde{C}_i) - \tilde{\mu}_i(\tilde{C}_j) = \frac{\bar{R}^+-1}{2}$, следовательно, для $j \neq i$ имеем: $\tilde{\mu}_i(\tilde{C}_j) = \tilde{\mu}_i(\tilde{C}_i) - \frac{\bar{R}^+-1}{2} =: b_i$, но $\sum_{j=1}^3 \tilde{\mu}_i(\tilde{C}_j) = 1$, поэтому $2b_i + \tilde{\mu}_i(\tilde{C}_i) = 1$. Значит, $b_i = \frac{1-\tilde{\mu}_i(\tilde{C}_i)}{2}$. Следовательно, $\frac{\bar{R}^+-1}{2} = \tilde{\mu}_i(\tilde{C}_i) - \tilde{\mu}_i(\tilde{C}_j) = \tilde{\mu}_i(\tilde{C}_i) - \frac{1-\tilde{\mu}_i(\tilde{C}_i)}{2}$, поэтому $3\tilde{\mu}_i(\tilde{C}_i) - 1 = \bar{R}^+ - 1$, то есть $\tilde{\mu}_i(\tilde{C}_i) = \frac{\bar{R}^+}{3}$. Наконец, $b_i = \frac{1-\tilde{\mu}_i(\tilde{C}_i)}{2} = \tilde{\mu}_i(\tilde{C}_j)$ для $i \neq j$, поэтому $\tilde{\mu}_i(\tilde{C}_j) = \frac{1}{2} - \frac{\bar{R}^+}{6}$, $1 \leqslant i,j \leqslant 3$, $i \neq j$. □

Заметим, что из определения величины $\bar{R}^+$ сразу следует, что $0 \leqslant \bar{R}^+ \leqslant 3$, поэтому $0 \leqslant \frac{\bar{R}^+}{3} \leqslant 1$ и $0 \leqslant \frac{1}{2} - \frac{\bar{R}^+}{6} \leqslant 1$.

Итак, для того, чтобы доказать равенство $\bar{R}^\Delta = \frac{\bar{R}^+ - 1}{2}$, достаточно найти такую $\vec{r}$-согласованную тройку $\tilde{\mu}_i$ мер на (Ω, Σ) и разбиение $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3$, что $\tilde{\mu}_i(\tilde{C}_i) = \frac{\bar{R}^+}{3}$, $\tilde{\mu}_i(\tilde{C}_j) = \frac{1}{2} - \frac{\bar{R}^+}{6}$, $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, $i \neq j$. Несложно видеть, что в этом случае $\sum_i \tilde{\mu}_i(\tilde{C}_i) = \bar{R}^+$, поэтому задача о построении данной тройки мер $\{\tilde{\mu}_i\}_{i=1}^3$ и разбиения $\left\{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3\right\}$ оказывается тесно связанной с теоремой 1.

Нам потребуются обозначения Λ_6, ϕ_6 и N_6 (см. стр. 28–30), введенные в доказательстве теоремы 1. В ходе доказательства теоремы 6 (в предположении о наличии в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) по крайней мере 18 непустых попарно не пересекающихся множеств) были установлены следующие соотношения:

$$\bar{R}^+ = \sup_{\vec{x} \in N_6} \sum_{i=1}^{3} \left(x_{ijk}^{(i)} + x_{ikj}^{(i)} \right), \quad \underline{R}^+ = \inf_{\vec{x} \in N_6} \sum_{i=1}^{3} \left(x_{ijk}^{(i)} + x_{ikj}^{(i)} \right),$$

где $(ijk) \in S_3$. При этом в замечании 2 отмечено, что формулы для величин $\bar{R}^+$ и $\underline{R}^+$ остаются в силе даже в рамках более слабого предположения о наличии в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) по крайней мере 6 непустых попарно не пересекающихся множеств. Далее, в силу биективности отображения ϕ_6 получаем, что $\bar{R}^+ = \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} \sum_{i=1}^{3} (\mu_i(ijk) + \mu_i(ikj))$. Положим по определению $C_i^* := (ijk) \bigsqcup (ikj)$, $(ijk) \in S_3$. Тогда $\vec{C}^* := \{C_1^*, C_2^*, C_3^*\}$ - разбиение пространства S_3 и

$$\bar{R}^+ = \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} \sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i^*) = \sup_{\vec{\mu} \in \Lambda_6} f_+(\vec{\mu}(\vec{C}^*)). \tag{1.19}$$

Данные соотношения потребуются в дальнейшем. (Напомним, что здесь и далее предполагается, что в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 6 непустых попарно не пересекающихся множеств.) Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть K_σ $(\sigma \in S_3)$ - 6 непустых попарно не пересекающихся множеств σ-алгебры измеримого пространства (Ω, Σ). Предположим, что найдется такая $\vec{r}$-согласованная тройка мер $\{\mu_i^*\}_{i=1}^3 \in \Lambda_6$, что $\mu_i^*(C_i^*) = \frac{\bar{R}^+}{3}$, $\mu_i^*(C_j^*) = \frac{1}{2} - \frac{\bar{R}^+}{6}$, $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, $i \neq j$. Тогда $\bar{R}^\Delta = \frac{\bar{R}^+ - 1}{2}$.*

Доказательство. Так как $K_\sigma \neq \varnothing$, $\sigma \in S_3$, то существуют такие элементы v_σ, $\sigma \in S_3$, что $v_\sigma \in K_\sigma$. Для $\vec{r}$-согласованной тройки $\vec{\mu}^*$ мер на S_3 построим соответствующую тройку $\vec{\mu}'$ мер на Ω следующим образом: $\mu'_i(A) = \sum_{\sigma: v_\sigma \in A} \mu^*_i(\sigma)$ при любом $A \in \Sigma$. Пусть $C'_1 := K_{123} \bigsqcup K_{132}$, $C'_2 := K_{213} \bigsqcup K_{231}$, $C'_3 := \Omega \backslash (C'_1 \bigsqcup C'_2)$. Тогда $\vec{C}' := \{C'_1, C'_2, C'_3\} \in \mathcal{C}(\Omega)$ и $f_\Delta(\vec{\mu}'(\vec{C}')) = f_\Delta(\vec{\mu}^*(\vec{C}^*))$, причем $\vec{\mu}' \in D(\vec{r})$. Значит,

$$\frac{\bar{R}^+ - 1}{2} \geqslant \bar{R}^\Delta = \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f_\Delta(\vec{\mu}(\vec{C})) \geqslant f_\Delta(\vec{\mu}'(\vec{C}')) =$$

$$= f_\Delta(\vec{\mu}^*(\vec{C}^*)) = \min_{1 \leqslant i,j \leqslant n,\ i \neq j} (\mu^*_i(C^*_i) - \mu_i(C^*_j)) = \frac{\bar{R}^+ - 1}{2}.$$

Поэтому $\bar{R}^\Delta = \frac{\bar{R}^+ - 1}{2}$, что и требовалось доказать. □

Заметим, что в условиях предыдущей леммы фигурирует тройка мер из Λ_6, в то время как утверждение леммы касается экстремальных значений функционалов на исходном пространстве Ω.

Мы получили, что для того, чтобы выполнялось равенство $\bar{R}^\Delta = \frac{\bar{R}^+ - 1}{2}$, достаточно найти такую $\vec{r}$-согласованную тройку мер $\vec{\mu}^* \in \Lambda_6$, что $\mu^*_i(C^*_i) = \frac{\bar{R}^+}{3}$, $\mu^*_i(C^*_j) = \frac{1}{2} - \frac{\bar{R}^+}{6}$, $1 \leqslant i,j \leqslant 3$, $i \neq j$. Несложно видеть, что в этом случае $\sum_i \mu^*_i(C^*_i) = \bar{R}^+$. В дальнейшем мы (делая по мере надобности дополнительные предположения относительно $\vec{r}$) найдем нужную тройку мер $\vec{\mu}^* \in \Lambda_6$ среди тех троек мер из Λ_6, для которых $\sum_i \mu_i(C^*_i) = \bar{R}^+$ (тот факт, что меры, для которых $\sum_i \mu_i(C^*_i) = \bar{R}^+$, существуют, следует из замечания 3, стр.40). Теперь перейдем к рассмотрению множества N_6, которое биективным образом отображается на Λ_6.

Напомним определение величин $\varepsilon_{ijk}(\vec{x})$, $\delta_{ijk}(\vec{x})$, $t_{ijk}(\vec{x})$: $x_\sigma^{(\sigma_1)} = x_\sigma^{(\sigma_2)} + \delta_\sigma(\vec{x})$, $x_\sigma^{(\sigma_2)} = x_\sigma^{(\sigma_3)} + \varepsilon_\sigma(\vec{x})$, $x_\sigma^{(\sigma_3)} = t_\sigma(\vec{x})$, $\sigma \in S_3$, причем в дальнейшем вместо $\varepsilon_{ijk}(\vec{x})$, $\delta_{ijk}(\vec{x})$, $t_{ijk}(\vec{x})$ будем писать ε_{ijk}, δ_{ijk}, t_{ijk} соответственно. В новых переменных множество N_6 описывается условиями (1.9)–(1.15). При этом $\bar{R}^+ = \max_{N_6}(\sum_{\sigma \in S_3}(t_\sigma + \varepsilon_\sigma + \delta_\sigma))$. Пусть, как и ранее, $t = \sum_{\sigma \in S_3} t_\sigma$, $\delta_i := \delta_{ikl} + \delta_{ilk}$, $\varepsilon_i := \varepsilon_{kli} + \varepsilon_{lki}$, $(ikl) \in S_3$, $r_i = r_{12} + r_{13} + r_{23} - 2r_{kl} \geqslant 0$. Без ограничения общности будем считать, что $r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3$ (это возможно, так как интересующие нас величины $\bar{R}^+$ и $\bar{R}^\Delta$ инвариантны относительно перестановок мер). Другими словами, будем считать, что изначально меры были перенумерованы так, чтобы выполнялось соотношение $r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3$.

Выразив всё через ε_1, мы ранее получили формулы

$$\delta_i = r_1 + \varepsilon_i - 2\varepsilon_1, \quad t = 1 - \frac{r_2 + r_3}{2} - \varepsilon_1,$$
$$\varepsilon_1 \in \big[\big(\frac{r_1 - r_3}{2}, \min(\frac{r_1 + r_3}{2}, 1 - \frac{r_2 + r_3}{2})\big],$$
$$\bar{R} = r_{12} + r_{13} + r_{23} + \max_{\varepsilon_1} t(\varepsilon_1) = r_1 + r_2 + r_3 + 1 - \frac{r_1 + r_2}{2} =$$
$$= 1 + \min(r_{13} + r_{23}, r_{12} + r_{23}, r_{12} + r_{13}).$$

Теперь мы будем строить тройку мер из Λ_6, которая удовлетворяет соотношениям

$$\mu_i(C_i^*) = \frac{\bar{R}^+}{3}, \ \mu_i(C_j^*) = \frac{1}{2} - \frac{\bar{R}^+}{6}, \ 1 \leqslant i, j \leqslant 3, \ i \neq j, \tag{1.20}$$

чтобы впоследствии воспользоваться леммой 7.

Заметим, что $\sum_i \mu_i(C_i^*) = \bar{R}^+$, значит, если по тройке мер построить (с помощью отображения ϕ_6) соответствующий вектор из N_6, то (в рамках введенных выше обозначений) $\varepsilon_1 = \frac{r_1 - r_3}{2}$. Далее, $\varepsilon_i = \varepsilon_1 + \frac{r_i - r_1}{2}$, $\delta_i = r_i - \varepsilon_i$. Поэтому $\varepsilon_i = \frac{r_i - r_3}{2}$, $\delta_i = \frac{r_i + r_3}{2}$ и $\sum_{\sigma \in S_3} t_\sigma = t = 1 - \frac{r_2 + r_3}{2} - \varepsilon_1 = 1 - \frac{r_1 + r_2}{2}$. Напомним, что $\delta_i = \delta_{ikl} + \delta_{ilk}$. Рассмотрим условие (1.20). Во-первых, $\mu_1(C_1^*) = \mu_1(123) + \mu_1(132) = t_{123} + \varepsilon_{123} + \delta_{123} + t_{132} + \delta_{132} + \varepsilon_{132}$. Далее, $\mu_1(C_2^*) = \mu_1(213) + \mu_1(231) = t_{213} + \varepsilon_{213} + t_{231}$. Аналогично расписываются остальные равенства в (1.20). Введем новые переменные $a = t_{123} + t_{132}$, $b = t_{213} + t_{231}$, $c = t_{312} + t_{321}$. Напомним, что $\bar{R}^+ = r_{12} + r_{13} + r_{23} + \max_K t$, причем легко проверить, что $r_1 + r_2 + r_3 = r_{12} + r_{13} + r_{23}$. Несложно видеть, что теперь достаточно найти такие неотрицательные числа a, b, c, ε_{ijk}, δ_i, для которых

$$\frac{r_i - r_3}{2} = \sum_{j,k:(j,k,i) \in S_3} \varepsilon_{jki}, \ \delta_i = \frac{r_i + r_3}{2}, \ 1 \leqslant i \leqslant 3, \tag{1.21}$$

$$a + \delta_1 + \varepsilon_{123} + \varepsilon_{132} = b + \delta_2 + \varepsilon_{213} + \varepsilon_{231} = c + \delta_3 + \varepsilon_{312} + \varepsilon_{321} = \frac{\bar{R}^+}{3}, \tag{1.22}$$

$$b + \varepsilon_{213} = c + \varepsilon_{312} = a + \varepsilon_{123} = c + \varepsilon_{321} = a + \varepsilon_{132} = b + \varepsilon_{231} = \frac{1}{2} - \frac{\bar{R}^+}{6}, \tag{1.23}$$

$$a + b + c = 1 - \frac{r_1 + r_2}{2}, \tag{1.24}$$

$$\bar{R}^+ = 1 + \frac{r_1 + r_2 + 2r_3}{2}. \tag{1.25}$$

Если мы (при некоторых ограничениях на r_{ij}) найдем такие неотрицательные числа a, b, c, ε_{ijk}, δ_i, то с их помощью (а также с помощью отображения ϕ_6^{-1})

можно будет построить тройку мер $\vec{\mu}^* \in \Lambda_6$, для которых $\min_{i\neq j}(\mu_i^*(C_i^*) - \mu_i^*(C_j^*))$, откуда следует, что $\bar{R}^\Delta = \frac{\bar{R}^+-1}{2}$ (если выполнены условия леммы 7).

Заметим, что (1.24) следует из (1.21), (1.22) и (1.25). В самом деле, складывая равенства из (1.22) получаем, что $a+b+c+\sum_{\sigma\in S_3}\delta_\sigma+\sum_{\sigma\in S_3}\varepsilon_\sigma = \bar{R}^+$, т.е. $a+b+c = \bar{R}^+ - \sum_{\sigma\in S_3}(\delta_\sigma+\varepsilon_\sigma)$, но в силу (1.21) имеем: $\delta_\sigma+\varepsilon_\sigma = \sum_i r_i$, откуда в силу (1.25) получаем, что $a+b+c = \bar{R}^+ - \sum_i r_i = 1+\frac{r_1+r_2+2r_3}{2} - \sum_i r_i = 1 - \frac{r_1+r_2}{2}$.

Далее, $\varepsilon_3 = 0$, т.е. $\varepsilon_{123}+\varepsilon_{213} = 0$, причем $\varepsilon_{123}, \varepsilon_{213} \geqslant 0$. Поэтому $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{213} = 0$. Подставив это в (1.23) находим, что $a = b$. Значит, $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{231} = 0$ и $\varepsilon_{312} = \varepsilon_{321}$. С учетом (1.21) получаем, что $\varepsilon_{312} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{r_1-r_3}{2} = \frac{r_2-r_3}{2}$. Поэтому $r_1 = r_2$. Значит, $\delta_1 = \delta_2 = \frac{r_1+r_3}{2}$. Далее, $a = b = c+\varepsilon_1 = \frac{1}{2} - \frac{\bar{R}^+}{6}$. Из того, что $r_1 = r_2$, следует, что $\bar{R}^+ = 1 + \frac{r_1+r_2+2r_3}{2} = 1 + r_1 + r_3$. Таким образом, $a = b = \frac{1}{3} - \frac{r_1+r_3}{6}$, значит, $c = a - \varepsilon_1 = \frac{2-r_1-r_3}{6} - \frac{r_1-r_3}{2} = \frac{1-2r_1+r_3}{3}$. Но a, b, c должны быть неотрицательными, при этом $a = b = c + \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 \geqslant 0$. Значит, если $c \geqslant 0$, то $a = b \geqslant 0$.

Итак, пусть выполнены следующие условия: $r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3$, $r_1 = r_2$, $\frac{1-2r_1+r_3}{3} \geqslant 0$. Тогда, положив $a = b = \frac{1}{3} - \frac{r_1+r_3}{6}$, $c = \frac{1-2r_1+r_3}{3}$, $t_{123} = t_{132} = \frac{a}{2}$, $t_{213} = t_{231} = \frac{b}{2}$, $t_{312} = t_{321} = \frac{c}{2}$, $\varepsilon_{1jk} = \varepsilon_{2jk} = 0$, $\varepsilon_{312} = \varepsilon_{321} = \frac{r_1-r_3}{2}$, $\delta_i = \frac{r_i+r_3}{2}$, $\delta_{ijk} = \frac{\delta_i}{2}$, мы (как несложно проверить) построим искомые меры μ_i^* (с помощью отображения ϕ_6^{-1}). Нетрудно убедиться, что в этом случае $\min_{i\neq j}(\mu_i^*(C_i^*) - \mu_i^*(B_j^*)) = \frac{\bar{R}^+}{3}$, что и требовалось. Например, $\mu_1^*(C_1^*) - \mu_1^*(C_2^*) = t_{123}+t_{132}+\varepsilon_{123}+\varepsilon_{132}+\delta_{123}+\delta_{132}-t_{213}-t_{231}-\varepsilon_{213} = \delta_1 = \frac{\bar{R}^+-1}{2}$ (так как $\delta_1 = \frac{r_1+r_3}{2}$ и $\bar{R}^+ = 1+r_1+r_3$).

Другими словами, если $r_1 = r_2 \geqslant r_3$ и $r_1 \leqslant \frac{r_3+1}{2}$, то (в условиях леммы 7) $\bar{R}^\Delta = \frac{\bar{R}^+-1}{2}$. Далее, напомним, что

$$r_1 = r_{12}+r_{13}-r_{23},\ r_2 = r_{12}+r_{23}-r_{13},\ r_3 = r_{13}+r_{23}-r_{12}.$$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 8. *Для того чтобы $r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3$, необходимо и достаточно, чтобы $r_{23} \leqslant r_{13} \leqslant r_{12}$.*

Доказательство. Необходимость очевидна: если $r_1 \geqslant r_2$, то $r_{12}+r_{13}-r_{23} \geqslant r_{12}+r_{23}-r_{13}$, поэтому $r_{13} \geqslant r_{23}$. Аналогично $r_{12} \geqslant r_{13}$. Докажем достаточность. Пусть $r_{23} \leqslant r_{13} \leqslant r_{12}$. Так как $r_{ij} = \frac{r_i+r_j}{2}$, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, то

$$\frac{r_1+r_2}{2} \geqslant \frac{r_1+r_3}{2} \geqslant \frac{r_2+r_3}{2}.$$

Отсюда следует, что $r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3$, что и требовалось доказать. $\square$

Условие $r_1 = r_2$ равносильно тому, что $r_{13} = r_{23}$, и если оно выполнено, то $r_1 = r_{12}$, $r_3 = 2r_{13} - r_{12}$. Таким образом, условия $r_1 = r_2 \geqslant r_3$ и $r_1 \leqslant \frac{r_3+1}{2}$ равносильны тому, что $r_{12} \geqslant r_{13} = r_{23}$ и $r_{12} \leqslant \frac{1+2r_{13}-r_{12}}{2}$.

Другими словами, если $r_{12} \geqslant r_{13} = r_{23}$, $r_{12} \leqslant \frac{1+2r_{13}}{3}$, то $\bar{R}^{\Delta} = \frac{\bar{R}^{+}-1}{2}$.

Таким образом, теорема 2 доказана при дополнительном условии: меры переупорядочены так, что $r_{23} \leqslant r_{13} \leqslant r_{12}$. Если вернуть мерам исходный порядок, то величина $\bar{R}^{\Delta}$ не изменится. Тем самым теорема 2 полностью доказана.

1.4.3 Доказательство теоремы 3 о точных формулах для экстремальных значений $f_{\min}$ для трех мер

Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда $n = 3$. Рассмотрим величину $\bar{R}^{\min} := \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} \min_{1 \leqslant i \leqslant 3} \mu_i(C_i)$, которая соответствует вероятности ошибки «в худшем случае».

Напомним, что $\bar{R}^{\min} \leqslant \frac{\bar{R}^{+}}{3}$. Найдем достаточные условия (на числа r_{ij}), при которых данное неравенство превращается в равенство: $\bar{R}^{\min} = \frac{\bar{R}^{+}}{3}$.

Для того чтобы выполнялось равенство $\bar{R}^{\min} = \frac{\bar{R}^{+}}{3}$, достаточно (в силу соображений, аналогичных соображениям из леммы 7) указать такую тройку мер $\vec{\mu}* \in \Lambda_6$, что $\min_i \mu_i^*(\tilde{C}_i^*) = \frac{\bar{R}^{+}}{3}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant 3$, где вновь $C_i^* := (ijk) \bigsqcup (ikj)$, $(ijk) \in S_3$ и $\vec{C}^* := \{C_1^*, C_2^*, C_3^*\}$.

Пусть, как и ранее, $r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3$. Построим такую $\vec{r}$-согласованную тройку мер $\vec{\mu}* \in \Lambda_6$, что

$$\mu_i^*(C_i^*) = \frac{\bar{R}^{+}}{3}, \ 1 \leqslant i \leqslant 3. \tag{1.26}$$

Тогда $\sum_i \mu_i^*(C_i^*) = \bar{R}^{+}$, поэтому (как и ранее) $\varepsilon_1 = \frac{r_1-r_3}{2}$. Значит (в рамках введенных выше обозначений), $\varepsilon_i = \varepsilon_1 + \frac{r_i-r_1}{2}$, $\delta_i = r_i + \varepsilon_i - 2\varepsilon_1$. Поэтому $\varepsilon_i = \frac{r_i-r_3}{2}$, $\delta_i = \frac{r_1+r_3}{2}$. $t = \sum_{\sigma \in S_3} t_\sigma = 1 - \frac{r_1+r_2}{2}$. Далее, $\mu_i^*(C_i^*) = \frac{\bar{R}^{+}}{3}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant 3$, при этом $\mu_1^*(C_1^*) = \mu_1^*(123) + \mu_1^*(132) = t_{123} + \varepsilon_{123} + \delta_{123} + t_{132} + \delta_{132} + \varepsilon_{132}$. Аналогично расписываются остальные равенства в (1.26). Как и ранее, введем переменные $a = t_{123} + t_{132}$, $b = t_{213} + t_{231}$, $c = t_{312} + t_{321}$. Таким образом, достаточно найти такие неотрицательные числа a, b, c, ε_{ijk}, δ_i, для которых

$$\frac{r_i - r_3}{2} = \sum_{j,k:(j,k,i)\in S_3} \varepsilon_{jki},\ \delta_i = \frac{r_i + r_3}{2},\ 1 \leqslant i \leqslant 3, \quad (1.27)$$

$$a + \delta_1 + \varepsilon_{123} + \varepsilon_{132} = b + \delta_2 + \varepsilon_{213} + \varepsilon_{231} = c + \delta_3 + \varepsilon_{312} + \varepsilon_{321} = \frac{\bar{R}^+}{3}, \quad (1.28)$$

$$a + b + c = 1 - \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad (1.29)$$

$$\bar{R}^+ = 1 + \frac{r_1 + r_2 + 2r_3}{2}. \quad (1.30)$$

Если мы (при некоторых ограничениях на r_{ij}) найдем такие неотрицательные числа a, b, c, ε_{ijk}, δ_i, то с их помощью (а также с помощью отображения ϕ_6^{-1}) можно будет построить тройку мер $\vec{\mu}^* \in \Lambda_6$, для которых $\min_i \mu_i^* = \frac{\bar{R}^+}{3}$, откуда (если в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 6 непустых попарно не пересекающихся множеств) следует, что $\bar{R}^{\min} \geqslant \frac{\bar{R}^+}{3}$. Заметим, что, как и ранее (см. стр. 50), (1.29) следует из (1.27), (1.28) и (1.30). Далее, $\varepsilon_3 = 0$, $\varepsilon_{123} + \varepsilon_{213} = 0$, $\varepsilon_{123}, \varepsilon_{213} \geqslant 0$. Поэтому $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{213} = 0$. В результате исключения $\bar{R}^+$ и δ_i получаем, что достаточно найти такие неотрицательные числа a, b, c, ε_{ijk}, для которых

$$a + \varepsilon_{132} = \frac{1}{3} - \frac{r_1}{3} + \frac{r_2}{6} - \frac{r_3}{6},\ b + \varepsilon_{231} = \frac{1}{3} - \frac{r_2}{3} + \frac{r_1}{6} - \frac{r_3}{6},$$
$$c + \varepsilon_{312} + \varepsilon_{321} = \frac{1}{3} + \frac{r_1}{6} + \frac{r_2}{6} - \frac{2r_3}{3},$$
$$\varepsilon_{132} + \varepsilon_{312} = \frac{r_2 - r_3}{2},\ \varepsilon_{231} + \varepsilon_{321} = \frac{r_1 - r_3}{2}.$$

Таким образом, достаточно найти такие числа $\varepsilon_{ijk} \geqslant 0$, для которых выполнены условия

$$\varepsilon_{132} \in \left[0, \frac{1}{3} - \frac{r_1}{3} + \frac{r_2}{6} - \frac{r_3}{6}\right],\ \varepsilon_{231} \in \left[0, \frac{1}{3} - \frac{r_2}{3} + \frac{r_1}{6} - \frac{r_3}{6}\right], \quad (1.31)$$

$$\varepsilon_{312} + \varepsilon_{321} \in \left[0, \frac{1}{3} + \frac{r_1}{6} + \frac{r_2}{6} - \frac{2r_3}{3}\right], \quad (1.32)$$

$$\varepsilon_{132} + \varepsilon_{312} = \frac{r_2 - r_3}{2},\ \varepsilon_{231} + \varepsilon_{321} = \frac{r_1 - r_3}{2}. \quad (1.33)$$

Теперь найдем условия на числа r_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, для которых можно подобрать $\varepsilon_{ijk} \geqslant 0$, удовлетворяющие условиям (1.31)-(1.33). В силу леммы 8 получаем, что $r_{23} \leqslant r_{13} \leqslant r_{12}$. Отсюда следует, что $\frac{1}{3} - \frac{r_2}{3} + \frac{r_1}{6} - \frac{r_3}{6} \geqslant 0$. В самом деле, $r_{23} \leqslant r_{13}$ и $r_{23} \leqslant 1$, поэтому $2r_{23} \leqslant 1 + r_{13}$, из чего следует, что $2 - 4r_{23} + 2r_{13} \geqslant$

0. Поэтому $2-2r_{12}-2r_{23}+2r_{13}+r_{12}+r_{13}-r_{23}-r_{13}-r_{23}+r_{12}\geqslant 0$. Значит, $2-2r_2+r_1-r_3\geqslant 0$ и потому $\frac{1}{3}-\frac{r_2}{3}+\frac{r_1}{6}-\frac{r_3}{6}\geqslant 0$.

Далее, для выполнения (1.31) необходимо, чтобы $\frac{1}{3}-\frac{r_1}{3}+\frac{r_2}{6}-\frac{r_3}{6}\geqslant 0$. Однако

$$\frac{1}{3}-\frac{r_1}{3}+\frac{r_2}{6}-\frac{r_3}{6}\geqslant 0 \Longleftrightarrow 2-2r_1+r_2-r_3\geqslant 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 2-2r_{12}-2r_{13}+2r_{23}+r_{12}+r_{23}-r_{13}-r_{13}-r_{23}+r_{12}\geqslant 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 2-4r_{13}+2r_{23}\geqslant 0 \Longleftrightarrow r_{13}\leqslant \frac{1+r_{23}}{2}.$$

Предположим, что $r_{13}\leqslant\frac{1+r_{23}}{2}$. Заметим, что $r_3=\min(r_1,r_2,r_3)\leqslant\frac{r_1+r_2+r_3}{3}=\frac{r_{12}+r_{13}+r_{23}}{3}\leqslant\frac{3}{3}=1$, поэтому $r_3\leqslant 1$. Значит, $\frac{1}{3}+\frac{r_1}{6}+\frac{r_2}{6}-\frac{2r_3}{3}\geqslant 0$, так как $2+r_1+r_2\geqslant 4r_3$ в силу того, что $r_1\geqslant r_3$, $r_2\geqslant r_3$ и $2\geqslant 2r_3$. Таким образом, правые части в соотношениях (1.31)–(1.33) неотрицательны (если $r_{13}\leqslant\frac{1+r_{23}}{2}$).

Лемма 9. *Если* $r_1+r_2\leqslant 1+r_3$, *то* $\frac{r_2-r_3}{2}\leqslant\frac{1}{3}-\frac{r_1}{3}+\frac{r_2}{6}-\frac{r_3}{6}$ *и* $\frac{r_1-r_3}{2}\leqslant\frac{1}{3}-\frac{r_2}{3}+\frac{r_1}{6}-\frac{r_3}{6}$. *Если* $r_1+r_2>1+r_3$, *то* $\frac{r_2-r_3}{2}>\frac{1}{3}-\frac{r_1}{3}+\frac{r_2}{6}-\frac{r_3}{6}$ *и* $\frac{r_1-r_3}{2}>\frac{1}{3}-\frac{r_2}{3}+\frac{r_1}{6}-\frac{r_3}{6}$.

Доказательство. Утверждение проверяется непосредственно. □

Пусть теперь $r_1+r_2\leqslant 1+r_3$. Тогда положим $\varepsilon_{132}=\frac{r_2-r_3}{2}$, $\varepsilon_{231}=\frac{r_1-r_3}{2}$. Значит, $\varepsilon_{312}=\varepsilon_{321}=0$, и (в силу леммы 9) мы нашли неотрицательные числа числа ε_{ijk}, удовлетворяющие условиям (1.31)-(1.33).

Пусть теперь $r_1+r_2>1+r_3$. Положим $\varepsilon_{132}=\frac{1}{3}-\frac{r_1}{3}+\frac{r_2}{6}-\frac{r_3}{6}$, $\varepsilon_{231}=\frac{1}{3}-\frac{r_2}{3}+\frac{r_1}{6}-\frac{r_3}{6}$. В силу леммы 9 выполнены неравенства $\varepsilon_{312}=\frac{r_2-r_3}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{r_1}{3}+\frac{r_2}{6}-\frac{r_3}{6}\right)>0$ и $\varepsilon_{321}=\frac{r_1-r_3}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{r_2}{3}+\frac{r_1}{6}-\frac{r_3}{6}\right)>0$. Теперь осталось проверить, что $\varepsilon_{312}+\varepsilon_{321}\leqslant\frac{1}{3}+\frac{r_1}{6}+\frac{r_2}{6}-\frac{2r_3}{3}$. В самом деле, $\frac{r_1+r_2}{2}=r_{12}\leqslant 1$, следовательно $\frac{r_1+r_2}{2}-r_3\leqslant 1-r_3$. Поэтому $\frac{r_2-r_3}{2}+\frac{r_1-r_3}{2}\leqslant\frac{1}{3}+\frac{r_1}{6}+\frac{r_2}{6}-\frac{2r_3}{3}+\left(\frac{1}{3}-\frac{r_1}{3}+\frac{r_2}{6}-\frac{r_3}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{r_2}{3}+\frac{r_1}{6}-\frac{r_3}{6}\right)$. Значит, $\varepsilon_{312}+\varepsilon_{321}\leqslant\frac{1}{3}+\frac{r_1}{6}+\frac{r_2}{6}-\frac{2r_3}{3}$. Подведем итог. Мы доказали, что если в σ-алгебре измеримого пространства (Ω,Σ) содержится по крайней мере 6 непустых попарно не пересекающихся множеств, если $r_{23}\leqslant r_{13}\leqslant r_{12}$ и $r_{13}\leqslant\frac{1+r_{23}}{2}$, то $\bar{R}^{\min}=\frac{\bar{R}^{+}}{3}$. Если вернуть мерам исходный порядок, то величина $\bar{R}^{\min}$ не изменится. Тем самым, теорема 3 полностью доказана.

Замечание 5. Объединив результаты теорем 1, 2 и 3, получаем, что если $r^{(1)}=r^{(2)}$, $r^{(3)}\leqslant\frac{2r^{(1)}+1}{3}$ (откуда, очевидно, следует, что $r^{(2)}\leqslant\frac{r^{(1)}+1}{2}$, так как $r^{(i)}\leqslant 1$ и $r^{(1)}=r^{(2)}$), то $2\bar{R}^{\Delta}+1=\bar{R}^{+}=3\bar{R}^{\min}=1+r^{(1)}+r^{(2)}$.

Пример 1. Пусть $n = 3$ и все $r_{ij} = r$, тогда $\bar{R}^{\Delta} = r$, $\bar{R}^{\min} = \frac{1+2r}{3}$, $\bar{R}^+ = 1+2r$, $\underline{R}^+ = \max(3r, 1+r)$.

1.4.4 Доказательство теоремы 7 о неравенствах для экстремальных значений f_+ при произвольном числе мер

Пусть выполнены условия теоремы 7, т.е. в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере $n!$ непустых попарно не пересекающихся множеств. Рассмотрим величины

$$\underline{R}_n^+ := \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f_+(\vec{\mu}(\vec{C})), \quad \bar{R}_n^+ := \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f_+(\vec{\mu}(\vec{C})).$$

Индекс n будем использовать, чтобы подчеркнуть отличие случая произвольного $n \geqslant 3$ от предыдущего случая (когда $n = 3$).

Выше (см. стр.47) было доказано, что если $n = 3$ и в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере $3!$ непустых попарно не пересекающихся множеств, то выполняются соотношения:

$$\underline{R}^+ = \sup_{\vec{x} \in N_p} \sum_{i=1}^{3} \left(x_{ijk}^{(i)} + x_{ikj}^{(i)} \right), \quad \bar{R}^+ = \sup_{\vec{x} \in N_p} \sum_{i=1}^{3} \left(x_{ijk}^{(i)} + x_{ikj}^{(i)} \right)$$

при $p = 3!$ (число $3!$ возникло в связи с наличием $3!$ перестановок в S_3). Однако, как несложно проверить, в доказательстве по существу нигде не использовалось, что $n = 3$ (доказательство проводилось в случае $n = 3$ только для наглядности), и потому совершенно аналогично получаем, что

$$\underline{R}_n^+ = \inf_{\vec{x} \in N_{n!}} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j_1,\ldots,j_{n-1} : (i,j_1,\ldots,j_{n-1}) \in S_n} x_{i,j_1,\ldots,j_{n-1}}^{i} \right),$$
$$\bar{R}_n^+ = \sup_{\vec{x} \in N_{n!}} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j_1,\ldots,j_{n-1} : (i,j_1,\ldots,j_{n-1}) \in S_n} x_{i,j_1,\ldots,j_{n-1}}^{i} \right),$$

где множество S_n определяется аналогично S_3, и множество $N_{n!}$ (аналогично

N_6) задано условиями

$$x^{(i_1)}_{i_1,i_2,\dots,i_n} \geqslant x^{(i_2)}_{i_1,i_2,\dots,i_n} \geqslant \dots \geqslant x^{(i_n)}_{i_1,i_2,\dots,i_n}, \quad (i_1,i_2,\dots,i_n) \in S_n,$$
$$2r_{ij} = \sum_{\sigma\in S_n} (x^{(i)}_\sigma - x^{(j)}_\sigma)(-1)^{I\left\{\sigma_i^{-1} > \sigma_j^{-1}\right\}},\ 1 \leqslant i < j \leqslant n,$$
$$\sum_{\sigma\in S_n} x^{(l)}_\sigma = 1, 0 \leqslant x^{(l)}_\sigma \leqslant 1, 1 \leqslant l \leqslant n,\ \sigma \in S_n.$$

При этом в силу биективности отображения $\phi_{n!}$ (естественным образом обобщающего отображение ϕ_6)

$$\underline{R}^+_n = \inf_{\vec{\mu}\in\Lambda_{n!}} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j_1,\dots,j_{n-1}:(i,j_1,\dots,j_{n-1})\in S_n} \mu_i(i\ j_1\ j_2\ \dots\ j_{n-1}) \right),$$
$$\bar{R}^+_n = \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_{n!}} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j_1,\dots,j_{n-1}:(i,j_1,\dots,j_{n-1})\in S_n} \mu_i(i\ j_1\ j_2\ \dots\ j_{n-1}) \right),$$

где множество $\Lambda_{n!}$ наборов из n мер на S_n определяется аналогично множеству Λ_6. Далее, введем новые переменные следующим образом:

$$\delta^1_{i_1,i_2,\dots,i_n} := x^{(i_n)}_{i_1,i_2,\dots,i_n},$$
$$\delta^2_{i_1,i_2,\dots,i_n} := x^{(i_{n-1})}_{i_1,i_2,\dots,i_n} - x^{(i_n)}_{i_1,i_2,\dots,i_n},$$
$$\dots$$
$$\delta^{n-1}_{i_1,i_2,\dots,i_n} := x^{(i_2)}_{i_1,i_2,\dots,i_n} - x^{(i_3)}_{i_1,i_2,\dots,i_n},$$
$$\delta^{n}_{i_1,i_2,\dots,i_n} := x^{(i_1)}_{i_1,i_2,\dots,i_n} - x^{(i_2)}_{i_1,i_2,\dots,i_n}.$$

Например, при $n = 3$ имеем: $\delta^1_\sigma = t_\sigma$, $\delta^2_\sigma = \varepsilon_\sigma$, $\delta^3_\sigma = \delta_\sigma$ ($\sigma \in S_3$). Тогда

$$\begin{cases} x^{(1)}_{123\dots n} = \delta^1_{123\dots n} + \delta^2_{123\dots n} + \dots + \delta^n_{123\dots n}, \\ x^{(2)}_{123\dots n} = \delta^1_{123\dots n} + \delta^2_{123\dots n} + \dots + \delta^{n-1}_{123\dots n}, \\ \dots \\ x^{(n-1)}_{123\dots n} = \delta^1_{123\dots n} + \delta^2_{123\dots n}, \\ x^{(n)}_{123\dots n} = \delta^1_{123\dots n}, \end{cases}$$

при этом аналогичные системы уравнений выполнены для всех $x^{(j)}_{i_1,i_2,\dots,i_n}$. Далее, аналогично уравнениям (1.9)-(1.15) для случая $n = 3$, получаем, что в общем случае множество $N_{n!}$ (в новых переменных) задается следующими условиями:

$$\begin{cases} 2r_{12} = ..., \\ ... \\ 2r_{n-1,n} = ..., \\ 1 = ..., \\ ... \\ 1 = ..., \\ \delta_\sigma^i \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ \sigma \in S_n. \end{cases}$$

Первые C_n^2 уравнений соответствуют условиям $\vec{r}$-согласованности набора из n мер (ср. с соотношениями (1.9)-(1.11) для случая $n = 3$), следующие n уравнений возникают из условий $\mu_i(S_n) = 1$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ (ср. с соотношениями (1.12)-(1.14)).

Далее, рассмотрим сумму первых C_n^2 уравнений в предыдущей системе. Сумма левых частей равна $2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant j} r_{ij}$. Рассмотрим сумму правых частей. Заметим, что в нее не входит число $\delta_{12...n}^1$ (аналогично тому, что в уравнениях $(1.9)-(1.11)$ не участвует число t_{123}). Посчитаем, сколько раз в сумму правых частей входит число $\delta_{12...n}^2$. По одному разу оно встречается в строках, в левой части которых стоят числа r_{1n}, r_{2n}, ... ,$r_{n-1,n}$, а в другие строки не входит. Теперь посчитаем, сколько раз в сумму правых частей входит число $\delta_{12...n}^3$. По одному разу оно встречается в строках, в левой части которых стоят числа r_{1n}, r_{2n}, ... ,$r_{n-2,n}$, а также по разу встречается в строках, в левых частях которых стоят числа $r_{1,n-1}$, $r_{2,n-1}$, ..., $r_{n-2,n-1}$ (итого $2\cdot(n-2)$ раз), а в другие строки не входит. Аналогично, $\delta_{12...n}^{k+1}$ входит в сумму правых частей $k(n-k)$ раз, так как по одному разу встречается в строках, в левых частях которых стоят числа $r_{1,n}$, $r_{2,n}$, ..., $r_{n-k,n}$; $r_{1,n-1}$, $r_{2,n-1}$, ..., $r_{n-k,n-1}$;...; $r_{1,n-k+1}$, $r_{2,n-k+1}$, ..., $r_{n-k,n-k+1}$ (итого $k\cdot(n-k)$ раз), а в другие строки не входит. Обозначим через δ^i величину $\delta^i := \sum_{\sigma\in S_n}\delta_\sigma^i$. Тогда в силу вышесказанного

$$2\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} r_{ij} = (n-1)\delta^2 + 2(n-2)\delta^3 + ... + k(n-k)\delta^{k+1} + ... + (n-1)\delta^n.$$

Далее, в системе уравнений относительно чисел δ_σ^i просуммируем строки под номерами с C_n^2+1 по C_n^2+n включительно. Получим:

$$n\cdot 1 = n\cdot\delta^1 + (n-1)\delta^2 + (n-2)\delta^3 + ... + (n-k)\delta^{k+1} + ... + \delta^n.$$

В самом деле: число $\delta^1_{12\dots n}$ попадет в нашу сумму n раз, число $\delta^2_{12\dots n}$ попадет в нашу сумму $n-1$ раз - по разу из каждого $x^i_{12\dots n}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, число $\delta^3_{12\dots n}$ попадет в нашу сумму $n-2$ раз - по разу из каждого $x^i_{12\dots n}$, $1 \leqslant i \leqslant n-2$, и т.д.

Далее, для нахождения чисел $\underline{R}^+_n$ и $\bar{R}^+_n$ нам нужно (в рамках указанных выше ограничений на числа δ^i_σ) найти экстремальные значения функции $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j_1,\dots,j_{n-1}:(i,j_1,\dots,j_{n-1})\in S_n} x^i_{i,j_1,\dots,j_{n-1}}\right) = \sum_{i=1}^n \delta^i$. (Точно так же в случае $n=3$ выполнялось соотношение $\bar{R}^+ = \max_{N_6}(\sum_{\sigma\in S_3}(t_\sigma + \varepsilon_\sigma + \delta_\sigma))$.) Таким образом, получаем (в качестве следствия, а не в качестве равносильной задачи) следующую задачу:

$$\begin{cases} n\cdot 1 = n\cdot\delta^1 + (n-1)\delta^2 + (n-2)\delta^3 + \dots + (n-k)\delta^{k+1} + \dots + \delta^n, \\ \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2r_{ij} = (n-1)\delta^2 + 2(n-2)\delta^3 + \dots + k(n-k)\delta^{k+1} + \dots + (n-1)\delta^n, \\ \delta^i \geqslant 0, 1 \leqslant i \leqslant n, \\ \underline{R}^+_n = \inf \sum\limits_{i=1}^n \delta^i = ? \\ \bar{R}^+_n = \sup \sum\limits_{i=1}^n \delta^i = ? \end{cases}$$

Например, при $n=3$ (как и в доказательстве предложения 1, стр. 37) получаем:

$$\begin{cases} 3 = 3t + 2\varepsilon + \delta, \\ 2(r_{12} + r_{13} + r_{23}) = 2\varepsilon + 2\delta, \\ t \geqslant 0, \varepsilon \geqslant 0, \delta \geqslant 0, \\ \underline{R}^+_n = \underline{R}^+ = \inf(t+\varepsilon+\delta) = ? \\ \bar{R}^+_n = \bar{R}^+ = \sup(t+\varepsilon+\delta) = ? \end{cases}$$

Далее, пусть $A := \sum_{i=1}^n \delta^i$. Так как $1 = \delta^1 + \frac{n-1}{n}\delta^2 + \frac{n-2}{n}\delta^3 + \dots + \frac{n-k}{n}\delta^{k+1} + \dots + \frac{1}{n}\delta^n$, то $A = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\delta^2 + \frac{n-2}{n}\delta^3 + \dots + \frac{n-k}{n}\delta^{k+1} + \dots + \frac{1}{n}\delta^n\right) + \sum_{i=2}^n \delta^i$, поэтому

$$A = 1 + \frac{\delta^2 + 2\delta^3 + \dots + (n-1)\delta^n}{n} = 1 + \frac{\sum_{i=2}^n (i-1)\delta^i}{n}. \tag{1.34}$$

Далее, $\sum_{i=2}^n (i-1)\delta^i \leqslant \sum_{i=2}^n (i-1)(n-(i-1))\delta^i$, так как $(n-(i-1)) \geqslant 1$ при $2 \leqslant i \leqslant n$. Более того, $(n-1)\sum_{i=2}^n (i-1)\delta^i \geqslant \sum_{i=2}^n (i-1)(n-(i-1))\delta^i$, так как $(n-1)(i-1) \geqslant (i-1)(n-(i-1))$ при $2 \leqslant i \leqslant n$. Таким образом,

$$\frac{\sum_{i=2}^{n}(i-1)(n-(i-1))\delta^i}{n-1} \leqslant \sum_{i=2}^{n}(i-1)\delta^i \leqslant \sum_{i=2}^{n}(i-1)(n-(i-1))\delta^i. \quad (1.35)$$

Так как

$$2 \cdot \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} r_{ij} = (n-1)\delta^2 + 2(n-2)\delta^3 + ... + k(n-k)\delta^{k+1} + ... + (n-1)\delta^n =$$

$$= \sum_{i=2}^{n}(i-1)(n-(i-1))\delta^i,$$

то (в силу (1.35))

$$\frac{2 \cdot \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} r_{ij}}{n-1} \leqslant \sum_{i=2}^{n}(i-1)\delta^i \leqslant 2 \cdot \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} r_{ij}.$$

Учитывая (1.34), получаем, что

$$1 + \frac{2 \cdot \sum_{i<j} r_{ij}}{n(n-1)} \leqslant A \leqslant 1 + \frac{2 \cdot \sum_{i<j} r_{ij}}{n}.$$

Отсюда сразу следует, что

$$1 + \frac{2 \cdot \sum_{i<j} r_{ij}}{n(n-1)} \leqslant \underline{R}_n^+ \leqslant \bar{R}_n^+ \leqslant 1 + \frac{2 \cdot \sum_{i<j} r_{ij}}{n}.$$

Таким образом, теорема 7 полностью доказана.

1.5 Понижение размерности экстремальной задачи в случае $n \geqslant 3$

Несложно видеть, что результаты теорем 4 и 5, полученные в случае $n = 3$, переносятся (с естественными изменениями) на случай произвольного количества мер. А именно: пусть M - множество вероятностных мер на измеримом пространстве (Ω, Σ). Для любых n вероятностных мер $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ на (Ω, Σ) можно рассмотреть задачу различения $n \geqslant 3$ простых гипотез H_i: наблюдение ξ имеет распределение μ_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Каждому нерандомизированному критерию в этой задаче соответствуют измеримое разбиение $\vec{C} = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$ пространства Ω $(\bigsqcup_{i=1}^{n} C_i = \Omega$, если наблюдение $\xi \in C_i$, то принимается гипотеза H_i, $i = 1, 2, ..., n$) и вероятности $\mu_j(C_k)$ принятия гипотезы H_k в случае, когда верна гипотеза H_j, $j, k \in \{1, 2, ..., n\}$. Совокупность всех разбиений Ω на n непересекающихся измеримых подмножеств обозначим $\mathcal{C}(\Omega)$. Через $\vec{\mu}$ обозначим набор $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$, через $\vec{\mu}(\vec{C})$ обозначим $(\mu_1(C_1), \mu_1(C_2), ..., \mu_n(C_n)) \in \mathbb{R}^{n^2}$. Будем считать, что качество критерия можно представить функцией $f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ со значениями в $\mathbb{R}$; иногда будет использоваться обозначение $f(\{\mu_j(C_k)\}_{j,k=1}^n)$. Фиксируем такие числа $r_{ij} = r_{ji}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$, что $0 \leqslant r_{ij} \leqslant 1$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, $r_{ij} + r_{jl} \geqslant r_{il}$, $1 \leqslant i, j, l \leqslant n$, $i \neq j \neq l \neq i$. Рассмотрим семейство всевозможных наборов из n вероятностных мер на Σ, между которыми заданы попарные расстояния по вариации: $\rho(\mu_i, \mu_j) = r_{ij}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Будем называть такие наборы мер $\vec{r}$-согласованными и обозначать это следующим образом: $\vec{\mu} \in D(\vec{r})$. Получим удобные выражения для чисел $\underline{R} = \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ и $\bar{R} = \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. Для этого, как и ранее, построим множества $B_{i_1, i_2, ..., i_n}$ с помощью теоремы Хана. Заметим, что число множеств вида $B_{i_1, i_2, ..., i_n}$ равно $n!$ Далее, введем множество S_n перестановок индексов множеств $B_{i_1, i_2, ..., i_n}$ совершенно аналогично введению множества S_3. Множество $\Lambda_{n!}$ строится так же, как и множество Λ_6, и с помощью отображения $\phi_{n!}$ конструируется множество $N_{n!}$. Множество $\Lambda_{n \cdot n!}$ строится по аналогии с множеством Λ_{18}. С помощью отображения $\phi_{n \cdot n!}$ конструируется множество $N_{n \cdot n!}$. Тогда, повторяя рассуждения лемм 1 и 2 с естественными изменениями, получаем следующий результат.

Теорема 9. *Предположим, что в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере $n \cdot n!$ непустых попарно не пересекающихся множеств. Тогда для любой функции $f : [0, 1]^{n^2} \to \mathbb{R}$ выполнены следующие равенства:*

$$\underline{R} = \inf_{\vec{x} \in N_{n!}} \max_{\vec{C} \in \mathcal{C}(S_n)} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in C_k} x_\sigma^{(j)}\right\}_{j,k=1}^n\right),$$

$$\bar{R} = \sup_{\vec{x} \in N_{n \cdot n!}} f\left(\left\{\sum_{\sigma \in S_n} x_\sigma^{(j),k}\right\}_{j,k=1}^n\right).$$

Заметим, что для доказательства обобщения леммы 1 нам потребуется предположение о том, что в Σ есть по меньшей мере $n \cdot n!$ непустых попарно не пересекающихся множеств, а для доказательства обобщения леммы 2 достаточно и наличия $n!$ непустых попарно не пересекающихся множеств в Σ.

Теорема 5 (аналогично теореме 4) может быть легко обобщена (с естественными изменениями) на случай произвольного количества мер.

Теперь покажем, что решение экстремальной задачи в классе мер без атомов может качественно отличаться от решения той же задачи в случае, когда наличие атомов у мер допускается, притом даже в тех случаях, когда функция f качества критерия непрерывна. Для этого рассмотрим величину

$$\underline{L} := \inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} f_\Delta(\vec{\mu}(\vec{C})) = \inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} \min_{i\neq j}(\mu_i(C_i) - \mu_i(C_j)).$$

Заметим, что функция $f_\Delta : [0,1]^{n^2} \to \mathbb{R}$ непрерывна. Известен (см.[19], стр. 67) следующий факт: каким бы ни был набор из n непрерывных мер, всегда найдется такое разбиение $\vec{C}^*$, для которого выполняется соотношение $\mu_i(C_i^*) - \mu_i(C_j^*) \geqslant 0$ при всех $1 \leqslant i,j \leqslant n$, $i \neq j$, т.е. $f_\Delta(\vec{\mu}(\vec{C}^*)) \geqslant 0$. Отсюда следует, что для любого набора чисел $\{r_{ij}\}, 1 \leqslant i < j \leqslant n$, выполняется соотношение $\underline{L} \geqslant 0$ (в классе мер без атомов). Пусть $n \geqslant 2$. Будем считать, что $\Omega \neq \varnothing$. Следовательно, существует $\omega_0 \in \Omega$. Пусть $r_{ij} = 0$ для всех $1 \leqslant i < j \leqslant N$. Рассмотрим набор из n мер на Ω, заданных следующим условием: $\mu_i(A) = 1$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ и при любых таких $A \in \Sigma$, что $\omega_0 \in A$. Несложно видеть, что каким бы ни было разбиение $\vec{C}$, элемент ω_0 попадет ровно в одно из множеств $C_1, C_2, ..., C_n$. Отсюда следует, что в данном случае $\underline{L} = -1$. Таким образом, существуют непрерывные функции f качества критерия, для которых решение экстремальной задачи для $\underline{R}$ (в случае с n мерами) в классе мер без атомов (более узком) качественно отличается от решения той же задачи в случае, когда наличие атомов у мер допускается.

1.6 Результаты для случая с рандомизацией

Пусть $\mathbb{E} = (\Omega, \mathbb{F}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ — статистическая модель, причем $\Theta = \{1,2,...,n\}$ и пространство D решений совпадает с множеством Θ, функция потерь $L(\theta,d) = \mathbb{I}_{\theta\neq d}$, функция $\phi = (\phi_1,\phi_2,...,\phi_n)$ задает рандомизированный критерий ($\phi_i : \Omega \to [0,1]$ измеримы для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ и $\sum_{i=1}^n \phi_i = 1$) следующим образом: $\phi_i(\omega)$ - это вероятность принять решение под номером i, если происходит ω. Множество таких критериев обозначим через Φ, а множество нерандомизированных критериев обозначим через Φ^*.

В «рандомизированном» случае байесовский риск p, соответствующий равномерному распределению на Θ, равен $\inf_{\phi\in\Phi}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}_{P_i}(1-\phi_i)$. Удобнее рассматривать величину $\bar{a}:=1-p=\sup_{\phi\in\Phi}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}_{P_i}\phi_i$. Аналогом величины $\bar{a}$ в нерандомизированном случае является величина $\bar{a}^*=\sup_{\phi\in\Phi^*}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}_{P_i}\phi_i$. Неулучшаемые оценки величин $\bar{a}$ и $\bar{a}^*$ позволяет получить следующая теорема.

Теорема 10. *Выполнены следующие равенства:*

$$\sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})}\sup_{\phi\in\Phi}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}_{P_i}\phi_i=\sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})}\sup_{\phi\in\Phi^*}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}_{P_i}\phi_i=\bar{R}^+,$$
$$\inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})}\sup_{\phi\in\Phi}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}_{P_i}\phi_i=\inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})}\sup_{\phi\in\Phi^*}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}_{P_i}\phi_i=\underline{R}^+.$$

Доказательство. Доказательство проведем для случая $n=3$ (это позволит избежать громоздких выражений), отметив, что в случае $n\geqslant 3$ доказательство полностью аналогично.

Фиксируем тройку мер $\vec{\mu}\in D(\vec{r})$ и $\phi=(\phi_1,\phi_2,\phi_3)\in\Phi$. Пусть $\mu:=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\mu_i$ и $\mathfrak{z}_i:=\frac{d\mu_i}{d\mu}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}}\phi_i d\mu_i=\int_{\mathbb{R}}\sum_{i=1}^{3}\phi_i\mathfrak{z}_i d\mu\leqslant\int_{\mathbb{R}}\sum_{i=1}^{3}\phi_i\cdot\left(\max_j\mathfrak{z}_j\right)d\mu=$$
$$=\int_{\mathbb{R}}1\cdot\left(\max_j\mathfrak{z}_j\right)d\mu. \tag{1.36}$$

Если $\phi_i\mathfrak{z}_i=\phi_i\cdot(\max_j\mathfrak{z}_j)$, то есть $\phi_i(\mathfrak{z}_i-\max_j\mathfrak{z}_j)=0$, то в предыдущей формуле достигается равенство. Пусть

$$C_1:=\left\{\max_j\mathfrak{z}_j=\mathfrak{z}_1\right\},\quad C_2:=\left\{\max_j\mathfrak{z}_j=\mathfrak{z}_2\right\}\bigcap(\Omega\backslash C_1),$$
$$C_3:=(\Omega\backslash C_1)\backslash C_2,\quad \hat{\phi}_i(\omega):=I_{C_i}(\omega).$$

Несложно показать, что $\hat{\phi}_i(\mathfrak{z}_i-\max_j\mathfrak{z}_j)=0$. Таким образом, при $\phi_i=\hat{\phi}_i$ неравенство (1.36) переходит в равенство (причем функции $\hat{\phi}_i$ принимают только значения 0 и 1). Следовательно, $\hat{\phi}:=(\hat{\phi}_1,\hat{\phi}_2,\hat{\phi}_3)\in\Phi^*\subset\Phi$ и $\sup_{\phi\in\Phi}\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}}\phi_i d\mu_i=\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}}\hat{\phi}_i d\mu_i$. Поэтому

$$\sup_{\phi\in\Phi}\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\mathbf{E}_{P_i}\phi_i=\sup_{\phi\in\Phi^*}\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\mathbf{E}_{P_i}\phi_i$$

(т.е. $\bar{a} = \bar{a}^*$). Значит,

$$\sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\phi\in\Phi} \sum_{i=1}^{3} \mathbf{E}_{P_i}\phi_i = \sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\phi\in\Phi^*} \sum_{i=1}^{3} \mathbf{E}_{P_i}\phi_i,$$

$$\inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\phi\in\Phi} \sum_{i=1}^{3} \mathbf{E}_{P_i}\phi_i = \inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\phi\in\Phi^*} \sum_{i=1}^{3} \mathbf{E}_{P_i}\phi_i.$$

Осталось заметить, что

$$\sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\phi\in\Phi^*} \sum_{i=1}^{3} \mathbf{E}_{P_i}\phi_i = \sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i) = \bar{R}^+,$$

$$\inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\phi\in\Phi^*} \sum_{i=1}^{3} \mathbf{E}_{P_i}\phi_i = \inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{C}(\Omega)} \sum_{i=1}^{3} \mu_i(C_i) = \underline{R}^+$$

по определению множества Φ^*. Значит,

$$\sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\phi\in\Phi} \sum_{i=1}^{3} \mathbf{E}_{P_i}\phi_i = \sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\phi\in\Phi^*} \sum_{i=1}^{3} \mathbf{E}_{P_i}\phi_i = \bar{R}^+,$$

$$\inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\phi\in\Phi} \sum_{i=1}^{3} \mathbf{E}_{P_i}\phi_i = \inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\phi\in\Phi^*} \sum_{i=1}^{3} \mathbf{E}_{P_i}\phi_i = \underline{R}^+,$$

что и требовалось. Теорема 10 доказана. $\square$

Замечание 6. Таким образом, рандомизация не позволяет улучшить оптимальный нерандомизированный критерий, если качество критерия понимать как сумму вероятностей принятия правильных решений.

Глава 2. Экстремальные характеристики интервальных критериев при ограничениях на расстояния по вариации

В этой главе изучаются экстремальные значения нерандомизированных интервальных критериев выбора нескольких из n гипотез в случае, когда известны только попарные расстояния по вариации между соответствующими им распределениями. Показано, что нахождение экстремальных значений кусочно-непрерывных функций от вероятностей ошибок в широком классе случаев сводится к решению конечномерной задачи линейного программирования.

2.1 Вспомогательные определения и постановка задачи

Пусть M - множество вероятностных мер на измеримом пространстве (Ω, Σ). Для любых трех вероятностных мер μ_1, μ_2, μ_3 на (Ω, Σ) можно, как сделано выше (см. главу 2), рассмотреть задачу различения трех гипотез H_i: наблюдение ξ имеет распределение μ_i, $i = 1, 2, 3$. Теперь мы рассмотрим «интервальные критерии». Каждому нерандомизированному интервальному критерию в этой задаче соответствуют измеримое разбиение
$\vec{C} = \{C_1, C_2, ..., C_7\}$ пространства Ω ($\bigsqcup_{i=1}^7 C_i = \Omega$), где через C_1, C_2, C_3, $C_4 = C_{12}$, $C_5 = C_{13}$, $C_6 = C_{23}$, $C_7 = C_{123}$ обозначены множества, определенные следующим образом: если $\omega \in C_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, то принимается решение о том, что наблюдение не противоречит гипотезе H_i и противоречит остальным гипотезам (сокращенно запишем: $C_i = \{\omega : H_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant 3$), аналогично $C_{ij} = \{\omega : H_i \text{ или } H_j\}$, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, $C_{123} = \{\omega : H_1 \text{ или } H_2 \text{ или } H_3\}$, т.е. при $\omega \in C_{ij}$ принимается решение о том, что наблюдение не противоречит гипотезам H_i и H_j и противоречит третьей гипотезе; при $\omega \in C_{123}$ принимается решение о том, что наблюдение не противоречит ни одной из трех гипотез.

Далее, через $\vec{\mu}$ обозначим тройку мер (μ_1, μ_2, μ_3), через $\vec{\mu}(\vec{C})$ обозначим упорядоченный набор $(\mu_1(C_1), \mu_1(C_2), ..., \mu_3(C_7))$. Будем считать, что качество критерия можно представить функцией $f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ со значениями в $\mathbb{R}$; иногда будет использоваться также обозначение $f(\{\mu_j(C_k)\}_{1 \leqslant j \leqslant 3}^{1 \leqslant k \leqslant 7})$. Фиксируем такие числа r_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, что $0 \leqslant r_{ij} \leqslant 1$, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$,

$r_{12}+r_{13} \geqslant r_{23}$, $r_{12}+r_{23} \geqslant r_{13}$ и $r_{13}+r_{23} \geqslant r_{12}$. Нам потребуется обозначение $D(\vec{r})$, введенное ранее (см. стр.19). Далее, для фиксированной тройки мер, числа α и функций $f, g : [0,1]^{21} \to \mathbb{R}$ обозначим через $\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})$ класс таких разбиений $\vec{C} = \{C_1, C_2, ..., C_7\}$ пространства Ω, которые удовлетворяют условию $g(\vec{\mu}(\vec{C})) \geqslant \alpha$. Через $\underline{Ri}$ и $\overline{Ri}$ обозначим следующие величины:

$$\underline{Ri} = \inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})), \quad \overline{Ri} = \sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})).$$

При этом по определению полагаем, что инфимум по пустому множеству равен $+\infty$. Целью настоящей главы является получение удобных выражений для чисел $\underline{Ri}$ и $\overline{Ri}$.

Теперь приведем примеры функций f и g, рассмотрение которых естественно. Для этого нам потребуются следующие определения:

$$C^{(1)} := C_1 \bigsqcup C_{12} \bigsqcup C_{13} \bigsqcup C_{123}, \quad C^{(2)} := C_2 \bigsqcup C_{12} \bigsqcup C_{23} \bigsqcup C_{123},$$
$$C^{(3)} := C_3 \bigsqcup C_{13} \bigsqcup C_{23} \bigsqcup C_{123}.$$

Другими словами, $C^{(i)}$ - это такое множество, на котором не отвергается гипотеза H_i (и, быть может, еще некоторые гипотезы). Рассмотрим случайную величину $\#C$ (число неотвергаемых гипотез), которая равна 1 на C_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, равна 2 на C_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$ и равна 3 на C_{123}. Пусть $g(\vec{\mu}(\vec{C})) = \min_{1\leqslant i\leqslant 3}(\mu_i(C^{(i)}))$ и $f = \max_i(\mathbf{E}_i(\#C))$ (где символ $\mathbf{E}_i$ означает математическое ожидание по i-й мере). Тогда условие $g = \min_{1\leqslant i\leqslant 3}(\mu_i(C^{(i)})) \geqslant \alpha$ означает, что правильная гипотеза принимается с вероятностью, не меньшей α (заданный уровень значимости), а минимизация f означает, что минимизируется среднее число принятых гипотез. Наряду с указанной парой функций f и g естественно рассмотреть пару функций $g = \sum_i \mu_i(C^{(i)})$, $f = \sum_i \mathbf{E}_i(\#C)$.

Итак, наша задача состоит в следующем: для заданных чисел r_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, числа α и функций $f, g : [0,1]^{21} \to \mathbb{R}$ требуется получить удобные формулы для $\underline{Ri} = \inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ и $\overline{Ri} = \sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. Отметим, что величины

$$\underline{Ri} = \inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \quad \text{и} \quad \overline{Ri} = \sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$$

сразу получаются из величин $\underline{Ri}$ и $\overline{Ri}$ за счет замены f на $-f$.

2.2 Понижение размерности экстремальной задачи для интервальных критериев в случае трех мер

Теперь сформулируем основные результаты.

Будет доказано (см. теоремы 11 и 12 соответственно), что в общем случае можно провести «понижение размерности», т.е. свести исходную задачу о нахождении чисел $\underline{Ri}$ и $\overline{Ri}$ к поиску экстремума функции на подмножествах множеств $[0,1]^{126}$ и $[0,1]^{18}$ соответственно.

Теорема 11. *Пусть в σ-алгебре измеримого пространства (Ω,Σ) содержится по крайней мере 42 непустых попарно не пересекающихся множества. Тогда для любых функций $f,g : [0,1]^{21} \to \mathbb{R}$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняется следующее равенство:*

$$\underline{Ri} = \inf_{\vec{x}\in N_{42}: g\left(\left\{\sum_\sigma x_\sigma^{(j),k}\right\}_{1\leqslant j\leqslant 3}^{1\leqslant k\leqslant 7}\right)\geqslant\alpha} f\left(\left\{\sum_\sigma x_\sigma^{(j),k}\right\}_{1\leqslant j\leqslant 3}^{1\leqslant k\leqslant 7}\right),$$

где множество $N_{42} \subset [0,1]^{126}$ определено на странице 70 и является замкнутым выпуклым многогранником.

Доказательство см. на стр. 66.

Через $\mathcal{C}(S_3)$ обозначим множество всевозможных разбиений S_3 на 7 непересекающихся множеств, т.е. разбиений вида $\vec{C} = \{C_1, C_2, ..., C_7\}$, где $\bigsqcup_{k=1}^{7} C_k = S_3$. Верна следующая теорема.

Теорема 12. *Предположим, что в σ-алгебре измеримого пространства (Ω,Σ) содержится по крайней мере 6 непустых попарно не пересекающихся множеств. Тогда для любых функций $f,g : [0,1]^{21} \to \mathbb{R}$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняется следующее равенство:*

$$\overline{Ri} = \sup_{\vec{x}\in N_6} \min_{\vec{C}\in\mathcal{C}(S_3): g\left(\left\{\sum_{\sigma\in C_k} x_\sigma^{(j)}\right\}_{1\leqslant j\leqslant 3}^{1\leqslant k\leqslant 7}\right)\geqslant\alpha} f\left(\left\{\sum_{\sigma\in C_k} x_\sigma^{(j)}\right\}_{1\leqslant j\leqslant 3}^{1\leqslant k\leqslant 7}\right),$$

где множество $N_6 \subset [0,1]^{18}$ определено на странице 30 и является замкнутым выпуклым многогранником.

Доказательство см. на стр. 71.

Заметим, что для непрерывных кусочно-линейных функций f, g теоремы 11 и 12 сводят задачу о нахождении $\underline{Ri}$ и $\overline{Ri}$ к задачам линейного программирования. В частности, теоремы 11 и 12 позволяют найти $\underline{Ri}$ и $\overline{Ri}$ в случае, когда $f = \max_i(\mathbf{E}_i(\#C))$, $g(\vec{\mu}(\vec{C})) = \min_{1\leqslant i\leqslant 3}(\mu_i(C^{(i)}))$, и в случае, когда $f = \sum_i \mathbf{E}_i(\#C)$, $g = \sum_i \mu_i(C^{(i)})$.

Теорема 13. *Пусть $Q_{18} \subset \mathbb{R}^{18}$ - множество, определенное на стр. 74. Пусть в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 42 непустых попарно не пересекающихся множества. Для любого $\vec{z} = (z_1, z_2, ..., z_{18}) \in Q_{18}$ положим*

$$f^*(z_1, z_2, ..., z_{18}) := f\Bigg(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, 1 - \sum_{1\leqslant j\leqslant 6} z_j,$$

$$z_7, z_8, ..., z_{12}, 1 - \sum_{7\leqslant j\leqslant 12} z_j, z_{13}, z_{14}, ..., z_{18}, 1 - \sum_{13\leqslant j\leqslant 18} z_j\Bigg).$$

Тогда

$$\underline{Ri} = \inf_{\vec{z}\in Q_{18}} f^*(z_1, z_2, ..., z_{18}).$$

Доказательство см. на стр. 74.

Отметим, что в теореме 11 множество N_{42}, по которому берется экстремум, устроено в некотором смысле проще, чем множество Q_{18} из теоремы 13, однако последнее, в отличие от первого, лежит в пространстве меньшей размерности.

Далее, будет доказана теорема 14 (см. стр.76), которая является простым обобщением теорем 11 и 12 на случай произвольного конечного числа (n) мер. Также будет указана возможность обобщения теоремы 13 на случай произвольного конечного числа мер.

2.2.1 Доказательство теоремы 11 о понижении размерности в задаче о нахождении $\underline{Ri}$

Пусть $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ - тройка мер на измеримом пространстве (Ω, Σ). Для каждой тройки мер определим множества $B_\sigma(\vec{\mu}, \Omega)$ (так же, как на стр. 23), задающие разбиение пространства Ω, на котором эти меры заданы. Напомним, что расстояния по вариации между мерами μ_1, μ_2, μ_3 определяются значениями $\mu_i(B_\sigma)$, так как

$$2r_{ij} = \sum_{\sigma\in S_3} \left|\mu_i(B_\sigma) - \mu_j(B_\sigma)\right| =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_3} (\mu_i(B_\sigma) - \mu_j(B_\sigma)) \cdot (-1)^{I\left\{\sigma_i^{-1} > \sigma_j^{-1}\right\}},\ 1 \leqslant i < j \leqslant 3.$$

Каждое разбиение $\vec{C} = \{C_1, C_2, ..., C_7\}$ пространства Ω, вообще говоря, разбивает каждое множество B_σ на семь подмножеств $B_\sigma^j = B_\sigma \bigcap C_j,\ j = 1, 2, ..., 7$, и набор аргументов $\vec{\mu}(\vec{C})$ функции f полностью определяется 126 значениями $\mu_i(B_\sigma^j) : \mu_i(C_j) = \sum_{\sigma\in S_3} \mu_i(B_\sigma^j)$. Поэтому задача о нахождении экстремальных значений $f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ сводится к задаче о нахождении экстремума на подмножестве $\mathbb{R}^{126}$, определяемом условиями на то, что меры μ_1, μ_2, μ_3 - вероятностные с заданными расстояниями по вариации (и неравенствами, входящими в определения множеств B_σ), а также условием $g(\vec{\mu}(\vec{C})) \geqslant \alpha$.

Теперь перейдем к вопросу о нахождении $\underline{Ri}$. Рассмотрим пространство $\Omega_{42} = \{\omega_\sigma^m, \sigma \in S_3, 1 \leqslant m \leqslant 7\}$, состоящее из 42 элементов, и σ-алгебру $2^{\Omega_{42}}$ на нем. Через Z_{42} обозначим семейство $\vec{r}$-согласованных троек мер μ_1, μ_2, μ_3 на Ω_{42}, т.е.

$$Z_{42} = \left\{ \{\mu_i\}_{i=1}^3 : \rho(\mu_s, \mu_l) = r_{sl},\ 1 \leqslant s < l \leqslant 3 \right\}.$$

Рассмотрим (по аналогии с введением множеств B_{ijk}) те тройки мер из Z_{42}, для которых при любых $1 \leqslant m \leqslant 7$ и $\sigma \in S_3$ выполнены следующие условия:

$$\mu_{\sigma_1}(\omega_\sigma^m) \geqslant \mu_{\sigma_2}(\omega_\sigma^m) \geqslant \mu_{\sigma_3}(\omega_\sigma^m). \tag{2.1}$$

Множество таких троек мер обозначим через Λ_{42}. Далее, рассмотрим разбиение $\vec{C}^0 := \left\{C_1^0, C_2^0, ..., C_7^0\right\}$, где $C_m^0 = \bigsqcup_{\sigma\in S_3} \omega_\sigma^m$. Напомним, что по определению $\underline{Ri} = \inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$.

Лемма 10. *Пусть в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 42 непустых попарно не пересекающихся множества K_σ^i, $\sigma \in S_3$, $1 \leqslant i \leqslant 7$. Тогда для любых функций $f, g : [0, 1]^{21} \to \mathbb{R}$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняется следующее равенство:*

$$\underline{Ri} = \inf_{\vec{\mu}\in\Lambda_{42} : \vec{C}^0 \in \mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0)).$$

Доказательство. Докажем сначала, что $\underline{Ri} \leqslant \inf_{\vec{\mu}\in\Lambda_{42}:\vec{C}^0\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0))$. Так как $K_\sigma^i \neq \varnothing$, $1 \leqslant i \leqslant 7$, $\sigma \in S_3$, то существуют такие элементы $v_{i,\sigma}$, что $v_{i,\sigma} \in K_\sigma^i$, $1 \leqslant i \leqslant 7$, $\sigma \in S_3$. Для любой $\vec{r}$-согласованной тройки $\vec{\mu}$ мер на Ω_{42} построим соответствующую тройку $\vec{\mu}^*$ мер на Ω следующим образом: $\mu_i^*(A) = \sum_{(m,\sigma):v_{m,\sigma}\in A} \mu_i(\omega_\sigma^m)$ при любом $A \in \Sigma$. Заметим, что $\inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu^*}(\vec{C}))$ (где в левой части равенства фигурируют разбиения пространства Ω_{42}, а в правой - разбиения пространства Ω) и $\vec{\mu}^* \in D(\vec{r})$. Другими словами, для любой $\vec{r}$-согласованной тройки $\vec{\mu}$ мер на Ω_{42} найдется такая $\vec{r}$-согласованная тройка $\vec{\mu}^*$ мер на Ω, что

$$\inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu^*}(\vec{C})).$$

Значит, $\inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \leqslant \inf_{\vec{\mu}\in Z_{42}} \inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. Далее, несложно видеть, что

$$\inf_{\vec{\mu}\in Z_{42}} \inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \leqslant \inf_{\vec{\mu}\in Z_{42}:\vec{C}^0\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0)) \leqslant \inf_{\vec{\mu}\in\Lambda_{42}:\vec{C}^0\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0))$$

в силу того, что $\Lambda_{42} \subset Z_{42}$. Значит,

$$\inf_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \leqslant \inf_{\vec{\mu}\in Z_{42}} \inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \leqslant \inf_{\vec{\mu}\in\Lambda_{42}:\vec{C}^0\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0)),$$

причем в левой части последнего неравенства стоит не что иное, как величина $\underline{Ri}$. Таким образом, $\underline{Ri} \leqslant \inf_{\vec{\mu}\in\Lambda_{42}:\vec{C}^0\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0))$, и нам осталось доказать, что $\underline{Ri} \geqslant \inf_{\vec{\mu}\in\Lambda_{42}:\vec{C}^0\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0))$.

В самом деле, рассмотрим любую тройку $\vec{\mu} \in D(\vec{r})$ мер на Ω и любое разбиение $\vec{C}$ пространства Ω. Построим тройку $\vec{\mu}^*$ мер на пространстве Ω_{42} следующим образом: $\mu_i^*(\omega_\sigma^m) := \mu_i(B_\sigma \bigcap C_m)$, где множества $B_\sigma = B_\sigma(\vec{\mu}, \Omega)$ строятся на основании разложения Хана так, как это сделано выше. Напомним, что по определению $C_m^0 := \bigsqcup_\sigma \omega_\sigma^m$, значит, $\mu_i(C_m) = \sum_{\sigma\in S_3} \mu_i(B_\sigma \bigcap C_m) = \sum_{\sigma\in S_3} \mu_i^*(\omega_\sigma^m) = \mu_i^*(C_m^0)$, поэтому $\vec{\mu}(\vec{C}) = \vec{\mu}^*(\vec{C}^0)$, откуда $f(\vec{\mu}(\vec{C})) = f(\vec{\mu}^*(\vec{C}^0))$ и, аналогично, $g(\vec{\mu}(\vec{C})) = g(\vec{\mu}^*(\vec{C}^0))$. Кроме того, из $\vec{r}$-согласованности тройки мер $\vec{\mu}$ следует (в силу непосредственной проверки) $\vec{r}$-согласованность тройки $\vec{\mu}^*$. Убедимся в том, что $\vec{\mu}^* \in \Lambda_{42}$, проверив, что для этой тройки мер выполняется соотношение (2.1). В силу определения множеств B_σ выполняются следующие неравенства:

$$\mu_{\sigma_1}(B_\sigma \bigcap C_m) \geqslant \mu_{\sigma_2}(B_\sigma \bigcap C_m) \geqslant \mu_{\sigma_3}(B_\sigma \bigcap C_m),$$
$$1 \leqslant m \leqslant 7,\ \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in S_3,$$

значит, $\mu^*_{\sigma_1}(\omega^m_\sigma) \geqslant \mu^*_{\sigma_2}(\omega^m_\sigma) \geqslant \mu^*_{\sigma_3}(\omega^m_\sigma)$ при всех $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in S_3, 1 \leqslant m \leqslant 7$. Итак, мы получили, что для каждой $\vec{r}$-согласованной тройки $\vec{\mu}$ мер на Ω и любого разбиения $\vec{C}$ пространства Ω найдется такая тройка $\vec{\mu}^*$ мер на Ω_{42}, что $\vec{\mu}^* \in \Lambda_{42}$, $f(\vec{\mu}(\vec{C})) = f(\vec{\mu}^*(\vec{C}^0))$ и $g(\vec{\mu}(\vec{C})) = g(\vec{\mu}^*(\vec{C}^0))$. Отсюда сразу следует, что

$$\inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \inf_{\vec{C} \in \mathcal{E}^\alpha_g(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \geqslant \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_{42} : \vec{C}^0 \in \mathcal{E}^\alpha_g(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0)),$$

причем в левой части последнего неравенства стоит, очевидно, величина $\underline{Ri}$. Таким образом, $\underline{Ri} \geqslant \inf_{\vec{\mu} \in \Lambda_{42} : \vec{C}^0 \in \mathcal{E}^\alpha_g(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0))$. Лемма 10 полностью доказана. $\square$

Заметим, что лемма 10 существенно упрощает задачу о нахождении числа $\underline{Ri}$: можно считать, что Ω состоит из 42 элементов и тройка мер (μ_1, μ_2, μ_3) принадлежит Λ_{42}. К тому же, лемма 10 позволяет избавиться от инфимума по разбиениям.

Теперь докажем теорему 11, т.е. сведем задачу о нахождении $\underline{Ri}$ к поиску условного экстремума в $\mathbb{R}^{126}$ (предполагая, что условие теоремы 11 выполнено). Для этого фиксируем произвольную тройку мер $\{\mu_l\}_{l=1}^3$ из Λ_{42} и любое разбиение $\vec{C}$ пространства Ω_{42}. По тройке мер построим множества $B_\sigma(\vec{\mu}, \Omega_{42})$. Введем обозначение $D^m_\sigma = C_m \bigcap B_\sigma$, $x^{(l),m}_\sigma = \mu_l(D^m_\sigma)$. Тогда на множествах D^m_{ijk} выполнены неравенства $\mu_i(D^m_{ijk}) \geqslant \mu_j(D^m_{ijk}) \geqslant \mu_k(D^m_{ijk})$. (Кроме того, несложно видеть, что, например, на множествах D^m_{ijk}, $1 \leqslant m \leqslant 3$, не отвергается только m-я гипотеза, а на множестве D^5_{ijk} не отвергаются сразу две гипотезы: первая и третья.) Отсюда получаем соотношения между числами $x^{(l),m}_{ijk}$ (для всех $1 \leqslant m \leqslant 7, \sigma \in S_3$):

$$x^{(\sigma_1),m}_\sigma \geqslant x^{(\sigma_2),m}_\sigma \geqslant x^{(\sigma_3),m}_\sigma. \tag{2.2}$$

Далее, для любых $\sigma \in S_3$, $F \in 2^{\Omega_{42}}$ выполнены неравенства $\mu_{\sigma_1}(B_\sigma \bigcap F) \geqslant$

$\mu_{\sigma_2}(B_\sigma \bigcap F) \geqslant \mu_{\sigma_3}(B_\sigma \bigcap F)$ и в силу $\vec{r}$-согласованности

$$2r_{ij} = \sum_{\sigma \in S_3} \big|\mu_i(B_\sigma) - \mu_j(B_\sigma)\big| =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_3} \left(\mu_i(B_\sigma) - \mu_j(B_\sigma)\right) \cdot (-1)^{I\left\{\sigma_i^{-1} > \sigma_j^{-1}\right\}},\ 1 \leqslant i < j \leqslant 3.$$

Обозначим $x_\sigma^{(l)} := \sum_{m=1}^7 x_\sigma^{(l),m}$. Тогда $x_\sigma^{(l)} = \sum_{m=1}^7 \mu_l(C_m \bigcap B_\sigma) = \mu_l(B_\sigma)$. Таким образом,

$$2r_{ij} = \sum_{\sigma \in S_3} (x_\sigma^{(i)} - x_\sigma^{(j)})(-1)^{I\left\{\sigma_i^{-1} > \sigma_j^{-1}\right\}},\ 1 \leqslant i < j \leqslant 3.$$

Кроме того, так как μ_i являются вероятностными мерами, то

$$\sum_{\sigma \in S_3} x_\sigma^{(l)} = 1, 0 \leqslant x_\sigma^{(l)} \leqslant 1, 1 \leqslant l \leqslant 3,\ \sigma \in S_3.$$

Значит,

$$2r_{ij} = \sum_{\sigma \in S_3} \left(\sum_m x_\sigma^{(i),m} - \sum_m x_\sigma^{(j),m} \right) (-1)^{I\left\{\sigma_i^{-1} > \sigma_j^{-1}\right\}},\ 1 \leqslant i < j \leqslant 3, \tag{2.3}$$

$$\sum_{\sigma \in S_3} \sum_m x_\sigma^{(l),m} = 1, 0 \leqslant x_\sigma^{(l),m} \leqslant 1, 1 \leqslant l \leqslant 3,\ 1 \leqslant m \leqslant 7,\ \sigma \in S_3. \tag{2.4}$$

Пусть $\mathbb{T}$ - множество троек произвольных отображений T_i, $T_i : \Omega_{42} \to [0, 1]$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Пусть $\phi_{42} : \mathbb{T} \to [0, 1]^{126}$, $\phi_{42}(T_1, T_2, T_3) = \vec{x}$, где

$$\vec{x} = (x_{123}^{(1),1}, x_{123}^{(1),2}, x_{123}^{(1),3}, x_{123}^{(1),4}, ..., x_{321}^{(3),5}, x_{321}^{(3),6}, x_{321}^{(3),7})$$

и $x_{ijk}^{(l),m} = T_l(\omega_{ijk}^m)$. Несложно видеть, что такое отображение является биективным (как отображение из $\mathbb{T}$ в $[0, 1]^{126}$). Обозначим через $N_{42} \subset [0, 1]^{126}$ множество векторов $\vec{x}$, удовлетворяющих условиям (2.2)-(2.4). Заметим, что отображение ϕ_{42} устанавливает биекцию между множеством Λ_{42} и множеством N_{42}, так как условия принадлежности тройки мер множеству Λ_{42} равносильны условиям (2.2)-(2.4) принадлежности вектора $\vec{x}$ множеству N_{42}. Множество $N_{42} \subset [0, 1]^{126}$ представимо в виде конечного пересечения (замкнутых) полупространств и гиперплоскостей, пересечение замкнутых множеств замкнуто, пересечение выпуклых множеств выпукло, поэтому N_{42} -

замкнутый выпуклый многогранник. В силу леммы 10, биективности отображения ϕ_{42} и того, что $\mu_j(C_k^0) = \sum_\sigma \mu_j(C_k^0 \bigcap B_\sigma) = \sum_\sigma x_\sigma^{(j),k}$, выполнено следующее равенство:

$$\underline{Ri} = \inf_{\vec{\mu}\in\Lambda_{42}:\vec{C}^0\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C}^0)) = \inf_{\vec{\mu}\in\Lambda_{42}:g(\{\mu_j(C_k^0)\}_{1\leqslant j\leqslant 3}^{1\leqslant k\leqslant 7})\geqslant\alpha} f\left(\left\{\mu_j(C_k^0)\right\}_{1\leqslant j\leqslant 3}^{1\leqslant k\leqslant 7}\right) =$$

$$= \inf_{\vec{x}\in N_{42}:g\left(\left\{\sum_\sigma x_\sigma^{(j),k}\right\}_{1\leqslant j\leqslant 3}^{1\leqslant k\leqslant 7}\right)\geqslant\alpha} f\left(\left\{\sum_\sigma x_\sigma^{(j),k}\right\}_{1\leqslant j\leqslant 3}^{1\leqslant k\leqslant 7}\right).$$

Таким образом, теорема 11 доказана, и задача о нахождении величины $\underline{Ri}$ свелась к задаче о поиске экстремума на подмножестве множества $[0,1]^{126}$.

2.2.2 Доказательство теоремы 12 о понижении размерности в задаче о нахождении $\overline{Ri}$

Теперь перейдем к вопросу о нахождении $\overline{Ri}$. Нам потребуются обозначения Z_6 и Λ_6, введенные ранее (см. стр.28). Напомним, что по определению $\overline{Ri} = \sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$.

Лемма 11. *Пусть в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 6 непустых попарно не пересекающихся множеств K_σ, $\sigma \in S_3$. Тогда для любых функций $f, g : [0,1]^{21} \to \mathbb{R}$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняется следующее равенство:*

$$\overline{Ri} = \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_6} \min_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})).$$

Доказательство. Докажем сначала, что

$$\overline{Ri} \geqslant \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_6} \inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})).$$

Так как $K_\sigma \neq \varnothing$, $\sigma \in S_3$, то существуют такие элементы v_σ, что $v_\sigma \in K_\sigma$, $\sigma \in S_3$. Для любой $\vec{r}$-согласованной тройки $\vec{\mu}$ мер на S_3 построим соответствующую тройку $\vec{\mu}^*$ мер на Ω следующим образом: $\mu_i^*(A) = \sum_{\sigma:v_\sigma\in A} \mu_i(\sigma)$ при любом $A \in \Sigma$. Заметим, что $\inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}^*(\vec{C}))$ и $\vec{\mu}^* \in D(\vec{r})$. Другими словами, для любой $\vec{r}$-согласованной тройки $\vec{\mu}$ мер на S_3 найдется такая $\vec{r}$-согласованная тройка $\vec{\mu}^*$ мер на Ω, что $\inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}^*(\vec{C}))$. Значит,

$$\sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})} \inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \geqslant \sup_{\vec{\mu}\in Z_6} \inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})).$$

Далее, $\sup_{\vec{\mu}\in Z_6}\inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \geqslant \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_6}\inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$, так как $\Lambda_6 \subset Z_6$. Таким образом,

$$\sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})}\inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \geqslant \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_6}\inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})),$$

причем в левой части последнего неравенства стоит не что иное, как величина $\overline{Ri}$.

Покажем теперь, что $\overline{Ri} \leqslant \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_6}\inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. В самом деле, пусть $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ - тройка мер на измеримом пространстве (Ω, Σ). Для этой тройки мер определим множества B_σ так же, как это было сделано выше (с помощью теоремы Хана о разложении). Рассмотрим такие множества C_m, что $\bigsqcup_{m=1}^7 C_m = \Omega$ и каждое C_m является объединением нескольких множеств B_σ (или же является пустым). Класс таких разбиений пространства Ω обозначим через Γ. Очевидно, что $\inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \leqslant \inf_{\vec{C}\in\Gamma\bigcap\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C}))$. Рассмотрим меры μ_k^* $(1 \leqslant k \leqslant 3)$ на S_3, определенные так: $\mu_k^*(\sigma) = \vec{\mu}_k(B_\sigma)$. Несложно видеть, что определенные так меры μ_k^*, $1 \leqslant k \leqslant 3$, будут $\vec{r}$-согласованными (так как $\{\mu_i\}_{i=1}^3$ являются $\vec{r}$-согласованными, а условия на r_{ij} дают ограничения не более, чем на соотношения между мерами на множествах B_{ijk}). Кроме того, непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\inf_{\vec{C}\in\Gamma\bigcap\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}^*(\vec{C})).$$

Отсюда следует, что

$$\inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \leqslant \inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}^*(\vec{C})).$$

Далее, покажем, что $\vec{\mu}^* \in \Lambda_6$, проверив выполнение условия (1.5) для тройки мер $\vec{\mu}^*$. В самом деле, в силу определения множеств B_σ выполняются следующие неравенства: $\mu_{\sigma_1}(B_\sigma) \geqslant \mu_{\sigma_2}(B_\sigma) \geqslant \mu_{\sigma_3}(B_\sigma)$, поэтому $\mu_{\sigma_1}^*(\sigma) \geqslant \mu_{\sigma_2}^*(\sigma) \geqslant \mu_{\sigma_3}^*(\sigma)$. Значит, $\vec{\mu}^* \in \Lambda_6$. Таким образом, для любой $\vec{r}$-согласованной тройки $\vec{\mu}$ мер на Ω найдется такая $\vec{r}$-согласованная тройка $\vec{\mu}^*$ мер (из Λ_6) на S_3, что $\inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \leqslant \inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}^*(\vec{C}))$. Значит,

$$\sup_{\vec{\mu}\in D(\vec{r})}\inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \leqslant \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_6}\inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}^*(\vec{C})),$$

причем в левой части последнего неравенства стоит не что иное, как величина $\overline{Ri}$. Таким образом, $\overline{Ri} \leqslant \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_6}\inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}^*(\vec{C}))$. Значит, $\overline{Ri} = \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_6}\inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}^*(\vec{C}))$.

Так как S_3 конечно, то

$$\sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_6}\min_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}^*(\vec{C})) = \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_6}\inf_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}^*(\vec{C})),$$

что завершает доказательство леммы. $\square$

Заметим, что лемма 11 существенно упрощает задачу о нахождении числа $\overline{Ri}$: можно считать, что Ω состоит из 6 элементов и что тройка мер (μ_1, μ_2, μ_3) принадлежит Λ_6.

Теперь докажем теорему 12, т.е. сведем задачу о поиске $\overline{Ri}$ к поиску экстремума в $\mathbb{R}^{18}$ (предполагая, что условия теоремы 12 выполнены). Нам потребуется введенное выше (при доказательстве теоремы 4) отображение ϕ_6 (см. стр.30). Напомним, что оно устанавливает биекцию между множеством Λ_6 и множеством N_6.

В силу леммы 11 выполнено следующее равенство:

$$\overline{Ri} = \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_6}\min_{\vec{C}\in\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})).$$

Напомним, что через $\mathcal{C}(S_3)$ мы обозначили множество всевозможных разбиений S_3 на 7 непересекающихся множеств, т.е. разбиений вида
$\vec{C} = \{C_1, C_2, ..., C_7\}$, где $\bigsqcup_{k=1}^7 C_k = S_3$. Так как ϕ_6 - биекция и так как (см. доказательство теоремы 4) $\mu_l(\sigma) = x_\sigma^{(l)}$, $1 \leqslant l \leqslant 3$, $\sigma \in S_3$, получаем:

$$\overline{Ri} = \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_6}\min_{\vec{C}:g(\vec{\mu}(\vec{C}))\geqslant\alpha} f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \sup_{\vec{\mu}\in\Lambda_6}\min_{\vec{C}:g(\{\mu_j(C_k)\}_{1\leqslant j\leqslant 3}^{1\leqslant k\leqslant 7})\geqslant\alpha} f\left(\{\mu_j(C_k)\}_{1\leqslant j\leqslant 3}^{1\leqslant k\leqslant 7}\right) =$$

$$= \sup_{\vec{x}\in N_6}\min_{\vec{C}\in\mathcal{C}(S_3):g\left(\left\{\sum_{\sigma\in C_k} x_\sigma^{(j)}\right\}_{1\leqslant j\leqslant 3}^{1\leqslant k\leqslant 7}\right)\geqslant\alpha} f\left(\left\{\sum_{\sigma\in C_k} x_\sigma^{(j)}\right\}_{1\leqslant j\leqslant 3}^{1\leqslant k\leqslant 7}\right).$$

Таким образом, теорема 12 доказана, и задача о нахождении величины $\overline{Ri}$ свелась к задаче о поиске экстремума на подмножестве множества $[0,1]^{18}$.

Заметим, что леммы 10 и 11, сформулированные выше, доказывают, что если в σ-алгебре измеримого пространства (Ω, Σ) содержится по крайней мере 42 непустых попарно непересекающихся множества, то экстремум в задаче о нахождении чисел $\underline{Ri}$ и $\overline{Ri}$ достигается на множестве дискретных мер.

2.2.3 Доказательство теоремы 13 о понижении размерности в задаче о нахождении $\underline{Ri}$

Перейдем к доказательству теоремы 13. В силу теоремы 12 выполнено следующее соотношение:

$$\underline{Ri} = \inf_{\vec{x}\in N_{42}: g\left(\left\{\sum_\sigma x_\sigma^{(j),k}\right\}_{1\leqslant j\leqslant 3}^{1\leqslant k\leqslant 7}\right)\geqslant\alpha} f\left(\left\{\sum_\sigma x_\sigma^{(j),k}\right\}_{1\leqslant j\leqslant 3}^{1\leqslant k\leqslant 7}\right).$$

Пусть $P := \left\{\vec{x}\in N_{42} : g\left(\left\{x_\sigma^{(j),k}\right\}_{1\leqslant j\leqslant 3}^{1\leqslant k\leqslant 7}\right)\geqslant\alpha\right\}$. Рассмотрим линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^{126}\to\mathbb{R}^{21}$, при котором каждому вектору $\vec{x}\in\mathbb{R}^{126}$ сопоставляется вектор $\vec{y} = (y_1,...,y_{21}) \in \mathbb{R}^{21}$ так, что $y_1 = \sum_{\sigma\in S_3} x_\sigma^{(1),1}$, $y_2 = \sum_{\sigma\in S_3} x_\sigma^{(1),2}$, ..., $y_{21} = \sum_{\sigma\in S_3} x_\sigma^{(3),7}$. Пусть $Q\subset\mathbb{R}^{21}$ - образ множества $P\subset\mathbb{R}^{126}$ при рассматриваемом отображении. Тогда

$$\underline{Ri} = \inf_{\vec{x}\in P} f\left(\left\{\sum_\sigma x_\sigma^{(j),k}\right\}_{1\leqslant j\leqslant 3}^{1\leqslant k\leqslant 7}\right) = \inf_{\vec{y}\in Q} f(y_1,...,y_{21}).$$

Кроме того, если $\vec{x}\in P\subset N_{42}$, то $\sum_{j=1}^7\sum_{\sigma\in S_3} x_\sigma^{(i),j} = 1$, $i = 1,2,3$, поэтому если $\vec{y}\in Q$, то $y_1+y_2+...+y_7 = 1$, $y_8+y_9+...y_{14} = 1$ и $y_{15}+y_{16}+...+y_{21} = 1$. Пусть $Q_{18}\subset\mathbb{R}^{18}$ - проекция множества Q на подпространство пространства $\mathbb{R}^{21}$, порожденное координатами под номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20 (т.е. всеми координатами, за исключением координат под номерами 7, 14 и 21). При любом $\vec{z} = (z_1, z_2, ..., z_{18}) \in Q_{18}$ положим

$$f^*(z_1,z_2,...,z_{18}) := f\Bigg(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6,1-\sum_{1\leqslant j\leqslant 6} z_j,$$
$$z_7,z_8,...,z_{12},1-\sum_{7\leqslant j\leqslant 12} z_j, z_{13},z_{14},...,z_{18},1-\sum_{13\leqslant j\leqslant 18} z_j\Bigg),$$

тогда $\underline{Ri} = \inf_{\vec{z}\in Q_{18}} f^*(z_1,z_2,...,z_{18})$. Отметим, что множество Q_{18} (как и множество P) строится независимо от функции f (другими словами, при фиксированной функции g множество Q_{18} одинаково для всех функций f). Итак, теорема 13 доказана.

2.3 Понижение размерности экстремальной задачи для интервальных критериев в случае $n \geqslant 3$

Обобщим полученные выше результаты на случай $n \geqslant 3$. Пусть, как и ранее, M - множество вероятностных мер на измеримом пространстве (Ω, Σ). Для любых n $(n \geqslant 3)$ вероятностных мер $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ на (Ω, Σ) можно рассмотреть задачу различения n гипотез H_i: наблюдение ξ имеет распределение μ_i, $i = 1, 2, ..., n$. Теперь мы, как и ранее для случая $n = 3$, рассмотрим «интервальные критерии». Каждому нерандомизированному интервальному критерию в этой задаче соответствуют измеримое разбиение $\vec{C} = \{C_1, C_2, ..., C_{2^n-1}\}$ пространства Ω $(C_i : \bigsqcup_{i=1}^{2^n-1} C_i = \Omega)$, где через C_1, C_2, ..., C_{2^n-1} обозначены такие множества, что каждому C_i соответствует (биективным образом) свое непустое подмножество $\{l_1, ..., l_k\}$ множества $\{1, 2, ..., n\}$, причем если $\omega \in C_i$, $1 \leqslant i \leqslant 2^n - 1$, то наблюдение не противоречит гипотезам H_{l_1}, H_{l_2}, ..., H_{l_k} и противоречит остальным. Далее, через $\vec{\mu}$ обозначим упорядоченный набор $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$, через $\vec{\mu}(\vec{C})$ обозначим упорядоченный набор $(\mu_1(C_1), \mu_1(C_2), ..., \mu_n(C_{2^n-1}))$. Как и ранее, будем считать, что качество критерия можно представить функцией $f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ со значениями в $\mathbb{R}$; иногда будет использоваться также обозначение $f(\{\mu_j(C_k)\}_{1 \leqslant j \leqslant n}^{1 \leqslant k \leqslant 2^n-1})$.

Фиксируем такие числа $r_{ij} = r_{ji}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$, что $0 \leqslant r_{ij} \leqslant 1$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, $r_{ij} + r_{jl} \geqslant r_{il}$, $1 \leqslant i, j, l \leqslant n$, $i \neq j \neq l \neq i$. Рассмотрим семейство всевозможных наборов из n вероятностных мер на Σ, между которыми заданы попарные расстояния по вариации: $\rho(\mu_i, \mu_j) = r_{ij}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Будем называть такие наборы мер $\vec{r}$-согласованными. Далее, для фиксированной тройки мер, числа α и функций $f, g : [0,1]^{n \cdot (2^n-1)} \to \mathbb{R}$ обозначим через $\mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})$ класс таких разбиений $\vec{C} = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$ пространства Ω, которые удовлетворяют условию $g(\vec{\mu}(\vec{C})) \geqslant \alpha$. Через $\underline{Ri}$ и $\overline{Ri}$ обозначим, как и ранее, следующие величины:

$$\underline{Ri} = \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \inf_{\vec{C} \in \mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})), \quad \overline{Ri} = \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \inf_{\vec{C} \in \mathcal{E}_g^\alpha(\vec{\mu})} f(\vec{\mu}(\vec{C})).$$

При этом по определению полагаем, что инфимум по пустому множеству равен $+\infty$. Получим удобные выражения для чисел $\underline{Ri}$ и $\overline{Ri}$.

Для этого, как и ранее (см. стр. 23), рассмотрим такие измеримые множества R_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, что R_{ij} положительно относительно знакопеременной меры $\mu_i - \mu_j$, а его дополнение $\Omega \backslash R_{ij}$ - отрицательно. С помощью множеств

R_{ij} построим, как и ранее, такой набор множеств B_σ, что

$$\mu_{i_1}(B_{i_1,i_2,...,i_n}\bigcap F)\geqslant\mu_{i_2}(B_{i_1,i_2,...,i_n}\bigcap F)\geqslant...\geqslant\mu_{i_n}(B_{i_1,i_2,...,i_n}\bigcap F)$$

при любом $F\in\Sigma$. Заметим, что число множеств вида $B_{i_1,i_2,...,i_n}$ равно $n!$.

Введем множество S_n перестановок индексов множеств $B_{i_1,i_2,...,i_n}$ совершенно аналогично введению множества S_3. Через $\mathcal{C}(S_n)$ обозначим множество всевозможных разбиений S_n на 2^n-1 непересекающихся множеств, т.е. разбиений вида $\vec{C}=\{C_1,C_2,...,C_n\}$, где $\bigsqcup_{k=1}^n C_k=S_n$. Множество $\Lambda_{n!}$ строится так же, как и множество Λ_6, и с помощью отображения $\phi_{n!}$ конструируется множество $N_{n!}$. Множество $\Lambda_{n!\cdot(2^n-1)}$ строится по аналогии с множеством Λ_{42}. С помощью отображения $\phi_{n\cdot n!}$ конструируется множество $N_{n!\cdot(2^n-1)}$. Тогда, повторяя рассуждения теорем 11 и 12 с естественными изменениями, получаем следующий результат.

Теорема 14. *Пусть в σ-алгебре измеримого пространства (Ω,Σ) содержится по крайней мере $n!\cdot(2^n-1)$ непустых попарно не пересекающихся множества. Тогда для любых функций $f,g:[0,1]^{n\cdot(2^n-1)}\to\mathbb{R}$ и любого числа $\alpha\in\mathbb{R}$ выполняются следующие равенства:*

$$\underline{Ri}=\inf_{\vec{x}\in N_{n!\cdot(2^n-1)}:g(\{\sum_\sigma x_\sigma^{(j),k}\}_{1\leqslant j\leqslant n}^{1\leqslant k\leqslant 2^n-1})\geqslant\alpha} f\left(\left\{\sum_\sigma x_\sigma^{(j),k}\right\}_{1\leqslant j\leqslant n}^{1\leqslant k\leqslant 2^n-1}\right),$$

$$\overline{Ri}=\sup_{\vec{x}\in N_{n!}}\min_{\vec{C}\in\mathcal{C}(S_n):g(\{\sum_{\sigma\in C_k} x_\sigma^{(j)}\}_{1\leqslant j\leqslant n}^{1\leqslant k\leqslant 2^n-1})\geqslant\alpha} f\left(\left\{\sum_{\sigma\in C_k} x_\sigma^{(j)}\right\}_{1\leqslant j\leqslant n}^{1\leqslant k\leqslant 2^n-1}\right),$$

где множества $N_{n!\cdot(2^n-1)}\subset[0,1]^{n\cdot n!\cdot(2^n-1)}$ и $N_{n!}\subset[0,1]^{n\cdot n!}$ являются замкнутыми выпуклыми многогранниками.

Для доказательства формулы для величины $\overline{Ri}$ из теоремы 14 достаточно, чтобы в σ-алгебре измеримого пространства (Ω,Σ) содержалось по крайней мере $n!$ непустых попарно не пересекающихся множеств.

Несложно видеть, что теорема 13 может быть легко обобщена (с естественными изменениями) на случай произвольного количества мер.

Заметим, что, как и ранее, для непрерывных кусочно-линейных функций f, g теорема 14 сводит задачу о нахождении $\underline{Ri}$ и $\overline{Ri}$ к задачам линейного программирования. В частности, теорема 14 позволяет найти $\underline{Ri}$ и $\overline{Ri}$ в случае, когда $f = \max_i(\mathbf{E}_i(\#C))$, $g(\vec{\mu}(\vec{C})) = \min_{1\leqslant i\leqslant n}(\mu_i(C^{(i)}))$ и в случае, когда $f = \sum_i \mathbf{E}_i(\#C)$, $g = \sum_i \mu_i(C^{(i)})$ (где $C^{(i)}$ определяются по аналогии со случаем, когда $n = 3$).

Таким образом, результаты, полученные в случае $n = 3$ и подробно доказанные выше, непосредственно обобщаются на случай произвольного конечного количества мер.

Обобщение лемм 10 и 11 на случай произвольного конечного n доказывает, что экстремум в задаче об интервальном оценивании достигается на множестве дискретных мер при любом $n \geqslant 3$, что является достаточно типичной ситуацией.

Глава 3. Статистика Пирсона и процесс Бесселя

В данной главе доказано, что при надлежащей нормировке по времени конечномерные распределения процесса, образованного последовательными значениями статистики Пирсона для выборок увеличивающихся со временем объемов, сходятся к конечномерным распределениям стационарного случайного процесса — нормированного квадрата процесса Бесселя. Полученные ранее в [4] результаты о предельных совместных распределениях статистики Пирсона используются для вывода явных формул для плотности совместных распределений процесса Бесселя.

3.1 Основные определения и результаты

Рассмотрим схему независимых испытаний с $N \geqslant 2$ исходами. Будем считать, что вероятность j-го исхода равна $p_j > 0, j = 1, \ldots, N$. Для $t = 1, 2, \ldots$ и $j \in \{1, \ldots, N\}$ введем индикаторы $I_j(t)$: $I_j(t) = 1$, если при t-м испытании осуществился j-й исход, и $I_j(t) = 0$ в противном случае. Тогда $\sum_{t=1}^{n} I_j(t)$ — частота исхода j в первых n испытаниях. Статистика Пирсона

$$X(n) := \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{np_j} \left(\sum_{t=1}^{n} I_j(t) - np_j \right)^2$$

используется, например, в критерии согласия с гипотезой о том, что вероятности наблюдаемых исходов действительно равны $p_1, \ldots, p_N$ (см [5], [9]).

В ряде работ ([4], [8], [7], [3], [9]) изучались свойства последовательного критерия хи-квадрат, который строится на основании статистики $(X(n_1), X(n_2), \ldots, X(n_r))$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_r$. В связи с исследованием вероятностей ошибок такого критерия в [4] было доказано, что при любых $0 < t_1 < \ldots < t_k < \infty$ и $x_1^*, \ldots, x_k^* \geqslant 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X(\lfloor nt_1 \rfloor) > x_1^*, \ldots, X(\lfloor nt_k \rfloor) > x_k^*) = \int_{\frac{x_1^*}{2}}^{\infty} \ldots \int_{\frac{x_k^*}{2}}^{\infty} p_k(u_1, \ldots, u_k) du_1 \ldots du_k, \tag{3.1}$$

где ([4], формула (4.15) — в наших обозначениях)

$$p_k(u_1,\dots,u_k) =$$

$$= \left(\frac{t_k u_1 u_k}{t_1}\right)^{\frac{N-3}{4}} \frac{e^{u_2+\ldots+u_{k-1}}}{\Gamma(\frac{N-1}{2})} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\exp\left\{-\frac{u_i+u_{i+1}}{1-\frac{t_i}{t_{i+1}}}\right\}}{1-\frac{t_i}{t_{i+1}}} I_{\frac{N-3}{2}}\left(\frac{2\sqrt{t_i t_{i+1} u_i u_{i+1}}}{t_{i+1}-t_i}\right)$$

и $I_\delta(x)$ — функция Инфельда, т. е. модифицированная функция Бесселя первого рода (см., например, [2], [6], с. 139); она является каноническим решением дифференциального уравнения

$$x^2\frac{d^2\omega}{dx^2} + x\frac{d\omega}{dx} - (x^2+\delta^2)\omega = 0,$$

разлагается в степенной ряд: $I_\delta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+\delta}}{k!\Gamma(k+\delta+1)}$ и имеет различные интегральные представления.

Рассмотрим случайный процесс с дискретным временем $X(n)$, $n \geqslant 1$.

Теорема 15. *Если* $1 \leqslant s \leqslant t$, *то*

$$\mathbf{E}X(s) = N-1,\ \operatorname{cov}(X(s),X(t)) = 2(N-1)\frac{s}{t} + \frac{1}{t}\left(2-2N-N^2+\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{p_k}\right).$$

В частности, если $s,t\to\infty$ *так, что* $\frac{t}{s}\to C \geqslant 1$, *то*

$$\operatorname{cov}(X(s),X(t)) = \frac{2}{C}(N-1) + O(t^{-1}).$$

Доказательство см. на стр. 81.

В силу теоремы 15 дисперсия $\mathbf{D}X(t) = 2(N-1)+\frac{1}{t}\cdot(2-2N-N^2+\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{p_k})$; это выражение для дисперсии хорошо известно, см., например, [5], [9], [1].

Следствие 2. *Пусть* $s \geqslant 1$ *фиксировано. Тогда* $\operatorname{cov}(X(s),X(t))$ *строго монотонно убывает по* t *при* $t \geqslant s$, *за исключением случая* $s=1$, $p_1 = \ldots = p_N = \frac{1}{N}$*: тогда* $\operatorname{cov}(X(1),X(t)) = 0$ *при всех* $t \geqslant 1$.

Доказательство см. на стр. 84.

Пусть $W_1(t), W_2(t), \ldots$ — независимые стандартные винеровские процессы, т. е. независимые процессы с независимыми приращениями, $W_k(0)=0$ и приращение $W_k(t+s)-W_k(t)$ имеет нормальное распределение со средним

0 и дисперсией s при любых $k = 1, 2, \ldots$ и $t, s \geqslant 0$. При любом целом $M > 0$ случайный процесс $W^{(M)}(t) = (W_1(t), \ldots, W_M(t))$ является стандартным винеровским M-мерным процессом. Случайный процесс

$$\mathrm{Bes}_M(t) = \|W^{(M)}(t)\|_2 = \left(\sum\nolimits_{k=1}^{M} W_k^2(t)\right)^{1/2}$$

называется M-мерным процессом Бесселя; очевидно, $\mathrm{Bes}_M^2(t) = \sum_{k=1}^{M} W_k^2(t)$ и поэтому $\frac{1}{t}\,\mathrm{Bes}_M^2(t)$ имеет распределение хи-квадрат с M степенями свободы.

Теорема 16. *Последовательность случайных процессов $X(\lfloor nt \rfloor)$, $t > 0$, при $n \to \infty$ сходится в смысле конечномерных распределений к процессу $\frac{1}{t}\,\mathrm{Bes}_{N-1}^2(t)$.*

Доказательство см. на стр. 85.

Замечание. Случайный процесс

$$\widetilde{W}^{(M)}(t) = (\widetilde{W}_1(t), \ldots, \widetilde{W}_M(t)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{t}}\,W^{(M)}(t),$$

как и $W^{(M)}(t)$, является гауссовским процессом с нулевым средним, а ковариации между его компонентами равны

$$\mathrm{Cov}\left(\widetilde{W}_j^{(M)}(t), \widetilde{W}_k^{(M)}(s)\right) = \mathrm{Cov}\left(\tfrac{1}{\sqrt{t}}\,W_j(t), \tfrac{1}{\sqrt{s}}\,(W_k(t) + (W_k(s) - W_k(t)))\right) =$$

$$= \mathrm{Cov}\left(\tfrac{1}{\sqrt{t}}\,W_j(t), \tfrac{1}{\sqrt{s}}\,W_k(t)\right) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ \sqrt{\frac{t}{s}}\,, & j = k, \end{cases} \quad s > t \geqslant 0.$$

Случайный процесс $W^*(u) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \widetilde{W}^{(M)}(e^u)$, $u \in \mathbb{R}$, является стационарным в широком смысле, так как $\mathbf{E}W^*(u) = 0$ и

$$\mathrm{Cov}\left(W_j^*(u), W_k^*(u+v)\right) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ e^{-v/2}\,, & j = k, \end{cases} \quad v \geqslant 0,\ u \in \mathbb{R}.$$

Так как процесс $W^*(u)$ гауссовский, то он стационарен и в узком смысле. Следовательно, стационарными в узком смысле являются следующие функции от мгновенных значений процесса $W^*(u)$: процесс $e^{-u}\mathrm{Bes}_{N-1}^2(e^u)$ и процесс $e^{-u/2}\mathrm{Bes}_{N-1}(e^u)$.

Это замечание позволяет переформулировать теорему 16.

Теорема 16а. *Конечномерные распределения случайных процессов* $X(\lfloor ne^t \rfloor)$, $t \in \mathbb{R}$, *при* $n \to \infty$ *сходятся к конечномерным распределениям стационарного в узком смысле процесса* $e^{-t}\mathrm{Bes}^2_{N-1}(e^t)$.

Теорема 16 и формула (3.1) позволяют легко получить формулы для плотностей конечномерных распределений процесса Бесселя $\mathrm{Bes}_N(t)$.

Теорема 17. *При любом* $k \geqslant 2$ *и любых* $0 < t_1 < \ldots < t_k$ *совместное распределение* $(\mathrm{Bes}_N(t_1), \ldots, \mathrm{Bes}_N(t_k))$ *имеет плотность распределения*

$$b_{t_1,\ldots,t_k}(x_1, \ldots, x_k) =$$

$$= \frac{x_1}{t_1}\left(\frac{x_1^2 x_k^2}{4t_1^2}\right)^{\frac{N-2}{4}} \frac{e^{\frac{x_2^2}{2t_2}+\ldots+\frac{x_{k-1}^2}{2t_{k-1}}}}{\Gamma(\frac{N}{2})} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{x_{i+1}}{t_{i+1}-t_i} \exp\left\{-\frac{\frac{x_i^2}{2t_i}+\frac{x_{i+1}^2}{2t_{i+1}}}{1-\frac{t_i}{t_{i+1}}}\right\} I_{\frac{N}{2}-1}\left(\frac{x_i x_{i+1}}{t_{i+1}-t_i}\right)$$

при $x_1, \ldots, x_k \geqslant 0$*;* $b_{t_1,\ldots,t_k}(x_1, \ldots, x_k) = 0$*, если* $\min\{x_1, \ldots, x_k\} < 0$.

Доказательство см. на стр. 88.

3.2 Доказательство теоремы 15 о точной формуле для ковариационной функции процесса $X(t)$

Пусть $I_j^*(u) := I_j(u) - p_j$, тогда $X(s) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{sp_j}\left(\sum_{u=1}^s I_j^*(u)\right)^2$ и при любых $i, j \in \{1, \ldots, N\}$, $i \neq j$, $u \geqslant 1$

$$\begin{gathered}
\mathbf{E}I_i^*(u) = 0, \quad \mathbf{E}\left(I_i^*(u)\right)^2 = p_i(1-p_i)^2 + (1-p_i)p_i^2 = p_i(1-p_i),\\
\mathbf{E}I_i^*(u)I_j^*(u) = p_i(1-p_i)(-p_j) + p_j(-p_i)(1-p_j) + (1-p_i-p_j)p_ip_j = -p_ip_j,\\
\mathbf{E}\left(I_i^*(u)\right)^4 = p_i(1-p_i)^4 + (1-p_i)p_i^4 = p_i(1-p_i)(1-3p_i(1-p_i)),\\
\mathbf{E}\left(I_i^*(u)\right)^2\left(I_j^*(u)\right)^2 = p_i(1-p_i)^2p_j^2 + p_jp_i^2(1-p_j)^2 + (1-p_i-p_j)p_i^2p_j^2 =\\
= p_ip_j(p_i+p_j-3p_ip_j).
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Из равенств (3.2) и независимости $I_i^*(1), I_i^*(2), \ldots$ следует, что

$$\mathbf{E}X(s) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{sp_j}\mathbf{E}\left(\sum_{u=1}^s I_j^*(u)\right)^2 = \mathbf{E}\sum_{j=1}^N \frac{1}{sp_j}\sum_{u=1}^s \left(I_j^*(u)\right)^2 =$$
$$= \sum_{j=1}^N (1-p_j) = N - 1. \tag{3.3}$$

Несложно видеть, что (при $1 \leqslant s \leqslant t$)

$$
\begin{gathered}
\mathbf{E}X(s)X(t) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{sp_i tp_j} \mathbf{E} \left(\sum\nolimits_{u=1}^{s} I_i^*(u) \right)^2 \left(\sum\nolimits_{v=1}^{t} I_j^*(v) \right)^2 = \\
= \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{sp_i tp_j} \mathbf{E} \Big[\Big(\sum\nolimits_{u=1}^{s} (I_i^*(u))^2 + 2 \sum\nolimits_{1 \leqslant u_1 < u_2 \leqslant s} I_i^*(u_1) I_i^*(u_2) \Big) \times \\
\times \Big(\sum\nolimits_{v=1}^{t} (I_j^*(v))^2 + 2 \sum\nolimits_{1 \leqslant v_1 < v_2 \leqslant t} I_j^*(v_1) I_j^*(v_2) \Big) \Big] = \\
= \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{sp_i tp_j} \sum_{\substack{1 \leqslant u \leqslant s \\ 1 \leqslant v \leqslant t}} \mathbf{E}(I_i^*(u))^2 (I_j^*(v))^2 + \\
+4 \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{sp_i tp_j} \sum_{\substack{1 \leqslant u_1 < u_2 \leqslant s \\ 1 \leqslant v_1 < v_2 \leqslant t}} \mathbf{E} I_i^*(u_1) I_i^*(u_2) I_j^*(v_1) I_j^*(v_2),
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

так как остальные слагаемые равны 0: если $v_1 < v_2$, то $\mathbf{E}(I_i^*(u))^2 I_j^*(v_1) I_j^*(v_2) = 0$, поскольку или $v_1 \neq u$, или $v_2 \neq u$, и в любом случае один из сомножителей с нулевым математическим ожиданием не зависит от остальных; аналогично $\mathbf{E}(I_j^*(v))^2 I_i^*(u_1) I_i^*(u_2) = 0$ при $u_1 < u_2$.

Разобьем первую сумму в правой части (3.4) на три слагаемых:

$$
\begin{gathered}
\sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{sp_i tp_j} \sum_{\substack{1 \leqslant u \leqslant s \\ 1 \leqslant v \leqslant t}} \mathbf{E}(I_i^*(u))^2 (I_j^*(v))^2 = \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant N \\ i \neq j}} \frac{1}{sp_i tp_j} \sum_{u=1}^{s} \mathbf{E}(I_i^*(u))^2 (I_j^*(u))^2 + \\
+ \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{sp_i tp_i} \sum_{u=1}^{s} \mathbf{E}(I_i^*(u))^4 + \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{sp_i tp_i} \sum\nolimits_{\substack{1 \leqslant u \leqslant s \\ 1 \leqslant v \leqslant t \\ v \neq u}} \mathbf{E}(I_i^*(u))^2 (I_j^*(v))^2.
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

Первое и второе слагаемые в (3.5) вычисляются с помощью формул (3.2):

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant N\\ i\neq j}} \frac{1}{sp_itp_j}\sum_{u=1}^{s}\mathbf{E}(I_i^*(u))^2(I_j^*(u))^2 = \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant N\\ i\neq j}} \frac{sp_ip_j(p_i+p_j-3p_ip_j)}{sp_itp_j} = \\
&= \frac{1}{t}\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant N\\ i\neq j}}(p_i+p_j-3p_ip_j) = \frac{2(N-1)}{t} - \frac{3}{t}\left(1-\sum\nolimits_{i=1}^{N} p_i^2\right), \\
&\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{sp_itp_i}\sum_{u=1}^{s}\mathbf{E}(I_i^*(u))^4 = \sum_{i=1}^{N}\frac{sp_i(1-p_i)(1-3p_i(1-p_i))}{sp_itp_i} = \\
&= \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N}\frac{1-4p_i+6p_i^2-3p_i^3}{p_i} = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i} - \frac{4N}{t} + \frac{6}{t} - \frac{3}{t}\sum_{i=1}^{N}p_i^2.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

При вычислении третьего слагаемого в (3.5) используем еще независимость случайных величин $I_i^*(u)$ и $I_j^*(v)$ при $u \neq v$:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{N}\frac{1}{sp_itp_i}\sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant s\\ 1\leqslant v\leqslant t\\ v\neq u}}\mathbf{E}(I_i^*(u))^2(I_j^*(v))^2 = \sum_{i,j=1}^{N}\frac{s(t-1)p_i(1-p_i)p_j(1-p_j)}{sp_itp_j} = \\
&= \frac{t-1}{t}\sum\nolimits_{i,j=1}^{N}(1-p_i)(1-p_j) = \left(1-\frac{1}{t}\right)(N-1)^2.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Таким образом,

$$
\sum_{i,j=1}^{N}\frac{1}{sp_itp_j}\sum_{\substack{1\leqslant u\leqslant s\\ 1\leqslant v\leqslant t}}\mathbf{E}(I_i^*(u))^2(I_j^*(v))^2 = (N-1)^2 + \frac{1}{t}\left[\sum\nolimits_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i} - N^2\right]. \tag{3.8}
$$

Рассмотрим вторую сумму в правой части (3.4). Заметим, что если $1 \leqslant u_1 < u_2 \leqslant s$, $1 \leqslant v_1 < v_2 \leqslant t$ и $(u_1, u_2) \neq (v_1, v_2)$, то в произведении $I_i^*(u_1)I_i^*(u_2)I_j^*(v_1)I_j^*(v_2)$ хотя бы один сомножитель не зависит от остальных и поэтому $\mathbf{E}I_i^*(u_1)I_i^*(u_2)I_j^*(v_1)I_j^*(v_2) = 0$. Используя это соображение и формулы (3.2), находим:

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{sp_i tp_j} \sum\nolimits_{\substack{1\leqslant u_1<u_2\leqslant s\\ 1\leqslant v_1<v_2\leqslant t}} \mathbf{E} I_i^*(u_1) I_i^*(u_2) I_j^*(v_1) I_j^*(v_2) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{sp_i tp_j} \sum\nolimits_{1\leqslant u_1<u_2\leqslant s} \mathbf{E} I_i^*(u_1) I_j^*(u_1) I_i^*(u_2) I_j^*(u_2) =$$

$$= \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant N\\ i\neq j}} \frac{1}{sp_i tp_j} C_s^2 p_i^2 p_j^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{sp_i tp_i} C_s^2 p_i^2 (1-p_i)^2 =$$

$$= \frac{s-1}{2t} \left(\sum\nolimits_{i,j=1}^{N} p_i p_j + \sum\nolimits_{i=1}^{N} (1-2p_i) \right) = \frac{s-1}{2t} (N-1).$$

Из последнего равенства, (3.4), (3.8) и (3.3) следует, что при $1 \leqslant s \leqslant t$

$$\operatorname{cov}(X(s), X(t)) = \mathbf{E}X(s)X(t) - \mathbf{E}X(s)\mathbf{E}X(t) =$$
$$= \frac{1}{t} \left[\sum\nolimits_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} - N^2 \right] + 2\, \frac{s-1}{t} (N-1),$$

что совпадает с формулой в утверждении теоремы 15.

3.3 Доказательство следствия 2 о монотонности ковариационной функции процесса $X(t)$

Согласно теореме 15

$$\operatorname{cov}(X(s), X(t)) = 2(N-1)\frac{s}{t} + \frac{1}{t} \left(2(1-N) - N^2 + \sum\nolimits_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \right) =$$
$$= 2(N-1)\frac{s-1}{t} + \frac{1}{t} \left(\sum\nolimits_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} - N^2 \right).$$

Очевидно, $2(N-1)(s-1) \geqslant 0$. В силу выпуклости функции $f(p) = \frac{1}{p^2}$ и неравенства Иенсена

$$\sum\nolimits_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} = \sum\nolimits_{i=1}^{N} p_i \frac{1}{p_i^2} \geqslant \left(\sum\nolimits_{i=1}^{N} p_i \frac{1}{p_i} \right)^2 = N^2,$$

Таким образом, оба слагаемых, составляющих $\operatorname{cov}(X(s), X(t))$, неотрицательны и не возрастают по t. Их сумма равна 0 только если $s = 1 \leqslant t$ и $p_1 = \ldots = p_N = \frac{1}{N}$, в остальных случаях $\operatorname{cov}(X(s), X(t))$ положительна и строго монотонно убывает на множестве $t \geqslant s$.

3.4 Доказательство теоремы 16 о сходимости конечномерных распределений

Положим
$$\vec{\chi}(u) = \left(\frac{I_1^*(u)}{\sqrt{p_1}}, \dots, \frac{I_N^*(u)}{\sqrt{p_N}}\right), \quad u = 1, 2, \dots$$
Векторы $\vec{\chi}(u)$, $u = 1, 2, \dots$, независимы и одинаково распределены. Носителем их распределения является гиперплоскость $\sqrt{p_1}x_1 + \dots + \sqrt{p_N}x_N = 0$ в $\mathbb{R}^N$. Очевидно, $\mathbf{E}\vec{\chi}(1) = \vec{0}$; из формул (3.2) легко следует, что матрица ковариаций вектора $\vec{\chi}_1$ имеет вид

$$C_\chi = \begin{pmatrix} 1-p_1 & -\sqrt{p_1p_2} & \dots & -\sqrt{p_1p_N} \\ -\sqrt{p_1p_2} & 1-p_2 & \dots & -\sqrt{p_2p_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sqrt{p_1p_N} & -\sqrt{p_2p_N} & \dots & 1-p_N \end{pmatrix}.$$

Лемма. *Вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, имеющий нормальное распределение в $\mathbb{R}^N$ с нулевым средним и матрицей ковариаций C_χ, можно представить в виде $\gamma_1\vec{e}_1^* + \dots + \gamma_{N-1}\vec{e}_{N-1}^*$, где $\vec{e}_1^*, \dots, \vec{e}_{N-1}^*$ — ортонормированный базис в гиперплоскости $\sqrt{p_1}x_1 + \dots + \sqrt{p_N}x_N = 0$, а $\gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. В частности, $\left|\vec{\xi}\right|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_N^2$ имеет распределение хи-квадрат с $N-1$ степенями свободы.*

Доказательство. Пусть вектор $\vec{\Xi} = (\Xi_1, \dots, \Xi_N)$ имеет сферически симметричное нормальное распределение в $\mathbb{R}^N$ с единичной матрицей ковариаций. Рассмотрим наряду с исходным базисом $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N$ в $\mathbb{R}^N$ ортонормированный базис $\vec{e}_1^*, \dots, \vec{e}_N^*$, в котором $\vec{e}_N^* = \left(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_N}\right)$. Вектор $\vec{\xi}$ можно разложить как по исходному, так и по новому базисам:

$$\vec{\Xi} = \Xi_1\vec{e}_1 + \dots + \Xi_N\vec{e}_N = \gamma_1\vec{e}_1^* + \dots + \gamma_N\vec{e}_N^*, \tag{3.9}$$

где $\gamma_k = (\vec{\Xi}, \vec{e}_k^*)$, $k = 1, \dots, N$.

Так как $\vec{\Xi}$ имеет сферически симметричное нормальное распределение с единичной матрицей ковариаций, а базис $\vec{e}_1^*, \dots, \vec{e}_N^*$ ортонормирован, то $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение, а вектор $\vec{\gamma} = \gamma_1\vec{e}_1^* + \dots + \gamma_{N-1}\vec{e}_{N-1}^*$ имеет нормальное распределение, носителем которого является гиперплоскость $\sqrt{p_1}x_1 + \dots + \sqrt{p_N}x_N = 0$.

Очевидно, $\mathbf{M}\vec{\gamma} = \vec{0}$. Найдем ковариационную матрицу $\vec{\gamma}$. В силу (3.9) $\vec{\Xi} = \vec{\gamma} + \gamma_N \vec{e}_N^{\,*}$ и случайные векторы $\vec{\gamma}$ и $\gamma_N \vec{e}_N^{\,*}$ независимы. Так как ковариационная матрица суммы независимых случайных векторов с конечными вторыми моментами равна сумме ковариационных матриц этих векторов, то

$$\mathrm{Cov}(\vec{\Xi}) = E = \mathrm{Cov}(\vec{\gamma}) + \mathrm{Cov}(\gamma_N \vec{e}_N^{\,*}),$$

где E — единичная матрица, и

$$\mathrm{Cov}(\gamma_N \vec{e}_N^{\,*}) = \mathrm{Cov}(\gamma_N\sqrt{p_1}, \ldots, \gamma_N\sqrt{p_N}) = \|\sqrt{p_i p_j}\|_{i,j=1}^{N},$$

т. е.

$$\mathrm{Cov}(\vec{\gamma}) = E - \|\sqrt{p_i p_j}\|_{i,j=1}^{N}. \tag{3.10}$$

Лемма доказана.

Пусть $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k$. Из независимости векторов $\vec{\chi}(u) = \left(\frac{I_1^*(u)}{\sqrt{p_1}}, \ldots, \frac{I_N^*(u)}{\sqrt{p_N}}\right)$, $u = 1, 2, \ldots$, из равенств $\mathbf{E}\vec{\chi}(u) = 0$, $\mathrm{Cov}(\vec{\chi}(u)) = C_\chi$ и центральной предельной теоремы следует, что при $n \to \infty$ случайные векторы

$$\vec{\nu}([nt_{i-1}], [nt_i]) = \sum_{u=[nt_{i-1}]+1}^{[nt_i]} \vec{\chi}(u) = \left(\frac{1}{\sqrt{p_i}} \sum\nolimits_{u=[nt_{i-1}]+1}^{[nt_i]} I_j^*(u)\right)_{j=1}^{N}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

независимы и асимптотически нормальны с параметрами $(\vec{0}, n(t_i - t_{i-1})C_\chi)$, $i = 1, \ldots, k$, соответственно. Поэтому совместное распределение нарастающих сумм векторов $\frac{1}{\sqrt{n}}\,\vec{\nu}([nt_{i-1}], [nt_i])$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\,\vec{\nu}(0, [nt_1]) = \left(\frac{1}{\sqrt{np_j}} \sum\nolimits_{u=1}^{[nt_1]} I_j^*(u)\right)_{j=1}^{N}, \tag{3.11}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\,\vec{\nu}(0, [nt_2]) = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\vec{\nu}(0, [nt_1]) + \frac{1}{\sqrt{n}}\,\vec{\nu}([nt_1], [nt_2]) = \left(\frac{1}{\sqrt{np_j}} \sum\nolimits_{u=1}^{[nt_2]} I_j^*(u)\right)_{j=1}^{N}, \ldots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\,\vec{\nu}(0, [nt_k]) = \sum\nolimits_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}}\,\vec{\nu}([nt_{i-1}], [nt_i]) = \left(\frac{1}{\sqrt{np_j}} \sum\nolimits_{u=1}^{[nt_k]} I_j^*(u)\right)_{j=1}^{N},$$

является асимптотически нормальным с нулевым математическим ожиданием и блочной ковариационной матрицей

$$\begin{Vmatrix} t_1C_\chi & t_1C_\chi & t_1C_\chi & \dots & t_1C_\chi \\ t_1C_\chi & t_2C_\chi & t_2C_\chi & \dots & t_2C_\chi \\ t_1C_\chi & t_2C_\chi & t_3C_\chi & \dots & t_3C_\chi \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1C_\chi & t_2C_\chi & t_3C_\chi & \dots & t_kC_\chi \end{Vmatrix} = \left\| \min \{t_i, t_j\} C_\chi \right\|_{i,j=1}^k .$$

Это распределение совпадает с совместным распределением значений в моменты времени $t_1, \dots, t_k$ винеровского процесса $W_\chi(t)$, $W_\chi(0) = \vec{0}$, со значениями в $\mathbb{R}^N$ с независимыми приращениями, имеющими нормальные распределения: $W_\chi(t+u) - W_\chi(t) \sim \mathcal{N}\left(\vec{0}, uC_\chi\right)$. Из доказанной выше леммы следует, что процесс $W_\chi(t)$ принимает значения в гиперплоскости $\sqrt{p_1}x_1 + \dots + \sqrt{p_N}x_N = 0$ и в ортонормированном базисе $\vec{e}_1^*, \dots, \vec{e}_N^*$ является стандартным $(N-1)$-мерным винеровским процессом.

Совпадение предельных совместных распределений векторов (3.11) с конечномерными распределениями $W_\chi(t)$ означает, что конечномерные распределения процессов $\frac{1}{\sqrt{n}}\,\vec{\nu}(0,[nt]) = \left(\frac{1}{\sqrt{np_j}} \sum_{u=1}^{[nt]} I_j^*(u)\right)_{j=1}^N$, $t \geqslant 0$, при $n \to \infty$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $W_\chi(t)$, сферически симметричного $(N-1)$-мерного винеровского процесса. Следовательно, конечномерные распределения процессов $\frac{1}{n}\left|\vec{\nu}(0,[nt])\right|^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{p_j}\sum_{u=1}^{[nt]} I_j^*(u)\right)^2$, $t \geqslant 0$ при $n \to \infty$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $|W_\chi(t)|^2$, т. е. к распределениям процесса $\mathrm{Bes}_{N-1}^2(t)$, являющегося квадратом $(N-1)$-мерного процесса Бесселя $\mathrm{Bes}_{N-1}(t)$.

Наконец, каждый процесс $X([nt]) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{[nt]p_j}\left(\sum_{u=1}^{[nt]} I_j^*(u)\right)^2$, $t \geqslant 0$, отличается от соответствующего процесса $\frac{1}{n}\left|\vec{\nu}(0,[nt])\right|^2$, $t \geqslant 0$, только тем, что вместо нормирующего множителя $\frac{1}{n}$ используются зависящие от времени нормирующие множители $\frac{1}{[nt]}$. Поэтому из сходимости при $n \to \infty$ конечномерных распределений процессов $\frac{1}{n}\left|\vec{\nu}(0,[nt])\right|^2$, $t \geqslant 0$, к конечномерным распределениям процесса $\mathrm{Bes}_{N-1}^2(t)$ следует сходимость конечномерных распределений процессов $X([nt])$, $t \geqslant 0$, к конечномерным распределениям процесса $\frac{1}{t}\,\mathrm{Bes}_{N-1}^2(t)$.

3.5 Доказательство теоремы 17 о явном виде плотности конечномерных распределений процесса Бесселя

Из формулы (3.1) и теоремы 16 следует, что при любых $0 < t_1 < \ldots < t_k$ и $x_1^*, \ldots, x_k^* \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\left(\tfrac{1}{t_1}\operatorname{Bes}^2_{N-1}(t_1) > x_1^*, \ldots, \tfrac{1}{t_k}\operatorname{Bes}^2_{N-1}(t_k) > x_k^*\right) = \\ = \int_{\frac{x_1^*}{2}}^{\infty} \cdots \int_{\frac{x_k^*}{2}}^{\infty} p_k(u_1, \ldots, u_k) du_1 \ldots du_k.$$

Так как $\{\operatorname{Bes}_{N-1}(t) > x\} = \left\{\frac{1}{t}\operatorname{Bes}^2_{N-1}(t) > \frac{x^2}{t}\right\}$ при $x \geqslant 0$, то

$$\mathbf{P}(\operatorname{Bes}_{N-1}(t_1) > x_1, \ldots, \operatorname{Bes}_{N-1}(t_k) > x_k) = \int_{\frac{x_1^2}{2t_1}}^{\infty} \cdots \int_{\frac{x_k^2}{2t_k}}^{\infty} p_k(u_1, \ldots, u_k) du_1 \ldots du_k.$$

Поэтому плотность $b_{t_1,\ldots,t_k}(x_1, \ldots, x_k)$ совместного распределения $(\operatorname{Bes}_{N-1}(t_1), \ldots, \operatorname{Bes}_{N-1}(t_k))$ имеет вид

$$b_{t_1,\ldots,t_k}(x_1, \ldots, x_k) = p_k\left(\frac{x_1^2}{2t_1}, \ldots, \frac{x_k^2}{2t_k}\right)\frac{x_1 \ldots x_k}{t_1 \ldots t_k} =$$

$$= \frac{x_1 \ldots x_k}{t_1 \ldots t_k}\left(\frac{x_1^2 x_k^2}{4t_1^2}\right)^{\frac{N-3}{4}} \frac{e^{\frac{x_2^2}{2t_2} + \ldots + \frac{x_{k-1}^2}{2t_{k-1}}}}{\Gamma(\frac{N-1}{2})} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\exp\left\{-\frac{\frac{x_i^2}{2t_i} + \frac{x_{i+1}^2}{2t_{i+1}}}{1 - \frac{t_i}{t_{i+1}}}\right\}}{(1 - \frac{t_i}{t_{i+1}})} I_{\frac{N-3}{2}}\left(\frac{\sqrt{t_i t_{i+1}\frac{x_i^2 x_{i+1}^2}{t_i t_{i+1}}}}{t_{i+1} - t_i}\right) =$$

$$= \frac{x_1}{t_1}\left(\frac{x_1^2 x_k^2}{4t_1^2}\right)^{\frac{N-3}{4}} \frac{e^{\frac{x_2^2}{2t_2} + \ldots + \frac{x_{k-1}^2}{2t_{k-1}}}}{\Gamma(\frac{N-1}{2})} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{x_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} \exp\left\{-\frac{\frac{x_i^2}{2t_i} + \frac{x_{i+1}^2}{2t_{i+1}}}{1 - \frac{t_i}{t_{i+1}}}\right\} I_{\frac{N-3}{2}}\left(\frac{x_i x_{i+1}}{t_{i+1} - t_i}\right).$$

Для завершения доказательства теоремы 17 остается заменить в этой формуле N на $N + 1$.

Заключение

В заключении перечислены основные результаты, полученные в диссертационой работе.

- В задаче различения $n \geqslant 3$ гипотез с заданными расстояниями по вариации между распределениями наблюдений:
  А) показано, что нахождение экстремальных значений произвольных кусочно-линейных непрерывных функций от вероятностей ошибок сводится к решению конечномерной задачи линейного программирования;
  Б) для экстремальных значений нескольких конкретных функций от вероятностей ошибок найдены точные формулы (при $n = 3$) и оценки (при $n \geqslant 3$).

- Доказано, что конечномерные распределения последовательности значений статистики Пирсона, построенных по выборкам растущих объемов при надлежащей нормировке по времени сходятся к конечномерным распределениям стационарного случайного процесса (нормированного квадрата процесса Бесселя). Опубликованные в 1969 г. формулы для предельных совместных распределений статистики Пирсона использованы при выводе явных формул для плотности совместных распределений процесса Бесселя.

Список литературы

[1] Боровков А.А., Математическая статистика. СПб.: Лань, 2010, 704 стр.

[2] Ватсон Г.Н., Теория бесселевых функций. М.: Изд. иностр. лит., 1949, 800 с.

[3] Гермогенов А.П., Ронжин А.Ф., Последовательный критерий хи-квадрат, Теория вероятн. и ее примен., **29**:2 (1984), 387-392.

[4] Захаров В.К., Сарманов О.В., Севастьянов Б.А.,. Последовательный критерий χ^2, Матем. сб., **79(121)**:3(7) (1969), 444-460.

[5] Крамер Г., Математические методы статистики. М.: МИР, 1975, 648 с.

[6] Лебедев Н.Н., Специальные функции и их приложения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1963, 359 с.

[7] Ронжин А.Ф., Предельное распределение процесса хи-квадрат при наличии разладки, Последовательный критерий хи-квадрат, Теория вероятн. и ее примен., **29**:3 (1984), 590-594.

[8] Селиванов Б.И., Чистяков В.П., Многомерное распределение хи-квадрат для неоднородной полиномиальной схемы, Дискрет. матем., **10**:2 (1998), 52-61.

[9] Туманян С.Х., Асимптотическое распределение критерия χ^2 при одновременном возрастании объема наблюдений и числа групп, Теория вероятн. и ее примен., **1**:1 (1956), 131-145.

[10] Ширяев А.Н., Вероятность, т.1. М.: МНЦМО, 2004.

[11] Ben-Bassat M., f-Entropies, Probability of Error, and Feature Selection, Information and Control, 39, (1978), 227-242.

[12] Birge L., A new look at an old result: Fano's lemma, Prepublication n^0 632 du Labotatoire de Probabilites & Modeles Aleatores, Univesites de Paris 6 & 7, January 2001.

[13] Elton J., Hill T.P. and Kertz R., Optimal-partitioning inequalities for nonatomic probability measures, Transactions of the American mathematical Society, **296**:2, August 1986.

[14] Fano R.M., «Class notes for transmission of information», MIT, Cambridge, MA, Course 6.574, (1952).

[15] Golic J., On the Relationship Between the Information Measures and the Bayes Probability of Error, Information Theory, IEEE Transactions, Vol. 33, Issue: 5, Sep 1987, pp. 681-693.

[16] Golic J., On the Relationship Between the Separability Measures and the Bayes Probability of Error, Information Theory, IEEE Transactions, Vol. 33, Issue: 5, Sep 1987, pp. 694-701.

[17] Gushchin A.A., On Fano's lemma and similar inequalities for the minimax risk, Theor.Probability and Math.Statist. No. 67, (2003).

[18] Hill T.P., Partitioning Inequalities in Probability and Statistics, Stochastic Inequalities, IMS Lecture Notes - monograph Series, Vol.22, 1993.

[19] Robertson J., Webb W., Cake-Cutting Algorithms. Be Fair, if You Can, Natick, Massachusetts: A K Peters, Ltd, (1998).

[20] Thompson W., Fair Allocation Rules, University of Rochester, Working Paper N.539, December 2007.

Публикации автора

[21] Зубков А.М., Савелов М.П., Сходимость последовательности значений статистики Пирсона к квадрату нормированного процесса Бесселя, Дискрет. матем., **28**:3 (2016), 49-58. [Постановка задач, а также редактирование окончательного варианта текста принадлежит А.М. Зубкову. Основные результаты получены М.П. Савеловым.]

[22] Савелов М.П., Экстремальные характеристики критериев выбора гипотез с заданными попарными расстояниями по вариации, Теория вероятн. и ее примен., **61**:3 (2016), 440-464.

[23] Savelov M.P., Extremal Problems for Hypotheses Testing with Set-Valued Decisions, Mathematical Methods of Statistics, **25**:1 (2016), 67-77.

[24] Savelov M.P., On the Sequential Chi-Square Test, Computer Data Analysis and Modeling: Theoretical and applied stochastics: Proc. of the Eleventh Intern. Conf., Minsk, Sept. 6-10, 2016, Publishing center of BSU, Minsk, 105-106.