ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации
САВЕЛОВА МАКСИМА ПАВЛОВИЧА
«Экстремальные характеристики критериев выбора статистических гипотез»,
представленной на соискание ученой степени кандидата физико–математичесих наук по специальности
01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика

Данная диссертация посвящена, в основном, выяснению в каких диапазонах значений могут меняться значения характеристик критериев проверки нескольких простых гипотез при заданных величинах расстояний по вариации между распределениями, соответствующим этим гипотезам.

Главным образом, излагаются результаты для случая $n = 3$ простых гипотез H_j : наблюдение следует распределению μ_j на измеримом выборочном пространстве (Ω, Σ), $j = 1, 2, 3$. Но затем объясняется, как эти результаты переносятся на случай $n > 3$.

Предполагаются заданными значения расстояний по вариации между распределениями μ_j: для фиксированных чисел $r_{ij} \in [0, 1]$, удовлетворяющих естественным ограничениям, вытекающим из неравенства треугольника, выполняются равенства

$$r_{ij} = \rho(\mu_i, \mu_j) := \sup_{A \in \Sigma} |\mu_i(A) - \mu_j(A)|, \quad 1 \le i < j \le 3. \tag{1}$$

Класс всех таких троек вероятностных мер на (Ω, Σ) обозначен через $D(\vec{r})$, где $\vec{r} := (r_{12}, r_{13}, r_{23})$. Предполагается, что качество статистического критерия, заданного измеримым разбиением $\vec{C} := (C_1, C_2, C_3)$ (так что принимается гипотеза H_i когда наблюдение попадает во множество C_i, $i = 1, 2, 3$), измеряется значением $f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ для некоторой измеримой функции $f : [0, 1]^9 \to \mathbb{R}$ (здесь под $\vec{\mu}(\vec{C})$ понимается упорядоченный набор значений $\mu_i(C_j)$). Класс всех измеримых разбиений Ω на три множества обозначается через $\mathcal{C}(\Omega)$.

А затем задается вопрос: каковы точные границы для возможных значений $f(\vec{\mu}(\vec{C}))$ для всевозможных троек мер из $D(\vec{r})$ и всевозможных разбиений (или, что то же, критериев) из $\mathcal{C}(\Omega)$? Таким образом, поставленная задача состоит в нахождении величин

$$\overline{R} := \sup_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})) \qquad \text{и} \qquad \underline{R} := \inf_{\vec{\mu} \in D(\vec{r})} \sup_{\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)} f(\vec{\mu}(\vec{C})). \tag{2}$$

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. В введении приводятся постановка задачи, которую мы вкратце описали выше, обсуждение некоторых известных результатов для родственных задач, а также даётся краткое содержание диссертации, где сформулированы все её основные результаты. Эта часть диссертации по сути совпадает с авторефератом.

Глава 1 даёт ответ на поставленный вопрос в его основной форме. При $n = 3$, теорема 1 приводит значения для величин $\overline{R}$ и $\underline{R}$ для случая, когда $f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \sum_i \mu_i(C_i)$, а теоремы 2 и 3 — для $\overline{R}$ в случаях, когда $f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \min_{i \neq j}(\mu_i(C_i) - \mu(i)(C_j))$ и $f(\vec{\mu}(\vec{C})) = \min_i \mu_i(C_i)$, соответственно.

Используемый подход можно вкратце описать так. Для заданных мер μ_i, пространство Ω разбивается на 6 подмножеств B_σ, $\sigma \in S_3$ (множество перестановок трёх элементов), определяемых «порядком мер» μ_i следующим образом. Пусть $f_i := \frac{d\mu_i}{d\nu}$ суть плотности мер μ_i относительно общей меры ν (напр., $\nu := \sum_i \mu_i$). Тогда $f_1 \geq f_2 \geq f_3$ на $B_{(1,2,3)}$, $f_3 \geq f_1 \geq f_2$ на $B_{(1,3,2)}$ и т.д. (вместо плотностей соискатель ссылается здесь на разложение Хана, что представляется нам менее естественным). Очевидно, значения $\rho(\mu_i, \mu_j)$ полностью определяются значениями $\mu_k(B_\sigma)$, $k = 1, 2, 3$, $\sigma \in S_3$, коих числом 18.

Фиксировав $\vec{r}$, получаем многогранник, состоящий из векторов в $[0, 1]^{18}$, компоненты которых суть значения $\mu_k(B_\sigma)$, $k = 1, 2, 3$, $\sigma \in S_3$, такие что выполняются соотношения (1) для заданного $\vec{r}$. (На самом деле, размерность этого многогранника меньше 18, т.к. выполняются соотношения вида $\sum_\sigma \mu_k(B_\sigma) = 1$, $k = 1, 2, 3$; это, в частности, отражено в утверждении теоремы 5.) Этот многогранник, в свою очередь, индуцирует многогранник в $[0, 1]^{54}$, состоящий из векторов с компонентами $\mu_k(C_i B_\sigma)$, определяемыми тройками мер $\vec{\mu}$ и разбиениями $\vec{C} \in \mathcal{C}(\Omega)$. Такого типа рассуждения показывают, что в конечном итоге задача поиска величин (2) сводится к вычислению экстремумов и минимаксов функций, заданных на многогранниках, принадлежащих конечномерному единичному кубу (теорема 4).

В случае $n > 3$ удаётся получить в явном виде лишь оценки для величин $\overline{R}$ и $\underline{R}$ (теоремы 7 и 8).

Глава 2 посвящена анализу аналогичной задачи для так наз. «интервальных критериев», т.е. решающих правил, которые устроены следующим образом (в случае $n = 3$.) Пространство Ω разбивается на 7 измеримых множеств C_1, C_2, C_3, C_{12}, C_{13}, C_{23}, C_{123}, такие что на C_i не отвергается гипотеза H_i (а остальные две — отвергаются), $i = 1, 2, 3$, на C_{ij} не отвергаются H_i и H_j (а оставшаяся — отвергается), и на C_{123} не отвергается ни одна гипотеза. Основные результаты (теоремы 11–14) редуцируют исходную задачу к поиску экстремумов и минимаксов функций на конечномерных пространствах.

Глава 3 стоит несколько особняком. Для схемы независимых одинаково распределённых испытаний с $N \geq 2$ исходами, строится последовательность χ^2-статистик Пирсона, n-ый элемент которой $X(n)$ есть значение соответсвующей статистики после n испытаний. Для последовательности $X(n)$, $n \geq 1$, подсчитаны средняя и авто-ковариационная функции (теорема 15). Устанавливается сходимость конечномерных распределений процесса $X(\lfloor nt \rfloor)$, $t \geq 0$, к таковым для процесса $t^{-1}\mathrm{Bes}^2_{N-1}(t)$, где $\mathrm{Bes}_k(t)$ — процесс Бесселя размерности k (теорема 16). Вкупе с результатом Захарова, Сарманова и Севастьянова 1969 г., этот факт затем используется для вывода явной формулы для совместных плотностей конечно-мерных распределений процесса Бесселя.

Нельзя не отметить, что утверждения последних двух теорем могут быть получены иными, более естественными с нашей точки зрения, способами. Так, теорема 16 есть прямое следствие функциональной центральной предельной теоремы и теоремы непрерывности Слуцкого, причём сходимость имеет место в более сильном смысле. Далее, поскольку процесс Бесселя — марковский, совместную плотность для распределения вектора $\big(\mathrm{Bes}_N(t_1), \ldots, \mathrm{Bes}_N(t_1)\big)$ при $0 < t_1 < \cdots < t_k$ можно получить просто как произведение соответствующих переходных плотностей, которые известны (см., напр.,(6.2.3), (6.2.4) на стр. 343 в M. Jeanblanc, M. Yor, M. Chesney, Mathematical Methods for Financial Markets (Springer, London, 2009)). Это приводит к несколько более компактной и естественной (по сравнению с приведённой в теореме 17) форме записи для совместной плотности $b_{t_1,\ldots,t_k}(x_1, \ldots, x_k)$ (здесь $\nu := N/2 - 1$ — индекс N-мерного процесса Бесселя):

$$\frac{x_1^{\nu+1} x_k^{\nu}}{t_1^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)2^{\nu}} e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{x_{i+1}}{t_{i+1}-t_i} e^{-\frac{x_i^2+x_{i+1}^2}{2(t_{i+1}-t_i)}} I_\nu\left(\frac{x_i x_{i+1}}{t_{i+1}-t_i}\right), \quad x_i > 0, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Таким образом, основная ценность и новизна главы 3 состоят не столько в доказываемых там результатах, сколько в «построении моста», напрямую связывающего классические предельные теоремы для χ^2-статистик с процессами Бесселя.

Изложение диссертации не свободно от мелких недостатков. Так, понятие «$\vec{r}$–согласованной тройки» $D(\vec{r})$ вводится в ней три раза: на страницах 5^5 (т.е., 5-ой строке сверху на стр. 5), 14^4, 19^{15}. Обозначение $\vec{\mu}$ вводится 4 раза. Для σ-алгебры на выборочном пространстве Ω в основном используется символ Σ, но иногда — и $\mathbb{F}$ (стр. 5_7). А на стр. 6_{10} и всё измеримое пространство (Ω, Σ) становится $(S, \mathcal{B})$. Оппонент осознает, что в этих местах цитируются результаты других авторов, но было бы разумно использовать единые обозначения. Правда, на стр. 60_{13} мы видим $\mathbb{F}$ (вместо привычного Σ) уже вне контекста цитирования чужих результатов.

Далее, вряд ли удачно использование одного и того же обозначения $\vec{C} = (C_1, C_2, C_3)$ как для разбиения выборочного пространства Ω, так и для разбиения множества перестановок S_3 (стр. 11, 22^1 и в других местах). Присутствует некий разнобой в записи перестановок σ : это может быть $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)$, а также просто $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

Лемма 4 на стр. 34 есть частный случай Теоремы 1 из § 41 (Проверка конечного числа простых гипотез) из книги «Математическая статистика» А. А. Боровкова (позиция [1] в списке литературы) про вид байесовского критерия (в данном случае, для равномерного априорного распределения; сделанное в лемме предположение о не более чем счётности Ω излишне).

Непонятно введение обозначения $\underline{L}$ на стр. 59_1 — не есть ли это то же самое, что $\underline{R}^{\Delta}$? Что такое N на стр. 60^8 — это просто n? Само рассуждение в этом месте излишне замысловато: вместо «Пусть $r_{ij} = 0$» (без каких-либо последующих пояснений) было бы проще и яснее сказать, что мы предполагаем, что все меры μ_i совпадают друг с другом. Тем более, что затем вообще предполагается, что они суть вырожденные распределения, сосредоточенные в одной и той же точке.

Какова связь μ_i с P_i в теореме 10 — как в её формулировке, так и в доказательстве?

Отмеченные выше недостатки незначительны и не затрагивают суть описываемых результатов и справедливость их доказательств. Решаемые задачи — интересны и актуальны. Главные результаты работы новы и верны, достаточно высокого научного уровня и потребовали значительных усилий для их получения. Они имеют, в основном, теоретическую ценность. Проверенные мною доказательства четкие и не содержат ошибок. Язык изложения математически строг и понятен.

Главные результаты диссертации своевременно и в полном объеме опубликованы в научных журналах и трудах научной конференции и получены в основном соискателем: так, из четырёх опубликованных статей по теме диссертации три имеют одного автора — самого соискателя, что не так часто встречается в современных условиях. Три из четырёх работ опубликованы в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК. Основные результаты диссертации были доложены соискателем на научных конференциях.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертация Савелова М. П. «Экстремальные характеристики критериев выбора статистических гипотез» соответствует всем требованиям Положения о порядке присуждения учёных степеней, предъявляемых к диссертациям на соискание учёной степени кандидата физико–математических наук, а её автор Савелов Максим Павлович несомненно заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.05 — Теория вероятностей и математическая статистика.

1 декабря 2016

Официальный оппонент:
Боровков Константин Александрович
доктор физико–математических наук (специальность 01.01.05),
профессор Школы математики и статистики Мельбурнского университета
Почтовый адрес: School of Mathematics and Statistics, The University of Melbourne, Parkville VIC 3010, Australia
Телефон: +61 3 83447992
Адрес электронной почты: borovkov@unimelb.edu.au