

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА  
Механико-математический факультет

На правах рукописи



**Емельянов Александр Николаевич**

## **ЭФФЕКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ В МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Специальность 01.02.04 —  
«механика деформируемого твердого тела»

**Автореферат**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре механики композитов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор  
**Горбачев Владимир Иванович**

Официальные оппоненты: **Димитриенко Юрий Иванович**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», г. Москва, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика»

**Шоркин Владимир Сергеевич**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева», г. Орел, ведущий научный сотрудник кафедры «Физика»

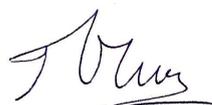
Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки институт прикладной механики Российской академии наук

Защита состоится 23 декабря 2016 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.91 на базе по механике при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП – 1, Москва, Ленинские Горы, Главное здание МГУ, Механико – математический факультет, аудитория 16 10.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций Фундаментальной библиотеки МГУ по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д.27, сектор А, 8 этаж, к. 812 и на сайте <http://mech.math.msu.su>.

Автореферат разослан 18 ноября 2016 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
Д 501.001.91, канд. физ.-мат. наук



П.В. Чистяков

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы.

В рамках классической механики сплошной среды и, в частности, теории упругости, реальное материальное тело ассоциируется с некоторой областью в трехмерном пространстве, а материальные частицы (атомы, молекулы, комплексы молекул, элементарные ячейки кристаллической решетки, зерна), формирующие тело, с точками в этой области. Принимается гипотеза сплошности, согласно которой в любом бесконечно малом объеме содержится бесконечное число материальных частиц. При этом происходит переход от конечного числа реальных материальных частиц к бесконечному множеству точек - континууму. После этого перехода деформация среды может быть описана векторным полем, определяющим перемещение материальных частиц. В такой модели упругого континуума связь нагрузок между обеими сторонами поверхностного элемента описывается исключительно главным вектором  $\vec{p} d\Sigma$ . Это предположение приводит к симметричному напряженному и деформированному состояниям. Такая модель хорошо совпадает с экспериментами, проводимыми с конструкционными материалами (сталь, бетон, алюминий) при напряжениях, остающихся в пределах упругости материала. Так что классическая теория упругости довольно хорошо объясняет поведение реальных твердых тел, находящихся под различной нагрузкой, во всех случаях, когда "зернистость" строения рассматриваемых тел не является для этих тел существенной, т.е.  $l/L \ll 1$ , где  $l$  - внутренний характерный размер, например, характерный размер зерна, а  $L$  - характерный размер тела.

Значительное различие между теорией и экспериментом возникает в тех случаях, когда существенными являются градиенты напряжения. Это имеет основное значение при концентрации напряжений вокруг отверстий и выточек. Расхождение между экспериментом и теорией появляются также в задачах о колебаниях, при распространении волн и при вынужденных высокочастотных (ультразвуковых) колебаниях. Это происходит из-за того, что при высокочастотных колебаниях и достаточно малых длинах волн неизбежно сказывается влияние микроструктуры материала. С точки зрения теоретических решений задач классической теории упругости не удастся объяснить и предсказать с необходимой точностью явления, происходящие в зернистых средах

и при прохождении акустических волн через кристаллы, поликристаллические структуры и полимеры.

Причину указанных выше несогласований, очевидно, следует прежде всего искать в том, что сплошная модель твердого тела, лежащая в основе классической теории упругости, не в состоянии отобразить те свойства реальных тел, которые определяются их дискретной структурой. Для объяснения этих явлений, очевидно, нужна новая модель твердого тела механики сплошной среды, в которой свойства, вытекающие из дискретной структуры реальных тел, были бы явно отражены.

В качестве обобщения классической теории упругости, вводится предположение, что в каждый момент времени положение частицы тела описывается радиус-вектором, а ее ориентация задается при помощи трех ортонормированных векторов, которые называются директорами. Эти векторные поля и определяют все степени свободы частиц тела. Деформация среды описывается не только вектором перемещения  $\vec{u}$ , но также вектором поворота  $\vec{\omega}$ . Среду, моделируемую таким образом, сегодня часто называют средой Коссера, а за теорией в литературе закрепились названия моментной, несимметричной, микроструктурной, а также микрополярной теории упругости.

В этих моделях, в отличие от классической теории, напряженное состояние описывается несимметричным тензором напряжений, поэтому упругие тела в несимметричной теории характеризуются большим числом упругих констант. Необходимость подобного усложнения нередко оправдывают тем, что с помощью даваемых в классической теории упругих (и пьезоэлектрических) констант невозможны трактовки, например, аномального пьезоэффекта в кварце, дисперсии упругих волн в сплошной среде, а также упругих свойств кварца, алмаза, дигидрофосфата аммония и других кристаллов.

Истоки микроструктурных теорий восходят к трудам Voigt W. Он впервые рассмотрел модель среды с вращательным взаимодействием ее частиц при изучении упругих свойств кристаллов. Стараясь исправить недостатки классической теории упругости путем дополнительного предположения о передаче нагрузок через элемент поверхности  $d\Sigma$  не только главным вектором  $\vec{p} d\Sigma$ , но и главным моментом  $\vec{m} d\Sigma$ . Он вывел уравнения равновесия для таких кристаллов (включая равновесие моментов) и исследовал свойства кристаллов.

Первая попытка построения теории упругости с несимметричным тензором напряжений принадлежит, по-видимому, братьям Коссера. В своей работе братья Коссера развили теорию упругости, с помощью вариационного принципа, который они назвали "Евклидовым действием" ("L'Action Euclidienne"). Каждой частице деформированной среды ставится в соответствие ортогональный трехгранник. Таким образом частицы получают ориентирование (полярная среда). Каждая частица среды Коссера является бесконечно малым абсолютно твердым телом. Деформация такой среды описывается не только вектором перемещения  $\vec{u}$ , но и вектором поворота  $\vec{\omega}$ , т.е. величиной, являющейся функцией времени  $t$  и положения  $x$ . При таких предположениях в теле возникают не только напряжения  $\sigma_{ij}$ , но и моментные напряжения  $\mu_{ij}$ , образующие, вообще говоря, несимметричные тензоры. Коссера получили уравнения равновесия моментов для динамического случая. Но они не дают ни конкретной микроинерции, ни закона сохранения тензора микроинерции, которые имеют ключевое значение для построения определяющих уравнений и динамических задач для твердых тел и жидких сред, например, жидких кристаллов, суспензий и т.д. Жесткий директор, используемый Коссера, а затем и другими для представления, жестких поворотов, не обладает метрическим значением. Таким образом, возникают трудности в определении законов симметрии материала в материальных уравнениях. Например, ни одна из работ, в которых был использован жесткий директор, не затрагивает изотропию, например, Э. и Ф. Коссера не привели никаких-либо конкретных материальных уравнений.

Работы Коссера были не востребованы на протяжении более полувека. В 1960-х годах предмет исследований был независимо переоткрыт несколькими авторами. Град с помощью статистической механики получил некоторые законы сохранения. Gunther W. и Schaefer резюмировали теорию упругости Коссера и отметили ее связь с дислокациями. В это время была также популярна теория неопределенной пары сил, от которой сейчас в основном уже отказались. В этой теории, кососимметричная часть тензора напряжений является избыточной и остается неопределенной. Некоторые из этих ранних теорий, обсуждаются в различных обзорных статьях, Eringen A.C., Ariman T., Turk M.A. и Sylvester N.D. и др...

Эти теории, также как и теория упругости Коссера, связаны с нелинейной теорией микроупругости, опубликованной Eringen A.C. и Suhubi E.S. В том же году, Eringen A.C. опубликовал свою теорию микротекучести, открыв новый закон равновесия: закон сохранения микроинерции. Этого закона и не хватало во всех предыдущих работах. Без закона сохранения микроинерции, тензорные, основные уравнения поля являются неполными и изменение положения тела при движении не может быть определено.

Начиная с работы братьев Коссера, опубликованной в 1909 г., механика микрополярной среды (континуума Коссера) получила значительное развитие в основополагающих работах Э.Л. Аэро и соавторов, В.И. Ерофеева, П.А. Жилина, Л.М. Зубова, Koiter W.T., Mindlin R.D. и Tierstin H.F., В. Новацкого, В.А. Пальмова, Р.А. Тупина, Л.И. Шкутина, Eringen A.C., а также в других работах. Более общие модели сред, содержащие большее число степеней свободы (микроморфные среды или среды с микродеформацией), изучались В.И. Ерофеевым, Л.М. Зубовым, Koiter W.T., Mindlin R.D., Р.А. Тупиным, Eringen A.C. и др. Механика сред с внутренними степенями свободы изучалась также М.А. Гузевым, И.А. Куниным, В.П. Мясниковым. Практически важный случай моментной среды – жидкие кристаллы исследовались Э.Л. Аэро, П. де Женом, А.С. Сониным, Ф.М. Лесли, Дж. Эриксоном, Eringen A.C. Эта модель нашла значительные приложения в механике гранулированных и сыпучих сред, поликристаллических тел, композитов, геоматериалов, а в последнее время – также и в наномеханике. Модели типа Коссера оказались полезной для построения неклассических моделей тонкостенных конструкций – стержней, пластин и оболочек ( работы С.А. Амбарцумяна, В.А. Дудникова и С.А. Назарова, А. А. Атояна и С. О. Саркисяна, В. В. Елисеева, В. А. Еремеева и Л. М. Зубова, П.А. Жилина, А. А. Илюхина, Я. Ф. Каюк и А. П. Жуковского, С. О. Саркисян, Л. И. Шкутина, S. S. Antman, V.A. Eremeyev и W. Pietraszkiewicz, V. A. Eremeyev и L.M. Zubov, A.C. Eringen, J. Makowski и W. Pietraszkiewicz, W. Pietraszkiewicz, V. A. Eremeyev и V. Konopinska, M. B. Rubin, L. M. Zubov).

По способам описания поворота частиц можно выделить несколько направлений развития несимметричной теории упругости. В своей диссертационной работе М.А.Кулеш приводит описание наиболее распространенных:

1) Теория среды со "стесненным вращением". Такую среду часто называют псевдоупругой средой Коссера или средой псевдокоссера. В англоязыч-

ной литературе для обозначения этой теории используется термин "Couple stress elasticity". Описание основных положений данной теории можно найти в работах Э.Л.Аэро и Е.В.Кувшинского, Mindlin R.D., Mindlin R.D. и Tierstin H.F., Ю.Н.Немиша, Koiter W.T., Н.Ф.Морозова, Г.Н.Савина, А.И.Каландии и др. В теории среды псевдокоссера сохраняется концепция классической теории упругости, т.е. считается, что перемещения  $\vec{u}$  точек этой среды и их жесткие малые повороты  $\vec{\omega}$  связаны зависимостью

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u}$$

Таким образом, для среды псевдокоссера имеется одна независимая векторная кинематическая неизвестная - перемещения  $\vec{u}$  и в рассмотрение вводятся несимметричные тензора напряжений  $\underline{\sigma}$  и моментных напряжений  $\underline{\mu}$ . Причем антисимметричная часть напряжения и симметричная часть моментного напряжения не определяются напрямую из физических уравнений, из-за чего А.К.Эринген называет теорию среды псевдокоссера теорией неопределенных моментных напряжений.

Этот вариант несимметричной теории понижает ее полноту, так как число физических констант для изотропного упругого тела сокращается до четырех. Например, часто используются  $E$  - модуль Юнга,  $\gamma$  - коэффициент Пуассона,  $l$  - постоянная, имеющая размерность длины и  $B$  - безразмерная постоянная, называемая модулем изгиба ( работы R.D. Mindlin, Н.Ф. Морозова, Г.Н. Савина, А.И. Каландия, А. Anthonie ). Кроме этого, получаемая структура уравнений такова, что если, в частности, на поверхности упругого тела заданы перемещения, то не удастся произвольно задать нормальную составляющую вектора поворота.

Несмотря на эти недостатки, теория среды псевдокоссера широко используется. Предложено несколько общих теорем, методов интегрирования и дано решение ряда задач. Так, Mindlin R.D. и Tierstin H.F. обобщили представление Папковича-Нейбера для статических задач, а также получили фундаментальное решение в бесконечном упругом пространстве. Их теоретические выводы были проиллюстрированы несколькими примерами.

Vogy D.B. и Sternberg E. занимались задачей плоского деформированного состояния. Были обобщены решения Файлона и задача о штампе на кон-

тинуум псевдокоссера. Особенно интересными являются следствия, касающиеся сингулярных решений для плоского деформированного состояния.

Можно отметить также решение задачи об изгибе кругового цилиндра в работе A. Anthonie, плоской граничной задачи о действии сосредоточенной силы на бесконечной плоскости с круговым отверстием в работе Y.C. Hsu и W.J. Wang, задачи для бесконечной упругой изотропной области, ослабленной конечным числом произвольно расположенных несоприкасающихся круговых отверстий в работе Ю.Н. Немиша и В.П. Третьяка, задачи о деформировании плоского кольца в работе Kobayashi Shoichi и Fukui Takio.

2) Теория среды Коссера. В англоязычной литературе используется термин "Cosserat (micropolar) elasticity". Эта теория развивалась в 60-70-х годах независимо несколькими исследователями: В.Новацким и рядом его учеников, В.А.Пальмовым, H. Schaefer, Э.Л.Аэро и Е.В.Кувшинским и др. В теории среды Коссера для описания перемещения частиц рассматриваемой среды наряду с обычным полем перемещений  $\vec{u}$  вводится кинематически независимое поле векторов  $\vec{\omega}$ , характеризующих малые повороты частиц. Таким образом, в этой теории присутствуют две независимых кинематических неизвестных, а тензоры напряжений  $\underline{\sigma}$  и моментных напряжений  $\underline{\mu}$  являются несимметричными. В этом варианте упругое поведение изотропной линейной среды характеризуется шестью упругими константами ( работы В.Новацкого и В.А.Пальмова): две постоянные Лямэ и 4 новые константы, характеризующие микроструктуру. В случае квадратично-нелинейной среды количество новых констант увеличивается до 9 ( работа В.И. Ерофеева ). Во многих работах (например в работах В.А.Пальмова, N. Sandru, H. Neuber ) отмечается, что среда псевдокоссера является следствием среды Коссера при условии стремления одной из новых упругих констант к бесконечности. Известны точные аналитические решения ряда задач для среды Коссера, несмотря на значительные трудности при разрешении получающихся дифференциальных уравнений равновесия или движения. Например, найдена концентрация напряжений вблизи кругового отверстия (в работе В.А.Пальмова ), решена задача о действии сосредоточенной силы и сосредоточенного момента в безграничном упругом пространстве (в работах N. Sandru и R.D. Mindlin ), задача о равновесии полупространства (в работах Marinescu C., Dhaliwal Ranjit S. и Chowdhury Kashmiri L., J. Dyszlewicz).

3) Континуум Леру (градиентная модель). К понятию моментных напряжений приводит и учет зависимости энергии деформаций от высших градиентов вектора перемещений. Впервые на целесообразность учета высших градиентов перемещений указал Леру. Деформированное состояние при этом определяется двумя тензорами: тензором макродеформации второго порядка и градиентом микродисторсии третьего порядка. Градиент микродисторсии связан с вектором перемещений и не связан с вектором поворота. Следовательно, вращение частиц среды в этом случае является стесненным. Напряженное состояние определяется объемной плотностью внутренней энергии, через которую вычисляются тензор напряжений и тензор третьего порядка "двойных напряжений", антисимметричная часть которого является тензором моментных напряжений  $\underline{\mu}$ . В случае физической нелинейности в определяющие соотношения этой модели входят помимо констант Лямэ 7 констант Ландау, определяющих нелинейность и 2 новые константы, характеризующие микроструктуру. Для линейной среды общее количество констант сокращается, как и в случае среды псевдокоссера, до 4-х.

4) Микроморфная среда Миндлина-Эрингена ("Microstructure (micromorphic) elasticity"). Данная теория развита Mindlin R.D. в работе и А.К.Эрингеном. В качестве кинематических неизвестных в этой теории в общем случае принимаются вектор перемещения и несимметричный тензор микросмещений, деформированное состояние определяется тензором макродеформаций, характеризующим относительные перемещения центров масс макрообъемов (он совпадает с тензором деформации Грина), тензором относительной дисторсии, характеризующим перемещения структурных элементов относительно центра масс макрообъема и градиентом микродисторсии третьего порядка, характеризующим относительные перемещения структурных элементов одного и того же макрообъема. Для описания напряженного состояния вводятся тензоры напряжений первого и второго порядков и тензор моментных напряжений. Меры деформаций микроморфной среды являются обобщением деформационных характеристик двух вышеназванных моделей - континуума Коссера и континуума Леру. В этой теории упругое поведение материала характеризуется 18 физическими постоянными. В работе Koh Severino L. проведено упрощение этой теории, которое допускает сокращение числа констант до 10 и простую трактовку этих компонент.

5) Прочие теории. Среди прочих хотелось бы выделить работу Э.Л.Аэро и Е.В.Кувшинского, где развита 45-константная теория. В работе А.С. Eringen и E.S. Suhubi предлагается мультиполярная теория, количество физических констант которой определяется ее степенью. Обобщение несимметричной теории на случай анизотропии было сделано Н. Neuber, где упругое поведение среды в самом общем случае анизотропии будет характеризоваться 171 упругой постоянной.

Различные аспекты моделей несимметричной среды можно найти также в работах С.М. Белоносова, Г.А. Ванина, А.А. Ильюшина и В.А. Ломакина, М.Р. Короткиной, И.А. Кунина, П.Ф. Сабодаш и И.Г. Филиппова, Л.И. Седова, Шоркина, В.С. Шоркина, Л.Ю. Фроленковой, А.С. Азарова, В.С. Шоркина, Л.Ю. Фроленковой, С.И. Якушиной. Стоит отметить работы С.А. Лурье и работы Г.Л. Бровко и О.А. Ивановой. Однако подробное рассмотрение этих вопросов выходит за рамки данной работы, которая ограничивается областью статического состояния тел в рамках теории среды Коссера.

В данной диссертационной работе рассматривается проблема осреднения краевой задачи для неоднородного тела, обладающего моментными свойствами — исходная задача. Под осреднением понимается тот или иной способ представления решения исходной задачи через решение точно такой же задачи для тела с однородными свойствами. Задачу для тела с однородными свойствами будем называть сопутствующей задачей, а само тело — сопутствующим однородным телом. Конструктивная процедура осреднения, как правило, включает в себя три этапа: на первом этапе по свойствам неоднородного тела находятся свойства сопутствующего однородного тела (эффективные свойства); на втором этапе решается краевая задача для сопутствующего тела; на третьем этапе по решению сопутствующей задачи находится решение исходной задачи. Такой подход реализован в механике композиционных материалов, построенных из большого числа представительных элементов. Существенный вклад в развитие механики композитов внесен Ю.Н. Работновым и его учениками. В последнее время широкое распространение получил метод осреднения задач для композитов регулярной структуры, основанный на разложении решения исходной задачи в ряд по степеням малого геометрического параметра, равного отношению характерного размера ячейки периодичности к характерному размеру всего тела. Первыми работами в этом

направлении являются работы Н.С. Бахвалова и Б.Е. Победри. К настоящему времени вышло большое количество монографий, посвященных частично или полностью методу малого геометрического параметра (например работы В.Л.Бердичевского, Э. Санчес-Паленсия, И.В. Андрианова, В.А. Лесничой и Л.И. Маневич, Alexander L. Kalamkarov, A.V. Movchan, N.V. Movchan и C.G. Poulton, Д.И. Бардзокас и А.И. Зобнин, В.И. Большакова, И.В. Андрианова и В.В. Данишевского, В.С. Шоркина).

Отдельные задачи для неоднородных тел при непериодической зависимости свойств от координат рассматривались во многих работах. Большинство таких работ, вышедших до 1973 года собраны в двух обширных библиографических указателях, составленных Г.Б. Колчиным и Э.А. Фаверманом. В статьях В.А. Ломакина и в его фундаментальной монографии рассмотрены общие методы и решено множество конкретных задач теории упругости непрерывно неоднородных тел. Теория кручения неоднородных анизотропных стержней рассмотрена в книге С.Г. Лехницкого, а также в работах Л.В. Олеховой. Также стоит отметить работы Ю. И. Димитриенко и работы С.А. Лурье.

Одним из существенных осложняющих обстоятельств для идентификации моделей несимметричной теории упругости является определение констант континуума Коссера. Методы, используемые при идентификации данных констант, описаны в работах А.А. Адамова и И.Ю. Смолина. Один из типов таких методов - расчетные методы определения констант континуума Коссера, основанные на применении процедур осреднения для материалов с известной внутренней структурой, чаще всего, периодической. При этом на уровне структурных элементов (микроуровне) обычно используются модели простых классических материалов, для перехода на макроуровень к модели Коссера стандартно применяется осреднение по представительному объёму.

В 1991 году в докторской диссертации Горбачева В.И. был предложен вариант метода осреднения, основанный на интегральной формуле представления решения исходной статической задачи неоднородной теории упругости через решение сопутствующей задачи. Позже были опубликована интегральная формула для динамической задачи теории упругости. На основе этой интегральной формулы был разработан метод осреднения динамических задач неоднородной упругости, пригодный как при периодической, так и при непериодической неоднородности свойств. Интегральная формула для случая мо-

ментной теории упругости была опубликована в 2009 году. В нижеследующей работе кратко излагается конструктивная методика осреднения задач моментной упругости, основанная на интегральной формуле.

**Целью** данной работы является обобщение метода осреднения на краевые задачи для неоднородного упругого тела, обладающего моментными свойствами. Расчет эффективных характеристик для неоднородного тела, обладающего моментными свойствами.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Метод осреднения задач моментной неоднородной упругости для тел периодической и непериодической структуры.
2. Специальные интегро-дифференциальные уравнения для вычисления эффективных характеристик композитов с компонентами, обладающими моментными свойствами.
3. Аналитические выражения для эффективных моментных характеристик бесконечного в плане неоднородного по толщине изотропного и анизотропного слоя.
4. Методика, алгоритм и программа численного расчета эффективных характеристик волокнистого композита, обладающими моментными свойствами.

**Научная новизна:** предложенный вариант метода осреднения может быть применен для краевых задач неоднородного как периодического, так непериодического упругого тела, обладающего моментными свойствами с различными типами анизотропии.

**Практическая значимость** Результаты имеют теоретическое и прикладное значение и могут быть использованы для решения ряда практических задач, связанных с деформированием композиционных материалов с моментными свойствами, например, возникающих в строительной практике.

**Достоверность** теоретических результатов диссертации вытекают из использования классического аппарата механики сплошных сред и подтверждены строгими математическими выводами, основанными на положениях механики.

**Апробация работы.** Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на научном семинаре механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова “Актуальные про-

блемы геометрии и механики” под руководством профессоров Д.В. Георгиевского, М.В. Шамолина и С.А. Агафонова (26 сентября 2014 г., 27 ноября 2015 г.); на научно-исследовательском семинаре кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством члена-корреспондента РАН Е.В. Ломакина (3 октября 2016 г.); на научно-исследовательском семинаре кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством профессора Д.В. Георгиевского (16 декабря 2016 г.); на научно-исследовательском семинаре кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством профессора В.И. Горбачева (26 октября 2015 г., 19 сентября 2016 г.)

**Личный вклад.** Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно. В совместных работах с научным руководителем принадлежат постановки задач. Разработка алгоритмов предлагаемых методов, их программные реализации и тестирование, а также решение конкретных задач выполнены соискателем самостоятельно.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 печатных изданиях [1–6], 2 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1;2], 2 — в тезисах докладов [3;4], 2 — в иных печатных изданиях [5;6].

## Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

**Первая глава** посвящена постановке задач и обсуждению основных положений моментной теории упругости. В качестве обобщения классической теории упругости, в моментной теории упругости вводится предположение, что деформация среды описывается не только полем перемещений  $\vec{u}$ , но также полем поворотов  $\vec{\omega}$ . Среду, моделируемую таким образом, часто называют средой Коссера, а за теорией в литературе закрепились названия моментной, несимметричной, микроструктурной, а также микрополярной теорией. В такой модели упругого континуума связь нагрузок между обеими сторонами

поверхностного элемента  $d\Sigma$  с нормалью  $\vec{n}$  описывается помимо главным вектором сил  $\vec{p} d\Sigma$  еще и главным вектором моментов  $\vec{m} d\Sigma$ . Как и в классической теории упругости можно вывести следующие формулы:

$$p_i = \sigma_{ji} n_j; \quad m_i = \mu_{ji} n_j$$

Тензор  $\underline{\sigma}$  в общем случае несимметричен. Тензор  $\underline{\mu}$  является новой по отношению к классической теории упругости характеристикой напряженного состояния. Он также является несимметричным.

Уравнение равновесия в моментной теории упругости примут следующий вид:

$$\sigma_{ji,j} + X_i = 0 \quad \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + Y_i = 0;$$

А определяющие соотношения:

$$\sigma_{ji} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} + B_{ijkl} \chi_{kl}, \quad \mu_{ji} = B_{ijkl} \epsilon_{kl} + D_{ijkl} \chi_{kl};$$

Где тензоры  $C_{ijkl}, B_{ijkl}, D_{ijkl}$  являются первыми коэффициентами разложения в ряд Тейлора свободной энергии Гельгольца  $F(\underline{\epsilon}, \underline{\chi}, T)$  в окрестности естественного состояния ( $\epsilon_{ij} = 0, \chi_{ij} = 0$ ).

**Вторая глава** посвящена осреднению задач моментной теории упругости методом интегральных представлений. Вводится понятие об исходной и сопутствующей задачах.

Постановка статической задачи неоднородной моментной упругости - исходной задачи состоит из уравнений равновесия

$$\sigma_{ji,j} + X_i = 0; \quad \mu_{ji,j} + \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + Y_i = 0, \quad (1)$$

определяющих соотношений

$$\sigma_{ji} = C_{ijkl}(x) \epsilon_{kl} + B_{ijkl}(x) \chi_{kl}; \quad \mu_{ji} = B_{klij}(x) \epsilon_{kl} + D_{ijkl}(x) \chi_{kl}, \quad (2)$$

соотношений типа Коши

$$\epsilon_{ij} = u_{j,i} + \epsilon_{kji} \omega_k; \quad \chi_{ij} = \omega_{j,i}, \quad (3)$$

и граничных условий

$$\sigma_{ji}n_j|_{\Sigma_p} = p_i^0, u_i|_{\Sigma_u} = u_i^0; \quad \mu_{ji}n_j|_{\Sigma_m} = m_i^0, \omega_i|_{\Sigma_\omega} = \omega_i^0 \quad (4)$$

Под сопутствующей задачей будем понимать задачу аналогичную исходной задаче для тела той же самой формы и с теми же входными данными, но с другими материальными характеристиками  $C_{ijkl}^0$ ,  $D_{ijkl}^0$  и  $B_{ijkl}^0$ . Обозначим через  $v_i$ ,  $e_{ij}$ ,  $\tau_{ij}$  — перемещения, деформации и напряжения, а через  $\psi_i$ ,  $\pi_{ij}$ ,  $\nu_{ij}$  — углы вращения, моментные деформации и моментные напряжения в сопутствующей задаче. Постановка сопутствующей задачи даётся следующими формулами:

$$\tau_{ji,j} + X_i = 0; \quad \nu_{ji,j} + \epsilon_{ijk}\tau_{jk} + Y_i = 0, \quad (5)$$

$$\tau_{ji} = C_{ijkl}^0 e_{lk} + B_{ijkl}^0 \pi_{lk}; \quad \nu_{ji} = B_{klj}^0 e_{lk} + D_{ijkl}^0 \pi_{lk}, \quad (6)$$

$$e_{lk} = v_{k,l} + \epsilon_{kls}\psi_s; \quad \pi_{lk} = \psi_{k,l}, \quad (7)$$

$$\tau_{ji}n_j|_{\Sigma_p} = p_i^0, v_i|_{\Sigma_u} = u_i^0; \quad \nu_{ji}n_j|_{\Sigma_m} = m_i^0, \psi_i|_{\Sigma_\omega} = \omega_i^0 \quad (8)$$

Исходя из тождества Бетти в моментной теории упругости дан подробный вывод интегральных формул представления решения исходной задачи через решение сопутствующей задачи:

$$\begin{aligned} u_i(x) = & v_i(x) + \\ & + \int_V \left\{ \frac{1}{\epsilon} \varepsilon_{kl}^{(i)}(\xi, x) [C_{klpq}^0 - C_{klpq}(\xi)] + \frac{1}{\chi} \varkappa_{kl}^{(i)}(\xi, x) [B_{klpq}^0 - B_{klpq}(\xi)] \right\} e_{pq}(\xi) dV_\xi + \\ & + \int_V \left\{ \frac{1}{\epsilon} \varepsilon_{kl}^{(i)}(\xi, x) [B_{klpq}^0 - B_{klpq}(\xi)] + \frac{1}{\chi} \varkappa_{kl}^{(i)}(\xi, x) [D_{klpq}^0 - D_{klpq}(\xi)] \right\} \pi_{pq}(\xi) dV_\xi \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
\omega_i(x) &= \psi_i(x) + \\
&+ \int_V \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \varepsilon_{kl}^{(i)}(\xi, x) [C_{klpq}^0 - C_{klpq}(\xi)] + \frac{2}{\varkappa} \varkappa_{kl}^{(i)}(\xi, x) [B_{klpq}^0 - B_{klpq}(\xi)] \right\} e_{pq}(\xi) dV_\xi + \\
&+ \int_V \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \varepsilon_{kl}^{(i)}(\xi, x) [B_{klpq}^0 - B_{klpq}(\xi)] + \frac{2}{\varkappa} \varkappa_{kl}^{(i)}(\xi, x) [D_{klpq}^0 - D_{klpq}(\xi)] \right\} \pi_{pq}(\xi) dV_\xi
\end{aligned} \tag{10}$$

Проведена проверка этих формул путем подстановки полученных решений в исходные уравнения.

Получено представление решения исходной задачи моментной теории упругости в виде рядов по всевозможным производным от деформаций и искривлений в сопутствующей задаче:

$$\begin{aligned}
u_i(x) &= v_i(x) + \sum_{q=0}^{\infty} [N_{ikli_1 \dots i_q}(x) e_{kl, i_1 \dots i_q}(x) + U_{ikli_1 \dots i_q}(x) \pi_{kl, i_1 \dots i_q}(x)], \\
\omega_i(x) &= \psi_i(x) + \sum_{q=0}^{\infty} [V_{ikli_1 \dots i_q}(x) e_{kl, i_1 \dots i_q}(x) + M_{ikli_1 \dots i_q}(x) \pi_{kl, i_1 \dots i_q}(x)],
\end{aligned}$$

Где коэффициенты  $N_{ikli_1 \dots i_q}(x)$ ,  $U_{ikli_1 \dots i_q}(x)$ ,  $V_{ikli_1 \dots i_q}(x)$  и  $M_{ikli_1 \dots i_q}(x)$  - далее структурные функции. Получение структурных функций довольно затруднительно, так как это напрямую связано с поиском тензоров Грина для исходной задачи, а это в общем случае задача более сложная, чем исходная. Но как показано в работе, данные функции удовлетворяют системе рекуррентных уравнений. Началом рекурсии являются следующие уравнения:

$$\begin{cases} [C_{ijmn} + C_{ijkl}(N_{kmn,l} + \varepsilon_{kls}V_{smn}) + B_{ijkl}V_{kmn,l}]_{,j} = 0, \\ [B_{ijmn} + B_{ijkl}(N_{kmn,l} + \varepsilon_{kls}V_{smn}) + D_{ijkl}V_{kmn,l}]_{,j} = \varepsilon_{ijr}(C_{rjmn}^o - \tilde{C}_{rjmn}), \end{cases}$$

где  $\tilde{C}_{rjmn} = C_{rjmn} + C_{rjkl}(N_{kmn,l} + \varepsilon_{kls}V_{smn}) + B_{rjkl}V_{kmn,l}$ ;

$$\begin{cases} [B_{ijmn} + C_{ijkl}(U_{kmn,l} + \varepsilon_{kls}M_{smn}) + B_{ijkl}M_{kmn,l}]_{,j} = 0, \\ [D_{ijmn} + B_{ijkl}(U_{kmn,l} + \varepsilon_{kls}M_{smn}) + D_{ijkl}M_{kmn,l}]_{,j} = \varepsilon_{ijr}(B_{rjmn}^o - \tilde{B}_{rjmn}), \end{cases}$$

где  $\tilde{B}_{rjmn} = B_{rjmn} + C_{rjkl}(U_{kmn,l} + \varepsilon_{kls}M_{smn}) + B_{rjkl}M_{kmn,l}$ .

**Третья глава** посвящена исследованию эффективных характеристик в моментной теории упругости.

Эффективными коэффициентами неоднородного моментного материала, составленного из одинаковых представительных объемов, называются такие коэффициенты, которые позволяют связать средние по любому представительному объему силовые и моментные напряжения  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  и  $\langle \mu_{ij} \rangle$  со средними по этому же представительному объему деформациями  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  и искривлениями  $\langle \varkappa_{ij} \rangle$ . Такое определение эффективных свойств моментного упругого тела является распространением определения данного в работе Хашина и Розена на случай тела, составленного из представительных объемов вещества, обладающего моментными свойствами.

Для простоты, вначале рассматривается периодически неоднородный материал с ячейкой периодичности в виде куба  $\Omega$  с ребром  $\ell$ . В данном случае куб  $\Omega$  представляет собой представительный объем, а его ребро  $\ell$  является структурным параметром. В периодически неоднородном материале материальные тензоры  $\underline{C}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{D}$  являются периодическими функциями локальных переменных. В качестве новых материальных коэффициентов выберем их безразмерные варианты.

Пусть  $L$  — характерный размер всего тела, а  $\alpha = \ell/L \ll 1$ , т.е. тело составлено из большого числа ячеек по всем направлениям. В этом случае можно показать, что усреднение по любой внутренней ячейке выражений для компонент векторов перемещений и вращений, а также выражений для деформаций и искривлений дает:

$$\langle u_i \rangle_{\Omega} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} v_i, \quad \langle \omega_i \rangle_{\Omega} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \psi_i, \quad (11)$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_{\Omega} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} e_{ij}, \quad \langle \varkappa_{ij} \rangle_{\Omega} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \pi_{ij} \quad (12)$$

Усредненные по ячейке периодичности выражения для силовых и моментных напряжений представим следующим образом:

$$\langle \sigma_{ji} \rangle_{\Omega} = \langle \tilde{C}_{ijmn} \rangle_{\Omega} e_{nm} + \ell \langle \tilde{B}_{ijmn} \rangle_{\Omega} \pi_{nm} + O(\alpha), \quad (13)$$

$$\langle \mu_{ji} \rangle_{\Omega} = \ell \langle \tilde{B}_{ijmn} \rangle_{\Omega} e_{nm} + \ell^2 \langle \tilde{D}_{ijmn} \rangle_{\Omega} \pi_{nm} + O(\alpha^2) \quad (14)$$

Тогда

$$\langle \sigma_{ji} \rangle_{\Omega} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \langle \tilde{C}_{ijmn} \rangle_{\Omega} \langle \varepsilon_{ij} \rangle_{\Omega} + \ell \langle \tilde{B}_{ijmn} \rangle_{\Omega} \langle \varkappa_{ij} \rangle_{\Omega}, \quad (15)$$

$$\langle \mu_{ji} \rangle_{\Omega} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \ell \langle \tilde{B}_{ijmn} \rangle_{\Omega} \langle \varepsilon_{ij} \rangle_{\Omega} + \ell^2 \langle \tilde{D}_{ijmn} \rangle_{\Omega} \langle \varkappa_{ij} \rangle_{\Omega} \quad (16)$$

Отсюда получили выражения для эффективных характеристик композита с моментными свойствами

$$C_{ijmn}^{eff} = \langle \tilde{C}_{ijmn} \rangle_{\Omega} = \langle C_{ijmn} + C_{ijkl} (N_{kmn|l} + \epsilon_{kls} V_{smn}) + B_{ijkl} V_{kmn|l} \rangle_{\Omega}, \quad (17)$$

$$D_{ijmn}^{eff} = \langle \tilde{D}_{ijmn} \rangle_{\Omega} = \langle D_{ijmn} + B_{ijkl} (U_{kmn|l} + \epsilon_{kls} M_{smn}) + D_{ijkl} M_{kmn|l} \rangle_{\Omega}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} B_{ijmn}^{eff} &= \langle \tilde{B}_{ijmn} \rangle_{\Omega} = \langle B_{ijmn} + C_{ijkl} (U_{kmn|l} + \epsilon_{kls} M_{smn}) + B_{ijkl} M_{kmn|l} \rangle_{\Omega} = \\ &= \langle \tilde{B}_{mnij} \rangle_{\Omega} = \langle B_{mnij} + B_{mnkl} (N_{kij|l} + \epsilon_{kls} V_{sij}) + D_{mnkl} V_{kij|l} \rangle_{\Omega}. \end{aligned} \quad (19)$$

**В четвертой главе** рассматривается случай неоднородного по толщине слоя.

Обозначим через  $L$  толщину слоя. Пусть ось  $x_3$  перпендикулярна лицевым поверхностям слоя и нижняя лицевая поверхность соответствует значению  $x_3 = 0$ . В этом случае коэффициенты  $C_{ijkl}$ ,  $D_{ijkl}$  и  $B_{ijkl}$  являются функциями координаты  $x_3$ . Считаем, что все искомые структурные функции  $N_{kmn(q)}$ ,  $U_{kmn(q)}$ ,  $V_{kmn(q)}$ ,  $M_{kmn(q)}$  также зависят только от  $x_3$ . Рекуррентные уравнения для поиска структурных функций становятся обыкновенными интегро-дифференциальными уравнениями.

$$\left\{ \begin{array}{l} [C_{i3mn} + C_{i3k3} N'_{kmn} + C_{i3kl} \epsilon_{kls} V_{smn} + B_{i3k3} V'_{kmn}]' = 0, \\ [B_{i3mn} + B_{i3k3} N'_{kmn} + B_{i3kl} \epsilon_{kls} V_{smn} + D_{i3k3} V'_{kmn}]' = \epsilon_{ijr} \left( \langle \tilde{C}_{rjmn} \rangle - \tilde{C}_{rjmn} \right), \\ \tilde{C}_{rjmn} = C_{rjk3} N'_{kmn} + C_{rjmn} + C_{rjkl} \epsilon_{kls} V_{smn} + B_{ijk3} V'_{kmn}; \end{array} \right. \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [B_{i3mn} + C_{i3k3} U'_{kmn,l} + C_{i3kl} \epsilon_{kls} M_{smn} + B_{i3k3} M'_{kmn}]' = 0, \\ [D_{i3mn} + B_{i3k3} U'_{kmn,l} + B_{i3kl} \epsilon_{kls} M_{smn} + D_{i3k3} M'_{kmn}]' = \epsilon_{ijr} \left( \langle \tilde{B}_{rjmn} \rangle - \tilde{B}_{rjmn} \right) \\ \tilde{B}_{rjmn} = C_{ijk3} U'_{kmn} + B_{ijmn} + C_{ijkl} \epsilon_{kls} M_{smn} + D_{i3k3} M'_{kmn}; \end{array} \right. \quad (21)$$

Штрихом обозначена производная по  $x_3$ , а угловые скобки обозначают среднее значение функции по толщине плиты, т.е.

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{L} \int_0^L f(x_3) dx_3$$

Уравнения (20) и (21) представляют собой интегро-дифференциальные уравнения, т.к. искомые функции входят под знак интеграла. По этой причине не удается получить точные аналитические решения. В работе разработан приближенный метод их решения.

Приближенные выражения для эффективных характеристик неоднородного по толщине слоя примут вид:

$$C_{ijmn}^{eff} \approx \langle \tilde{C}_{ijmn} \rangle = \langle \tilde{C}_{ijmn}^* \rangle - \langle T_{sij} \hat{D}_{st} T_{tmn} \rangle, \quad (22)$$

$$D_{ijmn}^{eff} \approx \langle \tilde{D}_{ijmn} \rangle = \langle \tilde{D}_{ijmn}^* \rangle - \langle \Theta_{sij} \hat{D}_{st} \Theta_{tmn} \rangle, \quad (23)$$

$$B_{ijmn}^{eff} \approx \langle \tilde{B}_{ijmn} \rangle = \langle \tilde{B}_{ijmn}^* \rangle - \langle T_{sij} \hat{D}_{st} \Theta_{tmn} \rangle = \quad (24)$$

$$= \langle \tilde{B}_{mnij} \rangle = \langle \tilde{B}_{mnij}^* \rangle - \langle \Theta_{smn} \hat{D}_{st} T_{tij} \rangle \quad (25)$$

где

$$T_{imn} = \epsilon_{ijr} \int_0^{x_3} \left[ \langle \tilde{C}_{rjmn}^* \rangle - \tilde{C}_{rjmn}^*(y) \right] dy - \tilde{B}_{i3mn}^*, \quad (26)$$

$$\Theta_{imn} = \epsilon_{ijr} \int_0^{x_3} \left[ \langle \tilde{B}_{rjmn}^* \rangle - \tilde{B}_{rjmn}^*(y) \right] dy - \tilde{D}_{i3mn}^*, \quad (27)$$

$$\tilde{C}_{ijmn}^* = C_{ijmn} + C_{ijk3} C_{k3l3}^{-1} \langle C_{l3p3}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{p3q3}^{-1} C_{q3mn} \rangle - C_{ijk3} C_{k3l3}^{-1} C_{l3mn}, \quad (28)$$

$$\tilde{B}_{ijmn}^* \equiv B_{ijmn} + C_{ijk3} C_{k3l3}^{-1} \langle C_{l3p3}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{p3q3}^{-1} B_{q3mn} \rangle - C_{ijk3} C_{k3l3}^{-1} B_{l3mn}, \quad (29)$$

$$\tilde{B}_{ijmn}^{**} = B_{ijmn} + B_{ijk3} C_{k3l3}^{-1} \langle C_{l3p3}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{p3q3}^{-1} C_{q3mn} \rangle - B_{ijk3} C_{k3l3}^{-1} C_{l3mn}, \quad (30)$$

$$\tilde{D}_{ijmn}^* = D_{ijmn} + B_{ijk3} C_{k3l3}^{-1} \langle C_{l3p3}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{p3q3}^{-1} B_{q3mn} \rangle - B_{ijk3} C_{k3l3}^{-1} B_{l3mn}, \quad (31)$$

$$\hat{D}_{ks} = D_{k3s3}^{-1}(\bullet) - D_{k3q3}^{-1} \langle D_{q3p3}^{-1} \rangle^{-1} \langle D_{p3s3}^{-1}(\bullet) \rangle, \quad (32)$$

В **пятой главе** рассматривается бесконечное в одном направлении упругое тело с моментными свойствами, ограниченное в двух других направ-

лениях цилиндрической поверхностью и неоднородное в поперечном сечении - случай волокнистого композита.

Примем прямоугольную систему координат  $x_1, x_2, x_3$ . Ось  $x_3$  направим параллельно оси цилиндра, а плоскость  $x_1, x_2$  совместим с одним из нормальных поперечных сечений цилиндра

При таком выборе системы координат  $x_1, x_2$

$$\begin{cases} C_{ijkl} = C_{ijkl}(x_1, x_2), \\ B_{ijkl} = B_{ijkl}(x_1, x_2), \\ D_{ijkl} = D_{ijkl}(x_1, x_2) \end{cases} \quad (33)$$

Искомые структурные функции  $(N, U, V, M)_{kmn}$  также будут зависеть только от координат  $x_1, x_2$ . Система уравнений для поиска структурных функций  $N_{kmn}, V_{kmn}$  примут вид

$$\begin{cases} [C_{iJmn} + C_{iJkL}N_{kmn,L} + C_{iJkl}\epsilon_{kls}V_{smn} + B_{iJkL}V_{kmn,L}]_{,J} = 0 \\ [B_{iJmn} + B_{iJkL}N_{kmn,L} + B_{iJkl}\epsilon_{kls}V_{smn} + D_{iJkL}V_{kmn,L}]_{,J} = \epsilon_{ijr} (C_{rjmn}^o - \tilde{C}_{rjmn}) \end{cases} \quad (34)$$

Здесь

$$C_{rjmn}^o = \langle \tilde{C}_{rjmn} \rangle = \langle C_{rjmn} + C_{rjkL}(N_{kmn,L} + \epsilon_{kls}V_{smn}) + B_{rjkL}V_{kmn,L} \rangle \quad (35)$$

А система уравнений для функций  $M_{kmn}, U_{kmn}$

$$\begin{cases} [B_{iJmn} + C_{iJkL}U_{kmn,L} + C_{iJkl}\epsilon_{kls}M_{smn} + B_{iJkL}M_{kmn,L}]_{,J} = 0 \\ [D_{iJmn} + B_{iJkL}U_{kmn,L} + B_{iJkl}\epsilon_{kls}M_{smn} + D_{iJkL}M_{kmn,L}]_{,J} = \epsilon_{ijr} (B_{rjmn}^o - \tilde{B}_{rjmn}), \end{cases} \quad (36)$$

где

$$B_{rjmn}^o = \langle \tilde{B}_{rjmn} \rangle = \langle B_{rjmn} + C_{rjkL}(U_{kmn,L} + \epsilon_{kls}M_{smn}) + B_{rjkL}M_{kmn,L} \rangle \quad (37)$$

Рассматривается случай, когда в выбранной системе координат плоскость перпендикулярная  $x_3$  является плоскостью симметрии упругих свойств,

следовательно,  $C_{IJ3L} = C_{IJK3} = 0$ ,  $D_{IJ3L} = D_{IJK3} = 0$ ,  $B_{IJKL} = B_{3JK3} = B_{3J3L} = 0$ . Тогда каждую систему уравнений удастся разбить на две группы независимых систем интегро-дифференциальных уравнений второго порядка. Причем первая группа является уравнениями плоской задачи моментной теории упругости (плоская деформация), а вторая группа уравнений представляет собой уравнения антиплоской задачи моментной теории упругости (антиплоская деформация).

В самом деле, для каждой пары  $(mn) \in \{(11); (12); \dots; (33)\}$  (9 вариантов) обозначим через  $u_i^{(mn)}(x_1, x_2) = N_{lmn}(x_1, x_2)$ , а  $\omega_i^{(mn)}(x_1, x_2) = V_{lmn}(x_1, x_2)$  Введем объемные нагрузки для плоской задачи

$$\begin{cases} X_I^{(mn)} = [C_{IJmn}]_{,J}, \\ Y_3^{(mn)} = [B_{3Jmn}]_{,J} + \epsilon_{3JI} (C_{IJmn} - C_{IJmn}^o) \end{cases} \quad (38)$$

Аналогично введем объемные нагрузки для антиплоской задачи

$$\begin{cases} X_3^{(mn)} = [C_{3Jmn}]_{,J}, \\ Y_I^{(mn)} = [B_{IJmn}]_{,J} + \epsilon_{Iqp} (C_{pqmn} - C_{pqmn}^o) \end{cases} \quad (39)$$

Решая данные вспомогательные задачи для каждой пары  $(mn)$ , мы получаем структурные функции  $N_{lmn}$  и  $V_{lmn}$ . Аналогичную процедуру проводим и для структурных функций  $M_{lmn}$  и  $U_{lmn}$ . Полученные функции далее используются для получения эффективных характеристик.

В композитах обычно принимается, что модули упругости меняются скачком от одной постоянной величины до другой при переходе через границу  $\Gamma$  раздела фаз. Поэтому производные от компонент тензора модулей упругости необходимо понимать в обобщенном смысле:

$$\begin{cases} X_I^{(mn)} = (C_{IJmn}^+ - C_{IJmn}^-) n_J \delta(\Gamma), \\ Y_3^{(mn)} = (B_{3Jmn}^+ - B_{3Jmn}^-) n_J \delta(\Gamma) + \epsilon_{3JI} (C_{3Jmn} - C_{3Jmn}^o) \end{cases} \quad (40)$$

где  $C_{ijmn}^+$  и  $C_{ijmn}^-$  - тензоры модулей упругости включения и матрицы,  $\vec{n}(n_1, n_2)$  - вектор единичной внешней нормали к границе  $\Gamma$  включения,  $\delta(\Gamma)$  - дельта-функция Дирака, сосредоточенная на поверхности раздела фаз.

Объемные нагрузки  $(C_{IJmn}^+ - C_{IJmn}^-) n_J \delta(\Gamma)$  и  $(B_{3Jmn}^+ - B_{3Jmn}^-) n_J \delta(\Gamma)$  будем трактовать как обычные нагрузки, распределенные по границам раздела фаз. Интенсивность этих нагрузок равна

$$\begin{cases} \phi_I^{(mn)} = (C_{IJmn}^+ - C_{IJmn}^-) n_J, \\ \psi_3^{(mn)} = (B_{3Jmn}^+ - B_{3Jmn}^-) n_J \end{cases} \quad (41)$$

В приложении А диссертации приведены формулы для эффективных характеристик в изотропном случае. А также представлены результаты расчетов для двухслойного композита с различными объемными долями.

В приложении В диссертации представлены формулы для расчетов эффективных характеристик для волокнистого композита. А также представлены результаты расчетов для волокнистого композита с различными объемными долями включения. Также был рассмотрен краевой эффект структурных функций.

В заключении приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Разработан метод осреднения задач моментной неоднородной упругости для тел периодической и непериодической структуры.
2. Получены специальные интегро-дифференциальные уравнения для вычисления эффективных характеристик композитов с компонентами, обладающими моментными свойствами.
3. Найдены аналитические выражения для эффективных моментных характеристик бесконечного в плане неоднородного по толщине изотропного и анизотропного слоя.
4. Разработана методика, алгоритм и программа численного расчета эффективных характеристик волокнистого композита, обладающими моментными свойствами.

## Публикации автора по теме диссертации

1. Горбачев В.И., Емельянов А.Н. Осреднение уравнений моментной теории упругости неоднородного тела // *Известия РАН. Механика твёрдого тела*. — 2014. — № 1. — С. 95–107.
2. А.Н. Емельянов. Эффективные материальные функции слоистых композитов в линейной моментной теории упругости // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. — 2015. — № 1. — С. 40–45.
3. Горбачёв, В. И., Емельянов, А. Н. Об эффективных характеристиках композита с моментными свойствами компонентов // *Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики*. — Издательство Московского университета Москва, 2010. — С. 66–66.
4. Горбачев, В. И., Емельянов, А. Н. Об эффективных характеристиках композита с моментными свойствами компонентов // *Научная конференция Ломоносовские чтения, секция механики, 14-23 апреля 2014г., Москва. Тезисы докладов*. — Издательство Московского университета Москва, 2014. — С. 56–56.
5. Горбачев В.И., Емельянов А.Н. Осреднение задач моментной упругости // *Упругость и неупругость. Дополнительные материалы Международного научного симпозиума по проблемем механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина*. Москва, 20-21 января 2011 г. — Москва: Издательство Московского университета, Москва, 2011. — С. 81–88.
6. А.Н. Емельянов. Эффективные характеристики слоистых композитов, состоящих из анизотропных слоев, в моментной теории упругости // *Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва, 20-21 января 2016 года)*. — Москва: Издательство Московского университета, Москва, 2016. — С. 303–307.