

## ОТЗЫВ

о диссертации Емельянова Александра Николаевича  
«Эффективные характеристики в моментной теории упругости».

Диссертация Емельянова Александра Николаевича посвящена осреднению уравнений моментной неоднородной теории упругости и вычислению эффективных характеристик композиционных материалов с компонентами, обладающими моментными свойствами. Этой проблеме в настоящее время придаётся очень большое значение в связи с широким распространением материалов с макро, микро и нано размерными включениями. Именно в таких материалах наиболее существенны эффекты моментности. Диссертация, отчасти, представляет собой распространение метода Бахвалова-Победри, применяемого для осреднения периодически неоднородных сред, на случай произвольно неоднородной упругой среды. Наиболее существенной частью работы является вычисление эффективных характеристик неоднородной моментной среды. Проблема вычисления эффективных свойств сведена к решению вспомогательных интегродифференциальных уравнений в области неоднородности. В случае неоднородного по толщине слоя удалось получить приближённое аналитическое решение этих уравнений. В других случаях применялся численный, конечно элементный метод решения вспомогательных интегродифференциальных уравнений.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списков литературы, рисунков, таблиц и двух приложений.

**Во введении** даётся краткий обзор истории создания и развития моментной теории упругости. Устанавливается место настоящей диссертационной работы среди современных работ по теории упругости моментной неоднородной и, в частности, периодически неоднородной среды.

**В первой главе,** наряду с несимметричным тензором напряжений, вводится тензор моментных напряжений. Выводятся уравнения равновесия и движения моментной среды. Исследуется кинематика моментной, или иначе полярной, среды. Рассматриваются определяющие соотношения теории моментной упругости. Дается математическая постановка статических и динамических краевых задач моментной теории упругости неоднородного анизотропного тела.

**Во второй главе** вводятся понятия об исходной и сопутствующей задачах. Дается подробный вывод и детальная проверка интегральной формулы представления решения исходной задачи через решение сопутствующей задачи. После этого, в предположении о гладкости решения сопутствующей задачи, из интегральной формулы получается эквивалентное представление решения исходной задачи в виде рядов по всевозможным производным от решения сопутствующей задачи. Коэффициенты рядов называются структурными функциями. Исследуются общие их свойства и дается обоснование названия «структурные функции». Выводятся рекуррентные последовательности вспомогательных краевых задач для структурных функций. Устанавливаются формулы, по которым свойства сопутствующего тела выражаются через начальные структурные функции. Показано, что в этом случае уравнения для начальных структурных функций представляют собой систему интегро-дифференциальных уравнений, а все последующие уравнения – систему дифференциальных уравнений в частных производных в области неоднородности свойств.

**Третья глава** полностью посвящена понятию эффективных моментных модулей упругости тела из композиционного материала, представляющего собой объединение большого количества одинаковых представительных объемов вещества. Показано, что средние по представительному объёму от силовых и моментных тензоров напряжений, с дроблением структуры,

стремятся к линейным комбинациям от деформаций и искривлений. Коэффициенты этих линейных комбинаций представляют собой постоянные тензоры четвёртого ранга, которые и называются эффективными моментными модулями упругости. Доказано, что эффективные перекрёстные модули взаимного влияния одинаковы. Показано, что все компоненты эффективных тензоров вычисляются через начальные структурные функции и, что ранее выбранные свойства сопутствующего тела совпадают с эффективными моментными модулями упругости.

**В четвёртой главе** вычисляются эффективные модули упругости бесконечного неоднородного слоя, обладающего моментными свойствами, зависящими от координаты по толщине. В этом случае уравнения для начальных структурных функций становятся обыкновенными интегро-дифференциальными уравнениями. Эти уравнения не удалось проинтегрировать в общем виде. Вместо этого изобретён приближенный способ их решения и получены явные аналитические формулы для эффективных характеристик. Во второй главе показано, что значения эффективных характеристик, вычисленные по приближенным формулам, мало отличаются от тех же характеристик, найденных численным способом.

**Последняя, пятая глава** посвящена численному методу вычисления эффективных характеристик волокнистых композитов с компонентами обладающими моментными свойствами. Интегро-дифференциальные уравнения решались методом конечных элементов. Подробно изложена методика и алгоритм решения вспомогательных задач. Рассмотрены различные формы волокон. На примере прямоугольных волокон в квадратной ячейке периодичности показано, что в теле из композита с регулярной структурой существует пограничный слой толщиной порядка характерного размера ячейки периодичности. В пограничном слое структурные функции изменяются от заданных значений на границе тела до одинаковых периодических функций во

всех внутренних ячейках. При дроблении структуры толщина погранслоя уменьшается.

Следует отметить, что в работе над диссертацией А.Н. Емельянов проявил несомненные способности, интерес к работе и глубокие знания.

Основные результаты в достаточной мере опубликованы в рецензируемых специализированных журналах, а также апробированы на многих семинарах в НИИ механики и на кафедрах механико-математического факультета МГУ.

Считаю, что диссертация работа «Эффективные характеристики в моментной теории упругости» удовлетворяет всем требованиям ВАК РФ к кандидатским диссертациям, а её автор – Александр Николаевич Емельянов достоин присвоения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – Механика деформируемого твёрдого тела.

Научный руководитель  
профессор кафедры механики композитов  
механико-математического факультета МГУ,  
заведующий лабораторией прочности и ползучести  
при высоких температурах НИИ механики МГУ,  
доктор физико-математических наук

04.10.2016

В.И. Горбачев

Подпись профессора В.И. Горбачева заверяю  
исполняющий обязанности декана  
механико-математического факультета МГУ  
профессор



В.Н. Чубариков