ФГБОУ ВО МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

РУБЛЁВА ОЛЬГА ВЛАДИМИРОВНА

УДК 514.774.8+515.124.4+519.17+519.224.22

ХАРАКТЕРИСТИКИ КОНЕЧНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ, ПОРОЖДЕННЫХ ГРАФАМИ

01.01.04 геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор А. О. Иванов

Москва 2016

Оглавление

Введение

Диссертация посвящена изучению характеристик конечных метрических пространств, порожденных графами, таких как минимальные заполнения и кривизна Риччи.

Первая глава диссертации посвящена исследованию одномерных минимальных заполнений конечных метрических пространств. Понятие одномерного минимального заполнения конечного метрического пространства впервые возникло в работе Иванова и Тужилина ([1]) при изучении двух задач — проблемы Штейнера о кратчайших сетях и задачи Громова о минимальном заполнении.

Проблема Штейнера о кратчайших сетях — это задача о нахождении оптимального соединения конечного подмножества метрического пространства. Впервые этот вопрос, по-видимому, возник в XVII веке в работах Пьера Ферма, и первоначально задача формулировалась так: для трех заданных точек на плоскости нужно найти такую четвертую, чтобы сумма расстояний от нее до трех заданных точек была минимальной ([2]).

Поставленная П. Ферма задача решалась в течение нескольких столетий. Первые решения и расположения точек предложили Э. Торричелли и Б. Кавальери (в XVII в.), затем их конструкцию усовершенствовал спустя столетие Т. Симпсон. Наконец в конце XIX века Ф. Хайнен и Ж. Бертрам предложили полное решение задачи Ферма ([3]). Одним из обобщений задачи Ферма является транспортная задача о соединении четырех городов кратчайшей системой дорог, которую решил К.Ф. Гаусс, предложив ввести две точки-развилки. Также обобщение задачи Ферма для множеств, состоящих из 4 и 5 точек, рассматривали французские математики — Ж.Д. Жергонн, Б.П.Э. Клайперон и Г. Ламе.

Обобщение задачи Ферма для n точек начал исследовать еще Штейнер. Он предложил рассмотреть единственную дополнительную точку с минимальной суммой расстояний от этой точки до заданных. Но в 1934 г. В.Ярник и О.Кеслер ([4]) предложили увеличить количество вспомогательных точек, как это делали в частных случаях Гаусс и Жергонн, для минимизации суммы расстояний между всеми точками. В настоящие дни именно эту задачу принято называть проблемой Штейнера.

Рассмотрим задачу Громова. Пусть M — гладкое замкнутое многообразие, на котором задана функция расстояния ρ. Рассмотрим всевозможные пленки W, затягивающие M, т.е. замкнутые компактные многообразия с краем, равным M. Рассмотрим на многообразии W функцию расстояния — d, не уменьшающую расстояния между точками из M. Такое пространство $\mathcal{W} = (W, \mathrm{d})$ будем называть *заполнением* метрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$. Задача Громова состоит в описании точной нижней грани объемов заполнений, а также в поиске тех пространств $\mathcal{W}$, называемых *минимальными заполнениями*, на которых эта нижняя грань достигается. Минимальные заполнения нашли применения в теории динамических систем, асимптотической геометрии и математической физике.

А.О. Иванов и А.А. Тужилин рассмотрели в качестве M конечное метрическое пространство, а заполнениями этого пространства стали метрическое пространства, имеющие структуру одномерных стратифицированных многообразий, которые можно рассматривать как графы с неотрицательной весовой функцией на ребрах. Таким образом, А.О. Иванов и А.А. Тужилин в [1] получили обобщение проблемы Громова на случай стратифицированных многообразий, которое формулируется так.

Пусть M — произвольное конечное множество, $G = (V, E)$ — некоторый связный граф. Говорят, что граф G *соединяет* M, если $V \supset M$. Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ — конечное псевдометрическое пространство, а $G = (V, E)$ — связный граф, соединяющий M. На ребрах графа зададим функцию $\omega\colon E \to \mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+$ — неотрицательные числа. Как правило, эту функцию ω называют *весовой* функцией, а пару (G, ω) — *взвешенным графом.* Функция ω порождает на множестве вершин V графа G индуцированную псевдометрику d_ω, которая по определению равна наименьшему весу пути между двумя заданными вершинами связного графа. Если для любых точек p и q из множества M псевдометрика d_ω не уменьшает расстояние между этими точками относительно псевдометрики ρ, т.е. $\mathrm{d}_\omega(p,q) \geq \rho(p,q)$, то взвешенный граф $\mathcal{G}$ называется *заполнением* метрического пространства $\mathcal{M}$, а граф G — *типом* этого заполнения. Число $\mathrm{mf}(\mathcal{M}) = \inf \omega(\mathcal{G})$ по всем заполнениям метрического пространства $\mathcal{M}$ называется *весом минимального заполнения*. Одномерная задача Громова состоит в нахождении заполнения $\mathcal{G}$ с весом, равным $\mathrm{mf}(\mathcal{M})$. Такое заполнение метрического пространства называется *минимальным заполнением* пространства $\mathcal{M}$.

Оказалось, что в теории минимальных заполнений псевдометрических пространств важную роль играют так называемые аддитивные и псевдоаддитивные пространства ([1]), которые также часто встречаются в приложениях, таких как биоинформатика и теория эволюции (см., например, [9]). Конечное метрическое пространство $\mathcal{M} = (M,\rho)$ называется *аддитивным*, если существует взвешенное дерево $\mathcal{G} = (G,\omega)$, $G = (V,E)$, такое что $M \subset V$, и метрика ρ совпадает с ограничением на M метрики d_ω. Дерево $\mathcal{G}$ в этом случае называется *порождающим для* $\mathcal{M}$. Не всякое псевдометрическое пространство является аддитивным. Хорошо известен следующий критерий аддитивности [5], [6]: псевдометрическое пространство (M,ρ) аддитивно, если и только если для него выполняется следующее *правило четырех точек*: для любых четырех точек p_i, p_j, p_k, p_l из M величины $\rho(p_i,p_j)+\rho(p_k,p_l)$, $\rho(p_i,p_k)+\rho(p_j,p_l)$, $\rho(p_i,p_l)+\rho(p_j,p_k)$ являются длинами сторон равнобедренного треугольника с основанием, не превосходящим боковой стороны. В [1] была введена характеристика конечного метрического пространства — его полупериметр (см. точное определение в главе 1), которая характеризует минимальную длину цикла, проходящего через все точки пространства. В диссертации получен критерий аддитивности конечного метрического пространства, основанный на свойствах минимальных заполнений.

Теорема 1. *Вес минимального заполнения псевдометрического пространства равен полупериметру этого пространства тогда и только тогда, когда пространство аддитивно.*

Вторая глава диссертации посвящена другой характеристике конечных метрических пространств, порожденных графами, — кривизне Риччи.

Понятие кривизны Риччи для метрических пространств общего вида впервые возникло в работах Бакри и Эмери [10]. Ими была также определена так называемая «нижняя граница» кривизны Риччи на классе измеримых метрических пространств. Были найдены свойства измеримых метрических пространств, необходимые для существования «нижней границы» кривизны Риччи этих пространств. Существование «нижней границы» кривизны Риччи позволяет установить верхнюю границу для диаметра метрического пространства (теорема Бонне-Майера). В случае, когда метрическое пространство порождено графом, можно установить верхнюю границу для диаметра графа (аналог теоремы Бонне-Майера для графа), а также оценить количество вершин в графе. Оказывается, «нижняя граница» кривизны Риччи является также нижней границей для первого ненулевого собственного значения лапласиана для G. В 2009 году Оливье [11] дал определение грубой кривизны Риччи на цепях Маркова, которое можно использовать для метрических пространств, порожденных графами.

Чанг и Яу впервые ввели определение кривизны Риччи для графов в 1996 году ([14]). А в 2011 году Лин, Лу и Яу (в [12]) модифицировали определение Оливье для кривизны Риччи цепей Маркова на метрических пространствах ([11]).

Изначально классическое понятие кривизны Риччи связывалось с римановыми многообразиями. Она естественно определяется как свертка тензора Римана и имеет следующую геометрическую интерпретацию. На римановом многообразии рассматриваются две достаточно близкие точки x и y, порождающие касательный вектор xy. В точке x рассмотрим другой касательный вектор w и пусть вектор w' — касательный вектор в точке y, полученный из вектора w параллельным переносом в направлении xy. Далее, посмотрим на поведение геодезических, выпущенных из точек x и y в направлениях соответственно w и w'. Если геодезические будут сближаться, то кривизна будет положительной, если геодезические будут разъезжаться, то кривизна будет отрицательной. Кривизна Риччи в направлении xy характеризует среднее значение кривизн по всем направлениям w в точке x.

Если представить все возможные направления w в виде геодезической сферы S_x с центром в точке x, то знак кривизны Риччи показывает будет ли расстояние между центрами геодезических сфер S_x и S_y больше или меньше, чем расстояние между точкой a, лежащей на геодезической сфере S_x, и точкой на геодезической сфере S_y, полученной параллельным переносом вектора xa вдоль xy.

Аналогичное понятие кривизны Риччи можно ввести для взвешенных деревьев. В этом случае в качестве геодезических сфер S_x и S_y будут рассматриваться окрестности вершин x и y, то есть все вершины, смежные с ними. В качестве метрики на графе будем рассматривать расстояние, порожденное весом ω, измеряющее наименьший вес пути, соединяющего его две точки.

Более формально. Рассмотрим взвешенный граф $G = (V, E)$, функция $\omega\colon E \to \mathbb{R}$ ставит в соответствие каждому ребру вес, равный 1. Функция ω называется *единичной весовой функцией* и порождает функцию $\mathrm{d}\colon V \times V \to \mathbb{R}$, называемую *расстоянием, порожденным единичной весовой функцией* Эта функция, очевидно, удовлетворяет стандартным аксиомам метрики, поэтому пару $\mathfrak{V} = (V, \mathrm{d})$ можно рассматривать как метрическое пространство. На этом метрическом пространстве зададим распределение вероятности $m_x^\alpha\colon V \to [0,1]$ специального вида:

$$m_x^\alpha(y) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } x = y, \\ \frac{1-\alpha}{\deg(x)}, & \text{если } x \sim y, \\ 0, & \text{если } x \nsim y \text{ и } x \neq y, \end{cases} \tag{$*$}$$

где $x \sim y$ обозначает, что вершины x и y — смежны (такое обозначение введено Jurgen Jost см., например, [19]). Эти функции будем называть *функциями случайного блуждания.* И введем *функцию Вассерштейна* 1 порядка $W(m_x^\alpha, m_y^\alpha)$, которая будет измерять расстояние между двумя функциями m_x^α и m_y^α на $\mathfrak{V} = (V, \mathrm{d})$:

$$W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) = \max_{\text{f — 1-липшицева функция}} \sum_{v \in \mathfrak{V}} f(v)(m_x(v) - m_y(v)) \tag{0.0.1}$$

При решении транспортной задачи эта функция является максимумом целевой функции, поэтому по-другому ее называют функцией *расстояния транспортировок* (см. раздел 2.1). Она считает минимальную стоимость перевозки груза единичной массы из окрестности вершины x в окрестность вершины y. В окрестностях этих вершин груз распределен согласно функциям m_x^α и m_y^α, введенным ранее. Более подробно о функции Вассерштейна первого порядка, о ее геометрическом и физическом смысле рассказано во второй главе диссертации.

Следуя работам [12, 14], определим *α-кривизну Риччи* формулой $k_\alpha(x,y) = 1 - W(m_x^\alpha, m_y^\alpha)/\operatorname{d}(x,y)$. При $\alpha = 0$ величина $k_0(x,y)$ — кривизна Риччи-Оливье. *Кривизной Риччи* назовем функцию:

$$k(x,y) := \lim_{\alpha \to 1} \frac{k_\alpha(x,y)}{1-\alpha}.$$

Функция $k(x,y)$ задана корректно. Существование предела несложно проверить с помощью правила Лопиталя.

В терминах транспортной задачи эта функция показывает как меняется оптимальная стоимость перевозки груза массы 1, сконцентрированного в вершине, при возникновении погрешности, то есть, когда часть этого груза бесконечно малой массы распределена по соседним вершинам. Таким образом, по кривизне Риччи можно определять, какая перевозка является более выгодной — из окрестности одной вершины в окрестность другой вершины, или из одной вершины в другую. В первом случае значение кривизны Риччи будет положительным, во втором — отрицательным и равно нулю, если такие перевозки одинаковые по стоимости.

Изучая работы [12, 14, 11], автор предложил рассмотреть кривизну Риччи между вершинами взвешенного дерева $G = (V, E)$ с произвольной весовой функцией (не единичной) $\omega\colon E \to \mathbb{R}_+$, порождающей метрическое пространство $(V, \operatorname{d}_\omega)$, где $\operatorname{d}_\omega\colon V \times V \to \mathbb{R}$ — функция, вычисляющая минимальный вес пути между двумя вершинами графа G. Для нового метрического пространства $(V, \operatorname{d}_\omega)$ также рассматриваются m_x^α вида $(*)$ и функции расстояния транспортировок $W(m_x^\alpha, m_y^\alpha)$ вида (1). Заменив единичную функцию расстояния произвольной, α-кривизна Риччи определяется следующим образом:

$$k_\alpha(x,y,\omega) = 1 - W(m_x^\alpha, m_y^\alpha)/\operatorname{d}_\omega(x,y),$$

тогда кривизна Риччи $k(x,y,\omega) := \lim_{\alpha \to 1} \frac{k_\alpha(x,y,\omega)}{1-\alpha}$.

Для кривизны Риччи с произвольной функцией расстояния d_ω в диссертации получена следующая теорема и некоторые следствия из нее:

Теорема 2. *Пусть (G, ω), $G = (V, E)$ — взвешенное дерево с весовой функцией ω. Тогда кривизна Риччи между любыми различными вершинами дерева G вычисляется по следующей формуле*:

$$k(x, y, \omega) = \frac{1}{\mathrm{d}_\omega(x,y)}\Big(\frac{1}{\deg(x)}\sum\nolimits_{z\sim x} k_z \cdot \mathrm{d}_\omega(z, x) + \frac{1}{\deg(y)}\sum\nolimits_{z\sim y} k_z \cdot \mathrm{d}_\omega(z, y)\Big), \quad (0.0.2)$$

где $k_z = 1$, если ребро xz входит в путь xy, и $k_z = -1$, если не входит.

Одним из важных следствий этой формулы является следствие 2. Оказывается, зная кривизны Риччи между всеми парами вершин бинарного дерева с единичной весовой функцией, можно восстановить структуру этого дерева. В доказательстве следствия 2 приведен специальный алгоритм, восстанавливающий структуру дерева.

Кроме того, получены точные верхняя и нижняя оценки кривизны Риччи между любыми различными вершинами дерева, см. точные формулы в Теореме 12.

Дальнейшее изучение одномерной задачи Громова о минимальных заполнениях конечных метрических пространств может помочь глубже понять взаимосвязь кривизны Риччи в классическом смысле и кривизны Риччи–Оливье для взвешенных графов. А именно, интересно проследить за поведением кривизн Риччи—Оливье минимальных заполнений конечных ε-сетей риманова многообразия при предельном переходе (в метрике Громова—Хаусдорфа) к самому многообразию. Гипотеза состоит в том, что кривизны заполнений могут иметь предел в некотором разумном смысле, и этот предел связан с кривизной Риччи риманова многообразия или его заполнения в смысле Громова. Также интересно выяснить, существует ли предел самих минимальных заполнений ε-сетей в метрике Громова—Хаусдорфа и, если да, то как он связан с минимальным заполнением многообразия и/или самим многообразием.

Структура работы

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка публикаций по теме диссертации и списка литературы.

Первая глава посвящена задаче описания аддитивных конечных метрических пространств в терминах минимальных заполнений. В разделе 1.5 сформулирован и доказан критерий аддитивности конечных метрических пространств.

Вторая глава посвящена исследованию кривизны Риччи на метрических пространствах со случайным блужданием. В разделе 2.3 автор доказывает формулу для кривизны Риччи между вершинами взвешенного дерева. В разделах 2.4 – 2.5 получены следствия из формулы для бинарных деревьев, также получены точные оценки кривизны Риччи между вершинами взвешенного дерева в разделе 2.6.

Список основных результатов, выносимых на защиту

Результаты, выносимые на защиту являются новыми. В диссертации получены следующие результаты:

1. Критерий аддитивности конечных метрических пространств (Теорема 1);

2. Формула для вычисления кривизны Риччи для взвешенных деревьев (Теорема 2);

3. Теорема о восстановлении структуры бинарного дерева по матрице кривизн Риччи между вершинами этого дерева (Следствие 2);

4. Оценка кривизны Риччи взвешенного дерева с произвольной весовой функцией (Теорема 12).

Методы исследования

В диссертации применяются методы метрической, дискретной геометрии, методы теории графов, методы теории минимальных заполнений конечных метрических пространств.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

1. Научная конференция «Ломоносовские чтения» (МГУ, апрель 2011 года);

2. Международная конференция «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна» (28 января 2012 года);

3. Международная конференция Александровские чтения (МГУ, май 2012 года);

4. Семинар «Дифференциальная геометрия и приложения» под руководством академика А.Т. Фоменко (МГУ, 18 ноября 2013 года);

5. Международная конференция «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна» (29 января 2014 года);

6. Семинар «Минимальные сети» под руководством профессоров А. О. Иванова и А. А. Тужилина, неоднократно (МГУ, 2010 - 2016 гг.);

7. Международная конференция Александровские чтения (МГУ, май 2016 года).

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в четырех статьях автора [1.1, 1.2, 1.3, 1.4] и семи тезисах, из них в журналах из перечня ВАК — 4 статьи.

Благодарности.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Александру Олеговичу Иванову за постановку задач, помощь и советы на всех этапах написания работы. Автор благодарен д.ф.-м.н., профессору Алексею Августиновичу Тужилину за постоянный интерес, советы и многочисленные обсуждения.

Автор признателен участникам семинара «Оптимальные сети» за полезные замечания, комментарии и дискуссии. Автор глубоко признателен всему коллективу кафедры дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета МГУ за теплую атмосферу, поддержку и внимание.

Глава 1

Аддитивные конечные метрические пространства и минимальные заполнения

1.1 Основные определения

Определение. *Метрическим пространством* $\mathcal{M}$ называется пара (M, ρ), где M — множество, элементы которого называются *точками*, а $\rho\colon M \times M \to \mathbb{R}$ — *функция расстояния* или *метрика* на множестве M, то есть для функции ρ и любых трех точек $x, y, z \in M$ выполняются следующие условия:

1. $\rho(x, y) \geq 0$;
2. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*симметрия*);
4. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (*неравенство треугольника*).

Определение. *Псевдометрикой* на множестве M называется функция $\mathrm{d}\colon M \times M \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям для произвольных точек $x, y, z \in M$:

1. $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$
2. если $x = y$, то $\mathrm{d}(x, y) = 0$;
3. $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$ (*симметрия*);
4. $\mathrm{d}(x, z) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$ (*неравенство треугольника*).

В отличие от метрики, для псевдометрики точки не обязаны совпадать при нулевом расстоянии между ними.

Определение. *Псевдометрическим пространством* называется пара $\mathcal{M} = (M, \mathrm{d})$, где M — некоторое множество, элементы которого называются точками, а d — псевдометрика на этом множестве.

Определение. *Графом* G называется пара (V, E), где V — множество вершин графа, а $E \subset V^{(2)}$ — множество ребер графа, где через $V^{(2)}$ обозначено множество двухэлементных подмножеств множества V. Обычно такой граф называется *простым.*

Определение. *Циклом* в графе называют последовательность его вершин, в которой каждая вершина соединена со следующей ребром, причем все ребра в цикле различны, а первая и последняя вершины последовательности совпадают. Цикл графа, состоящий из последовательности неповторяющихся вершин, называется *простым циклом.*

Определение. *Путем* в графе называется называется последовательность его вершин, в которой каждая вершина соединена со следующей ребром. Если для двух произвольных вершины графа существует последовательность его вершин такая, что каждая вершина соединена со следующей ребром, все ребра различны, а первым и последним элементами этой последовательности являются заданные вершины, то говорят, что эти две вершины *соединены* некоторым путем.

Определение. Граф $G = (V, E)$ называется *связным*, если любые две вершины графа можно соединить хотя бы одним путем.

Определение. Пусть $G = (V, E)$ — произвольный граф, а $v, w \in V$, $e = \{v, w\} \in E$, тогда говорят, что вершина v (или w) и ребро e *инцидентны.*

Определение. *Степенью вершины* графа называется количество ребер, инцидентных этой вершине.

Определение. Связный ацикличный, т.е. без циклов, граф называется *деревом.* Дерево назовем *бинарным*, если степени вершин дерева равны 1 или 3.

Так как в дальнейшем речь пойдет о граничных задачах, таких как задача об оптимальном соединении, удобно предполагать, что у каждого графа G фиксировано некоторое подмножество множества вершин (возможно, пустое), которое мы будем называть *граничным* и обозначать ∂G.

Определение. Взвешенным графом называется пара $\mathcal{G} = (G, \omega)$, где $G = (V, E)$ — связный граф, а $\omega\colon E \to \mathbb{R}_+$ — функция, которая каждому ребру графа G ставит в соответствие неотрицательное вещественное число. Эту функцию называют *весовой* функцией.

Для каждого пути γ и каждого подграфа H во взвешенном графе $\mathcal{G}$ определены их *веса* $\omega(\gamma)$ и $\omega(H)$ соответственно, равные сумме весов всех входящих в них ребер. Это позволяет превратить множество вершин связного взвешенного графа $\mathcal{G}$ в псвдометрическое пространство, положив расстояние между вершинами графа $\mathcal{G}$ равным наименьшему возможному весу соединяющего их в $\mathcal{G}$ пути. Так определенную функцию расстояния обозначим через d_ω и назовем *расстоянием, порожденным весовой функцией* ω. Доказательство аксиом псевдометрического пространства следует непосредственно из определения функции d_ω.

1.2 Аддитивные пространства. Определения, примеры, свойства

Определение. Конечное метрическое пространство $\mathcal{M} = (M, \rho)$ называется **аддитивным**, если существует взвешенное дерево $\mathcal{G} = (G, \omega)$, $G = (V, E)$, такое что $\partial G \subset M \subset V$, и метрика ρ совпадает с ограничением на M метрики d_ω. Дерево $\mathcal{G}$ в этом случае называется **порождающим для** $\mathcal{M}$.

1.2.1 Свойства аддитивных пространств

Критерием аддитивности пространства является следующее известное правило, называемое *правилом четырех точек.*

Теорема 3. ([5]) *Псевдометрическое пространство $\mathcal{M} = (M, \rho)$ аддитивно, если и только если для любых четырех точек p_i, p_j, p_k, p_l из M величины $\rho(p_i, p_j) + \rho(p_k, p_l)$, $\rho(p_i, p_k) + \rho(p_j, p_l)$, $\rho(p_i, p_l) + \rho(p_j, p_k)$ являются длинами сторон некоторого равнобедренного треугольника с основанием, не превосходящим боковой стороны.*

В работах [15, 17] доказана единственность порождающего дерева с ребер ненулевого веса, называемого *невырожденным.*

Теорема 4. ([15, 17]) *Если ограничиться рассмотрением невырожденных деревьев, то порождающее дерево аддитивного метрического пространства единственно.*

Следующий результат, сформулированный и доказанный в работе [1], полностью решает задачу о минимальных заполнениях аддитивных пространств.

Теорема 5. *([1]) Минимальными заполнениями аддитивного псевдометрического пространства являются его порождающие деревья и только они.*

1.2.2 Примеры аддитивных и неаддитивных пространств

Пример 1.

Неаддитивным пространством является, например, четырехточечное пространство (M, ρ) такое, что три его точки в данной метрике образуют на плоскости треугольник со сторонами 2, 3, 4, а четвертая точка лежит в центре описанной окружности.

Обозначим центр описанной окружности — p_1, а остальные точки этого пространства — p_2, p_3, p_4 так, что $\rho(p_1, p_i) = r$ для $i = 2, 3, 4$, а $\rho(p_2, p_3) = 2$, $\rho(p_3, p_4) = 4$, $\rho(p_2, p_4) = 3$.

Имеем

$$\rho(p_1, p_2) + \rho(p_3, p_4) = r + 4,$$

$$\rho(p_1, p_3) + \rho(p_2, p_4) = r + 3,$$

$$\rho(p_1, p_4) + \rho(p_2, p_3) = r + 2.$$

Для аддитивности пространства (M, ρ) необходимо равенство двух из трех величин. Но в данном примере это условие не выполняется, следовательно, пространство неаддитивно.

Пример 2.

Аддитивным пространством является, например, четырехточечное пространство (M, ρ), три точки которого образуют равносторонний треугольник со стороной 1, а расстояние от четвертой точки до вершин этого треугольника равно $\frac{1}{2}$. Порождающим деревом этого пространства будет звезда с вершиной в этой четвертой точке и расстояниями до остальных — $\frac{1}{2}$.

Обозначим вершины треугольника — p_1, p_2, p_3, а четвертую точку — p_4 так, что $\rho(p_4, p_i) = \frac{i}{4}$ для $i = 1, 2, 3$, а $\rho(p_1, p_2) = \rho(p_2, p_3) = \rho(p_1, p_3) = 1$. Имеем

$$\rho(p_1, p_2) + \rho(p_3, p_4) = \frac{3}{2},$$
$$\rho(p_1, p_3) + \rho(p_2, p_4) = \frac{3}{2},$$
$$\rho(p_1, p_4) + \rho(p_2, p_3) = \frac{3}{2}.$$

Правило четырех точек для этого метрического пространства выполнено, следовательно пространство аддитивно.

1.3 Одномерная задача Громова о минимальном заполнении.

Определение. Связный взвешенный граф $\mathcal{G} = (G, \omega)$, где $G = (V, E)$, называется *заполнением* псевдометрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$, если $M \subset V$ и для любой пары точек x и y из M выполнено неравенство $\rho(x, y) \le \mathrm{d}_\omega(x, y)$.

Определение. Величина $\omega(G)$ называется *весом заполнения* $\mathcal{G}$. Инфимум весов всевозможных заполнений псевдометрического пространства $\mathcal{M}$ обозначается через $\mathrm{mf}(\mathcal{M})$ и называется *весом минимального заполнения* пространства $\mathcal{M}$.

Определение. Заполнение $\mathcal{G}$, для которого $\omega(G) = \mathrm{mf}(\mathcal{M})$, называется *минимальным заполнением* пространства $\mathcal{M}$, а G — *типом минимального заполнения.*

Определение. Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ — произвольное конечное метрическое пространство, и $\mathcal{G} = (G, \omega)$ — некоторое его заполнение. Путь, соединяющий граничные вершины дерева $\mathcal{G}$, будем называть *граничным*, а граничный путь, вес которого равен расстоянию между его концевыми вершинами в пространстве $\mathcal{M}$, — *точным.*

1.3.1 Примеры минимальных заполнений

Понятие минимального заполнения разработано в [1], там же приведен ряд простых примеров.

Пример 1. *Треугольник*

Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ состоит и трех точек p_1, p_2, p_3. Положим $\rho_{ij} = \rho(p_i, p_j)$. Рассмотрим дерево $G = (V, E)$, у которого $V = M \bigcup \{v\}$ и $E = \bigcup_{i=1}^{3} vp_i$. Для графа G определим весовую функцию ω на E по формуле:

$$\omega(e_i) = \frac{\rho_{ij} + \rho_{ik} - \rho_{jk}}{2},$$

где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Ясно, что функция d_ω, ограниченная на M, совпадает с ρ, поэтому $\mathcal{G}$ — минимальное заполнение пространства $\mathcal{M}$.

Пример 2. *Четырехточечное пространство*

Утверждение 1. *([1], утверждение 11.3) Пусть $M = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, и ρ — произвольная псевдометрика на M. Положим $\rho_{ij} = \rho(p_i, p_j)$. Тогда вес минимального заполнения $\mathcal{G} = (G, \omega)$ пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$ дается формулой*

$$\frac{1}{2}\Big(\min(\rho_{12} + \rho_{34}, \rho_{13} + \rho_{24}, \rho_{14} + \rho_{23}) + \\ + \max(\rho_{12} + \rho_{34}, \rho_{13} + \rho_{24}, \rho_{14} + \rho_{23})\Big).$$

Если минимум в этой формуле равен $\rho_{ij} + \rho_{kl}$, то тип минимального заполнения — бинарное дерево, усы которого суть $\{p_i, p_j\}$ и $\{p_k, p_l\}$.

Пример 3. ***Правильный симплекс***

Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ состоит и n точек $p_1, p_2 \dots p_n$, расстояние между которыми постоянно и равно d, т.е. $\mathcal{M}$— так называемый правильный симплекс. Тогда взвешенное дерево $\mathcal{G} = (G, \omega)$, $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = M \bigcup \{v\}$ и ребрами vm, $m \in M$, веса которых равны $d/2$, является порождающим для $\mathcal{M}$, следовательно пространство $\mathcal{M}$ аддитивно и $\mathcal{G}$ — его единственное невырожденное минимальное заполнение (по теореме 3), вес которого равен $\frac{dn}{2}$.

1.3.2 Свойства минимальных заполнений

В работе [1] показано, что минимальное заполнение конечного метрического пространства всегда существует, причем при поиске минимального заполнения для $\mathcal{M} = (M, \rho)$ можно ограничиться рассмотрением деревьев $G = (V, E)$, $M \subset V$, у которых все вершины степени 1 и 2 принадлежат M.

Теорема 6. *([1]) Для любого конечного псевдометрического пространства $\mathcal{M}$ существует минимальное заполнение, являющееся бинарным деревом. Если же пространство $\mathcal{M}$ — метрическое, то для него существует так же минимальное заполнение, являющееся деревом с ненулевой весовой функцией. Обратно, если для $\mathcal{M}$ существует невырожденное минимальное заполнение, то $\mathcal{M}$ — метрическое пространство.*

Для любого конечного подмножества M псевдометрического пространства существует соединяющее M кратчайшее бинарное дерево. Если расстояния между различными точками из M отличны от нуля, то существует соединяющее M кратчайшее невырожденное дерево. Обратно, если для M существует невырожденное кратчайшее дерево, то расстояние между различными точками из M отлично от нуля.

Эта теорема объясняет следующее соглашение, принятое в в [1], которому мы также будем следовать.

При изучении минимальных заполнений всегда можно ограничиться рассмотрением деревьев, у которых все вершины степени 1 и 2 принадлежат границе.

В дальнейшем, если не оговорено противное, мы всегда будем предполагать, что эти условия выполнены.

1.4 Периметры метрических пространств. Определения, примеры, свойства

1.4.1 Определения

Пусть $G = (V, E)$ — произвольное дерево с некоторой границей M. Напомним, что в силу сделанного соглашения, M содержит все вершины дерева G степени 1 и 2. Выбросим из G некоторое ребро e, и пусть G_1 и G_2 — связные компоненты полученного леса. Положим $M_i = M \cap G_i$. Легко проверить, что множества M_i не пусты. Полученное разбиение $\{M_1, M_2\}$ множества M обозначим через $\mathcal{P}_G(e)$.

Определение. Пусть S — множество, содержащее k элементов. Назовем *циклическим порядком на множестве* S произвольную циклическую перестановку $\pi\colon S \to S$. Два элемента из S назовем *соседними* в смысле циклического порядка π, если один из них является π-образом другого. Нумерацию $(s_1, \ldots, s_k)$ элементов из S назовем *согласованной* с циклическим порядком π, если $\pi(s_i) = s_{i+1}$ для каждого i, $i < k$. Ясно, что нумерация $(s_1, \ldots, s_k)$, $k = |S|$, согласована с циклическим порядком π, если и только если $s_{i+1} = \pi^i(s_1)$ для всех i, $i < k$. Для каждого циклического порядка на множестве S существует k согласованных с ним нумераций.

Определение. Циклический порядок π на границе M дерева G назовем *планарным по отношению к* G или *обходом* G, если для каждого $e \in E$ и $M_i \in \mathcal{P}_G(e)$ существует единственная вершина $p \in M_i$, для которой $\pi(p) \notin M_i$. Последнее означает, что имеется такая нумерация множества M, согласованная с π, что в ней элементы множества M_1 предшествуют элементам множества M_2.

Приведем эквивалентное, см. [1], определение планарного порядка на M в терминах укладок. Пусть G' — некоторая укладка (вложение) дерева G на плоскость.

Рассмотрим обход вокруг дерева G'. Изобразим последовательно встречающиеся при таком обходе точки, соответствующие вершинам из M, последовательными точками на ориентированной окружности S^1. Отметим, что каждая вершина p из M встречается $\deg p$ раз, где $\deg p$ – степень вершины p. Для каждой вершины $p \in M$ степени больше 1, из всех соответствующих ей точек окружности оставим одну произвольную. Тем самым, мы построили инъекцию $\nu \colon M \to S^1$. Определим циклическую перестановку π, положив $\pi(p) = q$, где $\nu(q)$ следует за $\nu(p)$ на окружности S^1. Будем говорить, что построенный циклический порядок π *порожден укладкой* G'. Ясно, что укладка G' порождает $2\prod_{p\in M} \deg p$ циклических порядков.

Определение. Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ — конечное псевдометрическое пространство, и π — произвольный циклический порядок на M. *Периметром пространства* $\mathcal{M}$ *по отношению к порядку* π назовем величину

$$P(\mathcal{M}, \pi) = \sum_{p\in M} \rho\bigl(p, \pi(p)\bigr),$$

а $\min_\pi P(\mathcal{M}, \pi)$, где минимум берется по всевозможным циклическим порядкам π на M, назовем *периметром псевдометрического пространства* M и обозначим через $P(\mathcal{M})$. *Полупериметром псевдометрического пространства* M *по отношению к порядку* π назовем величину $p(\mathcal{M}, \pi) = \frac{1}{2}P(\mathcal{M}, \pi)$.

Кроме того, в дальнейшем нам понадобится следующее обозначение. Если $\mathcal{G} = (G, \omega)$ — некоторое взвешенное дерево, соединяющий точки конечного псевдометрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$, то множество всех циклических порядков на M, планарных по отношению к дереву G, т.е. всех обходов G, будем обозначать через $\mathcal{O}(G)$ или через $\mathcal{O}(\mathcal{G})$. Будем также говорить, что каждый такой планарный порядок определен на $\mathcal{M}$.

1.4.2 Примеры

Рассмотрим в качестве метрического пространства $\mathcal{M}$ — вершины квадрата x_1, x_2, x_3 и x_4 со стороной 1 на евклидовой плоскости(расстояние между диагональными точками равно $\sqrt{2}$). Нумерация вершин по часовой стрелке, начиная с левой верхней вершины. Зададим первый обход по порядку, согласно заданной нумерации вершин. В этом случае периметр считается так:

$$P(\mathcal{M},\pi_1)=\rho(x_1,x_2)+\rho(x_2,x_3)+\rho(x_3,x_4)+\rho(x_4,x_1)=$$
$$=1+1+1+1=4.$$

Можно задать другой обход на множестве M следующим образом: $\pi_2\colon x_1\to x_3\to x_2\to x_4$. В этом случае периметр пространства считается следующим образом:

$$P(\mathcal{M},\pi_2)=\rho(x_1,x_3)+\rho(x_3,x_2)+\rho(x_2,x_4)+\rho(x_4,x_1)=$$
$$=\sqrt{2}+1+\sqrt{2}+1=2+2\sqrt{2}$$

Отсюда найдем периметр данного метрического пространства

$$P(\mathcal{M})=\min_{\pi}P(\mathcal{M},\pi)=4.$$

По утверждению 1 вес минимального заполнения пространства $\mathcal{M}$ равен

$$\omega(G)=\frac{1}{2}\Big(\min(\rho(x_1,x_2)+\rho(x_3,x_4),\rho(x_1,x_3)+\rho(x_2,x_4),$$
$$\rho(x_1,x_4)+\rho(x_3,x_2))+\max(\rho(x_1,x_2)+\rho(x_3,x_4),$$
$$\rho(x_1,x_3)+\rho(x_2,x_4),\rho(x_1,x_4)+\rho(x_3,x_2))\Big)=1+\sqrt{2}.$$

Так как вес минимального заполнения метрического пространства не равен его полупериметру, то это пространство не является аддитивным (Теорема 7).

1.4.3 Свойства

Теорема 7 ([1], утверждение 7.2)**.** *Пусть $\mathcal{G}=(G,\omega)$ — взвешенное дерево с границей M, и π — произвольный циклический порядок на M. Тогда*

$$\sum_{p\in M}\mathrm{d}_\omega\big(p,\pi(p)\big)\geq 2\omega(G).$$

Более того, равенство достигается, если и только если π — некоторый планарный порядок по отношению к G.

Теорема 8 ([1], следствие 7.1)**.** *Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ — произвольное заполнение псевдометрического пространства $\mathcal{M}$, и π — некоторый планарный порядок из $\mathcal{O}(G)$. Тогда $\omega(G) \geq p(\mathcal{M}, \pi)$.*

1.5 Критерий аддитивности конечного метрического пространства

Основным результатом первой главы является следующий критерий аддитивности.

Теорема 1. *(Рублёва О.В., [1.1]) Вес минимального заполнения псевдометрического пространства равен полупериметру этого пространства тогда и только тогда, когда пространство аддитивно.*

Для доказательства критерия понадобится несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ — минимальное заполнение псевдометрического пространства $\mathcal{M}$. Предположим, что вес минимального заполнения равен полупериметру данного метрического пространства, т.е. $p(\mathcal{M}) = \omega(\mathcal{G})$. Тогда $p(\pi, \mathcal{M}) = p(\mathcal{M})$ для любого планарного порядка $\pi \in \mathcal{O}(G)$.*

Доказательство. По теореме 6 для произвольного планарного порядка $\pi \in \mathcal{O}(G)$ выполняется неравенство $p(\pi, \mathcal{M}) \leq \omega(G)$. Следовательно, так как $p(\mathcal{M})$ — наименьший полупериметр, имеем $p(\mathcal{M}) \leq p(\pi, \mathcal{M}) \leq \omega(G)$. Но по условию леммы $p(\mathcal{M}) = \omega(G)$, откуда $p(\pi, \mathcal{M}) = p(\mathcal{M})$, что и требовалось доказать.

□

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ — минимальное заполнение метрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$. Предположим, что $p(\mathcal{M}) = \omega(G)$. Пусть $\pi \in \mathcal{O}(G)$ — произвольный планарный порядок. Тогда все граничные пути, соединяющие соседние относительно порядка π вершины, точны.*

Доказательство. По теореме 7 имеет место равенство

$$2\omega(G) = \sum_{p \in M} \mathrm{d}_\omega(p, \pi(p)).$$

В силу леммы 1, $\sum_{p\in M} \rho(p, \pi(p_i)) = P(\pi, \mathcal{M}) = P(\mathcal{M})$. По определению заполнения $\mathrm{d}_\omega \geq \rho$, следовательно

$$2\omega(G) = \sum_{p \in M} \mathrm{d}_\omega(p, \pi(p)) \geq \sum_{p \in M} \rho(p, \pi(p_i)) = P(\mathcal{M}).$$

Так как по условию $2\omega(G) = P(\mathcal{M})$, то все неравенства выполнены в форме равенств, а именно, $\rho(p, \pi(p)) = \mathrm{d}_\omega(p, \pi(p))$ для всех p, т.е. все пути которые, соединяют вершины p и $\pi(p)$ — точные. Лемма доказана.

□

Лемма 3. *Пусть G — дерево с границей M. Любые две граничные вершины дерева G являются соседними относительно некоторого планарного порядка из $\mathcal{O}(G)$.*

Доказательство. Пусть p, $q \in M$. Ясно, что существует такое вложение G' дерева G в плоскость, что граничный путь, соединяющий p и q переходит в отрезок некоторой прямой ℓ, а все остальное дерево расположено в одной полуплоскости, ограниченной ℓ. Тогда при обходе плоского дерева G' вершины p и q будут соседними. Лемма доказана.

□

Доказательство теоремы. В [1, следствие 8.5], доказано, что если метрическое пространство аддитивно, то длина минимального заполнения этого пространства равна его полупериметру. Докажем обратное. Пусть вес минимального заполнения $\mathcal{G} = (G, \omega)$ равен полупериметру пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$. Возьмем любые две точки p и q из M, и пусть $\pi \in \mathcal{O}(G)$ — некоторый планарный порядок, в котором p и q являются соседними (такой порядок существует в силу леммы 3). Тогда из леммы 2 вытекает точность граничного пути в $\mathcal{G}$, соединяющего p и q, поэтому $\mathrm{d}_\omega(p, q) = \rho(p, q)$. В силу произвольности выбора точек p и q из M дерево $\mathcal{G}$ является порождающим для $\mathcal{M}$, что и означает аддитивность последнего. Теорема доказана.

Глава 2

Кривизна Риччи взвешенного дерева

2.1 Определения

2.1.1 Транспортная задача, как задача линейного программирования.

Термин «транспортная задача» объединяет широкий спектр задач, связанных с поиском оптимальных стратегий перераспределения ресурсов. В линейном программировании рассматривается следующая модель поставок однородного товара от поставщиков к потребителям при известных тарифах на перевозку между пунктами отправления и назначения.

Имеется n пунктов отправления и m пунктов назначения. Цена перевозки единицы товара из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения обозначается через c_{ij}. Необходимо найти такие объемы перевозимого груза x_{ij}, чтобы минимизировать общие затраты на перевозки, т.е.

$$F = \sum \sum c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

при условии

$$\sum_j x_{ij} = a_i,$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j.$$

Величины a_i при $i = 1, \dots n$ называют запасами поставщиков, b_j при $j = 1, \dots m$ — запросами потребителей, а функционал F — целевой функцией.

2.1.2 Обобщение транспортной задачи.

Рассмотрим транспортную задачу в терминах теории графов. Пусть (G, ω) — взвешенный граф стоимостей перевозок, где $G = (V, E)$, и пусть d — расстояние, порожденное весовой функцией ω. Определим на вершинах графа функцию распределения m_1, которая задает распределение единичной массы по всем вершинам графа G. Далее нам необходимо перераспределить массу 1 по вершинам графа, согласно распределению m_2. Пусть функция $\mathrm{d}(x, y)$ определяет цену перевозки груза массы 1 из вершины x в вершину y. Таким образом, стоимость перемещения груза веса m вдоль пути xy (из всех путей xy выбираем путь с наименьшей ценой) будет равна $m\,\mathrm{d}(x, y)$. Обозначим через c_{ij} вес груза, перевозимого из вершины x_i в вершину x_j. Тогда стоимость перераспределения груза будет равна $F = \sum_i \sum_j c_{ij}\,\mathrm{d}(x_i, x_j)$. Данная транспортная задача состоит в том, чтобы определить план перевозок c_{ij}, при котором m_1 превратится в m_2, т.е. $m_1(x_i) - \sum_j c_{ij} + \sum_k c_{kj} = m_2(x_i)$ и такой, чтобы стоимость перевозок была минимальной, т.е. $F \to \min$.

2.1.3 Двойственная транспортная задача линейного программирования.

Для двойственной транспортной задачи линейного программирования имеется n пунктов отправления и m пунктов назначения. Обозначим u_i — стоимость единицы продукции в i-м пункте отправления, v_j — стоимость единицы продукции после перевозки в j-й пункт назначения. Переменные u_i и v_j называют соответственно *потенциалами* поставщика и потребителя.

Двойственная транспортная задача состоит в нахождении неотрицательных величин u_i и v_j, обращающих в максимум целевую функцию

$$G = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i + \sum_{j=1}^{m} b_j v_j,$$

при условии

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, i = 1, \ldots n, j = 1, \ldots m,$$

где a_i при $i = 1, \ldots n$— запасы поставщиков, b_j при $j = 1, \ldots m$ — запросы потребителей, а c_{ij} — цена перевозки груза из i-го пункта в j-й пункт.

2.1.4 Обобщенная двойственная транспортная задача и функция Вассерштейна 1 порядка

Для транспортной задачи, сформулированной в разделе 2.1.2, можно сформулировать двойственную к ней задачу. В каждой вершине графа x_i определена стоимость единицы товара в ней $f(x_i)$. Хотим найти такое изменение стоимости единицы товара, после которого суммарная стоимость товара в вершинах графа максимально увеличится, т.е. $G = \sum_{x \in V} f(x)(m_1(x) - m_2(x)) \to \max$, но при этом разность стоимости вывозимой единицы продукции в x и ее стоимости после перевозки в y не превышает цену за транспортировку: $|f(x) - f(y)| \leq \mathrm{d}(x, y)$.

По первой теореме двойственности максимальное значение одной и минимальное значение другой функций (прямой и двойственной транспортной задачи) совпадают: $F = G$ (см. [16]). Максимальное значение функции G называется *расстоянием Вассерштейна первого порядка* $W(m_1, m_2)$ между двумя распределениями вероятностей m_1 и m_2 на (V, d):

$$W(m_1, m_2) = \max_{\text{f — 1-липшицева функция}} \sum_{x \in \mathfrak{V}} f(x)(m_1(x) - m_2(x)) \tag{2.1.1}$$

Хорошо известно, что функция $W(m_1, m_2)$ является метрикой на пространстве вероятностных мер ([18]).

2.1.5 Кривизны Риччи для метрических пространств со случайным блужданием.

Далее, будем рассматривать функции распределения $m_x^\alpha \colon V \to [0,1]$ специального вида:

$$m_x^\alpha(y) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } x = y, \\ \frac{1-\alpha}{\deg(x)}, & \text{если } x \sim y, \\ 0, & \text{если } x \nsim y \text{ и } x \neq y, \end{cases}$$

где $x \sim y$ обозначает, что вершины x и y — смежны. Эти функции будем называть *функциями случайного блуждания.*

Следуя работам [12, 14], определим *α-кривизну Риччи* формулой $k_\alpha(x,y) = 1 - W(m_x^\alpha, m_y^\alpha)/\,\mathrm{d}(x,y)$. При $\alpha = 0$ величина $k_0(x,y)$ — кривизна Риччи-Оливье. *Кривизной Риччи* назовем функцию:

$$k(x,y) := \lim_{\alpha \to 1} \frac{k_\alpha(x,y)}{1-\alpha}.$$

Функции m_x^α и m_y^α распределяют всю массу в окрестности точек x и y. Поскольку мы рассматриваем предел при $\alpha \to 1$, получаем, что практически вся масса сосредоточена в центральных точках x и y и лишь масса $m \to 0$ находится в смежных с центрами точках. Эту бесконечно малую массу, распределенную в окрестности точки, назовем погрешностью. Запишем выражение для кривизны Риччи по-другому:

$$k(x,y) = \lim_{\alpha \to 1} \frac{k_1(x,y) - k_\alpha(x,y)}{1-\alpha} = \lim_{\alpha \to 1} \frac{k_{1+(\alpha-1)}(x,y) - k_1(x,y)}{\alpha - 1} =$$
$$= \frac{d}{d\alpha}\,|_{\alpha=1}\, k_\alpha(x,y).$$

Таким образом кривизна Риччи на графах показывает как меняется оптимальная стоимость перевозки груза массы 1, сконцентрированного в вершине, при возникновении погрешности.

2.2 Предварительные результаты

Теорема 9. ([*12*]) *Для любых двух вершин* x, y *графа* $G = (V, E)$ *с постоянной единичной весовой функцией* d α*-кривизна Риччи ограничена сверху*

$$k_\alpha(x, y) \leq (1 - \alpha)\frac{2}{\mathrm{d}(x, y)}.$$

Теорема 10. ([*13*]) *Для любых двух вершин* x, y *графа* $G = (V, E)$ *с постоянной единичной весовой функцией* d *кривизна Риччи-Оливье* $k_0(x, y) \geq \frac{2}{\mathrm{d}_x} + \frac{2}{\mathrm{d}_y} - 2$*, если* $\mathrm{d}_x > 1$ *и* $\mathrm{d}_y > 1$*;* $k_0(x, y) = 0$*, если* $\mathrm{d}_x = 1$ *или* $\mathrm{d}_y = 1$.

Аналог теоремы Бонне-Майера для графов:

Теорема 11. ([*12*]) *Для любых двух вершин* x, y *графа* $G = (V, E)$ *с постоянной единичной весовой функцией* d*, если* $k(x, y) > 0$*, тогда*

$$\mathrm{d}(x, y) \leq \frac{2}{k(x, y)}.$$

Если для любого ребра $xy \in E$ $k(x, y) \geq c > 0$*, тогда*

$$\mathrm{diam}(G) \leq \frac{2}{c}.$$

2.3 Формула кривизны Риччи для взвешенного дерева

Теорема 2. *(Рублева О.В.,* [1.2]*) Пусть* (G, ω)*,* $G = (V, E)$ *— взвешенное дерево с весовой функцией* ω*, а* d *— расстояние, порожденное весом* ω*. Тогда кривизна Риччи между любыми различными вершинами дерева* G *вычисляется по следующей формуле*:

$$k(x, y) = \frac{1}{\mathrm{d}(x, y)}\Big(\frac{1}{\deg(x)}\sum_{z \sim x} k_z \cdot \mathrm{d}(z, x) + \frac{1}{\deg(y)}\sum_{z \sim y} k_z \cdot \mathrm{d}(z, y)\Big),$$

где $k_z = 1$ *, если ребро* xz *входит в путь* xy*, и* $k_z = -1$*, если не входит.*

Доказательство. Найдем кривизну Риччи между вершинами x и y. Пусть $\deg(x) = m$, $\deg(y) = n$. Без ограничения общности будем считать, что $n \geq m$. Тогда обозначим вершины, смежные с x, через $x_1, x_2, \ldots, x_m$, а вершины, смежные с y через $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Без ограничения общности будем считать, что x_1 и y_1 лежат на единственном пути γ, соединяющем x и y. Если γ состоит из одного ребра, то положим $x_1 = y$ и $y_1 = x$, а если из двух, то $x_1 = y_1$.

Лемма 4. *Расстояние транспортировок между функциями m_x^α и m_y^α в сделанных выше обозначениях имеет следующий вид*:

$$W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) = \sup_{f\text{ — 1-липшицева функция}} \Big[\alpha\big(f(x) - f(y)\big) +$$

$$+\frac{1-\alpha}{n}\big(f(x_1) - f(y_1)\big) + \ldots + \frac{1-\alpha}{n}\big(f(x_m) - f(y_m)\big) +$$

$$+\frac{1-\alpha}{nm}\sum_{i=1}^{m}\Big(f(x_i) - f(y_{m+1})\Big) + \ldots + \frac{1-\alpha}{nm}\sum_{i=1}^{m}\Big(f(x_i) - f(y_n)\Big)\Big]. \qquad (2.3.1)$$

.

Доказательство. Посчитаем расстоянием между функциями m_x^α и m_y^α:

$$W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) = \sup_{\text{f — 1-липшицева функция}} \sum_{v \in V} f(v)(m_x^\alpha(v) - m_y^\alpha(v)) =$$

$$= \sup_{\text{f — 1-липшицева функция}} \Big[\alpha f(x) + \frac{1-\alpha}{m} f(x_1) + \ldots + \frac{1-\alpha}{m} f(x_m) -$$

$$-\alpha f(y) - \frac{1-\alpha}{n} f(y_1) - \ldots - \frac{1-\alpha}{n} f(y_n)\Big] =$$

$$= \sup_{\text{f — 1-липшицева функция}} \Big[\alpha f(x) + \frac{1-\alpha}{n} f(x_1) + \ldots + \frac{1-\alpha}{n} f(x_m) +$$

$$+\frac{(n-m)(1-\alpha)}{nm} f(x_1) + \ldots + \frac{(n-m)(1-\alpha)}{nm} f(x_m) -$$

$$-\alpha f(y) - \frac{1-\alpha}{n} f(y_1) - \ldots - \frac{1-\alpha}{n} f(y_m) -$$

$$-\frac{1-\alpha}{n} f(y_{m+1}) - \ldots - \frac{1-\alpha}{n} f(y_n)\Big] =$$

$$= \sup_{\text{f — 1-липшицева функция}} \Big[\alpha(f(x) - f(y)) +$$

$$+\frac{1-\alpha}{n}(f(x_1) - f(y_1)) + \ldots + \frac{1-\alpha}{n}(f(x_m) - f(y_m)) +$$

$$+\frac{1-\alpha}{nm}\sum_{i=1}^{m}(f(x_i) - f(y_{m+1})) + \ldots + \frac{1-\alpha}{nm}\sum_{i=1}^{m}(f(x_i) - f(y_n))\Big].$$

Лемма доказана.

□

Подберем 1-липшицеву функцию f так, чтобы максимизировать выражение (2.3.1). Для этого определяем 1-липшицеву функцию $f(x)$ следующим образом. Разрежем исходное дерево на два поддерева по ребру yy_1. В результате, множество вершин V исходного дерева разбивается на два подмножества. Обозначим через X то из них, которое содержит вершину x, а второе, содержащее y, обозначим через Y. На множестве X определим функцию $f(v) = \mathrm{d}(v, y)$ — расстояние от произвольной вершины $v \in X$ до вершины y. На множестве Y определим функцию f так, что для любой точки $z \in Y$ имеем $f(z) = -\mathrm{d}(z, y)$.

Лемма 5. *Определенная нами функция f является 1-липшицевой, т.е. для любых вершин $v, z \in V$, $|f(v) - f(z)| \le \mathrm{d}(v, z)$.*

Доказательство. 1. Пусть сначала $v \in X$, а $z \in Y$, тогда $|f(v) - f(z)| = \mathrm{d}(v, y) + \mathrm{d}(y, z) = \mathrm{d}(v, z)$. Последнее равенство выполняется, т.к. мы рассматриваем дерево, в котором путь из одной вершины в другую единственный, и вершина y лежит на пути из v в z.

2. Пусть $v \in X$, а $z \in X$. Без ограничения общности будем считать, что $\mathrm{d}(v, y) \ge \mathrm{d}(z, y)$. Тогда $|f(v) - f(z)| = |\,\mathrm{d}(v, y) - \mathrm{d}(z, y)| \le \mathrm{d}(v, z) + \mathrm{d}(z, y) - \mathrm{d}(z, y) = \mathrm{d}(v, z)$.

3. Пусть $v \in Y$ и $z \in Y$, тогда $|f(v) - f(z)| = |-\mathrm{d}(v, y) - \mathrm{d}(z, y)| = \mathrm{d}(v, y) + \mathrm{d}(z, y) = \mathrm{d}(v, z)$. Последнее равенство выполняется, т.к. мы рассматриваем дерево, в котором путь из одной вершины в другую единственный, и вершина y лежит на пути из v в z.

Лемма доказана.

□

Лемма 6. *Функция f максимизирует выражение* (2.3.1).

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что все слагаемые в (2.3.1) максимальны, то есть выполняются равенства:

$$f(x) - f(y) = \mathrm{d}(x, y),$$

$$f(x_i) - f(y_i) = \mathrm{d}(x_i, y_j), i = 1, \dots m,$$

$$f(x_i) - f(y_{m+l}) = \mathrm{d}(x_i, y_{m+l}), i = 1, \dots m, l = 1, \dots n - m.$$

Первое равенство непосредственно следует из определения функции f. Положим, что вершины x_1 и y_1 являются внутренними вершинами пути xy, тогда вершины $x_i, y_1 \in X$, $y, y_j \in Y$ для $j \neq 1$. Из определения функции f второе равенство для $i = 1$ перепишется так: $f(x_1) - f(y_1) = \mathrm{d}(x_1, y) - \mathrm{d}(y_1, y) = \mathrm{d}(x_1, y_1)$, т.к. в рассматриваемом дереве вершины x_i, y_1 и y — последовательные вершины в пути $x_i y$. Из определения функции f второе равенство для $i \neq 1$ перепишется так: $f(x_i) - f(y_i) = \mathrm{d}(x_i, y) + \mathrm{d}(y, y_i) = \mathrm{d}(x_i, y_i)$, т.к. в рассматриваемом дереве вершины x_i, y и y_i — последовательные вершины в пути $x_i y_i$

Третье равенство доказывается аналогично второму, поскольку $x_i \in X$, $y_{m+l} \in Y$, и так как y лежит в пути $x_i y_{m+l}$ для $i = 1, \dots m$, $l = 2, \dots n - m$, по определению функции f имеем $f(x_i) - f(y_{m+l}) = \mathrm{d}(x_i, y) + \mathrm{d}(y_{m+l}, y) = \mathrm{d}(x_i, y_j)$.

Лемма доказана. □

Вернемся к доказательству теоремы. Введем новые коэффициенты k_v, которые равны 1 , если ребро vx входит в путь xy, и -1, если не входит, тогда для любых вершин x_i, смежных с x, и вершин y_j, смежных с y, выполняется равенство $\mathrm{d}(x_i, y_j) = \mathrm{d}(x, y) - k_{x_i}\,\mathrm{d}(x_i, x) - k_{y_j}\,\mathrm{d}(y_j, y)$.

Используя это равенство, введенную 1-липшицеву функцию, максимизирующую по лемме 6 выражение (2.3.1), и лемму 4, получаем:

$$W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) = \alpha\,\mathrm{d}(x, y) - \frac{1-\alpha}{n}\sum_{i=1}^{m} k_{x_i}\,\mathrm{d}(x, x_i) -$$

$$-\frac{1-\alpha}{n}\sum_{j=1}^{m} k_{y_j}\,\mathrm{d}(y, y_j) + \frac{m(1-\alpha)}{n}\,\mathrm{d}(x, y) -$$

$$-\frac{(n-m)(1-\alpha)}{nm}\sum_{i=1}^{m} k_{x_i}\,\mathrm{d}(x, x_i) -$$

$$-\frac{1-\alpha}{n}\sum_{j=m+1}^{n} k_{y_j}\,\mathrm{d}(y, y_j) + \frac{(n-m)(1-\alpha)}{n}\,\mathrm{d}(x, y).$$

Второе слагаемое с пятым дают $\frac{1-\alpha}{m}\sum_{i=1}^{m} k_{x_i}\,\mathrm{d}(x, x_i)$, третье с шестым слагаемые дают $\frac{1-\alpha}{n}\sum_{j=1}^{n} k_{y_j}\,\mathrm{d}(y, y_j)$, четвертое и седьмое — $(1-\alpha)\,\mathrm{d}(x, y)$. Таким образом, получаем:

$$W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) = \mathrm{d}(x, y) -$$

$$-\frac{1-\alpha}{m}\sum_{i=1}^{m} k_{x_i}\,\mathrm{d}(x, x_i) - \frac{1-\alpha}{n}\sum_{j=1}^{n} k_{y_j}\,\mathrm{d}(y, y_j).$$

Подставляем полученное выражение в формулу для α-кривизны Риччи:

$$k_\alpha(x, y) = \frac{\frac{1-\alpha}{m}\sum_{i=1}^{m} k_{x_i}\,\mathrm{d}(x, x_i) + \frac{1-\alpha}{n}\sum_{j=1}^{n} k_{y_j}\,\mathrm{d}(y, y_j)}{\mathrm{d}(x, y)}$$

Тогда кривизна Риччи между точками x и y равна

$$k(x, y) = \lim_{\alpha \to 1} \frac{k_\alpha(x, y)}{1-\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{d}(x,y)}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} k_{x_i}\,\mathrm{d}(x,x_i) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} k_{y_j}\,\mathrm{d}(y,y_j)\right).$$

Таким образом, получили формулу:

$$k(x,y) = \frac{1}{\mathrm{d}(x,y)}\left(\frac{1}{\deg(x)}\sum_{z\sim x} k_z\cdot \mathrm{d}(z,x) + \frac{1}{\deg(y)}\sum_{z\sim y} k_z\cdot \mathrm{d}(z,y)\right),$$

где $k_z = 1$, если ребро xz входит в путь xy, и $k_z = -1$, если не входит.

Теорема доказана. $\square$

2.4 Следствия из формулы кривизны Риччи для взвешенного дерева

2.4.1 Случай бинарного дерева с постоянной весовой функцией.

Следствие 1. *([1.4]) Рассмотрим бинарное дерево $G = (V, E)$ с постоянной весовой функцией, равной 1. Тогда*

(1) кривизна Риччи между вершинами x и y степени 1 равна $k(x,y) = \frac{2}{\mathrm{d}(x,y)}$;

(2) кривизна Риччи между вершинами x и y степени 1 и 3 соответственно равна $k(x,y) = \frac{2}{3\,\mathrm{d}(x,y)}$;

(3) кривизна Риччи между вершинами x и y степени 3 равна $k(x,y) = -\frac{2}{3\,\mathrm{d}(x,y)}$.

2.4.2 Связь структуры бинарного дерева с кривизнами Риччи на его вершинах.

Для формулировки второго следствия из теоремы 2 понадобятся следующие определения:

Определение. Рассмотрим бинарное дерево G с постоянной весовой функцией, равной 1, и занумерованными вершинами $v_1, \ldots, v_n$. *Матрицей кривизн Риччи* $K = (k_{ij})$ для этого дерева G назовем матрицу, элементами которой являются кривизны Риччи k_{ij} на паре вершин дерева G с номерами i и j.

Определение. Говорят, что две вершины бинарного дерева степени 1 образуют *усы*, если они смежны общей вершине степени 3.

Очевидно, у любого бинарного дерева с количеством вершин не меньше 3 есть усы.

Следствие 2. *(*[1.4]*) Бинарные деревья изоморфны тогда и только тогда, когда при постоянной весовой функции на ребрах матрицы кривизн Риччи равны при подходящей нумерации вершин.*

2.4.3 Оценка суммы кривизн Риччи на парах смежных вершин дерева.

Рассмотрим еще одно следствие из теоремы 2.

Следствие 3. *(*[1.4]*) Пусть* (G, ω) *— взвешенное дерево. Тогда сумма кривизн на всех парах смежных вершин этого дерева не превосходит 2. Равенство достигается, если и только если веса всех ребер дерева равны между собой.*

2.5 Доказательства следствий

2.5.1 Доказательство следствия 1.

Доказательство. (1) Если x, y — вершины степени 1, x' — вершина, смежная с x, y' — вершина, смежная с y, то $\mathrm{d}(x, x') = \mathrm{d}(y, y') = 1$. По формуле из теоремы 2, имеем

$$k(x, y) = \frac{\mathrm{d}(x, x') + \mathrm{d}(y, y')}{\mathrm{d}(x, y)} = \frac{2}{\mathrm{d}(x, y)}.$$

(2) Если x, y — вершины степени 1 и 3 соответственно, x' — вершина, смежная с x, а y_1, y_2, y_3 — вершины, смежные с y, то $\mathrm{d}(x, x') = \mathrm{d}(y, y_1) = \mathrm{d}(y, y_2) = \mathrm{d}(y, y_3) = 1$. По формуле из теоремы 2, имеем

$$k(x, y) = \frac{3\,\mathrm{d}(x, x') + \mathrm{d}(y, y_1) - \mathrm{d}(y, y_2) - \mathrm{d}(y, y_3)}{3\,\mathrm{d}(x, y)} = \frac{2}{3\,\mathrm{d}(x, y)}.$$

(3) Если x, y — вершины степени 3, x_1, x_2, x_3 — вершины, смежные с x, а y_1, y_2, y_3 — вершины, смежные с y, то $\mathrm{d}(x, x_i) = \mathrm{d}(y, y_j) = 1$ для $i, j = 1, 2, 3$. По формуле из теоремы 2, имеем

$$k(x,y) = \frac{1}{3\,\mathrm{d}(x,y)}\Big(\mathrm{d}(x,x_1) + \mathrm{d}(y,y_1) - \mathrm{d}(x,x_2) - \mathrm{d}(x,x_3) -$$

$$- \mathrm{d}(y,y_2) - \mathrm{d}(y,y_3)\Big) = -\frac{2}{3\,\mathrm{d}(x,y)}.$$

Следствие 1 доказано. □

2.5.2 Доказательство следствия 2.

Доказательство. Пусть дана матрица $K = (k_{ij})$ кривизн Риччи дерева G. Обозначим вершины дерева натуральными числами $1, \ldots, n$.

Рассмотрим сначала случай, когда в дереве две вершины степени 1, то есть дерево состоит из одного ребра. В этом случае матрица кривизн Риччи будет содержать только неотрицательные величины и иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим второй случай, когда в дереве три вершины степени 1, тогда в этом дереве ровно одна вершина степени 3. В этом случае, в силу следствия 1, матрица будет содержать только неотрицательные величины. Кривизны на паре вершин степени 1 равны 1, а на паре вершин, одна из которых степени 3, а вторая степени 1, равны 2/3. Тогда, с точностью до нумерации вершин, матрица K будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что вершина степени 3 — та, у которой в столбце и строке стоят 2/3.

Если вершин степени 1 больше трех, то вершин степени 3 больше одной, и в матрице K появляются отрицательные элементы. Предъявим алгоритм, позволяющий определить для каждой вершины степени 1 единственную смежную с ней вершину степени 3, а для каждой вершины степени три — смежные с ней вершины, таким образом восстанавливая матрицу смежности.

Сначала находим в матрице элемент $k_{ij} = 1$. Этот элемент существует, так как в бинарном дереве есть усы. Согласно следствию 1, имеем либо $k(x, y) = \frac{2}{\mathrm{d}(x,y)} = 1$, либо $k(x, y) = \frac{2}{3\,\mathrm{d}(x,y)} = 1$, либо $k(x, y) = -\frac{2}{3\,\mathrm{d}(x,y)} = 1$. Второй и третий случай невозможны, иначе $\mathrm{d}(x, y) = \pm 2/3$. В первом случае $\mathrm{d}(x, y) = 2$, это означает, что x и y, вершины степени 1, соединены двумя ребрами. Итак, номера i и j — номера вершин степени 1, образующих усы. Теперь надо найти вершину степени 3, смежную вершинам усов i и j. Кривизна на паре вершин — i и смежной с ней вершине степени 3, по формуле из Следствия 1, равна 2/3. Чтобы найти эту вершину найдем в i-строке элементы, равные 2/3. Кривизне, равной 2/3, соответствует вершина степени 3, расстояние до которой от вершины i равно 1 ребру, либо вершины степени 1, расстояние до которых от вершины i равно 3. Для усов i и j такая вершина степени 1 единственна, поэтому надо отличить вершину степени 1 от вершины степени 3. По предположению, дерево G имеет не менее двух вершин степени 3, поэтому существует еще хотя бы одна вершина степени 3, смежная с данной. Следовательно, в столбце, соответствующем вершине степени три, есть отрицательные числа (как минимум одно, равное $-2/3$). Таким образом, определили номер (пусть m) вершины степени 3, соседней с вершинами i и j. Для удобства отметим в матрице столбцы и строки, содержащие элементы k_{ij}, k_{ji}, k_{im}, k_{mi}, k_{jm}, k_{mj}, то есть соответствующие вершинам i, j, m.

Далее, рассмотрим вершину степени 3, соседнюю с m. Обозначим ее — l. Найдем соседние вершины с вершиной l. Всего таких вершин три. Одна из них — это вершина m, возможны три варианта: обе оставшиеся смежные вершины степени 1; обе оставшиеся вершины степени 3; одна из оставшихся вершин степени 1, другая — степени 3. В первом случае — это дерево с четырьмя вершинами степени 1 и двумя вершинами степени 3. Этому случаю соответствует два элемента $2/3$ в строке с номером l и матрица 5×5.

Если в строке с номером l содержатся ровно два элемента $-2/3$, то реализовался третий случай. В этом случае, ищем в строке с номером l кривизну, равную $2/3$ — это кривизна на паре вершин — данной вершине l и соседней с ней вершине степени 1, и кривизну, равную $-2/3$ и стоящую в непомеченном столбце, — это кривизна на паре вершин — вершине l и соседней вершине степени 3. Такие элементы в строке l единственны. Действительно, посмотрим чему может равняться количество ребер n между вершинами (одна из которых l), для которых кривизна равна $2/3$. Поскольку $\deg l = 3$, то применимы 2 и 3 формулы из следствия 1, то есть $2/3 = \pm(2/3)n$, следовательно, $n = \pm 1$. Случай $n = -1$ невозможен, следовательно, кривизна, равная $2/3$, достигается на вершине степени 1, смежной с l. Мы рассматривали случай, когда у вершины l смежная вершина степени 1 единственная, поэтому соответствие смежной с l вершины степени 1 и элемента $2/3$ в матрице, стоящего в l-ой строке, определено однозначно. Аналогично, посмотрим чему может равняться количество ребер между вершинами (одна из которых l), для которых кривизна равна $-2/3$. Поскольку $\deg l = 3$, то $-2/3 = \pm(2/3)n$. Снова получаем $n = 1$, то есть это вершины, смежные с l и имеющие степень 3. В нашем случае таких вершин две, которым соответствуют два равных элемента $-2/3$ в l-ой строке матрицы. Один из этих элементов стоит в помеченном столбце, поскольку одной из смежных с l вершин степени 3 является m. Следовательно, третья смежная с l вершина l' устанавливается однозначно.

Если в строке с номером l найдутся три элемента $-2/3$, то реализовался второй случай. В этом случае в строке l один из элементов $-2/3$ стоит в помеченном столбце, а оставшиеся два соответствуют кривизнам между вершиной l и двумя другими смежными с ней вершинами l_1 и l_2 степени 3. Поэтому дерево восстанавливается с точностью до перестановки поддеревьев, начинающихся в вершинах l_1 и l_2. Помечаем строки и столбцы, в которых стоят элементы матрицы с номерами, содержащими один индекс — смежную вершину с l, второй — один из ранее установленных.

Далее, для поддеревьев, начинающихся с вершины степени 3, смежной с l (во втором случае это вершины l_1 и l_2, в третьем — l'), повторяем рассуждения — находим смежные вершины и вычеркиваем элементы, соответствующие кривизнам между каждой смежной вершиной и всеми предыдущими вершинами. Делаем это до тех пор, пока все столбцы и строки не будут помечены.

Следствие 2 доказано. □

2.5.3 Доказательство следствия 3.

Доказательство. Подставим в общую формулу суммы кривизн $\sum_{x\sim y: x,y\in V} k(x,y)$ выражение для кривизны $k(x,y)$, полученное в теореме 1:

$$\sum_{x\sim y: x,y\in V} k(x,y) =$$

$$= \sum_{x\sim y: x,y\in V} \frac{1}{\mathrm{d}(x,y)} \left(\frac{\mathrm{d}(x,y) - \mathrm{d}(x,x_1) - \ldots - \mathrm{d}(x, x_{\deg x - 1})}{\deg x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{d}(x,y) - \mathrm{d}(y,y_1) - \ldots - \mathrm{d}(y, y_{\deg y - 1})}{\deg y} \right).$$

Теперь перегруппируем слагаемые и перейдем от суммирования по ребрам к суммированию по вершинам, при этом слагаемые из выражения для кривизны пары (x,y) распределим по двум суммам:

$$\sum_{x\sim y: x,y\in V} k(x,y) = \sum_{xy\in E} \left(\left(\frac{1}{\deg x} + \frac{1}{\deg y} \right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{1}^{\deg x - 1} \frac{\mathrm{d}(x,x_i)}{\deg x \ \mathrm{d}(x,y)} - \sum_{1}^{\deg y - 1} \frac{\mathrm{d}(y,y_j)}{\deg y \ \mathrm{d}(x,y)} \right).$$

Рассмотрим все возможные кривизны, в которых есть слагаемые, зависящие от вершины x. Всего их $\deg(x)$. Продолжаем преобразования:

$$\sum_{x\sim y: x,y\in V} k(x,y) = \sum_{x\in V} \frac{1}{\deg x} \deg x -$$

$$-\sum_{x\in V}\sum_{x_i,x_j\sim x, x_i\neq x_j}\frac{1}{\deg x}\left(\frac{\mathrm{d}(x,x_i)}{\mathrm{d}(x,x_j)}+\frac{\mathrm{d}(x,x_j)}{\mathrm{d}(x,x_i)}\right).$$

Для каждого слагаемого вида $\frac{\mathrm{d}(x,x_i)}{\mathrm{d}(x,x_j)}+\frac{\mathrm{d}(x,x_j)}{\mathrm{d}(x,x_i)}$ применим оценку $a+\frac{1}{a}\geq 2$. Каждой вершине v соответствуют $C^2_{\deg v}$ различных комбинаций пар ребер, смежных с этой вершиной. Следовательно, количество слагаемых вида $a+\frac{1}{a}$ равно $C^2_{\deg v}$. Таким образом, имеем:

$$\sum_{x\sim y: x,y\in V} k(x,y)\leq \mathrm{vol}(G)-2\sum_{x\in V}\frac{C^2_{\deg x}}{\deg x},$$

$$C^2_{\deg x}=\frac{\deg x(\deg x-1)}{2},$$

$$\sum_{x\sim y: x,y\in V} k(x,y)\leq \mathrm{vol}(G)-\sum_{x\in V}2\frac{\deg x(\deg x-1)}{2}\frac{1}{\deg x}\leq$$

$$\leq \mathrm{vol}(G)-\sum_{x\in V}(\deg x-1)=2\,\mathrm{vol}(G)-\sum_{x\in V}\deg x.$$

Для графов выполняется равенство: $\sum_{x\in V}\deg x=2|E|$, где $|E|$ — количество ребер. Для деревьев имеем:

$$\sum_{x\in V}\deg x=2|E|=2(\mathrm{vol}(G)-1)$$

.

Из этого равенства имеем:

$$\sum_{x\sim y: x,y\in V} k(x,y)\leq 2\,\mathrm{vol}(G)-2(\mathrm{vol}(G)-1)\leq 2$$

Следствие 3 доказано. □

2.6 Оценка кривизны Риччи

Для формулировки основной теоремы данного раздела введем новое обозначение: $U(x) := \frac{1}{\deg(x)} \sum_{z\sim x} k_z^* \cdot d(z,x)$, где $k_z^* = +1$, если $d(z,x) = \min_{v\sim x} d(x,v)$, и $k_z^* = -1$ для остальных $v \sim x$. В частности, если $\deg(x) = 1$, $U(x) = d(x,x')$, где $x \sim x'$.

Теорема 12. *(Рублева О.В., [1.3]) Пусть $G = (V,E)$ — произвольное дерево, ω — весовая функция, d — функция, измеряющая вес пути между вершинами дерева. Тогда кривизну Риччи на любой паре вершин дерева G, не являющегося отрезком, можно оценить сверху и снизу так:*

$$\frac{1}{\mathrm{diam}(G)}\Big(2\min_{v\in V}(U(v))\Big) \leq \frac{1}{\mathrm{d}(x,y)}\Big(2\min_{v\in V}(U(v))\Big) \leq k(x,y) \leq 1,$$

причем эти оценки являются точными.

Для дерева G, являющегося отрезком xy, кривизна $k(x,y) = 2$.

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай дерева — отрезок xy. В этом случае применим формулу для грубой кривизны Риччи (коэффициенты k_z из определения выше):

$$k(x,y) = \frac{1}{\mathrm{d}(x,y)}\Big(\frac{1}{\deg(x)}\sum_{z\sim x} k_z \cdot \mathrm{d}(z,x) + \frac{1}{\deg(y)}\sum_{z\sim y} k_z \cdot \mathrm{d}(z,y)\Big),$$

В данном примере $\deg(x) = \deg(y) = 1$, $k_x = k_y = +1$, получаем:

$$k(x,y) = \frac{1}{\mathrm{d}(x,y)}\big(\mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,x)\big) = 2$$

Оценка сверху. Докажем, что $k(x,y) \leq 1$ для любых двух вершин $x, y \in V$. Рассмотрим общую формулу:

$$k(x,y) = \frac{1}{\mathrm{d}(x,y)}\Big(\frac{1}{\deg(x)}\sum_{z\sim x} k_z \cdot \mathrm{d}(z,x) + \frac{1}{\deg(y)}\sum_{z\sim y} k_z \cdot \mathrm{d}(z,y)\Big),$$

Рассмотрим слагаемое $\frac{1}{\deg(x)} \sum_{z\sim x} k_z \cdot \mathrm{d}(z,x)$. Заметим, что в этой сумме все слагаемые, кроме одного, отрицательные, поэтому все слагаемое принимает наибольшее значение, когда знаменатель $\deg(x)$ наименьший из всех возможных, т.е.

$\deg(x) = 1$, и, соответственно, в числителе стоит единственное положительное слагаемое, т.е.

$$k(x,y) \leq \frac{1}{\mathrm{d}(x,y)}\Big(\mathrm{d}(z_1,x) + \mathrm{d}(z_2,y)\Big)$$

Точки z_1 и z_2 лежат на пути xy и являются смежными с точками, соответственно, x и y, поэтому справедливо неравенство: $\mathrm{d}(x,y) \geq \mathrm{d}(x,z_1) + \mathrm{d}(z_2,y)$, причем равенство достигается, когда $z_1 = z_2$ и x, z_1, y — последовательные точки пути xy. Поэтому имеем:

$$k(x,y) \leq \frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(x,y)} \leq 1.$$

Оценка снизу. Докажем, что в сделанных выше обозначениях $k(x,y) \geq \frac{1}{\mathrm{diam}(G)}\Big(2\min_{v\in V}(U(v))\Big)$.

Рассмотрим снова общую формулу для кривизны Риччи:

$$k(x,y) = \frac{1}{\mathrm{d}(x,y)}\Big(\frac{1}{\deg(x)}\sum_{z\sim x} k_z \cdot \mathrm{d}(z,x) + \frac{1}{\deg(y)}\sum_{z\sim y} k_z \cdot \mathrm{d}(z,y)\Big).$$

Из определения функции $U(x)$ справедлива следующая оценка: $U(x) \leq \frac{1}{\deg(x)}\sum_{z\sim x} k_z \cdot \mathrm{d}(x,y)$. Поставим ее в цепочку неравенств:

$$k(x,y) \geq \frac{1}{\mathrm{d}(x,y)}\Big(U(x) + U(y)\Big) \geq \frac{1}{\mathrm{d}(x,y)}\Big(2\min(U(x),U(y))\Big) \geq$$

$$\frac{1}{\mathrm{d}(x,y)}\Big(2\min_{v\in V}(U(v))\Big) \geq \frac{1}{\mathrm{diam}(G)}\Big(2\min_{v\in V}(U(v))\Big).$$

Точность оценок.

Пусть G — дерево с постоянной весовой функцией. Оценка снизу $\mathrm{d}(x,y) \geq \frac{1}{\mathrm{diam}(G)}\Big(2\min_{v\in V}(U(v))\Big)$ достигается и совпадает с формулой из теоремы 1 для вершин дерева G степени 1, расстояние между которыми равно $\mathrm{diam}(G)$. Оценка сверху $k(x,y) \leq 1$ достигается и совпадает с оценкой из теоремы 1 для вершин из усов взвешенных деревьев с постоянной весовой функцией, равной 1 на каждом ребре.

Теорема доказана.

$\square$

Заключение

В этом разделе мы еще раз перечислим основные результаты работы и возможные дальнейшие пути исследования.

В главе 1 был доказан критерий аддитивности конечного метрического пространства, то есть установлена связь между минимальными заполнениями конечных метрических пространств и свойством аддитивности.

В главе 2 получена явная формула для вычисления кривизны Риччи для случая взвешенных деревьев. В качестве следствий из этой формулы установлено, что для бинарных деревьев с постоянной весовой функцией структура дерева полностью определяется матрицей попарных кривизн Риччи между вершинами этого дерева. Также получены точные нижняя и верхняя оценки кривизны Риччи для произвольного взвешенного дерева.

Перечислим несколько возможных направлений дальнейшего исследования и задач, которые хотелось бы решить:

1. Дальнейшее изучение свойств конечных метрических пространств в терминах полупериметра.

2. Обобщение данной формулы на произвольные взвешенные графы.

3. Применение кривизны Риччи к решению транспортных задач с новыми функциями случайных блужданий.

4. Возможно ли установить связь между топологией произвольного взвешенного дерева и матрицей попарных кривизн Риччи между вершинами этого дерева?

5. Возможно ли установить связь между топологией произвольного взвешенного графа и матрицей попарных кривизн Риччи между вершинами этого графа?

6. Существует ли предел минимальных заполнений ε-сетей в метрике Громова—Хаусдорфа и, если да, то как он связан с минимальным заполнением много-

образия и/или самим многообразием?

7. Имеют ли кривизны заполнений предел в некотором разумном смысле, и как этот предел связан с кривизной Риччи риманова многообразия или его заполнения в смысле Громова?

Список публикаций по теме диссертации

[1.1] Рублева О. *Критерий аддитивности конечного метрического пространства* // Вест. Моск. ун-та, Матем. Механ. 2012, №2, 8-11.

[1.2] Рублева О. *Кривизна Риччи взвешенных деревьев* // Вест. Моск. ун-та, Матем. Механ. 2015, №6, 52-54.

[1.3] Рублева О. *Оценка кривизна Риччи взвешенного дерева* // Вест. Моск. ун-та, Матем. Механ. 2016, №3, 51-53.

[1.4] Рублева О. *Кривизна Риччи взвешенного дерева* // Математ. заметки 2016, **100(4)**, 586-596.

[1.5] Рублева О. *Критерий аддитивности конечных метрических пространств и минимальные заполнения* // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна — 2012», 189-190.

[1.6] Рублева О. *Кривизна Риччи на графах. Формула кривизны Риччи для взвешенных деревьев* // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна — 2014», 272-273.

[1.7] Рублева О. *Оценка кривизны Риччи взвешенного дерева* // Материалы международной конференции «Ломоносов 2016».

[1.8] Рублева О. *Кривизна Риччи взвешенного дерева* // Материалы международной конференции «Ломоносов 2015».

[1.9] Рублева О. *Критерий аддитивности конечного метрического пространства и минимальные заполнения* // Материалы международной конференции «Ломоносов 2011».

[1.10] Рублева О. *Критерий аддитивности конечного метрического пространства и минимальные заполнения* // Материалы международной конференции «Александровские чтения 2012».

[1.11] Рублева О. *Оценка кривизны Риччи взвешенного дерева* // Материалы международной конференции «Александровские чтения 2016».

Литература

[1] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении*, Математ. сборник (2011).

[2] Ferma P. 1643 *ED H Tannery, ed "Oeuveres"*, vol.1, Paris 1891.

[3] G. Loria, G. Vassura (1919), *Opere de Evangelista Torriceli*, vol. 1, cc. 79-97.

[4] V. Jarnik, O. Kossler (1934), *O minimalnich grafech obsahujicich n danych bodu*, Cas, Pestovani Mat. (Essen) T. 63: 223-235.

[5] К. А. Зарецкий, *Построение дерева по набору расстояний между висячими вершинами*, УМН, **20** (6), сс. 90–92 (1965).

[6] J. M. S. Simões-Pereira, *A note on the tree realizability of a distance matrix*, J. Combinatorial Th., **6**, pp. 303–310 (1969).

[7] M. Gromov, *Filling Riemannian manifolds*// J. Diff. Geom., **18** (1), pp. 1–147 (1983).

[8] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей*// Москва, Ижевск, Институт компьютерных исследований (2003).

[9] M. M. Deza, E. Deza, *Encyclopedia of Distances*// Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, (2009).

[10] Bakry D., Emery M., *Diffusions hypercontractives* // Lect. Notes Math., 1985, **1123**, 177-206.

[11] Ollivier Y., *Ricci curvature of Markov chains on metric spaces* // J.Funct.Anal. 2009, **256(3)**, 810-864.

[12] Lin Y., Lu L. Y., Yau S. T. *Ricci curvature of graphs* // Tohoku Mathematical Journal, 2011, **63**, 605-627.

[13] Lin Y., Yau S. T.*Ricci curvature and eigenvalue estimate on locally finite graphs* // Math. Res. Lett., 2010, **17**, 345-358.

[14] Fan Chung, S.-T. Yau *Logarithmic Harnack inequalities* Math. Res. Lett., 1996, 793–812.

[15] Е. А. Смоленский, *Об одном способе линейной записи графов*// Ж. вычисл. матем. и матем. физика., 1962, **2**, 371-372.

[16] Л. В. Канторович *О перемещении масс*// Теория представлений, динамические системы. XI, Специальный выпуск, Зап. научн. сем. ПОМИ, 2004, **312**, 11–14.

[17] S.L. Hakimi, S.S. Yau, *Distance matrix of a graph and its realizability*, Quart. Appl. Math., 1965, **22**, 305–317.

[18] В.И. Богачев, А.В. Колесников, *Задача Монжа-Канторовича: достижения, связи и парспективы*, УМН, 2012, **67**, 5(407), 3-110.

[19] J.Jost, S. Lui, *Ollivier's Ricci curvature, local clustering and curvature dimension inequalities on graphs*, Discrete and computational geometry, **51**(2014),2, 300-322.