ФГБОУ ВО
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Митрофанов Иван Викторович

Алгоритмические проблемы, связанные с морфическими последовательностями

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре Высшей алгебры Механико–математического факультета ФГБОУ ВО Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научные руководители: **Михалёв Александр Васильевич**, доктор физико-математических наук, профессор

Белов Алексей Яковлевич, доктор физико-математических наук, федеральный профессор

Официальные оппоненты: **Буфетов Александр Игоревич**, доктор физико-математических наук, профессор, Математический институт имени В. А. Стеклова РАН, ведущий научный сотрудник

Петров Федор Владимирович, кандидат физико-математических наук доцент, Санкт-Петербургский национальный исследовательский Академический университет Российской академии наук, старший научный сотрудник

Ведущая организация: **ФГБОУ ВПО Московский педагогический государственный университет**.

Защита состоится 17 февраля 2017 года на заседании диссертационного совета Д.501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: РФ, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова, по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, http://mech.math.msu.su/ snark/ index.cgi, http://istina.msu.ru/dissertations/28441979.

Автореферат разослан 17 января 2017 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84,
доктор физико-математических
наук, член-корреспондент РАН **Шафаревич Андрей Игоревич**

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Комбинаторика слов имеет важное значение в самых разных областях математики и computer science. Ряд проблем, относящихся к комбинаторике слов, находится на стыке алгебры (при изучении базисов и нормальных форм) и символической динамики. В известной монографии французских авторов под коллективным псевдонимом М.Лотэйр (M.Lothaire [1] [2]) значительная часть посвящена приложениям в алгебре, см. также монографию М. В. Сапира [3]. Комбинаторика слов широко используется в задачах комбинаторной теории групп[4] [5] [6] [7] [8], в теории алгебр Ли, вопросах бернсайдовского типа и задачах, связанных с мономиальными алгебрами [9] [10] [11] [12] [13].

Многие алгебраисты использовали в работах достаточно тонкие теоремы комбинаторики слов.

Многие проблемы комбинаторики слов представляют самостоятельный интерес. История комбинаторики бесконечных слов (сверхслов) начинается с работ Туэ, а также М. Морса и Г. Хедлунда[14]. Работы Туэ и М. Морса, а

---

[1] M.Lothaire, *Combinatorics on Words.* // Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley, Reading, MA, 1983, Vol. 17.

[2] M.Lothaire, *Algebraic combinatorics on words.* A collective work by Jean Berstel, Dominique Perrin, Patrice Seebold, Julien Cassaigne, Aldo De Luca, Steffano Varricchio, Alain Lascoux, Bernard Leclerc, Jean-Yves Thibon, Veronique Bruyere, Christiane Frougny, Filippo Mignosi, Antonio Restivo, Christophe Reutenauer, Dominique Foata, Guo-Niu Han, Jacques Desarmenien, Volker Diekert, Tero Harju, Juhani Karhumaki and Wojciech Plandowski. With a preface by Berstel and Perrin. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 90. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, 504 pp.

[3] M. V. Sapir. *Combinatorial algebra: syntax and semantics.* Springer, 2014.

[4] П. С. Новиков, С. И. Адян. *О бесконечных периодических группах. I.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:1 (1968), 212–244.

[5] П. С. Новиков, С. И. Адян. *О бесконечных периодических группах. II.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:2 (1968), 251–524.

[6] П. С. Новиков, С. И. Адян. *О бесконечных периодических группах. III.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:3 (1968), 709–731.

[7] П. С. Новиков, С. И. Адян. *Определяющие соотношения и проблема тождества для свободных периодических групп нечетного порядка.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:4 (1968), 971–979.

[8] Р. Линдон ,П. Шупп, *Комбинаторная теория групп* // М., Мир, 1980.

[9] А. Я. Белов, В. В. Борисенко, В. Н. Латышев, *Мономиальные алгебры* // Итоги науки и техники. Совр. Мат. Прил. Тем. Обзоры т. 26 (алг. 4), М. 2002. 35-214.

[10] В. А. Уфнаровский. *Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре.* Итоги науки и техн., Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1990, №57, С. 5–177.

[11] Drensky, V., *Free Algebras and PI-algebras: Graduate Course in Algebra*, Springer-Verlag, Singapore (2000).

[12] M. V. Sapir. *Combinatorial algebra: syntax and semantics.* Springer, 2014.

[13] *Alexei Kanel-Belov, Yakov Karasik, Louis Halle Rowen*, *Computational Aspects of Polynomial Identities: Volume l, Kemer's Theorems*, 2nd Edition, Monographs and Research Notes in Mathematics., Boca Raton, FL: CRC Press, 2015, ISBN: 978-1-4987-2008-3 , 418 pp.,

[14] M. Morse, G. A. Hedlund, *Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories*, // Amer. J. Math. 62, 1–42.

именно построение примера бесконечного бесквадратного слова (осуществленное с помощью подстановочных систем, подстановочные системы исследуются в данной диссертации), послужили отправной точкой для решения проблемы Бернсайда П. С. Новиковым и С. И. Адяном, явившимися одними из основоположников применения комбинаторики слов в теории групп и полугрупп. П. С. Новиков и С. И. Адян[15] [16] [17] [18] провели детальное исследование свойств периодичности, находящее свое применение в самых разных разделах математики[19] [20]. Е. С. Голод и И. Р. Шафаревич [21] [22] построили конечно порожденную бесконечную периодическую группу (с неограниченной экспонентой) на основе рассмотрения нормальных форм алгебр и оценки функкий роста.

Комбинаторные соображения, возникшие в символической динамике (автоматные группы), нашли свое применение в работах С. В. Алешина [23] [24] [25]. В работах Р. И. Григорчука [26] [27] [28] [29] идеи символической дина-

(1940)

[15]П. С. Новиков, С. И. Адян. *О бесконечных периодических группах. I.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:1 (1968), 212–244.

[16]П. С. Новиков, С. И. Адян. *О бесконечных периодических группах. II.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:2 (1968), 251–524.

[17]П. С. Новиков, С. И. Адян. *О бесконечных периодических группах. III.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:3 (1968), 709–731.

[18]П. С. Новиков, С. И. Адян. *Определяющие соотношения и проблема тождества для свободных периодических групп нечетного порядка.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:4 (1968), 971–979.

[19]M.Lothaire, *Combinatorics on Words.* // Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley, Reading, MA, 1983, Vol. 17.

[20]M.Lothaire, *Algebraic combinatorics on words.* A collective work by Jean Berstel, Dominique Perrin, Patrice Seebold, Julien Cassaigne, Aldo De Luca, Steffano Varricchio, Alain Lascoux, Bernard Leclerc, Jean-Yves Thibon, Veronique Bruyere, Christiane Frougny, Filippo Mignosi, Antonio Restivo, Christophe Reutenauer, Dominique Foata, Guo-Niu Han, Jacques Desarmenien, Volker Diekert, Tero Harju, Juhani Karhumaki and Wojciech Plandowski. With a preface by Berstel and Perrin. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 90. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, 504 pp.

[21]Голод Е. С., Шафаревич И. Р. *О башне полей классов.* Изв. АН СССР. Сер. мат., 964, т. 28, no 2, стр. 261–272.

[22]Голод Е. С. *О нильалгебрах и финитно-аппроксимируемых p-группах.* Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, т. 28, no 2, стр. 273–276.

[23]С. В. Алешин, *О свободной группе конечного автомата.*//Вестник Моск. Унив. Сер 1. Мат. и Мех.1983, №4, 12–14.

[24]С. В. Алешин, *О суперпозициях автоматных отображений.* // Кибернетика, Киев, 1975, №1, 29–34.

[25]С. В. Алешин, *Конечные автоматы и проблема Бернсайда для периодических групп.* // Мат. Заметки 11 (1972), 319–328.

[26]Григорчук Р. И. *К проблеме Милнора о групповом росте.* Докл. АН СССР, 1983, т. 271, № 1, стр. 53–54.

[27]Григорчук Р. И. *Степени роста конечно порожденных групп и теория инвариантных средних.* Изв. АН СССР. Сер. мат., 1984, т. 48, no 5, стр. 939–985.

[28]Григорчук Р. И. *О рядах Гильберта-Пуанкаре градуированных алгебр, ассоциированных с группами.* Мат. сб., 1989, т. 180, no 2, стр. 207–225.

[29]Григорчук Р. И. *К проблеме Милнора о групповом росте.* Функц. анал. и его прил., 1980, 14, 1, стр. 53–54.

мики и автоматные конструкции были использованы при решении проблемы Милнора – посторении групп промежуточного роста (при этом группы Григорчука периодичны). Автоматные конструкции активно используются в самых разных ситуациях [30] [31] [32] [33]). Возникают они и у нас (графы Рози).

Задачи комбинаторики, и комбинаторики слов в частности, позволили решить большое число задач в теории колец [34] [35]. Комбинаторика слов активно используется в алгебрах Ли, особенно в проблемах бернсайдовского типа [36]. В теории алгебр Ли описание базиса дается в терминах так называемых "правильных слов" (базис Холла-Линдона-Ширшова).

Применив методы символической динамики (равномерно рекуррентные слова и соображения компактности), Д. Бэкелин установил[37], что любое сверхслово содержит подслово вида uvu, где u и v – правильные слова, получив, тем самым, короткое доказательство локальной нильпотентности подалгебры алгебры Ли, порожденной сэндвичами, упростив соответствующие работы А. И. Кострикина.

Одним из основоположников применения комбинаторики в теории колец является А. И. Ширшов [38], ряд глубоких комбинаторно-алгебраических результатов был получен представителями школы А. И. Ширшова [39] [40]. Применив гомологическое соображение, связанное с невозможностью зацепления правильного слова за самого себя, А. И. Ширшов показал алгоритмическую разрешимость проблемы равенства в алгебрах Ли с одним определяющим соотношением. С помощью комбинаторики слов А. И. Ширшов [41] доказал теорему о свободе подалгебры свободной алгебры Ли. Для

[30] А. Я. Белов, В. В. Борисенко, В. Н. Латышев, *Мономиальные алгебры* // Итоги науки и техники. Совр. Мат. Прил. Тем. Обзоры т. 26 (алг. 4), М. 2002. 35-214.

[31] В. А. Уфнаровский. *Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре.* Итоги науки и техн., Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1990, №57, С. 5–177.

[32] Arto Salomaa.*Jewels of Formal Language Theory* // Computer Science Press, 1981.

[33] В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин, *Введение в теорию автоматов* // Москва, "Наука", 1985. 320 стр.

[34] В. А. Уфнаровский. *Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре.* Итоги науки и техн., Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1990, №57, С. 5–177.

[35] А. Я. Белов, В. В. Борисенко, В. Н. Латышев, *Мономиальные алгебры* // Итоги науки и техники. Совр. Мат. Прил. Тем. Обзоры т. 26 (алг. 4), М. 2002. 35-214.

[36] Зельманов Е. И., Кострикин А. И. *Теорема о сендвичевых алгебрах.* // Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1990, 183, стр. 106–111. (РЖМат, 1991, 1А247)

[37] В. А. Уфнаровский. *Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре.* Итоги науки и техн., Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1990, №57, С. 5–177.

[38] A.I.Shirshov, *Selected papers of A.I.Shirshov*, eds. Zelmanov, Latyshev, Bokut, Shestakov, Birkhuser Verlag AG, 2009, 3–20, ISBN: 978-3-7643-8857-7/hbk; ISBN 978-3-7643-8858-4/ebook 242 pages

[39] A.I.Shirshov, *Selected papers of A.I.Shirshov*, eds. Zelmanov, Latyshev, Bokut, Shestakov, Birkhuser Verlag AG, 2009, 3–20, ISBN: 978-3-7643-8857-7/hbk; ISBN 978-3-7643-8858-4/ebook 242 pages

[40] Желваков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. *Кольца, близкие к ассоциативным.* // М.: Наука, 1978, 431 pp.

[41] A.I.Shirshov, *Selected papers of A.I.Shirshov*, eds. Zelmanov, Latyshev, Bokut, Shestakov, Birkhuser

супералгебр это обобщил А. А. Михалев [42] [43]. Он показал алгоритмическую разрешимость проблемы равенства для алгебр ли с одним определяющим соотношением.

Комбинаторика слов активно используется в теории PI-алгебр, достаточно упомянуть знаменитую теорему Ширшова о высоте (ей посвящен раздел в монографии М. Лотэйр [44]), утверждающую возможность приведения слов к кусочно периодическому виду.

Теорема А.И.Ширшова о высоте. *Пусть A – конечно порожденная PI-алгебра степени m. Тогда существует конечный набор элементов Y и число $h \in \mathbb{N}$ такие, что A линейно представима (то есть порождается линейными комбинациями) множеством элементов вида:*

$$w = {u_1}^{k_1} {u_2}^{k_2} \cdots {u_r}^{k_r}, \text{ где } u_i \in Y \text{ и } r \leq h.$$

При этом в основе оригинальных доказательств А. И. Ширшова (как теоремы о свободе так и теоремы о высоте) лежала техника, связанная с преобразованием алфавита путем подстановок. Эта же техника используется при работе с равномерно–рекуррентными словами и в символической динамике.

Последующие доказательства теоремы о высоте [45] [46] и ее обобщение для алгебр Ли [47] использовали анализ свойств периодичности. Комбинаторный анализ слов, связанный с теоремой А. И. Ширшова о высоте, явился тематикой исследования ряда авторов. [48] [49] [50]

Verlag AG, 2009, 3–20, ISBN: 978-3-7643-8857-7/hbk; ISBN 978-3-7643-8858-4/ebook 242 pages

[42] Михалёв А. А. *Подалгебры свободных цветных супералгебр Ли.* // Мат. заметки.— 1985.—Т. 37, № 5.—С. 653—661.

[43] Михалев А. А. *Техника композиции А. И. Ширшова в супералгебрах Ли (некоммутативные базисы Гребнера).* Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1994, т. 18

[44] M.Lothaire, *Algebraic combinatorics on words.* A collective work by Jean Berstel, Dominique Perrin, Patrice Seebold, Julien Cassaigne, Aldo De Luca, Steffano Varricchio, Alain Lascoux, Bernard Leclerc, Jean-Yves Thibon, Veronique Bruyere, Christiane Frougny, Filippo Mignosi, Antonio Restivo, Christophe Reutenauer, Dominique Foata, Guo-Niu Han, Jacques Desarmenien, Volker Diekert, Tero Harju, Juhani Karhumaki and Wojciech Plandowski. With a preface by Berstel and Perrin. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 90. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, 504 pp.

[45] A. Belov. *Some estimations for nilpotence of nil-algebras over a field of an arbitrary characteristic and height theorem* // Communications in algebra, 20 (10):2919-2922, 1992.

[46] М.И.Харитонов, *Оценки, связанные с теоремой Ширшова о высоте* Диссертация на соискание степени к.ф.-м.н. Москва, 2015.

[47] Мищенко С. П., *Вариант теоремы о высоте для алгебр Ли.* Мат. заметки, 1990, ;7, no 4, стр. 83–89.

[48] А. Я. Белов. *Проблемы бернсайдовского типа, теоремы о высоте и о независимости.* Фундамент. и прикл. матем., 13:5 (2007), С. 19–79; A. Ya. Belov. *Burnside-type problems, theorems on height, and independence.* J. Math. Sci., 156:2 (2009), С. 219–260.

[49] М.И.Харитонов, *Оценки, связанные с теоремой Ширшова о высоте* Диссертация на соискание степени к.ф.-м.н. Москва, 2015.

[50] А. Я. Белов, В. В. Борисенко, В. Н. Латышев, *Мономиальные алгебры* // Итоги науки и техники. Совр. Мат. Прил. Тем. Обзоры т. 26 (алг. 4), М. 2002. 35-214.

Понятие *роста* в алгебре является важным комбинаторным инвариантом [51]. Если размерность пространства, порожденного словами степени не выше n от образующих A растет как n^λ, то величина λ называется *размерностью Гельфанда–Кириллова алгебры* A. Размерность Гельфанда–Кириллова может быть равной 0, 1, а также любому числу ≥ 2, ∞ или не существовать. То обстоятельство, что она не может принимать промежуточные значения на интервале $(1, 2)$ составляет содержание знаменитой *Bergman gap theorem.* Ассоциативная алгебра размерности Гельфанда–Кириллова 0 конечномерна. Л. Смолл показал, что ассоциативная алгебра размерности Гельфанда–Кириллова 1 является PI-алгеброй. Базисы ассоциативных алгебр размерности Гельфанда–Кириллова больше 1 с минимальной функцией роста исследовались в работах А. Т. Колотова [52] [53]. Их описание дается в терминах так называемых *последовательностей Штурма*, изучение которых послужило отправной точкой для данной работы.

Обобщение понятия роста на бесконечномерный случай является понятие *ряда коразмерностей.* Первоначальное доказательство А. Регева об экспоненциальной оценке ряда коразмерности относительно свободных алгебр было улучшено В. Н. Латышевым с помощью оценки числа полилинейных n-разбиваемых слов на основе теоремы Дилуорса [54]. Использование идеи В.Н.Латышева позволило в дальнейшем получить субэкспоненциальную оценку [55] [56]. Само же понятие *n-разбиваемого слова* возникло у А. И. Ширшова в его теореме о высоте. Ряды коразмерности в различных структурах исследовались в работах В. Н. Латышева, С. П. Мищенко, М. В. Зайцева, A. Giambruno.

Комбинаторика слов работает в теории полугрупп. Следует указать работы Екатеринбургской школы Л. Н. Шеврина, в часности, работы М. В. Сапира, О. Г. Харлампович. Они активно применяли методы символической динамики к теории полугрупп (см. обзор М. Сапира [57]).

Теория колец оказалась связана с символической динамикой. В терминах почти периодических слов удалось построить теорию радикала моно-

[51] Krause, G.; Lenagan, T.H.: Growth of algebra and Gelfand-Kirillov dimension // Research Notes in Math., Pitman, London, 1985.

[52] А. Т. Колотов, *Апериодические последовательности и функции роста в алгебрах* // Алгебра и логика, 20 (1981), 138-154, 250.

[53] А. Т. Колотов, *Алгебры и группы с периодической функцией роста* // Алгебра и логика, 19 (1980), 659-668, 745.

[54] В. Н. Латышев. *К теореме Регева о тождествах тензорного произведения PI-алгебр.* УМН, Т. 27, №4(166), 1972, С. 213–214.

[55] А. Я. Белов, М. И. Харитонов. *Субэкспоненциальные оценки в теореме Ширшова о высоте.* Мат. сб., No 4, 2012, 81–102.

[56] М.И.Харитонов, *Оценки, связанные с теоремой Ширшова о высоте* Диссертация на соискание степени к.ф.-м.н. Москва, 2015.

[57] M. V. Sapir. *Combinatorial algebra: syntax and semantics.* Springer, 2014.

миальных алгебр и решить известный вопрос о совпадении ниль-радикала и радикала Джекобсона [58] [59], кроме того, получается описание слабо нетеровых мономиальных алгебр. Каждое ненулевое слово слабо нетеровой мономиальной алгебры есть подслово из набора (сверх)слов, удовлетворяющего следующему условию: каждое слово из этого набора либо конечное, либо является бесконечным (односторонними или двухсторонними) словом, которое при выбрасывании некоторого конечного куска распадается на почи-периодические (равномерно-рекуррентные) части [60] [61].

В настоящей диссертации исследуются бесконечные слова или *сверхслова*, то есть бесконечные вправо последовательности элементов конечного множества (алфавита) и подстановочные системы.

Символическая динамика рассматривает слова как коды траектории точки в динамической системе: пусть M — компакт, $U \subset M$ — его открытое подмножество, $f : M \to M$ — гомеоморфизм компакта в себя и $x_0 \in M$ — начальная точка. *Эволюцией* точки x_0 называется бесконечное слово W над бинарным алфавитом $\{a, b\}$:

$$W_n = \begin{cases} a, & \text{если } f^n(x_0) \in U; \\ b, & \text{если } f^n(x_0) \notin U, \end{cases}$$

Если рассматривать несколько подмножеств $U_1, U_2, \ldots, U_n$, то получаются слова над алфавитом с большим числом символов.

Слова Штурма допускают определение через символическую динамику: они получаются из систем, в которых M – окружность единичной длины, f – поворот окружности на дугу α иррациональной длины, U – дуга длины α, а x_0 – произвольная точка M.

Для любой последовательности можно построить порождающую ее динамическую систему, хотя далеко не всегда динамическая система выглядит так наглядно, как для слов Штурма. Рассмотрим A^ω – множество всех сверхслов над данным алфавитом, снабженное тихоновской топологией, и оператор сдвига $s : A^\omega \to A^\omega$, действующий по правилу $(s(w))_n = w_{n+1}$. Тогда для произвольного сверхслова W это слово является кодом траектории точки, соответствующей W. Если в качестве компакта взять подмножество A^ω, являющееся замыканием орбиты W под действием s, получится

[58] А. Я. Белов, В. В. Борисенко, В. Н. Латышев, *Мономиальные алгебры* // Итоги науки и техники. Совр. Мат. Прил. Тем. Обзоры т. 26 (алг. 4), М. 2002. 35-214.

[59] Belov A., Gateva T., *Radicals of monomial algebras.*, // First International Tainan–Moscow Algebra Workshop. (Taiwan, Republic of China, July 23— August 22, 1994), W de Greyer, Berlin, Proc. of the First Int. Conference held at National Cheng Kung University, Tainan., 1994, 159—169.

[60] А. Я. Белов, В. В. Борисенко, В. Н. Латышев, *Мономиальные алгебры* // Итоги науки и техники. Совр. Мат. Прил. Тем. Обзоры т. 26 (алг. 4), М. 2002. 35-214.

[61] А. Я. Белов, *Классификация слабо нетеровых мономиальных алгебр*, // Фундамент. и прикл. матем., 1:4 (1995), 1085–1089

топологическая динамическая система, *порожденная* сверхсловом W. Замкнутые инвариантные относительно s подмножества A^ω называются *субшифтами (subshifts)*.

Прямые и *обратные* задачи символической динамики изучают связь свойств динамической системы и комбинаторных свойств порождающего его сверхслова.

Так, динамическим системам, в которых компакт M – конечное множество, отвечают периодичные сверхслова, а *минимальным* динамическим системам, то есть системам, не содержащим нетривиальных замкнутых подсистем, соответствует свойство *почти периодичности* или *равномерно рекуррентности*. Это свойство было введено Х. Фюрстенбергом [62]. Почти периодическим словам посвящен обзор А. А. Мучника, Ю. Л. Притыкина и А. Л. Семенова[63]. Сверхслово W называется *почти периодичным*, если для любого конечного подслова u существует такая константа $C(u)$, что u является подсловом в любом подслове W длины $C(u)$. Также почти периодичные сверхслова называют *равномерно рекуррентными*. Имеет место следующая

Теорема 1. *Если W – сверхслово, то существует почти периодичное сверхслово W' такое, что любое конечное подслово W' является конечным подсловом W.*

Эта теорема часто помогает свести изучение произвольных сверхслов к изучению почти периодичных. В терминах почти периодичных сверхслов описывается теория радикалов мономиальных алгебр, а также слабо нетеровых мономиальных алгебр.[64] [65] [66]

Минимальным динамическим системам с единственной мерой Хаара соответствуют сверхслова, у которых для любого конечного подслова его нижняя и верхняя плотности вхождения совпадают.

В терминах *функции рассогласования* можно сформулировать комбинаторное условие на то, что динамическая система сопряжена сдвигу тора,

[62] *H. Furstenberg. Poincaré reccurence and number theory.* Bull. Amer. Math. Soc., 5:211-234, 1981.

[63] Ан. А. Мучник, Ю. Л. Притыкин, А. Л. Семенов, *Последовательности, близкие к периодическим*// УМН, 64:5(389) (2009), 21–96

[64] А. Я. Белов, В. В. Борисенко, В. Н. Латышев, *Мономиальные алгебры* // Итоги науки и техники. Совр. Мат. Прил. Тем. Обзоры т. 26 (алг. 4), М. 2002. 35-214.

[65] А. Я. Белов, *Классификация слабо нетеровых мономиальных алгебр*, // Фундамент. и прикл. матем., 1:4 (1995), 1085–1089

[66] Belov A., Gateva T., *Radicals of monomial algebras.*, // First International Tainan–Moscow Algebra Workshop. (Taiwan, Republic of China, July 23— August 22, 1994), W de Greyer, Berlin, Proc. of the First Int. Conference held at National Cheng Kung University, Tainan., 1994, 159—169

что даёт подход к проблематике, связанной с гипотезой Пизо.[67] [68]

Примером своего рода “комбинаторного рая”, источником обобщений, образцом того, как свойства динамической системы отражаются на комбинаторике слов явилась классическая красивая теорема М. Морса и Г. Хедлунда:

Теорема 2 (Теорема эквивалентности [69])**.** *Пусть W — бесконечное рекуррентное сверхслово над бинарным алфавитом $A = \{0; 1\}$.*

Следующие условия «почти» эквивалентны:

1. *Количество различных подслов длины n слова W равно $p_n(W) = n+1$ для любого $n \geq 1$.*

2. *Слово W не периодично и является* сбалансированным*, то есть для любых двух подслов u, $v \sqsubset W$ одинаковой длины выполняется неравенство $||v|_a - |u|_a| \leq 1$, где $|w|_a$ обозначает количество вхождений символа a в слово w.*

3. *Слово $W = (w_n)$ является механическим словом с иррациональным α, то есть существуют такое иррациональное α, $x_0 \in [0, 1]$ и интервал $U \subset \mathbb{S}^1$, $U = \alpha$ такие, что выполняется условие:*

$$w_n = \begin{cases} a, & \text{если } f^n(x_0) \in U; \\ b, & \text{если } f^n(x_0) \notin U \end{cases}$$

4. *Слово W получается путем предельного перехода последовательности слов, каждое из которых получается из предыдущего путем подстановки вида $a^k b \to b, a^{k+1} b \to a$ либо подстановки вида $b^k a \to a, b^{k+1} a \to b$. Показатель k зависит от шага. Если эти показатели k_i периодически повторяются, то α есть квадратичная иррациональность.*

Слово «почти» значит то, что симметрические разности этих классов сверхслов не более чем счетны, и все исключения описаны. Например, при $\alpha \in \mathbb{Q}$ механическое слово не принадлежит первому классу. Пересечение всех этих классов называется множеством *слов Штурма.*

[67] V. Berthe, A .Siegel, J. Thuswaldner, *Substitutions, Rauzy fractals and tilings*, //Combinatorics, Automata and Number Theory: Cambridge University Press, pp. 248–323.

[68] А. Я. Белов, И. В. Митрофанов. *Фракталы Рози, цикл лекций.* Видеозаписи летней школа «Современная математика», 2014

[69] M. Morse, G. A. Hedlund, *Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories*, // Amer. J. Math. 62, 1–42. (1940)

Условие 2 говорит о *комбинаторной сложности*, или *функции* сверхслова. М. Морс и Г. Хедлунд показали, что если у сверхслова W для какого-то n $p_w(n) < n+1$, то p_w ограниченна и слово w является периодичным. Поэтому *слова Штурма* – это непериодичные слова с минимально возможной функцией роста.

Условие 4 связано с понятиями *подстановки* и *морфизма.* Так, сверхслово $01001010\ldots$, переходящее само в себя при одновременной замене каждого нуля на 01, а единицы – на 0, называется *словом Фибоначчи*, а предел отношения числа единиц и нулей в нем равен золотому сечению.

Для наших целей важно и иное задание слов Штурма, а именно *одноразвилковыми графами Рози.* Если при этом слово Штурма связано с квадратичной иррациональностью, то последовательность событий в этих графах оказывается заключительно периодической. Исследование многоразвилковых схем приводит к теоремам типа теоремы Вершика-Лившица.

Понятие *последовательностей Штурма* и их обобщения послужило отправной точкой многих исследований. Естественными обобщениями слов Штурма являются слова с минимальным ростом, то есть слова с функцией роста $T(n) = n+k$, начиная с некоторого n. Для двубуквенных алфавитов они носят название *квазиштурмовых слов.* Сверхслова с функцией роста, удовлетворяющей соотношению

$$\lim_{n\to\infty} T(n)/n = 1$$

изучены в работе A. Aberkane[70]. Другим обобщением слов Штурма является обобщение, связанное с понятием *сбалансированности*, а также *m-сбалансированности.* Сбалансированные непериодические слова над n-буквенным алфавитом изучены в работе R. L. Graham[71]. В работе А. Л. Чернятьева[72] построена порождающая динамическая система для сбалансированных непериодических слов.

Обощением понятия поворота окружности служат *перекладывания отрезков* (поворот окружности реализуется перекладыванием двух отрезков). В работах А. Я. Белова и А. Л. Чернятьева[73] (см. также диссертацию А. Л. Чернятьева[74]), дан критерий того, что сверхслово получается с помо-

[70] A.Aberkane, *Words whose complexity satisfies* $\lim p(n)/n = 1$ // Theor. Comp. Sci., 307, (2003), 31-46.

[71] R. L. Graham, *Covering the Positive Integers by disjoints sets of the form* $\{[n\alpha+\beta] : n = 1, 2, \ldots\}$ // J. Combin. Theory Ser A15 (1973) 354-358.

[72] *A.L. Chernyat'ev*, *Balanced Words and Dynamical Systems* // Fundamental and Applied Mathematics, 2007, vol. 13, No 5, pp. 213–224

[73] *A.Ya. Kanel-Belov, A.L. Chernyat'ev. Describing the set of words generated by interval exchange transformation.* Comm. in Algebra, Vol. 38, No 7, July 2010, pages 2588–2605.

[74] А.Л.Чернятьев, *Нормальные базисы и символическая динамика*, Диссертация на соискание степени к.ф.-м.н. Москва, 2008.

щью перекладывания отрезков (отдельно рассмотрен случай, когда некоторые отрезки переворачиваются), в терминах *размеченных графов Рози.* Позднее S. Ferenczi, L. Zamboni[75] был получен критерий для перекладываний (без переворотов), удовлетворяющих условию т.н. *IDOC-condition.*

Итак, с одной стороны, в терминах размеченных графов Рози мы получаем перевод топологических свойств динамической системы, а с другой стороны, важнейшим комбинаторным свойством является морфичность последовательности. Одним из основных результатов автора является перевод свойства морфичности на язык периодичности схем Рози. Утверждение о периодичности схем Рози можно рассматривать как обобщение теоремы Вершика-Лившица, оно позволяет решить ряд алгоритмических проблем, ряд из которых был исследован и поставлен А. А. Мучником, А. Л. Семеновым с учениками[76][77].

Перекладываниям отрезков посвящена обширная библиография, они связаны с рядом важных и интересных задач в математике, в частности, в теории дифференциальных уравнений, динамических систем. Рассмотрим векторное поле на двумерном многообразии, разделенном разрезами на клетки. Движение частиц, летящих вдоль векторного поля, доставляет кусочно-непрерывное преобразование множества разрезов. Инвариантная мера задаёт метрику, а тем самым и перекладывания отрезков, которые управляют динамическими системами в двумерном случае. В частности, рассмотрим биллиард с рациональными углами наклона. Тогда если рассмотреть динамическую систему «сторона + угол траектории», то, проведя аналогичные рассуждения, можно заключить, что перекладывания отрезков управляют поведением траектории.

Возвращаясь к словам Штурма, можно сказать, что слова Штурма, задающиеся подстановочными системами, связаны с квадратичными иррациональностями. Если мы рассматриваем общие перекладывания отрезков, то сочетание теоремы о периодичности схем Рози [78] с критерием того, когда последовательность получается из перекладывания отрезков [79], предоставляет возможность строить подстановочные системы, связанные с высшими иррациональностями, которые задают динамическую систему, связанную с перекладыванием отрезков. Есть надежда получить глобальный анализ

[75]Ferenczi, L. Zamboni, Languages of k-interval exchange transformations

[76]Ан. А. Мучник, Ю. Л. Притыкин, А. Л. Семенов, *Последовательности, близкие к периодическим*// УМН, 64:5(389) (2009), 21–96

[77]Ю. Л. Притыкин, *Алгоритмические свойства последовательностей, близких к периодическим*, Диссертация на соискание степени к.ф.-м.н. Москва, 2009.

[78]A.Ya. Kanel-Belov, I.Mitrofanov. *Periodicity of Rauzy scheme and substitutional systems.* eprint arXiv:1107.0185

[79]А.Л.Чернятьев, *Нормальные базисы и символическая динамика*, Диссертация на соискание степени к.ф.-м.н. Москва, 2008.

поведения для некоторых биллиардных траекторий.

Факторный язык – такое множество конечных слов, что вместе с любым словом языка ему принадлежат и все его подслова. Примером могут служить факторные языки всех конечных подслов данного сверхслова, такой язык будет обозначаться $L(W)$. *Граф Рози* (или граф подслов) $G_W(n)$ порядка n сверхслова W – это орграф, вершинами которого являются слова $L(W)$ длины n, и из слова $a_1 \dots a_n$ ведет ребро в $a_2 \dots a_{n+1}$ если и только если $a_1 a_2 \dots a_{n+1} \in L(W)$.

Графы Рози были введены в работе Ж. Рози, и они часто используются для изучения сверхслов низкой комбинаторной сложности. Например, так как сложность слов Штурма равна $n+1$, то любой граф Рози для любого слова Штурма содержит ребер на одно больше, чем вершин, следовательно, является объединением двух циклов. пересекающихся по вершине или цепочке ребер.

Комбинаторный анализ графов Рози позволил П. А. Лаврову[80] и независимо И. И. Богданову и Г. Р. Челнокову[81] получить верхнюю оценку на длину минимального периода периодичного слова, задаваемого n запретами. Ж. Кассинь[82] использовал технику графы Рози при доказательстве того, что у не более чем линейной функции комбинаторной сложности сверхслова не могут быть неограниченные первые разности, это эквивалентно тому, что графы Рози сверхслов с не более чем линейной функцией сложности имеют ограниченное число *развилок*, т.е. вершин степени > 1.

Рассмотрение слов с линейной функцией сложности приводит к изучению слов, порождаемых *перекладыванием отрезков.* Эти преобразования были введены В. И. Оселедецом, следовавшим идее В. И. Арнольда. Известно, что если перекладывание k отрезков *регулярно*, то есть траектория любого из концов отрезка перекладывания не попадает на конец другого отрезка, то слово, порождаемое данным перекладыванием, имеет комбинаторную сложность $p_n = n(k-1)+1$. Ж. Рози впервые показал, что связь между вращениями круга и последовательностями Штурма обобщается, если рассматривать перекладывания отрезков, и задал вопрос описания последовательностей, связанных с перекладываниями отрезков.

А. Я. Беловым и А. Л. Чернятьевым был получен комбинаторный критерий в терминах графов Рози [83] (в том числе для случая, когда отрезки

---

[80] P. A. Lavrov. *Number of restrictions required for periodic word in the finite alphabet.* arXiv:1209.0220

[81] I.I.Bogdanov, Gr.R.Chelnokov. *The maximal length of the period of a periodic word defined by restrictions* arXiv:1305.0460

[82] J.Cassaigne. *Special factors with linear subword complexity.* Developments in language theory, II (Magdeburg, 1995), 25-34, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996.

[83] А.Л.Чернятьев, *Нормальные базисы и символическая динамика*, Диссертация на соискание степени к.ф.-м.н. Москва, 2008.

переворачивались), в работе S.Ferenczi, L. Zamboni[84] был получен другой критерий (для частного случая наличия IDOC condition). В этой связи естественно возник вопрос о переводе свойств подстановочности на язык графов Рози. Если подстановочность означает своего рода периодичность форм графов Рози, а с другой стороны, свойство быть перекладыванием отрезков переводится на язык графов Рози, то возникают конструкции перекладываний, связанные с подстановочными системами. При этом собственные числа или плотности букв связаны с алгебраическими иррациональностями произвольных степеней, а отнюдь не только с квадратичными иррациональностями, как в случае последовательностей Штурма.

Таким образом, исследование графов (схем) Рози оказалась тесно связанной с теоремами типа теоремы Вершика-Лившица.

Число подстановочные (чисто морфические) последовательности имеют вид $\varphi^\infty(a)$, подстановочные (ими морфические) имеют вид $h(\varphi^\infty(a))$. Это – основной объект изучения в данной диссертации.

Слово Туэ – бесквадратная чисто подстановочная последовательность.

$$abcabacaac\cdots = \varphi^\infty(a),$$

где

$$\varphi(a) = abcab, \varphi(b) = acabcb, \varphi(c) = acbcacb.$$

Легко понять, что над алфавитом из двух букв не может быть бесквадратного сверхслова, а слово *Туэ-Морса* $0110100\ldots$, полученное из буквы 0 подстановкой $\varphi(0) = 01$, $\varphi(1) = 10$, является примером *бескубного* бинарного слова.

Избегание квадратов – это избегание паттерна AA, кубов – паттерна AAA. Для большинства *избегаемых* паттернов избегающие их слова впервые построены с помощью подстановочных систем [85].

Матрица подстановки φ – это такая матрица M_φ, у которой в i-ом столбце в j-ой строке стоит число вхождений буквы a_j в $\varphi(a_i)$. Если некоторая степень матрицы не содержит нулей, то эта матрица (а также соответствующая подстановка и подстановочное слово) называется *примитивной.* У примитивной матрицы по теореме Перрона-Фробениуса есть вектор, соответствующий наибольшему положительному собственному значению.

---

[84] S. Ferenczi, L. Zamboni, *Languages of k-interval exchange transformations*, http://iml.univ-mrs.fr/ ferenczi/fz3.pdf

[85] M. Lothaire, *Algebraic combinatorics on words.* A collective work by Jean Berstel, Dominique Perrin, Patrice Seebold, Julien Cassaigne, Aldo De Luca, Steffano Varricchio, Alain Lascoux, Bernard Leclerc, Jean-Yves Thibon, Veronique Bruyere, Christiane Frougny, Filippo Mignosi, Antonio Restivo, Christophe Reutenauer, Dominique Foata, Guo-Niu Han, Jacques Desarmenien, Volker Diekert, Tero Harju, Juhani Karhumaki and Wojciech Plandowski. With a preface by Berstel and Perrin. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 90. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, 504 pp.

Если все остальные собственные значения по модулю меньше единицы, то подстановка называется *подстановкой Пизо.*

Гипотеза Пизо гласит, что у сверхслова, полученного с помощью неприводимой подстановки Пизо, динамическая система имеет число дискретный спектр и измеримо сопряжена сдвигу тора. На данный момент гипотеза доказана для двухбуквенного алфавита M.Hollander, B.Solomyak [86], есть продвижения в общем случае.

Как известно, у примитивных морфических последовательностей комбинаторная сложность – не более чем линейная функция, это делает графы Рози перспективным инструментом для их изучения.

А. Э. Фрид[87] описала последовательность графов Рози для некоторого подкласса равноблочных подстановочных слов, что позволило, например, точно вычислить для таких сверхслов функцию комбинаторной сложности, так как графы Рози очень хорошо описывают факторный язык сверхслова. В последовательности графов Рози оказывается конечное число *топологических типов* (топологический тип – то, что получится из графа, если заменить все длинные простые пути ребрами), и эти типы сменяют друг друга периодическим образом.

Последовательность событий (называемых «переключениями»), наблюдаемых при изучении последовательности графов Рози сверхслова Штурма, заключительно периодична тогда и только тогда, когда это сверхслово является подстановочным. Эта заключительная периодичность соответствует заключительная периодичности разложения в цепные дроби квадратичных иррациональностей. Это наблюдение, а также диссертация А. Л. Чернятьева[88], привели А. Я. Белова к гипотезе, что аналогичный результат верен для намного более широкого класса морфических последовательностей, а именно – всех почти периодичных. В дальнейшем оказалось, что конструкция графов Рози нуждается в видоизменении. Соответствующий объект (последовательность *схем Рози*) описан в разделе 3.

Отметим другие результаты, связывающие подстановочность сверхслова с комбинаторно-динамическими свойствами.

Ф. Дюран[89] изучал дискретный аналог отображения первого возвращения Пуанкаре – *производные последовательности (derived sequences).* Пусть x – рекуррентное сверхслово, а U – какой-то его начальный кусок.

---

[86]M.Hollander, B.Solomyak. *Two-symbol Pisot substitutions have pure discrete spectrum*, // Ergodic Theory and Dynamical Systems, Volume 23, Issue 02, April 2003, pp 533 - 540

[87]А. Э. Фрид, *О графах подслов DOL-последовательностей*,// Дискретн. анализ и исслед. опер., сер. 1, 6:4 (1999), 92–103

[88]А. Л. Чернятьев, *Нормальные базисы и символическая динамика*, Диссертация на соискание степени к.ф.-м.н. Москва, 2008.

[89]F.Durand. *A characterization of substitutive sequences using return words*, Discrete Mathematics 179 (1998), 89–101

Отметим все первые буквы вхождений U в x, они разбивают x на конечные слова. Если различных типов этих слов конечное число, закодируем их последовательность всеми первыми несколькими членами натурального ряда так, чтобы одинаковые слова кодировались одинаковыми числами, а различные – разными. Такая последовательность чисел называется *производной последовательностью* x относительно U.

Теорема 3. *Пусть x – почти периодичное сверхслово. Оно является морфическим тогда и только тогда, когда у x конечное число производных последовательностей относительно всевозможных начальных кусков.*

Теорема Вершика-Лившица говорит о периодичности диаграмм Брателли для марковских компактов, порожденных подстановочными системами[90][91]. Ее доказательство основано на явной конструкции.

Рассмотрим образ $V_n = \varphi^{(n)}(a) = (\varphi^{(n-2)})(\varphi^{(2)}(a))$ где a есть буква алфавита, φ есть некоторый примитивный морфизм полугруппы слов. V_n состоит из блоков отвечающих применению $\varphi^{(n-2)}$ к буквам слова $\varphi^{(2)}(a)$. Кроме того, V_n можно представить в виде произведения блоков отвечающих применению $\varphi^{(n-1)}$ к буквам слова $\varphi(a)$. Конечные множества, образующие диаграммы Брателли состоят из последовательностей пар первого рода (блок, его позиция в блоке на единицу большего размера), которые отвечают собственным подсловам блоков на единицу большего размера (все блоки одного уровня) а также последовательности второго рода – последовательность первого рода для размера n начинающаяся или заканчивающаяся последовательностью первого рода для предыдущего размера. При этом естественная замена этой дополнительной последовательности на пару (соответствующий блок чьим концом или началом она является, его позиция) естественным образом приводит к появлению последовательности первого рода. (Особо надо рассмотреть случай когда при заполнении возникает блок на единицу большего рода чем все присутствующие). Естественным образом на этих множествах вводятся стрелки, означающие что соответствующий объект есть начальное или концевое подслово другого объекта. Детали конструкции – см. в работах А. М. Вершика и А. Н. Лив-

[90]Vershik, A. M. *The adic realizations of the ergodic actions with the homeomorphisms of the Markov compact and the ordered Bratteli diagrams.* Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 223 (1995), Teor. Predstav. Din. Sistemy, Kombin. i Algoritm. Metody. I, 120–126, 338; translation in J. Math. Sci. (New York) 87 (1997), no. 6, 4054–4058.

[91]Vershik, A. M.; Livshits, A. N. *Adic models of ergodic transformations, spectral theory, substitutions, and related topics. Representation theory and dynamical systems*, 185–204, Adv. Soviet Math., 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

шица[92][93][94].

Весьма плодотворным оказывается взгляд на комбинаторику слов с точки зрения математической логики, во многом инициированный обзором А. А. Мучника, А. Л. Семенова, Ю. Л. Притыкина[95] (см. также диссертации[96]). Этот обзор позволил авторам посмотреть на почти периодические последовательности, адические компакты и теоремы типа теоремы Вершика-Лившица с другой стороны. Нам представляется это интересным как в плане самих алгоритмических задач, так и в для осознания интересных связей, для понимания роли техники графов Рози и адических компактов.

В этоих работах были поставлены вопросы, относящиеся, в частности, к алгоритмическим проблемам проверки периодичности, почти периодичности $HDOL$-систем. Благодаря применению техники связанной с теоремами типа теоремы Вершика-Лившица нам удалось доказать алгоритмическую разрешимость в общем случае.

Морфическая последовательность $h(\varphi(a))$ задается конченым набором информации – подстановочной системой (A, B, φ, h, a), где A и B – алфавиты, $\varphi : A^* \to A^*$ – подстановка, $h : A^* \to B^*$ – кодирование, $a \in A$ – начальная буква.

Естественным образом встают вопросы об алгоритмическом описании различных свойств морфической последовательности и об алгоритмическом сравнении различных последовательностей [97]. Везде далее ставится вопрос о существовании алгоритма, на вход которому подается одна или две подстановочные системы.

Проблема 1 (Периодичность). *Является ли слово $h(\varphi^\infty(a))$ заключитльно периодичным?*

[92] Vershik, A. M. *The adic realizations of the ergodic actions with the homeomorphisms of the Markov compact and the ordered Bratteli diagrams.* Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 223 (1995), Teor. Predstav. Din. Sistemy, Kombin. i Algoritm. Metody. I, 120–126, 338; translation in J. Math. Sci. (New York) 87 (1997), no. 6, 4054–4058.

[93] Vershik, A. M.; Livshits, A. N. *Adic models of ergodic transformations, spectral theory, substitutions, and related topics. Representation theory and dynamical systems*, 185–204, Adv. Soviet Math., 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[94] Livshits, A. N. *Application of Adic representations in the investigations of metric, spectral and topological properties of dynamical systems.* Sanct-Petersburg, 1995, 176 pages.

[95] Ан. А. Мучник, Ю. Л. Притыкин, А. Л. Семенов, *Последовательности, близкие к периодическим*// УМН, 64:5(389) (2009), 21–96

[96] Ю. Л. Притыкин, *Алгоритмические свойства последовательностей, близких к периодическим*, Диссертация на соискание степени к.ф.-м.н. Москва, 2009.// М. А. Раскин, *Сверхслова, меры на них и их полупрямые произведения*, Диссертация на соискание степени к.ф.-м.н. Москва, 2014.

[97] Ан. А. Мучник, Ю. Л. Притыкин, А. Л. Семенов, *Последовательности, близкие к периодическим*// УМН, 64:5(389) (2009), 21–96

Нам не известно, когда эта задача была поставлена впервые. Были построены алгоритмы в ряде частных случаев. Для чисто морфических последовательностей алгоритм был найден в 1986 году в работах T. Harju и M. Linna [98] и J.-J. Pansiot [99]. В 1986 году, J. Honkala [100] описан алгоритм для *автоматных последовательностей* (это последовательности вида $h(\varphi^\infty(a))$ такие, что образы φ от всех букв имеют одинаковую длину).

В работе J. Honkala и M. Rigo [101] дается эквивалентная формулировка проблемы в терминах распознаваемых подмножеств натуральных чисел в абстрактных системах счисления. Описание распознаваемых подмножеств натуральных чисел в абстрактных системах счисления (A. Maes и M. Rigo [102]), вкупе с алгоритмом проверки заключительной периодичности морфической помледовательности дает алгоритм проверки того, представляется ли распознаваемое подмножество натуральных чисел в произвольной системе счисления в виде объединения конечного количества арифметических прогрессий.

Общий случай рассматривается в разделе 4 диссертации.

Проблема 2 (Совпадение слов)**.** *Пусть есть две морфические последовательности w_1 и w_2, можно ли алгоритмически понять, равны ли эти сверхслова?*

Для число подстановочных последовательностей, эта задача (называемая задачей ω-эквивалентности для D0L систем) была решена в 1986 году M. Linna и T. Harju [103], а также J.J. Pansiot [104]. В 2012 году F. Duran[105] показал алгоритмическую разрешимость этой задачи для примитивных морфических слов.

Следующий вопрос был поставлен А. Л. Семеновым [106]:

[98] T Harju, M. Linna, *On the periodicity of morphisms on free monoids.//* RAIRO Inform. Theor. Appl. 20(1) (1986), pp. 47–54.

[99] J.-J. Pansiot, *Decidability of periodicity for infinite words.* RAIRO Inform. Theor. Appl. 20(1) (1986), pp. 43–46.

[100] J. Honkala, *A decision method for the recognizability of sets defined by number systems*, RAIRO Inform. Theor. Appl. 20 (1986) 395 40

[101] J.Honkala, M.Rigo. *Decidability questions related to abstract numeration systems*, // Discrete Mathematics, Volume 285, Issues 1–3, 6 August 2004, Pages 329–333

[102] A. Maes and M. Rigo. *More on generalized automatic sequences.//* Journal of Automata, Languages and Combinatorics, Vol. 7 Iss. 3, Jan 2002, pp. 351 – 376

[103] T. Harju, M. Linna, *On the periodicity of morphisms on free monoids.//* RAIRO Inform. Theor. Appl. 20(1) (1986), pp. 47–54.

[104] J.-J. Pansiot, *Decidability of periodicity for infinite words.* RAIRO Inform. Theor. Appl. 20(1) (1986), pp. 43–46.

[105] F. Durand, $\widehat{\text{H}}$D0L ω-equivalence and periodicity problems in the primitive case (to the memory of G. Rauzy), accepted in J. of Uniform Distribution Theory.

[106] Ан. А. Мучник, Ю. Л. Притыкин, А. Л. Семенов, *Последовательности, близкие к периодическим//* УМН, 64:5(389) (2009), 21–96

Проблема 3 (Почти периодичность). *Является ли данное морфическое слово почти периодичным?*

В работе F.Nicolas, Ю. Л. Притыкина [107] также ставится алгоритмическая задача проверки почти периодичности морфических слов. В обзоре Ю. Л. Притыкина, Ан. А. Мучник и А. Л. Семенова [108] была выдвинута гипотеза о том, что эта задача алгоритмически разрешима.

Для автоматных последовательностей, в работе F. Nicolas и Ю. Л. Притыкина [109] строится полиномиальный алгоритм в классах чисто морфических и автоматных слов.

В разделе 5 доказывается алгоритмическая разрешимость почти периодичности морфических сверхслов.

Проблема 4 (Совпадение факторных языков). *Пусть есть две морфические последовательности. Существует ли алгоритм, проверяющий, совпадают ли их факторные языки?*

В 1997 I. Fagnot строит алгоритм для некоторого класса число морфических последовательностей [110] и для автоматных последовательностей [111]. Случай, в котором одна из последовательностей примитивна, разбирается как основная лемма в разделе 5.

Проблема 5 (Фактор и сопряженность динамических систем). *Пусть есть два субшифта, порожденных двумя морфическими последовательностями. Можно ли алгоритмически определить, сопряжены ли эти системы? Можно ли определить, является одна из них фактором другой?*

В работе E. Coven, M. Keane и M. LeMasurier [112] были найдены некоторые ответы на этот вопрос для случая, когда один из субшифтов порожден словом Морса.

Цель работы

Целью настоящей работы является изучение морфических последовательностей. Перед автором возникли следующие задачи:

---

[107]Francois Nicolas, Yuri Pritykin. *On uniformly recurrent morphic sequences*// International Journal of Foundations of Computer Science, Vol. 20, No. 5 (2009) 919–940

[108]Ан. А. Мучник, Ю. Л. Притыкин, А. Л. Семенов, *Последовательности, близкие к периодическим*// УМН, 64:5(389) (2009), 21–96

[109]Francois Nicolas, Yuri Pritykin. *On uniformly recurrent morphic sequences*// International Journal of Foundations of Computer Science, Vol. 20, No. 5 (2009) 919–940

[110]I. Fagnot. *On the subword equivalence problem for morphic words.* Discrete Appl. Math. 75 (1997), 231–253.

[111]I. Fagnot. *Sur les facteurs des mots automatiques.* Theoret. Comput. Sci. 172 (1997), 67–89.

[112]E. Coven, M. Keane, and M. Le Masurier. *A characterization of the morse minimal set up to topological conjugacy.* Ergodic Theory and Dynamical Systems 28 (2008), 1443–1451.

- Обобщить соответствие между подстановочностью и периодичным поведением графов Рози на произвольные почти периодичное слова, рассматривая при этом, возможно, конструкцию, несколько отличающуюся от графов Рози. При этом должен получиться новый способ описания структуры морфических последовательностей.

- Получить алгоритмически проверяемые критерии для почти периодичности произвольного морфического сверхслова; периодичности и заключительной периодичности произволного морфического серхслова.

Все эти задачи успешно решены автором.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Создана теория связанная со схемами Рози и теоремами типа Вершика-Лившица. Дано определение схем Рози сверхслова, эволюции схем Рози, протокола эволюции схем Рози. Доказано, что протокол эволюции схем Рози для почти периодичного сверхслова периодичен тогда и только тогда, когда его факторный язык языком некоторой морфической последовательности.

2. Доказана алгоритмическая разрешимость проверки периодичности и заключительной периодичности морфических последовательностей. Тем самым был получен положительный ответ на вопрос, известный с 70-х годов [113].

3. Доказана алгоритмическая разрешимость проверки почти периодичности морфических последовательностей. Тем самым был получен положительный ответ на вопрос, поставленный А. А. Мучником и А. Л. Семеновым в 2003 году.

4. Доказана алгоритмическая разрешимость проверки совпадения факторных языков двух морфических последовательностей в случае, когда одна из них примитивна.

[113] M. Queffelec. *Substitution dynamical systems—spectral analysis*, Vol. 1294 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1987.

Результат 1 получен в соавторстве с А. Я. Беловым, остальные результаты получены самостоятельно. Результаты 2 и 3 при этом получены одновременно и независимо с Ф. Дюраном[114] [115].

Основные методы исследования

В работе используются методы комбинаторики слов, теории графов Рози и схем Рози, символической динамики, теории неотрицательных матриц.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут представляют интерес для специалистов в комбинаторике слов, логике, алгебре, информатике, динамических системах, специалистов МГУ, МПГУ, НГУ, СПбГУ, LAMFA, l'Institut de Mathematiques de Luminy.

Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались автором на следующих научно-исследовательских семинарах:

1. Семинар «Кольца и модули» под руководством профессора В. Н. Латышева, профессора А. В. Михалева неоднократно в 2011-2014 гг.;
2. Научно-исследовательский семинар кафедры алгебры, 2015.
3. Семинар «Алгебра и теория моделей» под руководством профессора Е. И. Буниной в 2016г.
4. Научно-исследовательский семинар А. М. Райгородского в 2011–2012 гг.
5. Bar-Ilan Algebra Seminar (Bar-Ilan University) (January, 2014)
6. PI-Seminar (Technion (Israel Institute of Technology))(January, 2014)
7. Петербургский семинар по теории представлений и динамическим системам (2015, ПОМИ)

Результаты диссертации докладывались на всероссийских и международных конференциях:

---

[114] F.Durand. *Decidability of the HD0L ultimate periodicity problem.* RAIRO – Theoretical Informatics and Applications 47 (2013), 201–214

[115] F. Durand. *Decidability of uniform recurrence of morphic sequences*, International Journal of Foundations of Computer Science 24 (2013), 123–146.

1. Международная конференция «CANT-2012» г. Люмини в 2012 г

2. Международный воркшоп Decidability problems for substitutive sequences, tilings and numerations, организованный F.Durand (2012, Амьен)

3. Международная конференция «SubTite» г. Люмини в 2013 г

4. Franco-Russian workshop on Algorithms, complexity and applications 2013, Москва

5. Number Theory and Dynamics + Journees Arithmetiques, Institut Fourier, 2013, Гренобль

6. Growth, Symbolic Dynamics and Combinatorics of Words in Groups (2015, Париж)

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 5 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из оглавления, введения, шести глав и списка литературы, который включает 93 наименования. Объём диссертации составляет 160 страниц.

Краткое содержание диссертации

Глава 1 является введением диссертации. Она содержит описание актуальности темы, цели работы, список основных результатов и сведения об апробации работы.

В **главе 2** приведен обзор основных понятий, используемых в диссертации.

В **главе 3** показана периодичность схем Рози, тем самым сделан перевод языка подстановочных систем на язык схем Рози.

Определение 1. Графом со словами *будем называть связный ориентированный граф, у которого на каждом ребре которого написано по два слова* – переднее *и* заднее*, а кроме того, каждая вершина либо имеет входящую степень* 1*, а исходящую больше* 1 (раздающая вершина)*, либо входящую степень больше* 1 *и исходящую степень* 1 (собирающая вершина).

Симметричный путь в графе со словами – это путь, первое ребро которого начинается в собирающей вершине, а последнее ребро кончается в раздающей. Каждый путь можно записать словом над алфавитом, являющимся множеством ребер графа. Оно называется *реберной записью пути.* Ребро пути s, идущее i-тым по счету, будем обозначать $s[i]$. Естественно определены отношения *подпути* (пишем $s_1 \sqsubseteq s_2$), *начала* и *конца.* $s_1 \sqsubseteq_k s_2$, если для соответствующих слов u_1 и u_2 – реберных записей путей s_1 и s_2 – выполнено $u_1 \sqsubseteq_k u_2$. Если последнее ребро пути s_1 идет в ту же вершину, из которой выходит первое ребро пути s_2, путь, реберная запись которого является конкатенацией реберных записей путей s_1 и s_2, будем обозначать $s_1 s_2$.

Введем понятие *переднего слова $F(s)$, соответствующего пути s в графе со словами.* Пусть $v_1 v_2 \dots v_n$ – реберная запись пути s. В $v_1 v_2 \dots v_n$ возьмем подпоследовательность: включим в нее v_1, а также те и только те ребра, которые выходят из раздающих вершин графа. Эти ребра назовем *передними образующими для пути s.* Возьмем передние слова этих ребер и запишем их последовательную конкатенацию, так получаем $F(s)$. Аналогично определяется понятие *заднего слова $B(s)$.* В пути $v_1 v_2 \dots v_n$ возьмем ребра, входящие в собирающие вершины и ребро v_n в порядке следования – это *задние образующие для пути s.* Тогда последовательной конкатенацией задних слов этих ребер получается *заднее слово $B(s)$ пути s.*

Определение 2. *Граф со словами будет являться* схемой Рози *для рекуррентного непериодичного сверхслова W, если он удовлетворяет следующим свойствам:*

1. *Граф сильносвязен и состоит более чем из одного ребра.*
2. *Все ребра, исходящие из одной раздающей вершины графа, имеют передние слова с попарно разными первыми буквами. Все ребра, входящие в одну собирающую вершину графа, имеют задние слова с попарно разными последними буквами.*
3. *Для любого симметричного пути, его переднее и заднее слова совпадают.*
4. *Если есть два симметричных пути s_1 и s_2 и выполнено $F(s_1) \sqsubseteq_k F(s_2)$, то $s_1 \sqsubseteq_k s_2$.*
5. *Все слова, написанные на ребрах графа, являются подсловами W.*
6. *Для любого $u \sqsubset W$ существует симметричный путь, слово которого содержит u.*

7. *Для любого ребра s существует такое слово u_s, принадлежащее W, что любой симметричный путь, слово которого содержит u_s, проходит по ребру s.*

Симмметричный путь s называется допустимым, *если $F(s) \sqsubseteq W$.*

Если S – сильносвязный граф, не являющийся циклом, и s – путь в графе, то *естественное продолжение* пути *s вправо* – это минимальный путь, началом которого является s и который оканчивается в раздающей вершине. *Естественное продолжение* пути *s влево* – это минимальный путь, концом которого является s и который начинается в собирающей вершине.

Пусть W – рекуррентное непериодичное сверхслово, S – схема Рози для этого сверхслова. Из сильносвязности S следует, что существует ребро v, идущее из собирающей вершины в раздающую. Такие ребра будем называть *опорными.*

Определяется S'' – *эволюция (W, S, v) схемы Рози S по опорному ребру v*: само ребро v уничтожается и заменяется на минимальные пути через v строго содержащие v, отвечающие подсловам W. При этом естественным образом определяются передние и задние слова для нового графа со словами. Построенный таким образом граф со словами S'' назовем *элементарной эволюцией (W, S, v).*

Лемма 1. *Пусть S – схема Рози. Тогда элементарная эволюция (W, S, v) является схемой Рози для сверхслова W (то есть удовлетворяет свойствам (1)–(7) определения).*

Далее показывается связь между эволюцией схем Рози и графами Рози. Описывается процесс, ставящий в соответствие каждому графу Рози схему Рози и доказывается, что схемы, полученные их двух последоватеьных графов Рози, либо совпадают, либо получаются одна из другой одной или несколькими элементарными эволюциями.

Эволюция схем Рози – это последовательность применений элементарных эволюций. На каждом шаге могут быть несколько опорных ребер для применения элементарной эволюции, и следующее определение введено для снятия неоднозначности выбора.

Пронумеруем ребра схемы Рози и зафиксируем *метод эволюции* – алгоритм, который по пронумерованной схеме определяет, какое опорное ребро использовать, а после перенумеровывает ребра в проэволюционировавшей схеме. Тогда последовательность схем Рози определяется однозначно. Потребуем также, чтобы метод эволюции не зависел от слов, написанных на ребрах, то есть работал с *облегченной нумерованной схемой.*

Облегченная нумерованная схема для схемы Рози – граф с теми же вершинами и ребрами, ребра графа пронумерованы, а слов на них нет.

Протокол детерминированной эволюции – последовательность облегченных нумерованных схем Рози, номеров соответствующих опорных ребер, а также информация о минимальных путях, содержащих опорное ребро и не являющихся допустимыми.

Теорема 4. *Если W – почти периодичное сверхслово и выбран некоторый метод эволюции, то протокол эволюции периодичен тогда и только тогда, когда у W такой же факторный язык, как у некоторого морфического слова.*

Автор считает этот результат диссертации самым интересным.

Сложной частью является доказательство периодичности протокола эволюции для морфических слов. Сначала задача решается в предположении, что подстановка примитивна, а общий случай сводится к примитивному после с помощью леммы из работы Ю. Л. Притыкина, а также дополнительного соображения:

Лемма 2. *Следующие три условия эквивалентны: а) Слово $\varphi^{\infty}(a)$ не является почти периодическим. б) В $\varphi^{\infty}(a)$ есть бесконечно много φ-ограниченных подслов. в) Существует непустое $w \in A^*$ такое, что w^n является подсловом $\varphi^{\infty}(a)$ для любого n.*

Доказательство того, что из периодичности протокола следует эквивалентность морфическому слову, проще.

Глава 4 посвящена задаче проверки периодичности морфических последовательностей, иными словами, строится алгоритм для решения следующей задачи:

Дано: *два алфавита A и B, подстановка $\varphi : A^* \to A^*$, продолжающаяся над буквой a и морфизм $h : A^* \to B^*$.*

Определить: *существуют ли такие конечные слова u и v, что $h(\varphi^{\infty}(a)) = uv^{\infty}$ (т.е. является ли сверхслово заключительно периодичным.)*

Сначала задача решается в предположении, что подстановка φ примитивна, в этом случае достаточно найти период протокола эволюции схем Рози. После общий случай сводится к примитивному.

В **главе 5** решается задача о почти периодичности морфических последовательностей, поставленная в обзоре Ан. А. Мучника, Ю. Л. Притыкина и А. Л. Семенова[116].

[116] Ан. А. Мучник, Ю. Л. Притыкин, А. Л. Семенов, *Последовательности, близкие к периодическим*// УМН, 64:5(389) (2009), 21–96

Она сводится к следующей алгоритмической задаче:

Дано:
1. Три конечных алфавита A, B, C;
2. Числа K_1, K_2, $1 < \Theta_1 < \Theta_2$;
3. Четыре морфизма $\varphi : A^* \to A^*$, $\psi : A^* \to C^*$, $g : B^* \to B^*$, $h : B^* \to C^*$ такие, что

a) все морфизмы нестирающие;

b) морфизм g продолжается над b_1, морфизм φ примитивен и продолжается над $a_1 \in A$;

c) для некоторого $\lambda \in [\Theta_1; \Theta_2]$ и всех $a_i \in A$, $b_j \in B$, $k \in \mathbb{N}$ выполнено $K_1\lambda^k < |\psi(\varphi^k(a_i))| < K_2\lambda^k$ и $K_1\lambda^k < |h(g^k(b_j))| < K_2\lambda^k$.

d) сверхслово $\psi(\varphi^\infty(a_1))$ непериодично;

Определить: *верно ли, что любое подслово сверхслова $h(g^\infty(b_1))$ является подсловом сверхслова $\psi(\varphi^\infty(a_1))$?*

А эта задача, в свою очередь, исследуется с помощью анализа схем Рози.

В **главе 6** предлагаются альтернативные решения задач периодичности и почти периодичности морфических последовательностей.

Заключение

В этом разделе мы еще раз перечислим основные результаты, а также возможные дальнейшие направления исследования.

В главе 3 описывается, как устроена эволюция схем Рози для почти периодичных морфических последовательностей.

Интерес представляют также более точные оценки на длину периода, это позволило бы более точно оценить сложности алгоритмов, описываемых в последующих главах.

Описание поведения схем Рози для произвольных морфических последовательностей позволило бы приблизиться к важной задаче алгоритмической классификации факторных языков подстановочных систем.

Изучение схем Рози кажется перспективным для исследования таких вопросов, как избегаемость паттернов, кажется перспективным доказывать, что избегание любого паттерна реализуется некоторой морфической последовательностью.

Нашу теорему можно рассматривать как своего рода обобщение теоремы Вершика-Лившица, что позволяет решить ряд алгоритмичеких проблем. Другим направлением является попытка обобщить теорему Вершика-Лившица на многомерный случай. Некоторые частичные результаты в этом направлении докладывались автором на конференции в Люмини. Удалось обобщить результат Ю. Л. Притыкина с одной стороны и получена версия теоремы Вершика-Лившица с другой стороны для многомерного случая. Была установлена алгоритмическая разрешимость проблемы определения почти периодичности для многомерных подстановок в примитивном случае.

Этот путь представляется перспективным для решения ряда других задач: с одной стороны — для решения алгоритмических задач, с другой стороны — для исследования свойств объектов, управляемых высшими алгебраическими иррациональностями.

Рассматривая эволюцию схем как случайный процесс, можно построить вероятностную меру на факторных языках (и, следовательно, на субшифтах). Интересно изучить свойства типичного в смысле такой меры факторного языка.

Задачи, решаемые в разделах 4 и 5, можно пытаться обобщать на *многомерные самоподобные слова*. Метод, введенный в разделе 6, видится обобщаемым для изучения некоторого класса самоподобных мозаик на плоскости.

Благодарности

Автор глубоко благодарен своем научным руководителям — доктору физико-математических наук профессору Алексею Яковлевичу Белову и доктору физико-математических наук Александру Васильевичу Михалеву за постановку задач, обсуждение результатов и постоянное внимание к работе.

Также автор хотел бы поблагодарить за внимание и обсуждения работы доктора физико-математических наук, профессора Виктора Николаевича Латышева и всех участников семинара "Теория колец".

Автор выражает свою отдельную благодарность за полезные обсуждения А. Л. Семенову, А. М. Вершику и всем участникам его семинара, А. М. Райгородскому и всем участникам его семинара за полезные обсуждения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке фонда Дмитрия Зимина «Династия» и гранта РФФИ №14-01-00548.

Список публикаций по теме диссертации

1. И. В. Митрофанов, *Почти периодичность морфических слов*, Доклады Академии Наук, 2016, том 467, No 5, с. 519–522

2. И. В. Митрофанов, *Периодичность морфических слов*, Фундамент. и прикл. матем., 18:4 (2013), 107–119

3. I. Mitrofanov. *Periodicity of Morphic Words.* May 2015, Journal of Mathematical Sciences, Volume 206, Issue 6, pp 679-687

4. A. Ya. Belov, G. V. Kondakov, I. Mitrofanov. *Inverse problems of symbolic dynamics.* Banach Center Publ. 94 (2011), 43 – 60. (лично И. В. Митрофанову принадлежит план доказательства теоремы 4.1.)

5. A. Ya. Kanel-Belov, I. Mitrofanov. *Periodicity of Rauzy scheme and substitutional systems.* eprint arXiv:1107.0185 (лично И. В. Митрофанову принадлежат точные формулировки и доказательства, А. Я. Белову принадлежит идея статьи)