

"УТВЕРЖДАЮ"

декан Механико-математического  
факультета ФГБОУ ВО  
«МГУ имени М.В. Ломоносова»  
доктор физико-математических наук,  
профессор



В.Н. Чубариков

2016 г.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

**кафедры высшей алгебры Механико-математического факультета  
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»  
по диссертации Митрофанова Ивана Викторовича  
«Алгоритмические проблемы, связанные с морфическими последовательностями»  
на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел**

Диссертация Митрофанова Ивана Викторовича «Алгоритмические проблемы, связанные с морфическими последовательностями» выполнена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

В период подготовки диссертации соискатель работал методистом по преподаванию математики математики в Центре педагогического мастерства, г. Москва, Москва, ул. Хамовнический вал, дом 6.

В 2012 г. окончил ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова» по специальности «Математика», в 2015 г. окончил очную аспирантуру по кафедре высшей алгебры механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Удостоверение № 2647 о сдаче кандидатских экзаменов выдано в 2016 году отделением математики механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Научные руководители Михалёв Александр Васильевич д.ф.-м.н, профессор и Белов Алексей Яковлевич, д.ф.-м.н, федеральный профессор математики.

Присутствовали: и.о. заведующего кафедрой, д.ф.-м.н., профессор В.А. Артамонов, д.ф.-м.н., профессор В.Н. Латышев, д.ф.-м.н., профессор Э.Б. Винберг, д.ф.-м.н. профессор Е.С. Голод, д.ф.-м.н., профессор А.А. Михалёв, д.ф.-м.н., профессор Е.И. Бунина, д.ф.-м.н., профессор Ю.Г. Прохоров, к.ф.-м.н., доцент И.А. Чубаров, к.ф.-м.н., к.ф.-м.н., доцент О.В. Маркова, к.ф.-м.н., доцент Д.А. Тимашёв, к.ф.-м.н., доцент А.А. Клячко, к.ф.-м.н., ассистент С.А. Гайфуллин, к.ф.-м.н., ассистент А.Н. Канунников.

Повестка дня: обсуждение диссертационной работы выпускника аспирантуры кафедры высшей алгебры механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» Митрофанова Ивана Викторовича «Алгоритмические проблемы, связанные с морфическими последовательностями», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.



**Слушали:** доклад диссертанта Митрофанова Ивана Викторовича.

**Представленная работа является исследованием** в области комбинаторной алгебры, а именно комбинаторике бесконечных слов.

Целью настоящей работы является изучение морфических последовательностей.

Перед автором возникли следующие задачи:

Обобщить соответствие между подстановочностью и периодичным поведением графов Розы на произвольные равномерно рекуррентные слова, рассматривая при этом, возможно, конструкцию, несколько отличающуюся от графов Розы.

При этом должен получиться новый способ описания структуры морфических последовательностей.

Получить алгоритмически проверяемые критерии для равномерной рекуррентности произвольного морфического сверхслова; периодичности и заключительной периодичности произвольного морфического сверхслова.

Эти задачи успешно решены автором в данной работе.

**Диссертация состоит** из пяти глав и списка цитируемой литературы.

В первой главе, являющейся введением описывается структура диссертации и история рассматриваемых вопросов; определяется область исследования; обосновывается актуальность темы и научная новизна полученных результатов; описываются основные результаты диссертации.

В главе 2 приведен обзор основных понятий, используемых в диссертации.

Глава 3 посвящена обобщению того наблюдения, что у некоторых классов морфических слов графы Розы меняются периодичным образом.

Дается определение схем Розы, изучаются их свойства, дается описание их эволюции, формулируется и доказывается критерий периодичности протокола эволюции.

В главе 4 строится алгоритм для проверки заключительной периодичности морфических последовательностей.

В главе 5 строится алгоритм для проверки равномерной рекуррентности (почти периодичности) морфических последовательностей.

В главе 6 предлагается более короткий способ доказательства основных утверждений предыдущих глав, не использующий явно схемы Розы.

В главе 7 оцениваются перспективы разработанной техники в применении к другим задачам комбинаторики слов.

**В качестве рецензента** выступил д.ф.-м.н., профессор А.А.Михалёв. Он отметил, что задача об заключительной периодичности морфических последовательностей долгое время была открытой проблемой. Он поддержал рекомендацию диссертации к защите.

В дискуссии приняли участие профессор Э.Б. Винберг и доцент А.А. Клячко. А.А.Клячко задал вопрос об алгебраических приложениях понятия равномерной рекуррентности. Диссертант ответил, что понятие равномерно рекуррентных слов позволяет описать радикалы в мономиальных алгебрах. Э.Б.Винберг задал вопрос про связь периодичности морфической последовательности до и после кодирования. Диссертант ответил, что из периодичности до кодирования следует периодичность после кодирования, но не наоборот, и что проблема для чисто морфических последовательностей была решена в 80-х годах. В.Н.Латышев высказал мнение, что диссертация удовлетворяет требованиям предъявляемым к диссертациям и поддержал рекомендацию диссертации к защите.



Научные руководители д.ф.-м.н., профессор А.В.Михалёв и д.ф.-м.н., профессор А.Я.Белов в отзывах отметили актуальность тематики, высокую степень самостоятельности диссертанта, а также новизну и содержательность представленных результатов.

**По итогам обсуждения принято следующее заключение:**

**Представленная диссертация** является самостоятельно выполненной, законченной научно-исследовательской работой, посвященной решению актуальных задач в области комбинаторики слов.

Научные результаты диссертации, выносимые на защиту, получены лично автором, являются новыми и обоснованы в виде строгих математических доказательств. Результаты других авторов, упомянутые в тексте диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

**В диссертации получены следующие основные результаты:**

1. Дано определение схем Рози сверхслова, эволюции схем Рози, протокола эволюции схем Рози. Доказано, что протокол эволюции схем Рози для равномерно рекуррентного сверхслова периодичен тогда и только тогда, когда его факторный язык языком некоторой морфической последовательности.
  2. Доказана алгоритмическая разрешимость проверки периодичности и заключительной периодичности морфических последовательностей.
  3. Доказана алгоритмическая разрешимость проверки равномерной рекуррентности морфических последовательностей.
  4. Доказана алгоритмическая разрешимость проверки совпадения факторных языков двух морфических последовательностей в случае, когда одна из них примитивна.
- Результат 1 получен в соавторстве с Беловым, остальные результаты получены самостоятельно.
- Результаты 2 и 3 при этом получены одновременно и независимо с Ф.Дюраном.

**Методы исследования:** В работе используются результаты и методы теории комбинаторики слов, теории графов, теории неотрицательных матриц.

**Апробация диссертации:**

**Результаты диссертации** докладывались автором на следующих семинарах механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова:

1. Семинар «Кольца и модули» под руководством профессора В.Н. Латышева, профессора А.В. Михалева неоднократно в 2011-2014 гг.;
2. Научно-исследовательский семинар кафедры алгебры, 2015.
3. Семинар «Алгебра и теория моделей» под руководством профессора Е.И.Буниной в 2016г.
4. Научно-исследовательский семинар А.М.Райгородского в 2011--2012 гг.
5. Bar-Ilan Algebra Seminar" (Bar-Ilan University) (January, 2014)
6. PI-Seminar" (Technion (Israel Institute of Technology))(January, 2014)
7. Петербургский семинар по теории представлений и динамическим системам (2015, ПОМИ)

**Результаты диссертации** докладывались на всероссийских и международных конференциях:

1. Международная конференция «CANT-2012» г. Люмани в 2012 г
2. Международная конференция «SubTite» г. Люмани в 2013 г
3. Franco-Russian workshop on Algorithms, complexity and applications 2013, Москва
4. Number Theory and Dynamics + Journées Arithmétiques, Institut Fourier, 2013, Гренобль
5. Growth, Symbolic Dynamics and Combinatorics of Words in Groups (2015, Париж)

**Тема диссертации входит в координационный план РАН.**

Регистрационный номер 01 2010 54270 «Алгебраические системы: группы, кольца, универсальные алгебры; компьютерная алгебра, теория кодирования, линейная алгебра и её приложения», шифр 1.1.3.6 «Алгебра. Теория колец и модулей».

**Утверждение темы диссертации состоялось 28 ноября 2014 года, протокол №8.**

**Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах автора:**

И. В. Митрофанов, «Периодичность морфических слов» // Фундамент. и прикл. Матем., 18:4 (2013), 107–119

I.Mitrofanov. “Periodicity of Morphic Words” // May 2015, Journal of Mathematical Sciences, Volume 206, Issue 6, pp 679-687

A.Ya.Belov, G.V.Kondakov, I.Mitrofanov. “Inverse problems of symbolic dynamics” // Banach Center Publ. 94 (2011), 43 — 60.

И.В.Митрофанов, «Почти периодичность морфических слов», Доклады Академии Наук, 2016, том 467, No 5, с. 1–4

Диссертация к защите представляется впервые.

**Диссертация** «Алгоритмические проблемы, связанные с морфическими последовательностями» Митрофанова Ивана Викторовича **рекомендуется к защите** на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел — для защиты на диссертационном совете Д.501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова.

Заключение принято на заседании кафедры высшей алгебры Механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

**Присутствовали на заседании 13 чел. Результаты голосования: «за» — 13 чел., «против» — нет, «воздержалось» — нет, протокол № 1035 от 30 мая 2016 года.**

И.О. заведующего кафедрой высшей алгебры,  
д. ф.-м. н, профессор



В.А. Артамонов

Ученый секретарь кафедры высшей алгебры,  
к.ф.-м.н., ассистент



С.А. Гайфуллин