МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова
Механико–математический факультет

На правах рукописи

Давлетшин Марс Наилевич

Некоторые аспекты неустойчивости в гамильтоновой динамике.

Специальность: 01.02.01 — теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2016

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель: Трещев Дмитрий Валерьевич,
доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты: Буров Александр Анатольевич,
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Вычислительного центра
имени А.А. Дородницына
Федерального исследовательского центра
"Информатика и управление"
Российской академии наук

Васильев Алексей Алексеевич,
доктор физико-математических наук,
заведующий лабораторией теоретической
гидрофизики, нелинейных и неравновесных
процессов в космической среде (511),
Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
"Институт космических исследований"
Российской академии наук

Ведущая организация: Институт прикладной математики
имени М. В. Келдыша
Российской академии наук

Защита диссертации состоится 17 февраля 2017 г. в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.22, созданного на базе Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119234, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций Фундаментальной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: Ломоносовский проспект, д. 27 и на сайте http://istina.msu.ru/media/dissertations/dissertation/57c/a20/36561301/Text.pdf

Автореферат разослан   января 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Прошкин Владимир Александрович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена некоторым задачам устойчивости в гамильтоновых системах. Понятие устойчивости в разных смыслах неразрывно связано с изучением динамических систем. Существует множество неэквивалентных понятий, содержащих это слово "устойчивость", таких как устойчивость по Ляпунову, орбитальная устойчивость, устойчивость по Лагранжу, устойчивость по Пуассону, структурная устойчивость, топологическая устойчивость и т.д. Исследование устойчивости системы является очень важной задачей механики и теории динамических систем в целом.

Одним из важнейших определений устойчивости, лучше всего применимых к изучению периодических решений, является орбитальная устойчивость. В обзоре С.В. Болотина и Д.В. Трещева (2010 год) рассматривается несколько вариантов формулы Хилла, из которой в некоторых случаях можно извлечь достаточные условия орбитальной неустойчивости периодических траекторий. Обобщенная формула Хилла позволяет сделать аналогичные выводы для g-периодических траекторий.

Изучение диффузии Арнольда продолжает оставаться одной из самых актуальных тем в гамильтоновой динамике, и в этой задачей занимались и занимаются достаточно большое число авторов. В диссертации рассматриваются многомерные априори неустойчивые системы. В комбинации с работами Д.В. Трещева (2002 год, 2012 год) результаты диссертации дают доказательство наличия диффузии Арнольда в рассматриваемых системах на всем пространстве действий.

Цель работы. Диссертация посвящена двум классам задач устойчивости в гамильтоновых системах. Целью первой части диссертации является обобщение формулы Хилла на случай g-периодических траекторий. Основное приложение этой формулы связано с орбитальной устойчивостью траектории: часто формула Хилла дает достаточные условия неустойчивости g-периодической траектории. Вторая часть диссертации посвящена изучению диффузии Арнольда в многомерных априори неустойчивых гамильтоновых системах. Здесь основная цель – доказать наличие диффузии Арнольда в рассматриваемых системах, дать оценку скорости диффузии и доказать типичность явления для соответствующего функционального пространства возмущений.

Научная новизна. Все основные результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми. Впервые получена обобщенная формула Хилла. Также впервые доказано наличие диффузии Арнольда в типичных многомерных априори неустойчивых системах вблизи резонансов низкого порядка для возмущений, являющихся тригонометрическими полиномами в первом приближении.

Достоверность результатов. Все результаты диссертации получены аналитически и строго обоснованны.

Используемые методы. Во первой главе используются общие методы лагранжевой механики, вариационного исчисления и функционального анализа, во второй главе основным инструментом изучения диффузии Арнольда является метод сепаратрисного отображения.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Результаты первой главы, в частности, могут быть использованы при исследовании устойчивости g-периодических бильярдных траекторий. Результаты второй главы диссертации в комбинации с результатами работы Д.В. Трещева (2012) дают доказательство наличия диффузии Арнольда в многомерных априори неустойчивых системах для возмущений, являющихся тригонометрическими полиномами в первом приближении.

Апробация работы и публикации. Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

– Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов-2016”. МГУ им.М.В. Ломоносова, Москва, апрель 2016;

– Научный семинар под руководством чл.-корр. РАН, проф. Д.В.Трещева (2011).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы изложены в печатных работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура работы. Диссертация состоит из двух глав, введения, заключения и списка литературы из 68 наименований. Общий объем диссертации — 98 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** описана предметная область и цель настоящей диссертации, дан краткий обзор работ, связанных с темой диссертации, также приведено краткое содержание диссертации.

Первая глава посвящена доказательству обобщенной формулы Хилла для g–периодических траекторий. В конце 19-го века американский астроном и математик Д.У.Хилл, изучая неавтономное дифференциальное уравнение второго порядка с периодической правой частью

$$\ddot{x} = a(t)\,x, \quad a(t+2\pi) = a(t),$$

получил выражение для мультипликаторов матрицы монодромии периодического решения через определитель некоторой бесконечной матрицы H, элементы которой зависят от коэффициентов Фурье правой части $a(t)$. Позже А.Пуанкаре пояснил в каком смысле понимать определитель бесконечной матрицы и доказал его сходимость. Этот результат вошел в теорию дифференциальных уравнений под названием формулы Хилла. Через много лет, в конце 20-го века, аналог формулы Хилла для периодических решений был обнаружен, в так называемых, дискретных лагранжевых системах. Аналогом матрицы H здесь служит конечная матрица гессиана функционала действия в критической точке, соответствующей периодическому решению. Примерно в то же время появилось обобщение формулы Хилла для периодического решения произвольной непрерывной лагранжевой системы. Здесь H — оператор гессиана функционала действия в критической точке, которую задает периодическое решение. Наконец, в 2010 году вышел обзор С.В.Болотина и Д.В.Трещева [4], в котором подводится некоторый итог всех этих результатов. Рассматриваюся обе версии формулы Хилла, обсуждаются применения ее к устойчивости периодических решений, а также исследуется случай вырожденных траекторий когда система допускает непрерывную группу симметрий. Приводится связь динамической устойчивости периодической траектории с индексом Морса.

В настоящей работе результаты [4] распространяются на случай решений, которые далее называются g–периодическими решениями или траекториями. Поясним, что имеется в виду. Пусть $g\colon M \to M$ — диффеоморфизм конфигурационного многообразия, g–периодическими траекториями мы называем решения лагранжевой системы, обладающие следующим свойством:

$$x_{n+i} = gx_i \quad \text{для любых} \quad i \in \mathbb{N} \tag{0.0.1}$$

в дискретном случае и

$$\gamma(t+\tau) = g\gamma(t) \quad \text{для любых} \quad t \in \mathbb{R} \tag{0.0.2}$$

в непрерывном случае. В ситуации, когда g образует циклическую группу, мы получаем периодическую траекторию. Однако g–периодическая траектория может и не быть периодической, например если M — двумерная плоскость, g — сдвиг на фиксированый вектор. Далее часто g — элемент непрерывной группы симметрии лагранжевой системы.

Итак, рассматриваются два вида лагранжевых систем:

- Дискретная лагранжева система (ДЛС) на многообразии M с лагранжианом $L(x, y)\colon M \times M \to \mathbb{R}$, который является g–инвариантным: $L(gx, gy) = L(x, y)$ и удовлетворяет некоторому условию невырожденности. Тогда g–периодическая траектория периода n — последовательность $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, удовлетворяющая условию (0.0.1), которая является критической точкой функционала действия на M^n:
$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} L(x_i, x_{i+1}), \qquad x_{i+n} = gx_i.$$
- Непрерывная лагранжева система (НЛС) с конфигурационным многообразием M и τ–периодическим лагранжианом $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$ на $TM \times \mathbb{R}$, который является g–инвариантным: $\mathcal{L}(g(x), G(x)\dot{x}, t) = \mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$, где $G(x)$ — дифференциал отображения g в точке x, и строго выпуклым по скорости. Тогда g–периодическая траектория γ, которая удовлетворяет условию (0.0.2), является критической точкой функционала действия
$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^\tau \mathcal{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)\, dt,$$
на множестве g–периодических кривых $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ периода τ.

Обычно дискретный случай можно свести к непрерывному, но удобнее их рассматривать отдельно. Дискретному и непрерывному случаям посвящены первый и второй разделы первой главы соответственно.

Приведем теперь формулу Хилла. В обоих случаях она имеет одинаковый вид. Пусть $\hat{G}^{-1}P$ — матрица монодромии отображения Пуанкаре g–периодической траектории, где P — оператор отображения за период, h — вторая вариация функционала действия на g–периодической траектории. Тогда

$$\det(\hat{G}^{-1}P - I) = \sigma(-1)^m \beta \det H, \tag{0.0.3}$$

где $\hat{G}$ — матрица Якоби отображения $\hat{g}\colon M^2 \to M^2$, $\hat{g}(x,y) = (g(x), g(y))$, $x, y \in M$, $m = \dim M$, $\sigma = 1$ для ориентируемой траектории и $\sigma = -1$ для неориентируемой траектории. Коэффициент β — положительный множитель. Для приложений важным является знак выражения $\sigma(-1)^m \det H$.

Формула (0.0.3) — частный случай при $\rho = 1$ формулы

$$\rho^{-m} \det(\hat{G}^{-1}P - \rho I) = \sigma(-1)^m \beta \det H_\rho, \qquad \rho \in \mathbb{C}, \tag{0.0.4}$$

где H_ρ — матрица, совпадающая с матрицей Гессиана при $\rho = 1$. Оператор $\hat{G}^{-1}P$ является симплектическим, поэтому обе части (0.0.4) — многочлены степени m относительно $\rho+\rho^{-1}$. Следствием формулы Хилла является эквивалентность геометрической невырожденности g–периодической траектории (условие $\det H \neq 0$), и ее динамической невырожденности (условие, что 1 — не является собственным значением $\hat{G}^{-1}P$).

Основная область приложения формулы Хилла связана с устойчивостью g–периодической траектории. Из условия $\sigma(-1)^m \det H < 0$ следует, что многочлен $F(\rho) = \det(\hat{G}^{-1}P - \rho I)$ имеет корень, больший единицы. Отсюда следует неустойчивость g–периодической траектории. В невырожденной ситуации ($\det H \neq 0$) $\operatorname{sign}(\det H) = (-1)^{\mathrm{ind} H}$, где $\mathrm{ind}H$ — индекс Морса g–периодической траектории. Поэтому если периодическая траектория невырожденна, то согласно (0.0.3) из неравенства $\sigma(-1)^{m+\mathrm{ind} H} < 0$ следует экспоненциальная неустойчивость.

Часто встречается ситуация, когда g–периодическая траектория вырождена. В непрерывном случае это имеет место, например, в автономном случае. В этом случае уравнение в вариациях имеет G–периодическое решение $\dot{\gamma}(t)$: $\dot{\gamma}(t+\tau) = G\big(\gamma(t)\big)\dot{\gamma}(t)$. Отсюда следует, что матрица монодромии имеет единичный мультипликатор и формула Хилла вырождается в равенство $0 = 0$. Также траектория может вырождаться из-за наличия непрерывной группы симметрий, сохраняющей лагранжиан. Эта вырожденность порождает G–периодические решения и линейные интегралы уравнений в вариациях. Для вырожденной периодической траектории равенство (0.0.3) бесполезно, поскольку обе его части обращаются в нуль. С помощью процедуры понижения порядка можно получить невырожденный вариант формулы Хилла. В данной работе рассматривается случай, когда алгебра Ли V векторных полей симметрии коммутативна и размерность обобщенного собственного пространства единицы N оператора $\hat{G}^{-1}P$ равна $2k$, где $k = \dim V$.

Устранив все вырождения, мы получаем редуцированную формулу Хилла, которая выглядит аналогично, но соответствующие операторы монодромии и Гессе $\tilde{P}$ и $H^\perp$ действуют на меньших пространствах:

$$\det(\tilde{P} - I) = \sigma^\perp (-1)^{m-k} \beta^\perp \det H^\perp.$$

Здесь $\sigma^\perp \in \{1, -1\}$ и $\beta^\perp > 0$ — параметры редуцированной системы.

Для использования редуцированной формулы Хилла в приложениях нужно понять связь между σ и $\sigma^\perp$, а также между $\mathrm{ind}H$ и $\mathrm{ind}H^\perp$, индексами Морса гессианов в исходной и редуцированной системах. То есть зная σ и $\mathrm{ind}H$, мы должны получить $\sigma^\perp$ и $\mathrm{ind}H^\perp$, которые определяют устойчивость траектории. Мы доказываем, что

$$\sigma(-1)^{\mathrm{ind} H} = \sigma^\perp (-1)^{\mathrm{ind} H^\perp + \mathrm{ind} b},$$

где квадратичная форма b на обобщенном собственном пространстве $N = \mathrm{Ker}(\hat{G}^{-1}P - I)^2$ определена равенством $b(v) = \omega((\hat{G}^{-1}P - I)v, v)$.

В качестве примера рассматривается автономная лагранжева система, не имеющая других вырождений: $\dim V = 1$ и $k = 1$. Тогда g–периодическая траектория γ лежит в гладком семействе g–периодических траекторий, и

$$(-1)^{\mathrm{ind}_b} = -\,\mathrm{sign}\left(\frac{dE}{d\tau}\right),$$

где E и τ — энергия и период вдоль этого семейства. Из редуцированной формулы Хилла следует, что если

$$\sigma(-1)^{m+\mathrm{ind}_H}\frac{dE}{d\tau} < 0, \tag{0.0.5}$$

то γ имеет вещественный мультипликатор $\rho > 1$. Знак величины $\frac{dE}{d\tau}$ можно вычислить, и в качестве примера это делается в задаче о движении точки в $\mathbb{R}^m$ в однородном потенциальном поле сил.

В диссертации рассматриваются как непрерывные, так и дискретные системы. Как уже отмечалось выше, оба случая могут быть сведены друг к другу, однако имеет смысл рассматривать их отдельно. В первом разделе первой главы сначала дается определение и основные свойства дискретных лагранжевых систем (ДЛС). Затем доказывается формула Хилла для g–периодической траектории ДЛС. В качестве одного из приложений обобщенной формулы Хилла даются некоторые достаточные условия неустойчивости g–периодических траекторий. Особое внимание уделяется исследованию устойчивости бильярдных g–периодических траекторий произвольной размерности. Оказывается, что любая g–периодическая траектория $\mathbf{x}$ периода n бильярда внутри гиперповерхности в $\mathbb{R}^{m+1}$ такая, что $(-1)^{m+n+\mathrm{ind}(\mathbf{x})} < 0$, экспоненциально неустойчива. Также приводится несколько примеров.

Далее изучается вырожденный случай, когда матрица монодромии имеет имеет единичное собственное значение. Приводится редуцированная формула Хилла и указана связь между индексами билинейных форм $h^{\perp}$ и h, которая позволяет использовать редуцированную формулу Хилла для задачи орбитальной устойчивости. Для этого рассматриваются ДЛС с симметриями. Многие результаты здесь аналогичны результатам работы [4], поэтому мы не приводим доказательства вспомогательных утверждений, ограничившись их формулировками.

Второй раздел первой главы посвящен непрерывным лагранжевым системам. В этом случае пространство вариаций имеет бесконечную размерность, поэтому доказательство формулы Хилла несколько усложняется. Дается несколько вариантов этой формулы, аналогичных дискретному случаю. Указываются приложения к задаче об устойчивости g–периодических орбит в лагранжевых системах.

Основной результат этой части: пусть γ — невырожденная g–периодическая геодезическая на m–мерном многообразии и $\sigma(-1)^{m+\mathrm{ind}_\gamma} < 0$. Тогда она экспоненциально неустойчива. Далее рассматривается случай вырождения орбиты. Приводится редуцированная формула Хилла. Как и в дискретном случае исследуется связь между индексом Морса g–периодической траектории исходной системы и соответствующего ему решения редуцированной системы и приводятся приложения этой формулы в задаче об устойчивости в лагранжевых системах с симметрией.

В качестве примера вырожденной лагранжевой системы рассматривается автономная система — движение точки в $\mathbb{R}^m$ в поле силы с однородным потенциалом степени k, где $k(k-2) \neq 0$. Основной результат здесь следующий: пусть g–периодическая траектория γ имеет ровно 2 единичных мультипликатора и $(-1)^{m+\mathrm{ind}\gamma}(k-2)/k < 0$. Тогда γ имеет вещественный мультипликатор $\rho > 1$.

Во **второй главе** изучается диффузия Арнольда в многомерных априори неустойчивых гамильтоновых системах. В статье [1] был указан пример гамильтоновой системы, близкой к интегрируемой

$$\begin{gathered} \dot{x} = \partial H/\partial y, \quad \dot{y} = -\partial H/\partial x, \quad H = H_0(y) + \varepsilon H_1(x, y, t, \varepsilon), \\ x \in \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{T}, \quad 0 \leq \varepsilon \ll 1 \end{gathered} \tag{0.0.6}$$

с выпуклым по переменным действия y гамильтонианом и $n = 2$, у которой переменные y могут изменяться на величину порядка 1 вдоль траектории при как угодно малом $\varepsilon > 0$. Численные эксперименты показывают, что эволюция переменных y слагается из суммы малых колебаний и случайного блуждания. Поэтому Чириков предложил называть это явление диффузией Арнольда.

Основным вопросом диффузии для систем вида (0.0.6) является типичность этого явления, и в каком смысле понимается эта типичность. Это зависит, в первую очередь, от функционального пространства, которому принадлежит H. Физически наиболее интересным являются вещественно–аналитические возмущения. Из теории Нехорошева следует, что в этом случае для систем, удовлетворяющих так называемым условиям крутизны, средняя скорость дрейфа переменных действия вдоль траектории оценивается сверху экспоненциально малой величиной $\exp(-\alpha\varepsilon^{-\beta})$ для некоторых положительных α, β.

Имеется ряд более простых ситуаций, в которых диффузия Арнольда присутствует без экспоненциально малых эффектов. Одной из таких задач является диффузия в, так называемых, априори неустойчивых системах. Рассматриваются гамильтоновые системы, близкие к интегрируемым, с гамильтонианом вида

$$H(y, x, v, u, t, \varepsilon) = H_0(y, v, u) + \varepsilon H_1(y, x, v, u, t) + O(\varepsilon^2), \tag{0.0.7}$$

где динамика системы с невозмущенным гамильтонианом H_0 – комбинация системы с одной степенью свободы с гиперболическим положением равновесия и n-мерного ротатора. Здесь $(v, u) \in D \subset \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \overline{\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{T}^n$, $\varepsilon \geq 0$ – малый параметр, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ – область с компактным замыканием. Предполагается, что гамильтониан (0.0.7) 1-периодичен по времени, является $C^{\mathbf{r}}$-гладким, где $\mathbf{r} \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ достаточно велико, а также выполнены следующие условия:

$\mathbf{H_0 1}$. *В невозмущенном гамильтониане векторная переменная y отделяется от u и v, т.е. $H_0(y, v, u) = F(y, f(v, u))$.*

$\mathbf{H_0 2}$. *Функция f имеет невырожденную критическую точку $(v, u) = (0, 0)$ типа “седло”. Это единственная критическая точка на компактной компоненте связности множества*

$$\gamma = \{(v, u) \in D : f(v, u) = f(0, 0)\}.$$

Иначе говоря, $(0,0)$ — гиперболическое положение равновесия гамильтоновой системы $(D, dv \wedge du, f)$ с одной степенью свободы.

Далее, определим

$$E(y) = H_0(y,0,0), \quad \nu = \partial E/\partial y : \overline{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}^n.$$

$\mathbf{H_0 3}$. *Для любых $y \in \mathcal{D}$ $(n \times n)$–матрица $\partial^2 E/\partial y^2$ невырождена. Т.е. отображение $y \mapsto \nu(y)$ локально обратимо около любой точки $y_0 \in \mathcal{D}$.*

Изучение диффузии в априори неустойчивых системах включает три аспекта, сформулированных в следующей гипотезе:

Гипотеза 1 *[2].*

A. *Диффузия происходит при возмущениях, принадлежащих открытому плотному подмножеству $C^{\mathbf{r}}$–гладких функций H_1.*

B. *Эволюция переменных y возможна вдоль произвольной кривой, лежащей в области $\mathcal{D}$.*

C. *Средняя скорость диффузии имеет порядок $\varepsilon/|\log\varepsilon|$.*

В случае $n = 1$ гипотеза 1 доказана в работе [9]. В случае $n > 1$ имеются лишь частные результаты.

В данной работе продолжается деятельность, начатая в [9] и [6], по исследованию диффузии Арнольда в априори неустойчивых системах. В этих работах "гиперболическим" переменным u, v отвечает одна степень свободы. Для доказательства наличия диффузии используется комбинация методов многомерного сепаратрисного отображения и антиинтегрируемого предела.

Согласно $\mathbf{H_0 2}$ сепаратрисы γ сдвоенные. Эти сепаратрисы гомеоморфны "восьмерке": две петли, $\gamma^{\pm}$, выходящие из одной точки, $\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^-$. Фазовый поток системы порождает ориентацию на $\gamma^{\pm}$. Ориентация на D задается системой координат u, v. Без ограничения общности будем считать, что ориентация $\gamma^{\pm}$ совпадает с ориентацией D, т.е. движение по сепаратрисе происходит против часовой стрелки.

Вектор частот $\overline{\nu} = (-\nu, 1)$ называется резонансным, если найдется ненулевой вектор $k = (\overline{k}, k_0) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, который мы тоже будем называть резонансным, такой что $\langle \overline{\nu}, k \rangle = 0$. Этому резонансу соответствует гиперповерхность $S_0^k = \{y \in \overline{\mathcal{D}} \colon \langle \overline{\nu}(y), k \rangle = 0\}$. Если при этом $|k|_\infty \le C$, где C не зависит от ε, то этот резонанс называют C-сильным или просто сильным. Сильные резонансы разбивают область $\mathcal{D}$ на конечное число компонент связности. Точки пересечения двух резонансных гиперповерхностей, соответствующих неколлинеарным целочисленным векторам k, мы будем называть кратными резонансами.

Опишем основной результат [6]. Для $\delta \ge 0$ и $k \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}$ определим окрестность резонанса в $\overline{\mathcal{D}}$

$$S_\delta^k = \{\eta \in \mathcal{D} : |\langle k, \overline{\nu}(\eta) \rangle| \le \delta\}. \tag{0.0.8}$$

В работе [6] рассматривается множество $Q = \overline{\mathcal{D}} \setminus \cup_{0<|k|\le C_\diamond} S_\delta^k$ для

$$\delta = O\big(|\log^{-1}\varepsilon|\big) \tag{0.0.9}$$

и некоторой положительной постоянной $C_\diamond$, которая не зависит от ε, и доказывается следующая теорема

Теорема 1 *[6] Для открытого плотного множества в пространстве $C^{\mathbf{r}}$ функций H_1 существует постоянная $C_\diamond = C_\diamond(H_0, H_1)$, не зависящая от ε, такая что выполнено следующее: найдутся $\varepsilon_0, c_d, c_v > 0$, такие что для любой гладкой кривой $\chi \subset Q$ с концами χ_0, χ_1 и длиной $|\chi|$, и для всех положительных $\varepsilon < \varepsilon_0$, возмущенная система имеет траекторию*

$$\big(y(t), x(t), v(t), u(t)\big), \quad t \in [0, T] \tag{0.0.10}$$

со следующими свойствами:

(i) $|y(0) - \chi_0| < c_d\,|\log\varepsilon|^\alpha \varepsilon^{1/4}$, $|y(T) - \chi_1| < c_d\,|\log\varepsilon|^\alpha \varepsilon^{1/4}$,

(ii) кривая $\{y(t) : t \in [0, T]\}$ лежит в $c_d\,|\log\varepsilon|^\alpha \varepsilon^{1/4}$–окрестности χ,

(iii) $c_v T\varepsilon/|\log\varepsilon| < |\chi|$.

Здесь α — положительное число, зависящее от степени гладкости гамильтониана H.

Таким образом, в работе [6] доказывается наличие диффузии Арнольда в многомерных априори неустойчивых гамильтоновых системах в области, не содержащей сильных резонансов, и дается оценка скорости диффузии. В настоящей работе изучается диффузия Арнольда для $n \geq 1$ в окрестности S^k_δ сильного резонанса при следующем упрощающем предположении.

$\mathbf{H_1 1}$. *Будем считать, что H_1 – тригонометрический полином по переменным x. Полиномиальность по t не требуется, т.е. $H_1 \in \Lambda_N$, где*

$$\Lambda_N = \Big\{ H_1 \colon H_1(y, x, v, u, t) = \sum_{\overline{k} \in \mathbb{Z}^n,\, |\overline{k}| \leq N,\, k_0 \in \mathbb{Z}} H_1^{\overline{k},\, k_0}(y, v, u) e^{2\pi i(\langle \overline{k}, x\rangle + k_0 t)} \Big\}. \tag{0.0.11}$$

Заметим, что все резонансные целочисленные векторы $(\overline{k}, k_0)$, такие что, $|\overline{k}| \leq N$ соответствуют сильным резонансам. Действительно, число резонансных гиперповерхностей S^k_0, для которых $|\overline{k}|_\infty \leq N$, конечно, поскольку в любой точке множества $S^k_0 \cup \mathcal{D}$ выполняется неравенство $|k_0| \leq Nn|\nu(\eta)|_\infty$. Следовательно, компонента k_0 ограничена в силу компактности $\overline{\mathcal{D}}$.

Целью настоящей работы является доказательство существования траекторий, пересекающих окрестность резонансной гиперповерхности и получение оценки времени этого пересечения. Главная трудность, отличающая построение диффузионной траектории в окрестности резонанса низкого порядка, состоит в том, что вблизи резонанса, вообще говоря, не удается строить монотонную в нужном направлении траекторию сепаратрисного отображения. Диффузия вблизи резонансов низкого порядка в случае $n = 1$ для любых типичных возмущений H_1 установлена в работе [9].

Итак, рассматривается неавтономная гамильтонова система, близкая к интегрируемой, с функцией Гамильтона вида (0.0.7), удовлетворяющая условиям $\mathbf{H_0 1} - \mathbf{H_0 3}$. Сформулируем теперь основной результат главы 2. Зафиксируем ненулевой целочисленный вектор $k = (\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, k_0)$. Пусть $\chi \subset \mathcal{D}$ – кусочно-гладкая кривая с концами y_0, y_1, лежащими на противоположных компонентах границы S^k_δ. Без ограничения общности можно считать, что

$$-\langle \overline{k}, \nu(y_0)\rangle + k_0 = \delta, \quad -\langle \overline{k}, \nu(y_1)\rangle + k_0 = -\delta. \tag{0.0.12}$$

Пусть, кроме того, χ трансверсально пересекает S^k_0, и точка их пересечения y_* не является кратным резонансом. Тогда через достаточно малую не зависящую от ε окрестность этой точки не проходит никакая другая резонансная гиперповерхность S_0^l, $l \nparallel k$. В рассматриваемой задаче множество кратных резонансов является объединением конечного числа многообразий в $\mathcal{D}$ коразмерности не меньше 2.

Обозначим через $O(\chi, r)$ окрестность кривой χ радиуса r.

Теорема 2 *Пусть функция H_0 удовлетворяет условиям $\mathbf{H_0 1} - \mathbf{H_0 3}$. Тогда для типичного возмущения H_1 вида (0.0.11) и некоторых констант $\varepsilon_0(H_0, H_1), c_v > 0$ для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ возмущенная система имеет траекторию*

$$(y(t), x(t), v(t), u(t)), \qquad t \in [0, T], \tag{0.0.13}$$

для которой выполнено:

(i) $|y(0) - y_0| < \varepsilon^{1/(7n)}$, $|y(T) - y_1| < \varepsilon^{1/(7n)}$,

(ii) проекция траектории (0.0.13) на $\mathcal{D}$ лежит в $O(\chi, \varepsilon^{1/(8n)})$,

(iii) $c_v T \varepsilon < 1$.

Иными словами, существует траектория, которая начинается вблизи одного конца кривой χ, пересекает резонансную гиперповерхность вблизи точки пересечения кривой и резонанса и приходит в малую окрестность другого конца кривой. Здесь и далее, если это не оговаривается отдельно, под окрестностями точек и множеств в $\mathcal{D}$ подразумеваются окрестности в стандартной евклидовой метрике $\|\cdot\|_2$. Поясним, что понимается под типичностью возмущения.

Определение 0.0.1 *Подмножество $\Xi \subset \Lambda_N$ будем называть типичным, если выполняются следующие два условия:*

1) Ξ открыто и плотно в $C^{\mathbf{r}}$-топологии,

2) Ξ образует множество полной меры при пересечении с типичным в первом смысле конечно-параметрическим семейством функций в Λ_N с числом параметров $j \geq 1$.

На самом деле, требования к возмущению H_1 сформулированы явно: см. $\mathbf{H_1 1} - \mathbf{H_1 4}$.

В качестве следствия получаем следующий результат.

Теорема 3 *Пусть $\chi \subset \mathcal{D}$ – гладкая кривая конечной длины $|\chi|$ с концами χ_0, χ_1, трансверсально пересекающая резонансные гиперповерхности и не проходящая через кратные резонансы, и пусть функции H_0 и H_1 удовлетворяют условиям $\mathbf{H_0 1} - \mathbf{H_0 3}$, $\mathbf{H_1 1} - \mathbf{H_1 4}$. Тогда найдется константа $c_v > 0$, такая что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ возмущенная система имеет траекторию*

$$(y(t), x(t), v(t), u(t)), \qquad t \in [0, T], \tag{0.0.14}$$

для которой выполнено:

(i) $|y(0) - \chi_0| < \varepsilon^{1/(7n)}$, $|y(T) - \chi_1| < \varepsilon^{1/(7n)}$,

(ii) проекция траектории (0.0.13) на $\mathcal{D}$ лежит в $O(\chi, \varepsilon^{1/(8n)})$,

(iii) $c_v T \varepsilon / |\log \varepsilon| < |\chi|$.

Действительно, комбинируя результаты теоремы 1 в области Q и результаты теоремы 2 в окрестности сильных резонансов, можно построить диффузионную траекторию во всем пространстве действий.

В **заключении** приведены основные результаты и выводы:

В работе рассматриваются два блока вопросов, связанных со свойством неустойчивости траекторий в гамильтоновых системах.

Первая задача посвящена одному из обобщений периодических решений — так называемым g–периодическим траекториям. Здесь g — диффеоморфизм конфигурационного многообразия, сохраняющий лагранжиан системы. Рассматриваются системы как с непрерывным, так и с дискретным временем. Для обоих случаев получены обобщения знаменитой формулы Хилла для периодических траекторий, и из них выводятся достаточные условия орбитальной неустойчивости g–периодических траекторий, связывающие, например, такие величины, как индекс Морса траектории и размерность конфигурационного многообразия, с неустойчивостью траекторий. Рассмотрен случай вырождения траектории, и приводится редуцированная обобщенная формула Хилла. В качестве примера вырождения рассмотрен автономный случай.

Вторая задача посвящена такому явлению неустойчивости в динамике, как диффузия Арнольда. Рассматриваются многомерные априори неустойчивые близкие к интегрируемым гамильтоновы системы, у которых возмущение в первом приближении является тригонометрическим полиномом по быстрым переменным. Для этого случая доказано наличие диффузии в окрестности резонансов низкого порядка для типичного возмущения. Получена оценка скорости диффузии. В комбинации с результатами статьи [6] это доказывает наличие диффузии во всем пространстве действий в типичном случае для описанных выше систем. Нет никаких сомнений, что требование того, чтобы возмущение в первом приближении являлось тригонометрическим переменным по угловым переменным, можно опустить, и все результаты данной работы верны и в этом случае, однако это требует более сложных доказательств.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

1. Давлетшин М.Н. Формула Хилла для g-периодических траекторий лагранжевых систем// Тр. ММО, 2013 Т. 74, выпуск 1, с. 75–113.

2. Давлетшин М.Н., Трещев Д.В. Диффузия Арнольда в окрестности резонансов низкого порядка // Тр. МИАН., 2016, Т. 295, с. 72–106.

Литература

[1] *Арнольд В. И.*, О неустойчивости динамической системы со многими степенями свободы. // Докл. АН СССР - 1964. - 156:1. - с. 9–12.

[2] *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.*, Математические аспекты классической и небесной механики, - Москва:URSS, 2009. - 414 с.

[3] *Болотин С. В.*, Об определителе Хилла периодической траектории, // Вестн. Моск. ун-та. - 1988. - Сер. 1. Матем., мех., 3, - с. 30–34.

[4] *Болотин С.В., Трещев Д.В.*, Формула Хилла, // Успехи Мат. Наук. - 2010, - 65:2(392), - с. 3–70.

[5] *Piftankin G.N., Treschev D.V.*, Separatrix maps in Hamiltonian systems. //Russian Math. Surveys. - 2007. -62, no. 2. pp. 219–322.

[6] *Treschev D.*, Arnold diffusion far from strong resonances in multidimensional a priori unstable Hamiltonian systems. //Nonlinearity. - 2012. - Vol. 25. - pp. 2717–2757.

[7] *Treschev D.*, Multidimensional symplectic separatrix maps. //J. Nonlin. Sci. - 2002. - V. 12, No 1. - pp. 27–58.

[8] *Treschev D.*, Trajectories in a neighborhood of asymptotic surfaces of a priori unstable Hamiltonian systems. //Nonlinearity. - 2002. - Vol. 15. - pp. 2033–2052.

[9] *Treschev D.*, Evolution of slow variables in a priori unstable Hamiltonian systems. //Nonlinearity. - 2004. - 17, no. 5. - pp. 1803–1841.