

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.Ломоносова
Механико–математический факультет

На правах рукописи

Давлетшин Марс Наилевич

Некоторые аспекты неустойчивости в гамильтоновой динамике.

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика.

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
профессор Трещев Д.В.

Москва – 2016

Оглавление

Введение	2
1 Формула Хилла для g-периодических траекторий лагранжевых систем	15
1.1 Дискретный случай	15
1.2 Вырождение в формуле Хилла (дискретный случай)	24
1.3 Формула Хилла для g -периодических траекторий непрерывных лагранжевых систем.	33
1.4 Вырождение в формуле Хилла (непрерывный случай)	44
2 Диффузия Арнольда в окрестности сильных резонансов	54
2.1 Сепаратрисное отображение	54
2.2 Явный вид сепаратрисного отображения	55
2.3 Построение траектории	58
2.4 Окрестность резонанса	60
2.5 Переход через S_δ^k	63
2.6 Приложения	80
Заключение	92
Литература	93

Введение.

Настоящая диссертация посвящена некоторым задачам устойчивости в гамильтоновых системах. Понятие устойчивости в разных смыслах неразрывно связано с изучением динамических систем. Существует множество неэквивалентных понятий, содержащих это слово “устойчивость”, таких как устойчивость по Ляпунову, орбитальная устойчивость, устойчивость по Лагранжу, устойчивость по Пуассону, структурная устойчивость, топологическая устойчивость и т.д. Кратко напомним историю развития теории устойчивости.

С проблемой устойчивости исследователи впервые столкнулись в процессе изучения механических систем. Одни из первых попыток решить частные задачи теории устойчивости предпринимал итальянский механик и физик Э.Торричелли еще в 17 веке. Он сформулировал свой знаменитый принцип, который гласил, что положение системы тел под действием сил тяжести будет устойчивым, если центр тяжести этой системы занимает наинизшее положение. В свое время задачей устойчивости занимались такие выдающиеся ученые, как Ж.Лагранж, П.–С.Лаплас, лорд Кельвин, С.Пуассон, Э.Раус, А.Пуанкаре, А.М.Ляпунов, Н.Г.Четаев и многие другие. Лагранж обобщил принцип Торричелли, сформулировав и доказав теорему об устойчивости невырожденного положения равновесия, когда потенциальная энергия действующих на систему сил имеет минимум в этом положении равновесия. Кроме того, изучая небесную механику, Лагранж ввел следующее определение устойчивого поведения небесных тел: движение тела называется устойчивым по Лагранжу, если его траектория остается в ограниченной области фазового пространства. Раус развил метод игнорирования циклических координат и по аналогии с теоремой Лагранжа сформулировал критерий устойчивости для стационарных движений.

Существует несколько типов устойчивости по начальным данным. Пуассон определял точки фазового пространства (или соответствующие им решения) устойчивыми, если они принадлежат своим α - и ω -предельным множествам. В 1892 году в своей докторской диссертации “Общая задача об устойчивости движения” [11] Ляпунов дал свое определение устойчивости решения обыкновенного дифференциального уравнения. Сейчас такой тип устойчивого поведения решений называют устойчивостью по Ляпунову. Он также доказал теоремы об устойчивости и об асимптотической устойчивости, составляющие так называемый второй или прямой метод Ляпунова. Этот метод не только обобщил теорему Лагранжа, но и позволил в некоторых случаях определять устойчивость положения равновесия по виду линейной части уравнения. В 1930-е годы Четаев, занимаясь проблемой обращения теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия,

доказал теорему о неустойчивости движения. Еще одним типом устойчивости по начальным условиям является орбитальная устойчивость или устойчивость по Пуанкаре. Орбитальная устойчивость следует из устойчивости по Ляпунову, но не равносильна ей. Есть много систем, в которых нет устойчивости по Ляпунову, но есть орбитальная устойчивость решений. Примером могут служить периодические траектории во многих механических системах.

Наиболее изученным разделом в теории устойчивости остается устойчивость по начальным данным. Как уже было сказано выше, в некоторых случаях наиболее естественной характеристикой устойчивого поведения траекторий динамических систем является их орбитальная устойчивость. Одна из задач, обсуждаемых в данной работе, связана с получением некоторых достаточных условий орбитальной неустойчивости так называемых g -периодических решений или траекторий. Для этого обобщается знаменитая формула Хилла для периодических решений гамильтоновых систем. Имеется в виду следующее. Пусть g — сохраняющий лагранжиан диффеоморфизм конфигурационного многообразия. Тогда g -периодической траекторией \mathbf{x} в дискретном и γ в непрерывном случае мы называем траекторию, обладающую свойством $x_{n+i} = gx_i$ для любых i и $\gamma(t + \tau) = g\gamma(t)$ для любых t соответственно. Получены формулы, связывающие характеристический многочлен матрицы монодромии с определителем гессиана функционала действия как для дискретного, так и для непрерывного случая. Эти формулы позволяют извлечь достаточные условия орбитальной неустойчивости по первому приближению g -периодических траекторий в дискретном и непрерывном случаях. Эти результаты опубликованы в статье [7].

Вторая половина настоящей работы посвящена изучению явления топологической неустойчивости в гамильтоновых системах, называемого диффузией Арнольда. В данном случае изучаются так называемые многомерные априори неустойчивые гамильтоновы системы, близкие к интегрируемым. Возмущение в первом приближении предполагается тригонометрическим полиномом по быстрым переменным, а его зависимость от времени предполагается лишь периодической. Доказывается, что в типичном случае в сколь угодно малой окрестности любой точки проходит фазовая траектория, вдоль которой медленные переменные уходят от начального значения на величину порядка 1, и дается оценка скорости диффузии. Данный результат опирается на результаты работы [63], в которой аналогичные результаты доказаны для точек фазового пространства, находящихся вдали от сильных резонансов. Результаты второй половины диссертации опубликованы в статье [8].

Перейдем к более подробному описанию содержания диссертации. Диссерта-

ция состоит из двух глав, введения, заключения и списка литературы.

Первая глава посвящена доказательству обобщенной формулы Хилла для g -периодических траекторий. В конце 19-го века американский астроном и математик Д.У.Хилл, [42] изучая неавтономное дифференциальное уравнение второго порядка с периодической правой частью

$$\ddot{x} = a(t)x, \quad a(t + 2\pi) = a(t),$$

получил выражение для мультипликаторов матрицы монодромии периодического решения через определитель некоторой бесконечной матрицы H , элементы которой зависят от коэффициентов Фурье правой части $a(t)$. Позже А.Пуанкаре [60] пояснил в каком смысле понимать определитель бесконечной матрицы и доказал его сходимости. Этот результат вошел в теорию дифференциальных уравнений под названием формулы Хилла. Через много лет, в конце 20-го века, аналог формулы Хилла для периодических решений независимо ([58] и [15]) был обнаружен, в так называемых, дискретных лагранжевых системах. Аналогом матрицы H здесь служит конечная матрица гессиана функционала действия в критической точке, соответствующей периодическому решению. Примерно в то же время появилось обобщение формулы Хилла для периодического решения произвольной непрерывной лагранжевой системы см. [4], [10]. Здесь H — оператор гессиана функционала действия в критической точке, которую задает периодическое решение. Наконец, в 2010 году вышел обзор С.В.Болотина и Д.В.Трещева [5], в котором подводятся некоторый итог всех этих результатов. Рассматриваются обе версии формулы Хилла, обсуждаются применения ее к устойчивости периодических решений, а также исследуется случай вырожденных траекторий когда система допускает непрерывную группу симметрий. Приводится связь динамической устойчивости периодической траектории с индексом Морса. Нужно заметить, что связь между динамическими и геометрическими свойствами периодической траектории (индекс, сигнатура и т.п.) с другой точки зрения изучается также в работах [52] и [55, 56]. В последней используется подход, основанный на методах симплектической геометрии.

В настоящей работе результаты [5] распространяются на случай решений, которые далее называются g -периодическими решениями или траекториями. Поясним, что имеется в виду. Пусть $g: M \rightarrow M$ — диффеоморфизм конфигурационного многообразия, g -периодическими траекториями мы называем решения лагранжевой системы, обладающие следующим свойством:

$$x_{n+i} = gx_i \quad \text{для любых } i \in \mathbb{N} \tag{0.0.1}$$

в дискретном случае и

$$\gamma(t + \tau) = g\gamma(t) \quad \text{для любых } t \in \mathbb{R} \quad (0.0.2)$$

в непрерывном случае. В ситуации, когда g образует циклическую группу, мы получаем периодическую траекторию. Однако g -периодическая траектория может и не быть периодической, например если M — двумерная плоскость, g — сдвиг на фиксированный вектор. Далее часто g — элемент непрерывной группы симметрии лагранжевой системы.

Итак, рассматриваются два вида лагранжевых систем:

- Дискретная лагранжева система (ДЛС) на многообразии M с лагранжианом $L(x, y): M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, который является g -инвариантным: $L(gx, gy) = L(x, y)$ и удовлетворяет некоторому условию невырожденности. Тогда g -периодическая траектория периода n — последовательность $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, удовлетворяющая условию (0.0.1), которая является критической точкой функционала действия на M^n :

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n L(x_i, x_{i+1}), \quad x_{i+n} = gx_i.$$

- Непрерывная лагранжева система (НЛС) с конфигурационным многообразием M и τ -периодическим лагранжианом $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$ на $TM \times \mathbb{R}$, который является g -инвариантным: $\mathcal{L}(g(x), G(x)\dot{x}, t) = \mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$, где $G(x)$ — дифференциал отображения g в точке x , и строго выпуклым по скорости. Тогда g -периодическая траектория γ , которая удовлетворяет условию (0.0.2), является критической точкой функционала действия

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^\tau \mathcal{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) dt,$$

на множестве g -периодических кривых $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ периода τ .

Обычно дискретный случай можно свести к непрерывному, но удобнее их рассматривать отдельно.

Приведем теперь формулу Хилла. В обоих случаях она имеет одинаковый вид. Пусть $\hat{G}^{-1}P$ — матрица монодромии отображения Пуанкаре g -периодической траектории, где P — оператор отображения за период, h — вторая вариация функционала действия на g -периодической траектории. Тогда

$$\det(\hat{G}^{-1}P - I) = \sigma(-1)^m \beta \det H, \quad (0.0.3)$$

где \hat{G} — матрица Якоби отображения $\hat{g}: M^2 \rightarrow M^2$, $\hat{g}(x, y) = (g(x), g(y))$, $x, y \in M$, $m = \dim M$, $\sigma = 1$ для ориентируемой траектории и $\sigma = -1$ для неориентируемой траектории (подробности см. в параграфе 1.1.1). Коэффициент β — положительный множитель. Для приложений важным является знак выражения $\sigma(-1)^m \det H$.

Формула (0.0.3) — частный случай при $\rho = 1$ формулы

$$\rho^{-m} \det(\hat{G}^{-1}P - \rho I) = \sigma(-1)^m \beta \det H_\rho, \quad \rho \in \mathbb{C}, \quad (0.0.4)$$

где H_ρ — матрица, совпадающая с матрицей Гессiana при $\rho = 1$. Оператор $\hat{G}^{-1}P$ является симплектическим, поэтому обе части (0.0.4) — многочлены степени m относительно $\rho + \rho^{-1}$. Следствием формулы Хилла является эквивалентность геометрической невырожденности g -периодической траектории (условие $\det H \neq 0$), и ее динамической невырожденности (условие, что 1 — не является собственным значением $\hat{G}^{-1}P$).

Нужно отметить, что очень похожие объекты в непрерывном случае изучались в статье [45]. В этой работе рассматриваются решения гамильтоновой системы

$$\dot{z}(t) = JH'(t, z(t)), \quad Sz(T) = z(0),$$

где $S: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ — ортогональный оператор. Приводится аналог формулы Хилла для этих решений, который очень похож на формулу Хилла, полученную в настоящей работе для g -периодических траекторий. Поскольку g сохраняет лагранжиан, то оператор $G: T_{\gamma(0)}M \rightarrow T_{\gamma(\tau)}M$ сохраняет скалярное произведение. Здесь G — дифференциал отображения g . Поэтому некоторые результаты непрерывной части настоящей работы можно считать лагранжевой версией результатов статьи [45]. Кроме того, в статье [45] отдельно рассматривается важный частный случай, когда $S^m = id$ и приводится формула Хилла в этом случае. Как и в настоящей работе указывается связь линейной устойчивости траектории с ее индексом Морса.

Основная область приложения формулы Хилла связана с устойчивостью g -периодической траектории. Из условия $\sigma(-1)^m \det H < 0$ следует, что многочлен $F(\rho) = \det(\hat{G}^{-1}P - \rho I)$ имеет корень, больший единицы. Отсюда следует неустойчивость g -периодической траектории. В невырожденной ситуации ($\det H \neq 0$) $\text{sign}(\det H) = (-1)^{\text{ind } H}$, где $\text{ind } H$ — индекс Морса g -периодической траектории. Поэтому если периодическая траектория невырожденна, то согласно (0.0.3) из неравенства $\sigma(-1)^{m+\text{ind } H} < 0$ следует экспоненциальная неустойчивость.

Часто встречается ситуация, когда g -периодическая траектория вырожденна. В непрерывном случае это имеет место, например, в автономном случае.

В этом случае уравнение в вариациях имеет G -периодическое решение $\dot{\gamma}(t)$: $\dot{\gamma}(t + \tau) = G(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)$. Отсюда следует, что матрица монодромии имеет единичный мультипликатор и формула Хилла вырождается в равенство $0 = 0$. Также траектория может вырождаться из-за наличия непрерывной группы симметрий, сохраняющей лагранжиан. Эта вырожденность порождает G -периодические решения и линейные интегралы уравнений в вариациях. Для вырожденной периодической траектории равенство (0.0.3) бесполезно, поскольку обе его части обращаются в нуль. С помощью процедуры понижения порядка можно получить невырожденный вариант формулы Хилла. В данной работе рассматривается случай, когда алгебра Ли V векторных полей симметрии коммутативна и размерность обобщенного собственного пространства единицы N оператора $\hat{G}^{-1}P$ равна $2k$, где $k = \dim V$.

Устранив все вырождения, мы получаем редуцированную формулу Хилла, которая выглядит аналогично, но соответствующие операторы монодромии и Гессе \tilde{P} и H^\perp действуют на меньших пространствах:

$$\det(\tilde{P} - I) = \sigma^\perp (-1)^{m-k} \beta^\perp \det H^\perp.$$

Здесь $\sigma^\perp \in \{1, -1\}$ и $\beta^\perp > 0$ — параметры редуцированной системы.

Для использования редуцированной формулы Хилла в приложениях нужно понять связь между σ и σ^\perp , а также между $\text{ind } H$ и $\text{ind } H^\perp$, индексами Морса гессианов в исходной и редуцированной системах. То есть зная σ и $\text{ind } H$, мы должны получить σ^\perp и $\text{ind } H^\perp$, которые определяют устойчивость траектории. В разделах 1.2.4 и 1.4.5 доказывается основной результат:

$$\sigma(-1)^{\text{ind } H} = \sigma^\perp (-1)^{\text{ind } H^\perp + \text{ind } b},$$

где квадратичная форма b на обобщенном собственном пространстве $N = \text{Ker}(\hat{G}^{-1}P - I)^2$ определена равенством $b(v) = \omega((\hat{G}^{-1}P - I)v, v)$.

В качестве примера рассматривается автономная лагранжева система, не имеющая других вырождений: $\dim V = 1$ и $k = 1$. Тогда g -периодическая траектория γ лежит в гладком семействе g -периодических траекторий, и

$$(-1)^{\text{ind } b} = -\text{sign} \left(\frac{dE}{d\tau} \right),$$

где E и τ — энергия и период вдоль этого семейства. Из редуцированной формулы Хилла следует, что если

$$\sigma(-1)^{m+\text{ind } H} \frac{dE}{d\tau} < 0, \quad (0.0.5)$$

то γ имеет вещественный мультипликатор $\rho > 1$. Знак величины $\frac{dE}{d\tau}$ можно вычислить, и в качестве примера это делается в задаче о движении точки в \mathbb{R}^m в однородном потенциальном поле сил (пример 1.4.6).

В данной работе рассматриваются как непрерывные, так и дискретные системы. Как уже отмечалось выше, оба случая могут быть сведены друг к другу, однако имеет смысл рассматривать их отдельно. В разделе 2 сначала дается определение и основные свойства дискретных лагранжевых систем (ДЛС). Затем доказывается формула Хилла для g -периодической траектории ДЛС (теорема 4). В разделе 1.1.4 в качестве приложения даются некоторые достаточные условия неустойчивости периодических траекторий. Особое внимание уделяется исследованию устойчивости бильярдных g -периодических траекторий произвольной размерности. Оказывается, что любая g -периодическая траектория \mathbf{x} периода n бильярда внутри гиперповерхности в \mathbb{R}^{m+1} такая, что $(-1)^{m+n+\text{ind}(\mathbf{x})} < 0$, экспоненциально неустойчива. В разделе 1.1.5 приводятся несколько примеров.

Далее начинается изучение вырожденного случая, когда матрица монодромии имеет единичное собственное значение. Приводится редуцированная формула Хилла и указана связь между индексами билинейных форм h^\perp и h , которая позволяет использовать редуцированную формулу Хилла для задачи орбитальной устойчивости. Для этого в разделе 1.2 мы рассматриваем ДЛС с симметриями. Многие результаты здесь аналогичны результатам работы [5], поэтому мы не приводим доказательства вспомогательных утверждений, ограничившись их формулировками.

Раздел 1.3 посвящен непрерывным лагранжевым системам. В этом случае пространство вариаций имеет бесконечную размерность, поэтому доказательство формулы Хилла несколько усложняется. Дается несколько вариантов этой формулы, аналогичных дискретному случаю. Указываются приложения к задаче об устойчивости g -периодических орбит в лагранжевых системах.

Основной результат этой части: пусть γ — невырожденная g -периодическая геодезическая на m -мерном многообразии и $\sigma(-1)^{m+\text{ind}\gamma} < 0$. Тогда она экспоненциально неустойчива (следствие 1.3.12). Далее, в разделе рассматривается случай вырождения орбиты. Приводится редуцированная формула Хилла. Как и в дискретном случае исследуется связь между индексом Морса g -периодической траектории исходной системы и соответствующего ему решения редуцированной системы и приводятся приложения этой формулы в задаче об устойчивости в лагранжевых системах с симметрией.

Наконец, в пункте 1.4.6 в качестве примера вырожденной лагранжевой системы рассматривается автономная система — движение точки в \mathbb{R}^m в поле силы

с однородным потенциалом степени k , где $k(k - 2) \neq 0$. Основным результатом здесь следующий: пусть g -периодическая траектория γ имеет ровно 2 единичных мультипликатора и $(-1)^{m+\text{ind } \gamma}(k - 2)/k < 0$. Тогда γ имеет вещественный мультипликатор $\rho > 1$.

Во **второй главе** изучается диффузия Арнольда в многомерных априори неустойчивых гамильтоновых системах. В статье [1] был указан пример гамильтоновой системы, близкой к интегрируемой

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \partial H / \partial y, & \dot{y} &= -\partial H / \partial x, & H &= H_0(y) + \varepsilon H_1(x, y, t, \varepsilon), & (0.0.6) \\ x &\in \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n, & y &\in \mathbb{R}^n, & t &\in \mathbb{T}, & 0 \leq \varepsilon \ll 1 \end{aligned}$$

с выпуклым по переменным действия y гамильтонианом и $n = 2$, у которой переменные y могут изменяться на величину порядка 1 вдоль траектории при как угодно малом $\varepsilon > 0$. Численные эксперименты показывают, что эволюция переменных y складывается из суммы малых колебаний и случайного блуждания. Поэтому Чириков предложил называть это явление диффузией Арнольда. Существенные продвижения в направлении формализации и доказательства этого эффекта содержатся в недавних препринтах [41] и [51].

Основным вопросом диффузии для систем вида (0.0.6) является типичность этого явления, и в каком смысле понимается эта типичность. Это зависит, в первую очередь, от функционального пространства, которому принадлежит H . Физически наиболее интересным являются вещественно-аналитические возмущения. Из теории Нехорошева [59] следует, что в этом случае для систем, удовлетворяющих так называемым условиям крутизны, средняя скорость дрейфа переменных действия вдоль траектории оценивается сверху экспоненциально малой величиной $\exp(-\alpha\varepsilon^{-\beta})$ для некоторых положительных α, β . Подробности см. также в [3]. Из-за присутствия таких экспоненциально малых эффектов проблема типичности диффузии Арнольда в вещественно-аналитическом случае очень сложна, и явные подходы к ее решению в настоящее время неизвестны. Гладкий случай существенно проще, хотя и здесь технические проблемы чрезвычайно трудны. В работе [50] (см. также [47]) Калошин и Жанг доказывают типичность диффузии в системах с 2.5 степенями свободы. В препринте [48] они анонсируют доказательство и приводят основные детали доказательства для систем с 3.5 степенями свободы. В работе [49] рассмотрен автономный случай $n \geq 4$, и обсуждаются методы, применимые в этой ситуации. В работе [30] анонсируется первое полное доказательство для случая $n \geq 4$.

Имеется ряд более простых ситуаций, в которых диффузия Арнольда присутствует без экспоненциально малых эффектов. Одной из таких задач является

диффузия в, так называемых, априори неустойчивых системах. Рассматриваются гамильтоновы системы, близкие к интегрируемым, с гамильтонианом вида

$$H(y, x, v, u, t, \varepsilon) = H_0(y, v, u) + \varepsilon H_1(y, x, v, u, t) + O(\varepsilon^2), \quad (0.0.7)$$

где динамика системы с невозмущенным гамильтонианом H_0 – комбинация системы с одной степенью свободы с гиперболическим положением равновесия и n -мерного ротатора. Здесь $(v, u) \in D \subset \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \bar{\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{T}^n$, $\varepsilon \geq 0$ – малый параметр, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ – область с компактным замыканием. Предполагается, что гамильтониан (0.0.7) 1-периодичен по времени, является $C^{\mathbf{r}}$ -гладким, где $\mathbf{r} \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ достаточно велико, а также выполнены следующие условия:

H₀₁. В невозмущенном гамильтониане векторная переменная y отделяется от u и v , т.е. $H_0(y, v, u) = F(y, f(v, u))$.

H₀₂. Функция f имеет невырожденную критическую точку $(v, u) = (0, 0)$ типа “седло”. Это единственная критическая точка на компактной компоненте связности множества

$$\gamma = \{(v, u) \in D : f(v, u) = f(0, 0)\}.$$

Иначе говоря, $(0, 0)$ – гиперболическое положение равновесия гамильтоновой системы $(D, dv \wedge du, f)$ с одной степенью свободы.

Далее, определим

$$E(y) = H_0(y, 0, 0), \quad \nu = \partial E / \partial y : \bar{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

H₀₃. Для любых $y \in \mathcal{D}$ ($n \times n$)-матрица $\partial^2 E / \partial y^2$ невырождена. Т.е. отображение $y \mapsto \nu(y)$ локально обратимо около любой точки $y_0 \in \mathcal{D}$.

Изучение диффузии в априори неустойчивых системах включает три аспекта, сформулированных в следующей гипотезе:

Гипотеза 1. [3].

A. Диффузия происходит при возмущениях, принадлежащих открытому плотному подмножеству $C^{\mathbf{r}}$ -гладких функций H_1 .

B. Эволюция переменных y возможна вдоль произвольной кривой, лежащей в области \mathcal{D} .

C. Средняя скорость диффузии имеет порядок $\varepsilon / |\log \varepsilon|$.

В случае $n = 1$ гипотеза 1 доказана в работе [67]. В случае $n > 1$ имеются лишь частные результаты.

Имеется несколько подходов к решению этих задач. Первый подход состоит в построении цепочек гиперболических торов с гетероклиническими связями [1, 26, 31, 37, 38], позже этот подход был дополнен идеями отображения рассеяния [32, 33, 34] и символической динамики [25]. Второй подход состоит в использовании вариационных методов: [17, 18, 19, 28, 29, 39, 46]. Отметим, что помимо [67], случаю $n = 1$ также посвящены работы [1, 17, 28, 26, 31, 37, 38] и т.д. В работе [29] изучается случай многомерных “гиперболических” переменных u, v . Отметим, также еще две работы. В препринте [41] уточняются формулы сепаратрисного отображения до членов второго порядка в случае, когда возмущение – тригонометрический полином по угловым переменным и времени. Этот результат используется в работе [51] для доказательства существования так называемых нормально гиперболических инвариантных расслоений для открытого множества тригонометрических возмущений. Далее изучается ограничение динамики на эти инвариантные слоения.

В данной работе продолжается деятельность, начатая в [67], [63], по исследованию диффузии Арнольда в априори неустойчивых системах. В этих работах “гиперболическим” переменным u, v отвечает одна степень свободы, размерность $n \geq 1$ считается произвольной в работах [65], [66], [63]. Для доказательства наличия диффузии используется комбинация методов многомерного сепаратрисного отображения [65, 61] и антиинтегрируемого предела [16, 23].

Согласно **Н₀2** сепаратрисы γ сдвоенные. Эти сепаратрисы гомеоморфны “восьмерке”: две петли, γ^\pm , выходящие из одной точки, $\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^-$. Фазовый поток системы порождает ориентацию на γ^\pm . Ориентация на D задается системой координат u, v . Без ограничения общности будем считать, что ориентация γ^\pm совпадает с ориентацией D , т.е. движение по сепаратрисе происходит против часовой стрелки.

Вектор частот $\bar{\nu} = (-\nu, 1)$ называется резонансным, если найдется ненулевой вектор $k = (\bar{k}, k_0) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, который мы тоже будем называть резонансным, такой что $\langle \bar{\nu}, k \rangle = 0$. Этому резонансу соответствует гиперповерхность $S_0^k = \{y \in \bar{\mathcal{D}} : \langle \bar{\nu}(y), k \rangle = 0\}$. Если при этом $|k|_\infty \leq C$, где C не зависит от ε , то этот резонанс называют C -сильным или просто сильным. Сильные резонансы разбивают область \mathcal{D} на конечное число компонент связности. Точки пересечения двух резонансных гиперповерхностей, соответствующих неколлинеарным целочисленным векторам k , мы будем называть кратными резонансами.

Опишем основной результат [63]. Для $\delta \geq 0$ и $k \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}$ определим окрестность резонанса в $\bar{\mathcal{D}}$

$$S_\delta^k = \{\eta \in \mathcal{D} : |\langle k, \bar{\nu}(\eta) \rangle| \leq \delta\}. \quad (0.0.8)$$

В работе [63] рассматривается множество $Q = \overline{\mathcal{D}} \setminus \cup_{0 < |k| \leq C_\diamond} S_\delta^k$ для

$$\delta = O(|\log^{-1} \varepsilon|) \quad (0.0.9)$$

и некоторой положительной постоянной C_\diamond , которая не зависит от ε , и доказывается следующая теорема

Теорема 1. [63] Для открытого плотного множества в пространстве $S^{\mathbf{r}}$ функций H_1 существует постоянная $C_\diamond = C_\diamond(H_0, H_1)$, не зависящая от ε , такая что выполнено следующее: найдутся $\varepsilon_0, c_d, c_v > 0$, такие что для любой гладкой кривой $\chi \subset Q$ с концами χ_0, χ_1 и длиной $|\chi|$, и для всех положительных $\varepsilon < \varepsilon_0$, возмущенная система имеет траекторию

$$(y(t), x(t), v(t), u(t)), \quad t \in [0, T] \quad (0.0.10)$$

со следующими свойствами:

- (i) $|y(0) - \chi_0| < c_d |\log \varepsilon|^\alpha \varepsilon^{1/4}$, $|y(T) - \chi_1| < c_d |\log \varepsilon|^\alpha \varepsilon^{1/4}$,
- (ii) кривая $\{y(t) : t \in [0, T]\}$ лежит в $c_d |\log \varepsilon|^\alpha \varepsilon^{1/4}$ -окрестности χ ,
- (iii) $c_v T \varepsilon / |\log \varepsilon| < |\chi|$.

Здесь α — положительное число, зависящее от степени гладкости гамильтониана H .

Таким образом, в работе [63] доказывается наличие диффузии Арнольда в многомерных априори неустойчивых гамильтоновых системах в области, не содержащей сильных резонансов, и дается оценка скорости диффузии. В настоящей работе изучается диффузия Арнольда для $n \geq 1$ в окрестности S_δ^k сильного резонанса при следующем упрощающем предположении.

H₁1. Будем считать, что H_1 — тригонометрический полином по переменным x . Полиномиальность по t не требуется, т.е. $H_1 \in \Lambda_N$, где

$$\Lambda_N = \left\{ H_1 : H_1(y, x, v, u, t) = \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathbb{Z}^n, |\bar{k}| \leq N, k_0 \in \mathbb{Z}}} H_1^{\bar{k}, k_0}(y, v, u) e^{2\pi i((\bar{k}, x) + k_0 t)} \right\}. \quad (0.0.11)$$

Заметим, что все резонансные целочисленные векторы (\bar{k}, k_0) , такие что, $|\bar{k}| \leq N$ соответствуют сильным резонансам. Действительно, число резонансных гиперповерхностей S_0^k , для которых $|\bar{k}|_\infty \leq N$, конечно, поскольку в любой точке множества $S_0^k \cup \mathcal{D}$ выполняется неравенство $|k_0| \leq Nn|\nu(\eta)|_\infty$. Следовательно, компонента k_0 ограничена в силу компактности $\overline{\mathcal{D}}$.

Целью настоящей работы является доказательство существования траекторий, пересекающих окрестность резонансной гиперповерхности и получение оценки времени этого пересечения. Главная трудность, отличающая построение диффузионной траектории в окрестности резонанса низкого порядка, состоит в том,

что вблизи резонанса, вообще говоря, не удастся построить монотонную в нужном направлении траекторию сепаратрисного отображения. Диффузия вблизи резонансов низкого порядка в случае $n = 1$ для любых типичных возмущений H_1 установлена в работе [67].

Итак, рассматривается неавтономная гамильтонова система, близкая к интегрируемой, с функцией Гамильтона вида (0.0.7), удовлетворяющая условиям **H₀1** – **H₀3**. Сформулируем теперь основной результат главы 2. Зафиксируем ненулевой целочисленный вектор $k = (\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n, k_0)$. Пусть $\chi \subset \mathcal{D}$ – кусочно-гладкая кривая с концами y_0, y_1 , лежащими на противоположных компонентах границы S_δ^k . Без ограничения общности можно считать, что

$$-\langle \bar{k}, \nu(y_0) \rangle + k_0 = \delta, \quad -\langle \bar{k}, \nu(y_1) \rangle + k_0 = -\delta. \quad (0.0.12)$$

Пусть, кроме того, χ трансверсально пересекает S_0^k , и точка их пересечения y_* не является кратным резонансом. Тогда через достаточно малую не зависящую от ε окрестность этой точки не проходит никакая другая резонансная гиперповерхность S_0^l , $l \nparallel k$. В рассматриваемой задаче множество кратных резонансов является объединением конечного числа многообразий в \mathcal{D} коразмерности не меньше 2.

Обозначим через $O(\chi, r)$ окрестность кривой χ радиуса r .

Теорема 2. Пусть функция H_0 удовлетворяет условиям **H₀1** – **H₀3**. Тогда для типичного возмущения H_1 вида (0.0.11) и некоторых констант $\varepsilon_0(H_0, H_1), c_v > 0$ для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ возмущенная система имеет траекторию

$$(y(t), x(t), v(t), u(t)), \quad t \in [0, T], \quad (0.0.13)$$

для которой выполнено:

- (i) $|y(0) - y_0| < \varepsilon^{1/(7n)}, |y(T) - y_1| < \varepsilon^{1/(7n)}$,
- (ii) проекция траектории (0.0.13) на \mathcal{D} лежит в $O(\chi, \varepsilon^{1/(8n)})$,
- (iii) $c_v T \varepsilon < 1$.

Иными словами, существует траектория, которая начинается вблизи одного конца кривой χ , пересекает резонансную гиперповерхность вблизи точки пересечения кривой и резонанса и приходит в малую окрестность другого конца кривой. Здесь и далее, если это не оговаривается отдельно, под окрестностями точек и множеств в \mathcal{D} подразумеваются окрестности в стандартной евклидовой метрике $\|\cdot\|_2$. Поясним, что понимается под типичностью возмущения.

Определение 0.0.1. Подмножество $\Xi \subset \Lambda_N$ будем называть типичным, если выполняются следующие два условия:

- 1) Ξ открыто и плотно в C^r -топологии,
- 2) Ξ образует множество полной меры при пересечении с типичным в первом смысле конечно-параметрическим семейством функций в Λ_N с числом параметров $j \geq 1$.

На самом деле, требования к возмущению H_1 сформулированы явно: см. **H₁1 – H₁4**.

В качестве следствия получаем следующий результат.

Теорема 3. Пусть $\chi \subset \mathcal{D}$ – гладкая кривая конечной длины $|\chi|$ с концами χ_0, χ_1 , трансверсально пересекающая резонансные гиперповерхности и не проходящая через кратные резонансы, и пусть функции H_0 и H_1 удовлетворяют условиям **H₀1 – H₀3**, **H₁1 – H₁4**. Тогда найдется константа $c_v > 0$, такая что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ возмущенная система имеет траекторию

$$(y(t), x(t), v(t), u(t)), \quad t \in [0, T], \quad (0.0.14)$$

для которой выполнено:

- (i) $|y(0) - \chi_0| < \varepsilon^{1/(7n)}$, $|y(T) - \chi_1| < \varepsilon^{1/(7n)}$,
- (ii) проекция траектории (0.0.13) на \mathcal{D} лежит в $O(\chi, \varepsilon^{1/(8n)})$,
- (iii) $c_v T \varepsilon / |\log \varepsilon| < |\chi|$.

Действительно, комбинируя результаты теоремы 1 в области Q и результаты теоремы 2 в окрестности сильных резонансов, можно построить диффузионную траекторию во всем пространстве действий.

Глава 1

Формула Хилла для g -периодических траекторий лагранжевых систем

1.1 Дискретный случай

1.1.1 Дискретные лагранжевы системы (ДЛС)

Пусть M — m -мерное гладкое многообразие и $L: M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая¹ функция на $M^2 = M \times M$. Далее используем обозначения:

$$\partial_1 L(x, y) = \frac{\partial L(x, y)}{\partial x}, \quad \partial_2 L(x, y) = \frac{\partial L(x, y)}{\partial y}, \quad B(x, y) = -\partial_1 \partial_2 L(x, y).$$

В локальных координатах

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial y_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial y_1 \partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y_m \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial y_m \partial x_m} \end{pmatrix}$$

Назовем L дискретным лагранжианом, если удовлетворяется следующее условие

Условие закручивания: $B(x, y)$ невырождена при всех $x, y \in M$.

Замечание 1.1.1. Для наших целей достаточно, чтобы условие невырожденности выполнялось в некоторой окрестности исследуемой траектории.

Любой дискретный лагранжиан L локально определяет отображение

$$T: M^2 \rightarrow M^2, \quad T(x, y) = (y, z),$$

¹ C^2 -гладкость достаточна.

где точка $z = z(x, y)$ определена равенством

$$\frac{\partial}{\partial y}(L(x, y) + L(y, z)) = \partial_2 L(x, y) + \partial_1 L(y, z) = 0. \quad (1.1.1)$$

По теореме о неявной функции условие закручивания позволяет локально однозначно выразить $z = z(x, y)$. В общей ситуации T — многозначное отображение с графиком

$$\Gamma = \{(x, y, y, z) \in M^2 \times M^2: \partial_2 L(x, y) + \partial_1 L(y, z) = 0\}.$$

Подробнее о системах с многозначным лагранжианом можно найти в работе [6].

Динамическая система, определяемая отображением T , называется дискретной лагранжевой системой (ДЛС) с конфигурационным пространством M и лагранжианом L .

Замечание 1.1.2. *Дискретный лагранжиан определен с точностью до умножения на ненулевую константу, до добавления константы и калибровочного преобразования:*

$$L(x, y) \mapsto L(x, y) + f(x) - f(y),$$

где $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция.

Важным примером ДЛС являются бильярды.

Определение 1.1.1. *Пусть M — гладкая выпуклая гиперповерхность в \mathbb{R}^{m+1} . Бильярдом называется ДЛС с лагранжианом $L(x, y) = |x - y|$.*

Можно показать, что в этом случае билинейная форма $B(x, y): T_x M \rightarrow T_y^* M$ действует по правилу:

$$\langle B(x, y)v, w \rangle = \frac{\langle v, w \rangle - \langle v, e \rangle \langle w, e \rangle}{|x - y|}, \quad e = \frac{x - y}{|x - y|}. \quad (1.1.2)$$

Утверждение 1.1.1. $\det B(x, y) < 0$.

Доказательство. Пусть M ориентирована как граница ограничиваемой ей области. $\Pi(x, y): T_x M \rightarrow T_y M: \Pi v = v + x - y, v \in T_x M$. Тогда

$$\langle B(x, y)v, \Pi(x, y)v \rangle = \frac{|v|^2 - \langle v, e \rangle^2}{|x - y|} > 0, \quad \text{для всех } v \in T_x M \setminus \{0\}.$$

$\Pi(x, y)$ меняет ориентацию, следовательно, $\det B(x, y) < 0$. □

Замечание 1.1.3. *В отличие от своего знака определитель матрицы билинейной формы $B(x, y)$ не определен однозначно.*

Подробнее о ДЛС см. работы [6] и [12].

1.1.2 g -периодические траектории.

Пусть $g: M \rightarrow M$ — диффеоморфизм конфигурационного многообразия на себя. Будем говорить, что g сохраняет лагранжиан L , если $L(gx, gy) = L(x, y)$, для любых $x, y \in M$. Будем также обозначать через $Dg(x)$ дифференциал g в точке x .

Определение 1.1.2. Последовательность точек $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \subset M$ назовем g -периодической с периодом n , если $x_{i+n} = gx_i$ для любых i .

Пусть $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ — g -периодическая последовательность. Определим заданный на классе g -периодических последовательностей \mathbf{x} на M функционал действия:

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} L(x_1, x_2) + L(x_2, x_3) + \dots + L(x_n, gx_1). \quad (1.1.3)$$

Замечание 1.1.4. Это определение корректно, т.к. $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ не зависит от выбора n последовательных точек траектории \mathbf{x} .

Доказательство. Проверим, что $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ не изменится при сдвиге участка x_1, \dots, x_n . Пусть

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}) = L(x_2, x_3) + L(x_3, x_4) + \dots + L(x_n, gx_1) + L(gx_1, gx_2).$$

Тогда $\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{B}(\mathbf{x}) = L(x_1, x_2) - L(gx_1, gx_2) = 0$, т.к. g сохраняет лагранжиан. \square

Утверждение 1.1.2. g -периодическая последовательность \mathbf{x} является траекторией ДЛС тогда и только тогда, когда \mathbf{x} — критическая точка функционала $\mathcal{A}(\mathbf{x})$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ — критическая точка функционала, то есть $\frac{\partial \mathcal{A}(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0$, для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial L(x_n, gx_1)}{\partial (gx_1)} Dg(x_1) &= 0, \\ \frac{\partial L(x_{i-1}, x_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial L(x_i, x_{i+1})}{\partial x_i} &= 0, \quad i = 2, \dots, n, \quad x_{n+1} = gx_1. \end{aligned}$$

Преобразовав первое выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial L(x_n, gx_1)}{\partial x_1} &= \frac{\partial L(gx_1, gx_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial L(x_n, gx_1)}{\partial x_1} \\ &= (\partial_2 L(x_n, x_{n+1}) + \partial_1 L(x_{n+1}, x_{n+2})) Dg(x_1) = 0, \end{aligned}$$

получим, что $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ — траектория ДЛС. □

Определим отображение

$$\hat{g}: M^2 \rightarrow M^2, \quad \hat{g}(a) \stackrel{\text{def}}{=} (gx_0, gx_1) \in M^2, \quad a = (x_0, x_1) \in M^2.$$

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in M^n$ — n последовательных точек траектории g -периодической траектории $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Определим $\mathbf{H} = \frac{\partial^2 \mathcal{A}(\mathbf{x})}{\partial x^2}$ — гессиан действия в точке $\mathbf{x} \in M^n$. Обозначим дифференциалы отображений $T: M^2 \rightarrow M^2$ и $T^n: M^2 \rightarrow M^2$ через

$$P_i = DT(x_{i-1}, x_i), \quad x_0 = g^{-1}x_n, \\ P = DT^n(a): T_a M^2 \rightarrow T_{\hat{g}a} M^2.$$

Явный вид гессиана действия:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} A_1 & -B_1^* & 0 & \dots & -G^*(x_1)B_n \\ -B_1 & A_2 & -B_2^* & \dots & 0 \\ 0 & -B_2 & A_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -B_n^*G(x_1) & 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}$$

Здесь A_i, B_i — матрицы $m \times m$

$$A_i = \frac{\partial^2 \mathcal{A}(\mathbf{x})}{\partial x_i^2} = \partial_2 \partial_2 L(x_{i-1}, x_i) + \partial_1 \partial_1 L(x_i, x_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$B_i = B(x_i, x_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n, \quad x_{n+1} = gx_1,$$

G — матрица Якоби отображения g .

По теореме о дифференцировании сложной функции

$$\frac{\partial^2 L(x, gy)}{\partial x \partial y} = G^*(y) \partial_1 \partial_2 L(x, gy).$$

Легко также проверить, что на g -периодической траектории

$$\frac{\partial^2 L(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 L(x_n, gx_1)}{\partial x_1^2} = G(x_1)^* (\partial_1 \partial_1 L(gx_1, gx_2)) + \partial_2 \partial_2 L(x_n, gx_1) G(x_1).$$

Определение 1.1.3. Пусть $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $u_i \in T_{x_i} M$, $i = 1, \dots, n$, $u_{n+i} = Gu_i$. Назовем систему $\mathbf{H}\mathbf{u} = 0$ системой уравнений в вариациях.

Утверждение 1.1.3. Вектор \mathbf{u} удовлетворяет системе уравнений в вариациях тогда и только тогда, когда $P_i(u_{i-1}, u_i) = (u_i, u_{i+1})$,

$$u_0 \in T_{x_0} M, \quad u_{n+1} \in T_{x_{n+1}} M, \quad u_0 = (G(x_0))^{-1} u_n, \quad u_{n+1} = G(x_1) u_1.$$

Доказательство. Вычислим явно $A_1, A_i, i = 2, \dots, n, B_i$.

$$\begin{aligned} A_1 &= (G(x_1))^*(\partial_1 \partial_1 L(gx_1, gx_2) + \partial_2 \partial_2 L(x_n, gx_1))G(x_1), \\ A_i &= \partial_1 \partial_1 L(x_{i-1}, x_i) + \partial_2 \partial_2 L(x_i, x_{i+1}), \quad i = 2, \dots, n, \\ B_i &= B(x_i, x_{i+1}) = -\partial_1 \partial_2 L(x_i, x_{i+1}). \end{aligned}$$

Запишем условие $\mathbf{H}u = 0$:

$$\begin{aligned} A_1 u_1 - B_1^* u_2 - G^*(x_1) B_n u_n &= 0, \quad i = 1, \\ -B_{i-1} u_{i-1} + A_i u_i - B_{i+1}^* u_{i+1} &= 0, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ -B_n^* G(x_1) u_1 - B_{n-1} u_{n-1} + A_n u_n &= 0, \quad i = n. \end{aligned}$$

Последнее равенство запишем в виде:

$$-B^* u_{n+1} - B_{n-1} u_{n-1} + A_n u_n = 0, \quad u_{n+1} = G(x_1) u_1.$$

Нужно рассмотреть три отдельных случая: $i = 1, 2 \leq i \leq n-1$ и $i = n$. Для примера рассмотрим случай $i = 1$. В остальных рассуждения аналогичны.

$$P_1 = DT(x_0, x_1), \quad T(x_0, x_1) = (x_1, x_2).$$

Тогда матрица P_1 имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_0} & \frac{\partial x_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_0} & \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_0} & \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}.$$

Найдем $\frac{\partial x_2}{\partial x_0}$ и $\frac{\partial x_2}{\partial x_1}$ из уравнения

$$\frac{\partial L(x_0, x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial L(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0.$$

Вспомним, что если $F(x_0, x_1, x_2) = 0$, то

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_0} = -\frac{\partial F^{-1}}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial F^{-1}}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial x_1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial L(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \partial_2 \partial_1 L(x_1, x_2) = -B_1^*, \\ \frac{\partial F}{\partial x_0} &= \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial L(gx_0, gx_1)}{\partial x_1} = -G^*(x_1) B_n G(x_0), \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial L(x_0, x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial L(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial L(gx_0, gx_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial L(x_0, x_1)}{\partial x_1} = A_1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} P_1(u_0, u_1) &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -(B_1^*)^{-1}G^*(x_1)B_nG(x_0) & -(B_1^*)^{-1}A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} u_1 \\ (B_1^*)^{-1}(-G^*(x_1)B_nG(x_0)u_0 + A_1u_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ (B_1^*)^{-1}(-G^*(x_1)B_nu_n + A_1u_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$u_2 = (B_1^*)^{-1}(-G^*(x_1)B_nu_n + A_1u_1),$$

а это означает, что $P_1(u_0, u_1) = (u_1, u_2)$. \square

Следствие 1.1.1. Ну = 0 тогда и только тогда, когда $P(u_1, u_2) = \hat{G}(u_1, u_2)$, где $\hat{G}(u_1, u_2) \stackrel{\text{def}}{=} (Gu_1, Gu_2)$.

Доказательство.

$$P \stackrel{\text{def}}{=} DT^n(a) \implies P(a) = DT(x_0, x_1) \circ DT(x_1, x_2) \circ \dots \circ DT(x_{n-1}, x_n)$$

Поэтому это утверждение вытекает из предыдущей леммы. \square

1.1.3 g -квазипериодические последовательности

С этого момента через $T_{x_i}M$ будем обозначать его комплексификацию. Определим теперь обобщение гессиана \mathbf{H} .

Определение 1.1.4. Пусть $S^1 = \{\rho \in \mathbb{C} : |\rho| = 1\}$. Последовательность $u_i \in T_{x_i}M$ называется g -квазипериодической, если $u_{n+1} = \rho G(x_1)u_i$, где $\rho \in S^1$.

Пусть $(u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ — g -квазипериодическая векторная последовательность, удовлетворяющая условию $P_i(u_{i-1}, u_i) = (u_i, u_{i+1})$. Тогда \mathbf{u} удовлетворяет следующей системе уравнений в вариациях:

$$\begin{cases} A_1u_1 - B_1^*u_2 - \rho^{-1}G^*(x_1)B_nu_n = 0, \\ -B_{i-1}u_{i-1} + A_iu_i - B_i^*u_{i+1} = 0, & i = 2, \dots, n-1, \\ -\rho B_n^*u_{n+1} - B_{n-1}u_{n-1} + A_nu_n = 0. \end{cases}$$

Этой системе соответствует ρ -гессиан \mathbf{H}_ρ , который имеет вид:

$$\mathbf{H}_\rho = \begin{pmatrix} A_1 & -B_1^* & 0 & \dots & -\rho^{-1}G^*(x_1)B_n \\ -B_1 & A_2 & -B_2^* & \dots & 0 \\ 0 & -B_2 & A_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\rho B_n^*G(x_1) & 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}.$$

Утверждение 1.1.4. Пусть $\mathbf{H}_\rho \mathbf{u} = 0$. Тогда $P_i(u_{i-1}, u_i) = (u_i, u_{i+1})$, $i = 1, \dots, n$.

Доказательство аналогично доказательству утверждения 1.1.3.

Следствие 1.1.2. Если $\mathbf{H}_\rho \mathbf{u} = 0$, то $P(u_1, u_2) = (\rho G u_1, \rho G u_2) = \rho \hat{G}(u_1, u_2)$.

Теорема 4. (формула Хилла) Для любого $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\rho^{-m} \det \left(\hat{G}^{-1}(a)P - \rho I \right) = \frac{(-1)^m \det \mathbf{H}_\rho}{\det G^2(x_1) \prod_{i=1}^n \det B_i}. \quad (1.1.4)$$

Доказательство. Обе части равенства (1.1.4) — многочлены степени m относительно $\rho + \rho^{-1}$. Пусть

$$E(\rho) = \det \left(\hat{G}^{-1}(a)P - \rho I \right) \det G^2(x_1),$$

$$F(\rho) = (-1)^m \rho^m \frac{\det \mathbf{H}_\rho}{\prod_{i=1}^n \det B_i}.$$

Это многочлены степени $2m$ относительно ρ . Из следствия (1.1.2) вытекает, что $\det \left(\hat{G}^{-1}(a)P - \rho I \right) = 0$ эквивалентно $\det \mathbf{H}_\rho = 0$, откуда следует, что они имеют одинаковые корни. Покажем, что старшие члены $E(\rho)$ и $F(\rho)$ совпадают.

Коэффициент при старшей степени $E(\rho)$ равен $\det G^2(x_1)$, так как матрица P имеет размер $2m \times 2m$. В координатах \mathbf{H}_ρ — матрица $mn \times mn$, совпадающая с \mathbf{H} за двумя исключениями: в правом верхнем $m \times m$ блоке $-G^*(x_1)B_n$ заменена на $-\rho G^*(x_1)B_n$ и в левом нижнем блоке размера $m \times m$ матрица $-B^*G(x_1)$ заменена на $-\rho B^*G(x_1)$. Следовательно, коэффициент при старшей степени многочлена $F(\rho)$ равен

$$(-1)^m (-1)^{m^2 n} (-1)^{m(n-1)} \prod_{i=1}^n \det B_i \det G^2(x_1) \left(\prod_{i=1}^n \det B_i \right)^{-1}$$

$$= (-1)^{mn(m+1)} \det G^2(x_1) = \det G^2(x_1).$$

Итак, старшие члены многочленов $E(\rho)$ и $F(\rho)$ совпадают. Таким образом, многочлены $E(\rho)$ и $F(\rho)$ имеют одинаковую степень, корни и старшие члены и, значит, совпадают. \square

Следствие 1.1.3. При $\rho = 1$ имеем

$$\det \left(\hat{G}^{-1}(a)P - I \right) \det G^2(x_1) = \sigma(\mathbf{x}) (-1)^m \beta \det \mathbf{H}, \quad (1.1.5)$$

$$\sigma(\mathbf{x}) = \text{sign} \prod_{i=1}^n \det B_i, \quad \beta = \left| \prod_{i=1}^n \det B_i \right|^{-1}.$$

1.1.4 Некоторые приложения формулы Хилла

Обозначим через $\text{ind } \mathbf{H}$ — индекс Морса \mathcal{A} в критической точке \mathbf{x} , другими словами, размерность отрицательного подпространства квадратичной формы \mathbf{H} .

Следствие 1.1.4. *Из равенства (1.1.5) вытекает, что*

$$\det \left(\hat{G}^{-1}(a)P - I \right) = 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \det \mathbf{H} = 0.$$

Таким образом, если определители не были равны нулю, то по непрерывности при малой деформации орбиты они оба останутся отличными от нуля. Это означает, что при малой деформации T невырожденная g -периодическая траектория не исчезнет и $\text{ind } \mathbf{H}$ останется неизменным.

Предположим теперь, что обе части формулы (1.1.4) не равны нулю.

Следствие 1.1.5. *Из равенства (1.1.5) вытекает, что*

$$\sigma(\mathbf{x})(-1)^{m+\text{ind } \mathbf{H}} \det \left(\hat{G}^{-1}(a)P - I \right) > 0.$$

Определение 1.1.5. *Будем говорить, что g -периодическая траектория линейно устойчива, если неподвижная точка отображения $\hat{g}^{-1} \circ T^n: M^2 \rightarrow M^2$ устойчива в линейном приближении.*

Определение 1.1.6. *Матрицу $G^{-1}(a)P$ назовем матрицей монодромии, а ее собственные числа — мультипликаторами g -периодической траектории.*

Утверждение 1.1.5. *Если $\det \left(\hat{G}^{-1}(a)P - I \right) < 0$, то существует вещественный мультипликатор $\rho > 1$.*

Доказательство. Рассмотрим характеристический многочлен $F(\rho) = \det \left(\hat{G}^{-1}(a) - \rho I \right)$. Так как $F(\rho)$ — непрерывная функция и P — четномерная матрица, имеем, $F(+\infty) = +\infty$, $F(1) < 0$. Следовательно, существует $\rho^* \in (1, +\infty)$, для которого $F(\rho^*) = 0$. \square

Следствие 1.1.6. *В случае $\sigma(\mathbf{x})(-1)^{m+\text{ind } \mathbf{H}} < 0$ \mathbf{x} — неустойчивая траектория: существует вещественный мультипликатор $\rho > 1$.*

Следствие 1.1.7. *Предположим, что $\sigma(\mathbf{x})(-1)^{m+n} < 0$ и \mathbf{x} — невырожденный локальный максимум действия \mathcal{A} . Тогда \mathbf{x} динамически неустойчива.*

Следствие 1.1.8. *Предположим, что $\sigma(\mathbf{x})(-1)^m < 0$ и \mathbf{x} — невырожденный локальный минимум действия \mathcal{A} . Тогда \mathbf{x} динамически неустойчива: существует вещественный мультипликатор $\rho > 1$.*

Из утверждения 1.1.1 для бильярдной траектории следует, что $\sigma(\mathbf{x}) = (-1)^n$.

Следствие 1.1.9. Пусть имеется g -периодическая бильярдная траектория периода n , для которой $(-1)^{m+n+\text{ind } \mathbf{H}} < 0$. Тогда бильярдная траектория неустойчива.

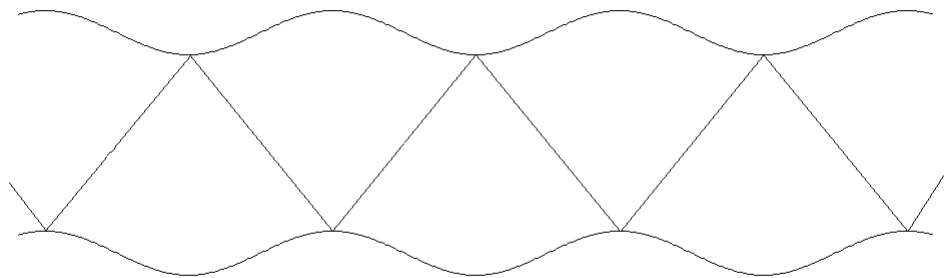
1.1.5 Примеры

Продemonстрируем применение формулы Хилла для g -периодических решений на примерах.

Пример 1.1.1.

Рассмотрим цилиндрическую поверхность с зеркальной внутренней поверхностью, которая имеет периодическую структуру вдоль оси. И в эту трубу попадает луч света, который отражается внутри нее по закону угол падения равен углу отражения. Можно показать, что это условие эквивалентно тому, что последовательность точек отражения является траекторией дискретной лагранжевой системы с лагранжианом $L(x, y) = |x - y|$. В результате получаем бильярд. Пусть точки отражения луча образуют g -периодическую последовательность периода n . Используя формулу Хилла в ряде случаев можно доказать неустойчивость такой бильярдной траектории. В качестве модельного примера рассмотрим плоский бильярд в полосе с периодической структурой, граница которой задается уравнениями в декартовой системе координат (x, y) :

$$u_1 = h - \cos x_1, \quad u_2 = -h - \cos x_2, \quad h > 1.$$



К примеру.

Исследуем устойчивость g -периодической траектории

$\dots, (-2\pi; h-1), (-\pi; 1-h), (0; h-1), (\pi; 1-h), (2\pi; h-1), \dots$

Здесь g – сдвиг вдоль оси x на π , $n = 2$. В этом случае матрица Гессе примет вид:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{(2h-2)^2+(2h-2)^3}{(\pi^2+(2h-2)^2)^{3/2}} & -\frac{(2h-2)^2}{(\pi^2+(2h-2)^2)^{3/2}} \\ -\frac{(2h-2)^2}{(\pi^2+(2h-2)^2)^{3/2}} & \frac{(2h-2)^2+(2h-2)^3}{(\pi^2+(2h-2)^2)^{3/2}} \end{pmatrix}.$$

Так как $h > 1$, то $\text{ind } \mathbf{H} = 0$. Тогда $(-1)^{m+n+\text{ind } \mathbf{H}} = (-1)^{1+2} < 0$, отсюда вытекает неустойчивость траектории.

Пример 1.1.2.

Формула Хилла для g -периодических траекторий может быть полезна и для исследования устойчивости периодических траекторий, когда формула Хилла для периодических траекторий не может помочь. Такое может быть, например, если бильярдная траектория имеет симметрию. Дело в том, период и индекс периодической и соответствующей g -периодической траекторий отличаются. Обозначим через $\text{ind } \mathbf{H}_{\text{пер}}$ индекс Морса периодической траектории, $\text{ind } \mathbf{H}_g$ – индекс Морса g -периодической траектории, где g – симметрия бильярдной траектории, n – период периодической траектории, k – g -периодической. Тогда возможна ситуация, когда $(-1)^{m+n+\text{ind } \mathbf{H}_{\text{пер}}} = 1$, $(-1)^{m+k+\text{ind } \mathbf{H}_g} = -1$.

1.2 Вырождение в формуле Хилла (дискретный случай)

Формула Хилла дает нетривиальную информацию в случае, когда g -периодическая траектория невырождена. В данном разделе мы рассмотрим вырожденный случай, приведем редуцированную версию формулы Хилла и сделаем ее применимой к решению задачи устойчивости.

Результаты этой главы аналогичны результатам соответствующей главы работы [5], поэтому мы не будем приводить доказательства вспомогательных утверждений, ограничившись их формулировками.

1.2.1 Симплектическая редукция для отображения Пуанкаре

Предположим, что g -периодическая траектория вырождена. Тогда линейное отображение Пуанкаре $\hat{G}^{-1}P: W \rightarrow W$ имеет единичное собственное значение: существует $w \neq 0$ такой, что $Pw = \hat{G}w$. Так как $\hat{G}^{-1}P$ симплектическое, $\omega(w, \hat{G}^{-1}Pu) = \omega(w, u)$, так что $K_w(u) = \omega(w, u)$ – линейный первый

интеграл $\hat{G}^{-1}P$. Тогда можно редуцировать $\hat{G}^{-1}P$ к линейному симплектическому отображению $\tilde{P}: \tilde{W} \rightarrow \tilde{W}$ меньшей размерности. Предположим, что имеется несколько собственных векторов, соответствующих единичному собственному значению. Пусть $V \subset \{w \in W: \hat{G}^{-1}Pw = w\}$. Тогда $\hat{G}^{-1}P$ имеет первый интеграл $K: W \rightarrow V^*$: при $w \in V$, $\langle K(u), w \rangle = K_w(u)$. Далее будем предполагать, что V изотропно: $\omega|_V = 0$. Тогда $V \subset K^{-1}(0)$. Положим $\tilde{W} = K^{-1}(0)/V$.

Предложение 1.2.1. *Оператор $\hat{G}^{-1}P$ порождает редуцированный симплектический оператор $\tilde{P}: \tilde{W} \rightarrow \tilde{W}$ такой, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\hat{G}^{-1}P} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{W} & \xrightarrow{\tilde{P}} & \tilde{W} \end{array}$$

коммутативна. Более того,

$$\det(\hat{G}^{-1}P - \rho I_W) = (1 - \rho)^{2k} \det(\tilde{P} - \rho I_{\tilde{W}}), \quad k = \dim V.$$

1.2.2 Понижение порядка по Раусу для линейных дискретных лагранжевых систем

Теперь мы переведем предложение 1.2.1 на язык системы уравнений в вариациях, т.е. линейной лагранжевой системы (E, Λ) . Каждому собственному вектору w отображения Пуанкаре $\hat{G}^{-1}P$ соответствует ненулевое G -периодическое решение $\mathbf{w} = (w_i)$ уравнений в вариациях.

Утверждение 1.2.1. *Этому решению \mathbf{w} соответствует линейный первый интеграл*

$$I_j(u_j, u_{j+1}) = \langle B_j w_j, u_{j+1} \rangle - \langle B_j u_j, w_{j+1} \rangle.$$

В самом деле, если $\mathbf{u} = (u_j)$ — решение системы $\mathbf{H}\mathbf{u} = 0$, то

$$\begin{aligned} 0 &= \langle A_1 w_1 - B_1 w_2 - G^*(x_1) B_n w_0, u_1 \rangle - \langle A_1 u_1 - B_1^* u_2 - B_n^* G(x_1) u_0, w_1 \rangle \\ &= I_1(u_1, u_2) - I_0(u_0, u_1) \\ 0 &= \langle A_j w_j - B_j^* w_{j+1} - B_{j-1} w_{j-1}, u_j \rangle - \langle A_j u_j - B_j^* u_{j+1} - B_{j-1} u_{j-1}, w_j \rangle \\ &= I_j(u_j, u_{j+1}) - I_{j-1}(u_{j-1}, u_j), \quad j = 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I_{j-1}(u_{j-1}, u_j) = I_j(u_j, u_{j+1}). \quad (1.2.1)$$

На самом деле, $I_j(u_j, u_{j+1}) = K_w(u)$, где K_w — интеграл отображения Пуанкаре, а $u \in W$ соответствует траектории (u_j) .

Теперь предположим, что имеется несколько собственных векторов и пусть $V \subset \text{Ker}(\hat{G}^{-1}P - I)$ — изотропное подпространство. Обозначим $\Gamma \subset X$ пространство G -периодических траекторий, соответствующее V . Пусть $w^\alpha \in V$, $\alpha = 1, \dots, k$ — базис в V . Тогда соответствующие G -периодические траектории $\mathbf{w}^\alpha = (w_i^\alpha)$ образуют базис в Γ . Пусть

$$I_j^\alpha(u_j, u_{j+1}) = \langle B_j w_j^\alpha, u_{j+1} \rangle - \langle B_j u_j, w_{j+1}^\alpha \rangle$$

— соответствующие интегралы уравнений в вариациях. Так как V изотропно, интегралы коммутируют:

$$I_j^\alpha(w_j^\beta, w_{j+1}^\beta) = \langle B_j w_j^\alpha, w_{j+1}^\beta \rangle - \langle B_j w_j^\beta, w_{j+1}^\alpha \rangle = \omega(w^\alpha, w^\beta) = 0. \quad (1.2.2)$$

Обозначим $I_j = (I_j^1, \dots, I_j^k)$.

Далее нам понадобится несколько условий невырожденности.

Условие А. Симметричная матрица

$$K_i = (k_i^{\alpha\beta}), \quad k_i^{\alpha\beta} = \langle B_i w_i^\alpha, w_{i+1}^\beta \rangle,$$

невырождена при всех i . Обозначим $(k_{\alpha\beta i}) = (k_i^{\alpha\beta})^{-1} = K_i^{-1}$.

Условие В. Матрица

$$\bar{K} = \sum_{i=1}^n K_i^{-1} = (\bar{k}_{\alpha\beta}), \quad \bar{k}_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n k_{\alpha\beta i} \quad (1.2.3)$$

невырождена.

Обозначение 1.2.1.

$$F_i = \{w_i : \mathbf{w} \in \Gamma\} = \text{span}(w_i^1, \dots, w_i^k) \subset E_i,$$

$$\tilde{G}_i u_i = G_i u_i - k_{\alpha\beta i} \langle B_i w_{i-1}^\alpha, u_i \rangle w_i^\beta, \quad u_i \in E_i,$$

$$\hat{\tilde{G}}(u_i) = (\tilde{G}_i u_i, \tilde{G}_i u_{i+1}).$$

Редуцированной линейной лагранжевой системе $(\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$ с $\tilde{E}_i = E_i/F_i$, полученной в результате понижения порядка по Раусу из системы (E, Λ) , соответствует отображение за период $\hat{\tilde{G}}\tilde{P}$. Из условия А следует, что $\dim F_i = k$ и поэтому редуцированное конфигурационное пространство $\tilde{E}_i = E_i/F_i$ отождествляется с

$$E_i^\perp = \{u \in E_i : \langle B_{i-1} w_{i-1}^\alpha, u \rangle = 0, \alpha = 1, \dots, k\}.$$

с помощью проекции $\Pi_i : E_i \rightarrow E_i^\perp$:

$$\Pi_i u = u_i - k_{\alpha\beta i} \langle B_{i-1} w_{i-1}^\alpha, u \rangle w_i^\beta. \quad (1.2.4)$$

Представим любой вектор $u_i \in E_i$ как

$$u_i = v_i + \lambda_{\beta i} w_i^\beta, \quad v_i = \Pi_i u_i \in E_i^\perp, \quad \lambda_{\beta i} = k_{\alpha\beta i-1} \langle B_{i-1} w_{i-1}^\alpha, u \rangle. \quad (1.2.5)$$

Лемма 1.2.1. Пусть \mathbf{u}, \mathbf{v} таковы, что $u_i - v_i \in F_i$:

$$u_i = v_i + \lambda_{\beta i} w_i^\beta.$$

Тогда $I_i^\alpha(u_i, u_{i+1}) = c^\alpha$ при всех $\alpha = 1, \dots, k$ и всех i тогда и только тогда, когда

$$\Delta \lambda_{\alpha i} = \lambda_{\alpha i+1} - \lambda_{\alpha i} = k_{\alpha\beta i} (c^\beta - I_i^\beta(v_i, v_{i+1})). \quad (1.2.6)$$

Равенство (1.2.6) следует из

$$c^\alpha = I_i^\alpha(u_i, u_{i+1}) = I_i^\alpha(v_i, v_{i+1}) + k_i^{\alpha\beta} \Delta \lambda_{\beta i}.$$

□

Сформулируем теперь теорему Рауса для ДЛС:

Теорема 5. Пусть $\mathbf{u} = (u_i)$, $u_i \in E_i$, — траектория системы (E, Λ) такая, что $I_i(u_i, u_{i+1}) = 0$. Тогда $\mathbf{v} = (v_i)$, $v_i = \Pi_i u_i \in E_i^\perp$ — траектория линейной лагранжевой системы (E^\perp, Λ^\perp) с лагранжианом

$$\Lambda_i^\perp(v_i, v_{i+1}) = \frac{1}{2} \langle A_i v_i, v_i \rangle - \langle B_i v_i, v_{i+1} \rangle - \frac{1}{2} \langle C_i v_i, v_i \rangle,$$

где

$$\langle C_i v_i, v_i \rangle = k_{\alpha\beta i} \langle B_i v_i, w_{i+1}^\alpha \rangle \langle B_i v_i, w_{i+1}^\beta \rangle.$$

Обратно, если \mathbf{v} — траектория системы (E^\perp, Λ^\perp) , то существует траектория \mathbf{u} системы (E, Λ) , определенная mod Γ , такая, что $I_i(u_i, u_{i+1}) = 0$ и $\Pi \mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Определение 1.2.1. Редуцированной системе (E^\perp, Λ^\perp) соответствует квадратичный функционал действия

$$h^\perp(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \sum_{i=1}^n k_{\alpha\beta i} \langle B_i v_i, w_{i+1}^\alpha \rangle \langle B_i v_i, w_{i+1}^\beta \rangle, \quad \mathbf{v} \in E^\perp$$

В случае \tilde{G} -периодической траектории \mathbf{v} периода n :

$$h^\perp(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \langle A_i^\perp v_i - B_i^{\perp*} v_{i+1} - B_{i-1}^\perp v_{i-1}, v_i \rangle, \quad (1.2.7)$$

где

$$\begin{aligned} B_0^\perp &= \tilde{G}^*(x_1) B_n^\perp, & v_{n+1} &= \tilde{G} v_1, & v_0 &= \tilde{G}^{-1} v_n, \\ A_i^\perp &= R_i(A_i - C_i), & B_i^\perp &= R_{i+1} B_i, \end{aligned}$$

и $R_i : E_i^* \rightarrow (E_i^\perp)^*$ — отображение ограничения. Редуцированная система уравнений в вариациях имеет вид

$$A_i^\perp v_i - B_i^{\perp*} v_{i+1} - B_{i-1}^\perp v_{i-1} = 0, \quad B_0^\perp = \tilde{G}^*(x_1) B_n^\perp.$$

Билинейной форме h^\perp соответствует линейный оператор $\mathbf{H}^\perp : X^\perp \rightarrow X^{\perp*}$, который мы назовем редуцированным гессианом. Положим также

$$\beta^\perp = \left| \prod_{i=1}^n \det B_i^\perp \right|^{-1}, \quad \sigma^\perp = \text{sign} \left(\prod_{i=1}^n \det B_i^\perp \right)^{-1}.$$

Тогда теорема Хилла, примененная к редуцированной системе, дает

Следствие 1.2.1.

$$\det(\tilde{P} - I) = \sigma^\perp (-1)^{m-k} \beta^\perp \det \mathbf{H}^\perp. \quad (1.2.8)$$

Чтобы использовать формулу (1.2.8) в задачах устойчивости, нам надо знать σ^\perp и индекс Морса формы h^\perp . Однако соотношение между индексами Морса h и h^\perp неочевидно. Причина состоит в том, что траектория \mathbf{u} с $I_i(u_i, u_{i+1}) = 0$, которой соответствует \tilde{G} -периодическая последовательность $\mathbf{v} \in X^\perp$, вообще говоря, не обязательно является G -периодической последовательностью. В следующих разделах приводится связь между индексами h и h^\perp .

Лемма 1.2.2.

$$\det B^\perp = \frac{\det B_i}{\det K_i}$$

Доказательство можно найти в работе [5].

Следствие 1.2.2.

$$\sigma^\perp = (-1)^{\sum \text{ind } B_i^\perp} = \sigma (-1)^{\sum \text{ind } K_i}. \quad (1.2.9)$$

1.2.3 Вырожденность h

Пусть $\Gamma \subset X$ обозначает пространство G -периодических траекторий, соответствующее пространству $V \subset \text{Ker}(\hat{G}^{-1}P - I)$. Оно является линейной оболочкой векторов $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \in X$. Так как $\mathbf{H}\mathbf{w} = 0$ при $\mathbf{w} \in \Gamma$, то билинейная форма $h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \langle \mathbf{H}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ вырождена и определяет билинейную форму \hat{h} на $\hat{X} = X/\Gamma$. Чтобы сравнить h с h^\perp , ограничим h на множество уровня интегралов I . Пусть

$$Y = \{\mathbf{u} \in X : I_1(u_1, u_2) = \dots = I_n(u_n, Gu_1)\}, \quad (1.2.10)$$

$$Z = \{\mathbf{v} \in X : v_i \in F_i\} = \{\mathbf{v} \in X : v_i = \lambda_{\alpha i} w_i^\alpha\}. \quad (1.2.11)$$

Утверждение 1.2.2. *Пространства Y и Z h -ортогональны, т.е. $h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ при всех $\mathbf{u} \in Y$ и $\mathbf{v} \in Z$. Более того, Y является h -ортогональным дополнением к Z :*

$$Y = \{\mathbf{u} \in X : h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \text{ для всех } \mathbf{v} \in Z\}.$$

Ограничение h на Z имеет вид

$$h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n k_i^{\alpha\beta} \Delta\lambda_{\alpha i} \Delta\lambda_{\beta i} = \sum_{i=1}^n \langle K_i \Delta\lambda_i, \Delta\lambda_i \rangle, \quad v_i = \lambda_{\alpha i} w_i^\alpha.$$

Доказательство см. [5].

Мы получаем квадратичную форму на Z :

$$h|_Z(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{H}_Z \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \sum_i \langle K_i \Delta\lambda_i, \Delta\lambda_i \rangle = \langle \mathbf{K}\lambda, \lambda \rangle,$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}^k$, $\mathbf{H}_Z : Z \rightarrow Z^*$ и $\mathbf{K} : \mathbb{R}^{kn} \rightarrow \mathbb{R}^{kn}$:

$$(\mathbf{K}\lambda)_i = K_{i-1} \Delta\lambda_{i-1} - K_i \Delta\lambda_i.$$

Имеем:

$$\text{Ker } \mathbf{K} = \{\lambda \in \mathbb{R}^{kn} : K_1 \Delta\lambda_1 = \dots = K_n \Delta\lambda_n\}.$$

Следовательно $\Delta\lambda_i = K_i^{-1}c$. Из равенства $\sum_{i=1}^n \Delta\lambda_i = 0$ следует, что $\bar{K}c = 0$, где \bar{K} — матрица (1.4.22).

Теперь наложим условие невырожденности V : матрица \bar{K} — невырождена. Тогда $\text{Ker } \mathbf{K} = \{\lambda \in \mathbb{R}^{kn} : \lambda_1 = \dots = \lambda_n\}$ и $\text{Ker } \mathbf{H}_Z = \Gamma$. Положим $\hat{Z} = Z/\Gamma$.

Утверждение 1.2.3. *Форма $h|_{\hat{Z}}$ невырождена*

$$\text{ind } h|_{\hat{Z}} = \sum_{i=1}^n \text{ind } K_i - \text{ind } \bar{K}. \quad (1.2.12)$$

Утверждение 1.2.4. $Y + Z = X$ и $Y \cap Z = \Gamma$.

Это следует из леммы, которую мы приведем без доказательства.

Лемма 1.2.3. Для любого $\mathbf{v} \in X$ существует $\mathbf{u} = \Phi \mathbf{v} \in Y$, единственный mod Γ , такой, что $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in Z$. Более подробно: $u_i = v_i + \lambda_{\beta i} w_i^\beta$, где λ удовлетворяют (1.2.6) и

$$c^\alpha = \kappa^{\alpha\beta} \sum_{i=1}^n k_{\beta\delta i} I_i^\delta(v_i, v_{i+1}), \quad (\kappa^{\alpha\beta}) = (\bar{k}_{\alpha\beta})^{-1} = \bar{K}^{-1}. \quad (1.2.13)$$

Отображение $\Phi : X \rightarrow \hat{Y} = Y/\Gamma$ удовлетворяет равенству $\Phi(Z) = 0$ и $\Phi|_Y$ тождественно mod Γ . Отсюда вытекает утверждение 1.2.4. \square

Положим $\hat{X} = X/\Gamma$ и обозначим соответствующую каноническую проекцию $\pi_\Gamma : X \rightarrow \hat{X}$. Тогда существует линейное отображение $\hat{\Pi} : \hat{X} \rightarrow X^\perp$ такое, что следующая диаграмма является коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi_\Gamma} & \hat{X} \\ \Pi \searrow & & \swarrow \hat{\Pi} \\ & X^\perp & \end{array}$$

Следствие 1.2.3. Отображения $\hat{\Pi}|_{\hat{Y}} : \hat{Y} \rightarrow X^\perp$ и $\Phi|_{X^\perp} : X^\perp \rightarrow \hat{Y}$ — взаимно обратные изоморфизмы.

Доказательство. Если $\Pi \mathbf{v} = 0$ при $\mathbf{v} \in Y$, то $\mathbf{v} \in Z$ и следовательно $\mathbf{v} \in Y \cap Z = \Gamma$ согласно предложению 1.2.4. Из равенства $Y + Z = X$ следует, что $\Pi|_Y$ сюръективно. Имеем также $\Phi(Z) = 0$. \square

Пространства $\hat{Y}, \hat{Z} \subset \hat{X}$ ортогональны относительно билинейной формы \hat{h} на \hat{X} . Как ранее доказано, \hat{h} невырождена на \hat{Z} , и ее индекс дается равенством (1.2.12).

С точки зрения понижения порядка по Раусу естественно рассмотреть пространство

$$Y^0 = \{\mathbf{u} \in X : I_i(u_i, u_{i+1}) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad u_{n+1} = Gu_1\} \subset Y.$$

Определим $\mathbf{d}_\alpha = (d_{\alpha i}) \in X^*$ равенствами

$$d_{\alpha i} = k_{\alpha\beta i-1} B_{i-1} w_{i-1}^\beta - k_{\alpha\beta i} B_i^* w_{i+1}^\beta, \quad B_0 = G(x_1)^* B_n. \quad (1.2.14)$$

Отметим, что $\langle d_{\alpha i}, w_i^\alpha \rangle = 0$. Имеем:

$$\langle \mathbf{d}_\alpha, \mathbf{u} \rangle = \sum_{i=1}^n k_{\alpha\beta i} I_i^\beta(u_i, u_{i+1}), \quad \mathbf{u} \in X.$$

Утверждение 1.2.5.

$$Y^0 + Z = \{\mathbf{v} \in X : \langle \mathbf{d}_\alpha, \mathbf{v} \rangle = 0, \alpha = 1, \dots, k\}. \quad (1.2.15)$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{v} \in X$. Тогда $\mathbf{v} \in Y^0 + Z$, $\mathbf{u} = \Phi(\mathbf{v}) \in Y^0$. Согласно лемме 1.2.3,

$$0 = \sum_{i=1}^n k_{\alpha\beta i} I_i^\beta(v_i, v_{i+1}) = \sum_{i=1}^n \langle d_{\alpha i}, v_i \rangle = \langle \mathbf{d}_\alpha, \mathbf{v} \rangle. \quad \square$$

Далее мы вычислим ограничение $h|_Y$. Пусть h^\perp — билинейная форма действия для редуцированной системы (E^\perp, Λ^\perp) , и $h^\top = h \circ \Phi|_{X^\perp}$, где Φ — оператор из следствия 1.2.3, — билинейная форма на X^\perp , соответствующая $h|_Y$, см. коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ & \searrow h|_Y & \\ \hat{\Pi}|_{\hat{Y}} \downarrow \uparrow \Phi & & \mathbb{R} \\ X^\perp & \nearrow h^\top & \end{array}$$

Утверждение 1.2.6. Для любого $\mathbf{v} \in X^\perp$

$$h^\top(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = h^\perp(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \bar{k}_{\alpha\beta} c^\alpha c^\beta, \quad (1.2.16)$$

где коэффициенты $c^\alpha(\mathbf{v})$ определены в (1.2.13).

1.2.4 Индексы h и h^\perp

В этом разделе мы обсуждаем соотношение между $\text{ind } h|_Y = \text{ind } \hat{h}|_{\hat{Y}}$ и $\text{ind } h^\perp$. Используя изоморфизмы $\Phi : X^\perp \rightarrow \hat{Y}$ и $\hat{\Pi} : \hat{Y} \rightarrow X^\perp$, мы можем ограничиться сравнением индексов h^\perp и $h^\top = h \circ \Phi$ на X^\perp . Как уже было отмечено, h^\top и h^\perp совпадают на $X_0^\perp = \text{PY}^0$.

Нам понадобятся некоторые предположения об устройстве собственного пространства единицы в линейном отображении Пуанкаре $\hat{G}^{-1}P : W \rightarrow W$. Предположим, что $V = \text{Ker}(\hat{G}^{-1}P - I)$ изотропно. Известно, что обобщенное собственное пространство $N = \text{Ker}(\hat{G}^{-1}P - I)^{2m}$ — симплектическое. Так как $V \subset N$ изотропно, $\dim N \geq 2k$. Мы рассмотрим наименее вырожденный случай $\dim N = 2k$. Тогда

$$N = \text{Ker}(\hat{G}^{-1}P - I)^2 = \{v \in W : \hat{G}^{-1}Pv - v \in V\}$$

симплектическое и $V = \text{Ker}(\hat{G}^{-1}P - I)$ — лагранжево подпространство в N . Рассмотрим билинейную форму

$$b(v, w) = \omega((\hat{G}^{-1}P - I)v, w), \quad v, w \in N. \quad (1.2.17)$$

Чуть ниже мы показываем, что билинейная форма b симметрическая.

Пусть Σ — пространство траекторий \mathbf{v} уравнений в вариациях, соответствующих $v \in N$. Тогда $\Gamma \subset \Sigma$. Траектории $\Sigma \setminus \Gamma$ не являются G -периодическими. Проекция

$$\Omega^\perp = \Pi\Sigma \subset X^\perp$$

состоит из G -периодических последовательностей. Имеем естественное отображение $\Psi = \Phi\Pi : \Sigma \rightarrow \hat{Y}$. Положим $\hat{\Omega} = \Psi\Sigma$. Мы покажем, что Ω^\perp ортогонально $X_0^\perp = \Pi Y^0$ относительно h^\perp , и $\hat{\Omega}$ ортогонально \hat{Y} относительно h . Так как h^\top и h^\perp совпадают на X_0^\perp , разность их индексов определяется их ограничениями на дополнении к X_0^\perp . Таким образом, если $\Omega^\perp \oplus X_0^\perp = X^\perp$, то разность индексов определяется формами $h^\top|_{\Omega^\perp}$ и $h^\perp|_{\Omega^\perp}$. Вообще говоря, $X^\perp \neq \Omega^\perp \oplus X_0^\perp$. Чтобы иметь это разложение, нам понадобится еще одно условие невырожденности (условие С ниже).

Рассмотрим базис $w^1, \dots, w^k \in V$ и сопряженный базис q_1, \dots, q_k в косоортгональном дополнении к V в N . Тогда $w^1, \dots, w^k, q_1, \dots, q_k$ — симплектический базис в N и

$$\omega(w^\alpha, w^\beta) = 0, \quad \omega(q_\alpha, q_\beta) = 0, \quad \omega(w^\alpha, q_\beta) = \delta_\beta^\alpha, \quad \hat{G}^{-1}Pq_\alpha = q_\alpha + s_{\alpha\beta}w^\beta. \quad (1.2.18)$$

Ввиду (1.2.17) и (1.2.18) получаем

$$b(q_\alpha, q_\beta) = s_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, матрица $S = (s_{\alpha\beta})$ симметрическая. Определим симметрические матрицы $A = (a_{\alpha\beta})$ и $A^\perp = (a_{\alpha\beta}^\perp)$:

$$a_{\alpha\beta} = s_{\alpha\delta} \kappa^{\delta\varepsilon} s_{\varepsilon\beta} - s_{\alpha\beta}, \quad a_{\alpha\beta}^\perp = s_{\alpha\beta} - \bar{k}_{\alpha\beta}. \quad (1.2.19)$$

Далее используется еще одно условие невырожденности.

Условие С. Матрица $A^\perp = (a_{\alpha\beta}^\perp)$ — невырождена.

Определение. Скажем, что периодическая траектория невырождена mod V если выполнены условия невырожденности A, B, C .

Теорема 6. Предположим, что \mathbf{x} невырождена mod V . Тогда

$$\text{ind } h - \text{ind } h|_Z - \text{ind } h^\perp = \text{ind } A - \text{ind } A^\perp. \quad (1.2.20)$$

Следствие 1.2.4. Предположим, что \mathbf{x} невырождена mod V . Тогда

$$\text{ind } h = \text{ind } h^\perp + \text{ind } h|_Z + \text{ind } b + \text{ind } \bar{K} \pmod{2}.$$

Действительно, из равенства $SA^\perp = A\bar{K}$ вытекает, что $\text{sign det } A = \text{sign}(\det S \det K \det A^\perp)$. Следовательно $\text{ind } A - \text{ind } A^\perp = \text{ind } b + \text{ind } \bar{K} \pmod{2}$. \square

Из предложения 1.2.3 следует

Следствие 1.2.5.

$$\text{ind } h = \text{ind } h^\perp + \sum_{i=1}^n \text{ind } K_i + \text{ind } b \pmod{2}.$$

Из равенства (1.2.9) и следствия 1.2.5 вытекает

Следствие 1.2.6.

$$\sigma(-1)^{\text{ind } h} = \sigma^\perp(-1)^{\text{ind } h^\perp + \text{ind } b}.$$

1.3 Формула Хилла для g -периодических траекторий непрерывных лагранжевых систем.

1.3.1 g -периодические траектории непрерывных лагранжевых систем.

Рассмотрим непрерывную лагранжевую систему (M, \mathcal{L}) с конфигурационным пространством M^m и гладким лагранжианом $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$ на $TM \times \mathbb{R}$. Пусть \mathcal{L} — строго выпуклый по скорости $\dot{x} \in T_x M$, т.е. $\mathcal{L}_{\dot{x}\dot{x}}$ — положительно определенная квадратичная форма на $T_x M$, для всех $x \in M$. Траекториями будем называть решения соответствующих уравнений Лагранжа.

Пусть $g: M \rightarrow M$ — диффеоморфизм.

Определение 1.3.1. Кривая $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ называется g -периодической с периодом τ , если $\gamma(t + \tau) = g(\gamma(t))$, для любых $t \in \mathbb{R}$. Через Ω обозначим класс всех g -периодических кривых на M .

Считаем, что отображение g сохраняет лагранжиан в следующем смысле:

$$\mathcal{L}(g(x), G(x)\dot{x}, t + \tau) = \mathcal{L}(x, \dot{x}, t). \quad (1.3.1)$$

Здесь $G(x)$ — дифференциал отображения g в точке x .

Определение 1.3.2. Функционалом действия $\mathcal{A}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть

$$\mathcal{A}(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \int_I \mathcal{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) dt,$$

где интегрирование ведется по любому отрезку I длины τ .

Утверждение 1.3.1. *Определение функционала действия корректно, так как не зависит от выбора отрезка I .*

Доказательство очевидно.

Утверждение 1.3.2. *Кривая $\gamma \in \Omega$ является g -периодической траекторией тогда и только тогда, когда γ — критическая точка функционала действия \mathcal{A} на Ω .*

Доказательство. Пусть $\gamma(t, \alpha) = \gamma(t) + \alpha h(t)$ — g -периодическая вариация кривой $\gamma(t)$, $h(t) \in T_{\gamma(t)}M$: $h(t + \tau) = G(x)h(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}(\gamma) &= \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \int_0^\tau \mathcal{L}(\gamma + \alpha h, \dot{\gamma} + \alpha \dot{h}, t) dt \\ &= \int_0^\tau \left(\mathcal{L}_x(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) - \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{\dot{x}}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) \dot{h}(t) \right) h(t) dt \\ &\quad + \mathcal{L}_{\dot{x}}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) h(t) \Big|_0^\tau. \end{aligned}$$

Слагаемое $\mathcal{L}_{\dot{x}} h|_0^\tau$ равно нулю, поскольку из условия (1.3.1) вытекает тождество

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \left(g(x), G(x) \dot{x}, t + \tau \right) G(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} (x, \dot{x}, t).$$

□

1.3.2 Вторая вариация функционала действия

Вторая вариация функционала действия $\mathcal{A}(\gamma)$ в точке $\gamma \in \Omega$ — симметрическая билинейная форма $h(\xi, \eta)$ на пространстве X G -периодических векторных полей $\xi(t) \in E_t = T_{\gamma(t)}M$ вдоль γ :

$$\begin{aligned} h(\xi, \xi) &= \left. \frac{d^2}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} \mathcal{A}(\gamma_\alpha) = \left. \frac{d^2}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} \int_0^\tau \mathcal{L}(\gamma + \alpha \xi, \dot{\gamma} + \alpha \dot{\xi}, t) dt = \\ &= \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \int_0^\tau (\mathcal{L}_x \xi(t) + \mathcal{L}_{\dot{x}} \dot{\xi}(t)) dt = \int_0^\tau (\langle \mathcal{L}_{xx}(\gamma, \dot{\gamma}, t) \xi(t), \xi(t) \rangle + \\ &\quad + 2 \langle \mathcal{L}_{x\dot{x}}(\gamma, \dot{\gamma}, t) \xi(t), \dot{\xi}(t) \rangle + \langle \mathcal{L}_{\dot{x}\dot{x}}(\gamma, \dot{\gamma}, t) \dot{\xi}(t), \dot{\xi}(t) \rangle) dt. \end{aligned}$$

Определение 1.3.3. Определим скалярное произведение на X :

$$(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} \langle B(t)v, w \rangle, \quad B(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_{\dot{x}\dot{x}}(\gamma, \dot{\gamma}, t)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — евклидово скалярное произведение.

Утверждение 1.3.3. Форма h единственным образом представляется в виде

$$h(\xi, \eta) = \int_0^\tau (D\xi, D\eta) + (U\xi, \eta) dt,$$

где $U(t) = U^*(t)$ — симметрический оператор $U: X \rightarrow X$, D — ковариантная производная согласованная с метрикой, т.е. линейный дифференциальный оператор $D: X \rightarrow X$ такой, что

$$\frac{d}{dt}(\xi(t), \eta(t)) = (D\xi(t), \eta(t)) + (\xi(t), D\eta(t)),$$

$$\frac{d}{dt}(f\xi) = \dot{f}\xi + f\dot{\xi},$$

где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольная скалярная функция.

Доказательство можно найти в работе [5].

Следствие 1.3.1. Можно показать, что операторы D и U сохраняют G -периодичность.

Следствие 1.3.2. Оператор $D: X \rightarrow X$ — кососимметрический по отношению к L^2 скалярному произведению $(\xi(t), \eta(t))_2 = \int_0^\tau (\xi(t), \eta(t)) dt$, то есть

$$D(\xi(t), \eta(t))_2 = -(\xi(t), D\eta(t))_2.$$

Доказательство. Для любой пары G -периодических векторных полей ξ, η

$$\begin{aligned} (D\xi, \eta)_2 &= \int_0^\tau (D\xi(t), \eta(t)) dt = \int_0^\tau \left(\frac{d}{dt}(\xi(t), \eta(t)) - (\xi(t), D\eta(t)) \right) dt \\ &= (\xi(t), \eta(t)) \Big|_0^\tau - (\xi(t), D\eta(t))_2 = -(\xi(t), D\eta(t))_2, \\ (\xi, \eta) \Big|_{t=\tau} &= \langle \mathcal{L}_{\dot{x}\dot{x}}\xi, \eta \rangle \Big|_{t=\tau} = \langle (G^T)^{-1} \mathcal{L}_{\dot{x}\dot{x}} G^{-1} G\xi, G\eta \rangle \Big|_{t=0} \\ &= \left(G\xi, (G^T)^{-1} \mathcal{L}_{\dot{x}\dot{x}} G^{-1} G\eta \right) \Big|_{t=0} = (\xi, \eta) \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

□

Следствие 1.3.3. Для любых $t \in \mathbb{R}$

$$(\xi(t + \tau), \eta(t + \tau)) = (\xi(t), \eta(t)).$$

Следствие 1.3.4.

$$h(\xi, \eta) = ((-D^2 + U)\xi, \eta)_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{H}\xi, \eta)_2,$$

где $\mathbf{H} \stackrel{\text{def}}{=} -D^2 + U$ — гессиан функционала действия \mathcal{A} по отношению к L^2 -метрике.

Определение 1.3.4. Уравнения $D^2\xi(t) = U(t)\xi(t)$ называются уравнениями в вариациях g -периодической траектории.

С этого места объектом нашего рассмотрения становится линеаризация (E, Λ) лагранжевой системы (M, \mathcal{L}) около g -периодической траектории, где $E = \{E_t\}$, $E_t = T_{\gamma(t)}M$ — гладкое семейство векторных пространств, $\Lambda(\xi, D\xi) = \frac{1}{2}(D\xi, D\xi) + \frac{1}{2}(U\xi, \xi)$ — квадратичный лагранжиан.

Определение 1.3.5. Линейным отображением за период назовем отображение

$$\begin{aligned} P: T_{\dot{\gamma}(0)}TM &\rightarrow T_{\dot{\gamma}(\tau)}TM, \\ P(\xi(0), D\xi(0)) &= (\xi(\tau), D\xi(\tau)). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\hat{G}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (dg(x)[\cdot], dg(x)[\cdot]).$$

Тогда оператором монодромии системы уравнений в вариациях будем называть

$$\hat{G}^{-1} \circ P: T_{\dot{\gamma}(0)}TM \rightarrow T_{\dot{\gamma}(0)}TM.$$

Определение 1.3.6.

$$\langle\langle \xi(t), \eta(t) \rangle\rangle \stackrel{\text{def}}{=} (D\xi(t), D\eta(t))_2 + (\xi(t), \eta(t))_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{B}\xi, \eta)_2,$$

где $\mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{=} -D^2 + I$, $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ — скалярное произведение на гильбертовом пространстве $X = T_{\gamma(t)}M$. Тогда

$$h(\xi, \bar{\eta}) = \langle\langle \mathbf{B}^{-1}\mathbf{H}\xi, \bar{\eta} \rangle\rangle = \langle\langle H\xi, \bar{\eta} \rangle\rangle,$$

где $H \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{H}$ — гессиан действия по отношению к скалярному произведению $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$.

Замечание 1.3.1. Можно показать, что H — самосопряженный оператор, то есть

$$\langle\langle H\xi, \eta \rangle\rangle = \langle\langle \xi, H\eta \rangle\rangle, \quad \text{для всех } \xi(t), \eta(t) \in X.$$

Определение 1.3.7. Пусть $Q: T_{\gamma(0)}M \rightarrow T_{\gamma(\tau)}M$ — линеаризация отображения параллельного переноса, т.е. $Q\eta(0) = \eta(\tau)$, где $D\eta(t) = 0$.

Утверждение 1.3.4. $G^{-1}Q: T_{\gamma(0)}M \rightarrow T_{\gamma(0)}M$ — ортогональный оператор.

Доказательство. Так как D — ковариантная производная, согласованная с метрикой, то

$$\frac{d}{dt}(\xi(t), \eta(t)) = (D\xi(t), \eta(t)) + (\xi(t), D\eta(t)) = 0,$$

где $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — векторные поля параллельные вдоль γ .

Тогда $(\xi(0), \eta(0)) = (\xi(\tau), \eta(\tau)) = (Q\xi(0), Q\eta(0))$. Так как $(\xi, \eta) = (G\xi, G\eta)$, то $G^{-1}Q$ сохраняет длину. Следовательно, $G^{-1}Q$ — ортогональный оператор. \square

Следствие 1.3.5. Корни полинома $\det(Q - \rho G)$ имеют вид

$$\rho = e^{i\nu}, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

1.3.3 Обобщенный гессиан действия

Пусть $\rho \in S^1$, X_ρ — пространство комплексных g -квазипериодических векторных полей $\xi(t) \in E$, то есть таких, что $\xi(t + \tau) = \rho G\xi(t)$.

Определение 1.3.8. Назовем

$$h(\xi, \eta) = \int_0^\tau ((D\xi(t), D\bar{\eta}(t)) + (U(t)\xi(t), \bar{\eta}(t))) dt$$

эрмитовой ρ -индексной формой. Пусть $X = X^\mathbb{C}$ — пространство комплексных g -периодических векторных полей вдоль γ .

Отождествим x и x_ρ по формуле

$$\xi(t) \in X \longmapsto e^{\mu t} \xi(t),$$

где $\mu = \tau^{-1} \ln \rho$, $0 \leq \text{Im} \ln \rho < 2\pi$.

В результате получаем эрмитову форму на X :

$$\begin{aligned}
h_\rho(\xi, \bar{\eta}) &\stackrel{\text{def}}{=} h(e^{\mu t}\xi, \overline{e^{\mu t}\eta}) = (D e^{\mu t}\xi, D \overline{e^{\mu t}\eta})_2 + (U e^{\mu t}\xi, \overline{e^{\mu t}\eta})_2 = \\
&= (\mu e^{\mu t}\xi, D \overline{e^{\mu t}\eta})_2 + (\mu e^{\mu t}\xi, D \overline{e^{\mu t}\eta})_2 + (U e^{\mu t}\xi, \overline{e^{\mu t}\eta})_2 = \\
&= (\mu e^{\mu t}\xi, \bar{\mu} \overline{e^{\mu t}\eta})_2 + (\mu e^{\mu t}\xi, \overline{e^{\mu t} D \eta})_2 + (e^{\mu t} D \xi, \bar{\mu} \overline{e^{\mu t}\eta})_2 + \\
&\quad + (e^{\mu t} D \xi, \overline{e^{\mu t} D \eta})_2 + (U e^{\mu t}\xi, \overline{e^{\mu t}\eta})_2 = (\xi, \bar{\eta})_2 + \\
&\quad + (\mu \xi, D \bar{\eta})_2 + (D \xi, \bar{\mu} \bar{\eta})_2 + (D \xi, D \bar{\eta})_2 + \\
&\quad + (U e^{\mu t}, \overline{e^{\mu t}\eta})_2 = ((D + \mu I)\xi, \overline{(D + \mu I)\eta})_2 + (U \xi, \bar{\eta})_2 \\
&= -((D + \mu I)^2 \xi, \bar{\eta})_2 + (U \xi, \bar{\eta})_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{H}_\rho \xi, \eta)_2,
\end{aligned}$$

где $\mathbf{H}_\rho = -(D + \mu I)^2 + U$. Было учтено, что $\bar{\mu} = -\mu$ и D — вещественный антисимметрический оператор.

Определение 1.3.9. Определим ρ -гессиан:

$$\begin{aligned}
H_\rho &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{H}_\rho = (-D + I)^{-1} (-(D + \mu I)^2 + U), \\
H_\rho: X &\rightarrow X, \quad h_\rho(\xi, \bar{\eta}) = \langle\langle H_\rho \xi, \bar{\eta} \rangle\rangle.
\end{aligned}$$

С этого момента будем предполагать, что $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Определение 1.3.10. Пусть $P_N: X \rightarrow X^{(N)}$, где P_N — ортогональная проекция на конечномерное собственное подпространство $X^{(N)}$ оператора D , соответствующее собственным значениям из множества

$$\Lambda_N = \{\nu \in \Lambda = \sigma(D) : |\nu| \leq N\}.$$

Тогда

$$\det H_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} H_\rho^{(N)}, \quad H_\rho^{(N)} = P_N H_\rho P_N^*: X^{(N)} \rightarrow X^{(N)}.$$

1.3.4 Спектр оператора D

Оператор $D: X \rightarrow X$ является вещественным косоэрмитовым оператором, то есть $D = \bar{D} = -D^*$, поэтому $\sigma(D) \subset i\mathbb{R}$.

Утверждение 1.3.5. Спектр $\Lambda = \sigma(D) \subset i\mathbb{R}$ оператора D совпадает с множеством $\Lambda = \{\mu: \det(Q - e^{\mu\tau} G) = 0\}$, где $G = dg(\gamma(0))$.

Доказательство. Пусть $(D + \mu I)\eta(t) = 0$.

Тогда $D(e^{\mu t}\eta(t)) = \mu e^{\mu t}\eta(t) + e^{\mu t} D \eta(t) = 0$.

Так как $\eta(\tau) = G\eta(0)$, то $Q\eta(0) = e^{\mu\tau}\eta(\tau) = e^{\mu\tau} G\eta(0)$

Следовательно, $\det(Q - e^{\mu\tau} G) = 0$. □

Следствие 1.3.6. Так как $G^{-1}Q$ — ортогональный оператор, то для любого $\mu \in \Lambda$ имеем $-\mu \in \Lambda$, а также $\mu + \frac{2\pi i}{\tau}k \in \Lambda, k \in \mathbb{Z}$, то есть $\Lambda = \{\mu_j + \omega\mathbb{Z}\}$, где $\rho_j = e^{\mu_j\tau}$, ρ_1, \dots, ρ_m — корни уравнения $\det(Q - \rho G) = 0$, $0 \leq \text{Im}\mu_j < \frac{2\pi}{\tau}$.

Пусть $\mu \notin \Lambda$. Тогда H_ρ можно представить в виде

$$H_\rho = -(-D^2 + I)(D + \mu I)^2(I - (D + \mu I)^{-2}U) = ST,$$

где $S = -(-D^2 + I)(D + \mu I)^2$, $T = (I - (D + \mu I)^{-2}U)$.

Так как $P_N^*P_N = I$, то

$$\det H_\rho = \lim_{N \rightarrow \infty} \det P_N H_\rho P_N^* = \lim_{N \rightarrow \infty} \det P_N S P_N^* P_N T P_N^* = \det S \det T.$$

Из вида спектра оператора D следует, что конечномерная аппроксимация определителя

$$\det T(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} f(\mu) = \lim_{N \rightarrow \infty} \det(P_N T P_N^*)$$

сходится абсолютно при $\mu \notin \Lambda$, поскольку $\text{tr} |(D + \mu I)^{-2}U| < \infty$. Значит, f — голоморфная функция на $\mathbb{C} \setminus \Lambda$, имеющая полюса в точках множества Λ , кратность которых не больше удвоенной кратности соответствующей точки спектра D .

Утверждение 1.3.6. Функция f периодическая: $f(\mu + \omega) = f(\mu)$, где $\omega = \frac{2\pi i}{\tau}$.

Доказательство. Если $\xi \in X^{\mathbb{C}}$, то $e^{\omega t}\xi \in X^{\mathbb{C}}$

$$\begin{aligned} (D + \mu I)^{-2}e^{\omega t}\xi &= e^{\omega t}(D + (\mu + \omega)I)^2\xi, \quad \text{поэтому} \\ (D + \mu I)^{-2}(e^{\omega t}(D + (\mu + \omega)I)^2\xi) &= e^{\omega t}\xi. \end{aligned}$$

Тогда

$$(I - (D + \mu I)^{-2}U)e^{\omega t}\xi = e^{\omega t}(I - (D + (\mu + \omega)I)^{-2}U)\xi$$

Следовательно операторы $T(\mu)$ и $T(\mu + \omega)$ подобны, то есть существует оператор $A: X \rightarrow X: T(\mu) = A^{-1}T(\mu + \omega)A$. \square

Тогда $f(\mu) = \Psi(e^{\mu\tau})$, где $\Psi(\rho)$ — мероморфная функция, имеющая полюса в корнях полинома $\det(\rho G - Q)$.

Кратность каждого полюса не больше удвоенной кратности соответствующего корня. Следовательно, существует многочлен $g(\rho)$ степени $\leq 2m - 1$ такой, что функции $\Psi(\rho)$ и $g(\rho) \det^{-2}(\rho G - Q)$ имеют одинаковые главные части разложения в ряд Лорана в каждом полюсе. Так как $\Psi(\rho) \rightarrow 1$, при $\rho \rightarrow \infty$, то по теореме

Лиувилля $\Psi(\rho) = g(\rho) \det^{-2}(\rho G - Q) = \text{const} = 1$, откуда $\Psi(\rho) = g(\rho) \det^{-2}(\rho G - Q) + 1$. Распишем определитель $\det S$:

$$\begin{aligned} \det S &= \det(-(-D^2 + I)^{-1}(D + \mu I)^2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\nu \in \Lambda_N} \frac{(\nu + \mu)^2}{\nu^2 - 1} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (-\mu^2)^k \prod_{\nu \in \Lambda, i\nu > 0} \left(\frac{\nu^2 - \mu^2}{\nu^2 - 1} \right)^2 = (-1)^k \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\nu \in \Lambda} \frac{\nu^2 - \mu^2}{\nu^2 - 1}, \end{aligned}$$

где k — кратность нуля в спектре оператора D . Было использовано, что $\Lambda_N = -\Lambda_N$. Так как $\Lambda = \{\nu_i + \omega\mathbb{Z}, i = 1, \dots, m\}$, то произведение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\nu \in \Lambda_N} \left(1 - \frac{1 + \mu^2}{\nu^2 - 1} \right)$$

сходится абсолютно. Следовательно, это произведение является голоморфной функцией переменных $\rho_1, \dots, \rho_m, \rho$, при $\rho_j \neq e^{\pm\tau}, j = 1, \dots, m$ и $\rho \neq 0$. Пусть $\rho_j \neq 1$ и $\rho_i \neq \rho_j$, при $i \neq j$. Тогда $\nu_i \notin \omega\mathbb{Z}$ и $\nu_i - \nu_j \notin \omega\mathbb{Z}$ при $i \neq j$. Для вычисления последнего произведения воспользуемся формулой Эйлера:

$$\prod_{n \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{\mu^2}{(\nu + \omega n)^2} \right) = \frac{\cosh \mu\tau - \cosh \nu\tau}{1 - \cosh \nu\tau}, \quad \nu \notin \omega\mathbb{Z}.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \prod_{\nu \in \Lambda} \frac{\nu^2 - \mu^2}{\nu^2 - 1} &= \prod_{\nu \in \Lambda} \left(1 - \frac{\mu^2}{\nu^2} \right) \left(1 - \frac{1}{\nu^2} \right)^{-1} = \\ &= \prod_{j=1}^m \prod_{n \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{\mu^2}{(\nu_j + \omega n)^2} \right) \left(1 - \frac{1}{(\nu_j + \omega n)^2} \right)^{-1} = \\ &= \prod_{j=1}^m \frac{\cosh \mu\tau - \cosh \nu_j\tau}{\cosh \tau - \cosh \nu_j\tau} = \prod_{j=1}^m \frac{\rho + \rho^{-1} - \rho_j - \rho_j^{-1}}{e^\tau + e^{-\tau} - \rho_j - \rho_j^{-1}} = \\ &= \prod_{j=1}^m \frac{e^\tau(\rho - \rho_j)(\rho - \rho_j^{-1})}{\rho(e^\tau - \rho_j)(e^\tau - \rho_j^{-1})} = \prod_{j=1}^m \frac{e^\tau(\rho - \rho_j)^2}{\rho(e^\tau - \rho_j)^2} = \frac{e^{m\tau} \det^2(\rho G - Q)}{\rho^m \det^2(e^\tau G - Q)}. \end{aligned}$$

В силу непрерывности это выполняется для всех $\rho_1, \dots, \rho_m \neq e^{\pm\tau}$ и $\rho \neq 0$. Тогда

$$\rho^m \det H_\rho = (-1)^k \beta^{-1} (\det^2(\rho G - Q) + f(\rho)),$$

где $\beta = e^{-m\tau} \det^2(e^\tau G - Q)$. Следовательно, $F(\rho) = \rho^m \det H_\rho$ — многочлен степени $2m$ относительно ρ со старшим членом $(-1)^k \beta^{-1} \det^2 G$.

Утверждение 1.3.7. *Многочлены $F(\rho)$ и $E(\rho) = \det(P - \rho\hat{G})$ имеют одинаковые корни.*

Доказательство. Если $E(\rho) = 0$, то существует ненулевое G -периодическое векторное поле $\xi(t) \in X$, такое что

$$(-D^2 + U)e^{\mu t}\xi(t) = 0.$$

Отсюда $H_\rho\xi = 0$. Предположим, что $\rho \notin \sigma(Q)$, то есть $\mu \notin \Lambda$. Тогда $H_\rho = ST$, где S — обратимый оператор и $\text{tr}(T - I) < \infty$, поэтому из $T\xi = 0$ следует $\det T = 0$. Отсюда $\det H_\rho = \det S \det T = 0$, следовательно $G(\rho) = 0$. Если $\mu \in \Lambda$, то повторяем эти же рассуждения беря в качестве S и T

$$S = (-D^2 + I)^{-1}(-(D + \mu I)^2 + I), \quad T = (-(D + \mu I)^2 + I)^{-1}(-(D + \mu I)^2 + U).$$

Обратно, пусть $F(\rho) = 0$. Тогда $\det H_\rho = 0$ и следовательно, $\ker H_\rho \neq 0$. Можно показать, что ядро $\ker H_\rho$ состоит из g -квазипериодических векторных полей. Отсюда $\det(P - \rho\hat{G}) = 0$, так что $E(\rho) = 0$. Так как степени $E(\rho)$ и $F(\rho)$ одинаковые, то они имеют общие корни. \square

Утверждение 1.3.8. $(-1)^k = \sigma(-1)^m$, где $\sigma = \det(G^{-1}Q)$.

Доказательство. Поскольку k — кратность нуля в спектре оператора D , то k — размерность подпространства $T_{\gamma(0)}M$, на котором оператор $G^{-1}Q$ тождественен а $\sigma = (-1)^n$, где n — размерность подпространства, на котором $G^{-1}Q$ — отражение. Так как размерность дополнительного подпространства, четная и равна $m - k - n$, то $(-1)^k = \sigma(-1)^m$. \square

Теорема 7. (Формула Хилла) *Имеет место формула*

$$\rho^{-m} \det(P - \rho\hat{G}) = \sigma(-1)^m \beta \det H_\rho.$$

При $\rho = 1$ имеем:

$$\det(P - \hat{G}) = \sigma(-1)^m \beta \det H.$$

Следствие 1.3.7. *Динамическая невырожденность g -периодической траектории γ эквивалентна ее геометрической невырожденности.*

1.3.5 Приложения формулы Хилла к устойчивости g -периодических траекторий

Пусть $\|\cdot\|$ — G -инвариантная норма на TM . Норма $\|\cdot\|$ нам понадобится только в пространствах $T_{\gamma(t)}M$, так что можно, например, взять норму, порождаемую скалярным произведением (\cdot, \cdot) в $T_{\gamma(t)}M$.

Определение 1.3.11. g -периодическая траектория называется устойчивой в линейном приближении, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такой, что для любого начального условия $v(0)$, $Dv(0) \in T_{\dot{\gamma}(0)}M$, удовлетворяющего условиям $\|v(0)\| < \delta$, $\|Dv(0)\| < \delta$

$$\|v(t)\| < \varepsilon, \quad \|Dv(t)\| < \varepsilon, \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}_+,$$

где $v(t)$ — решение уравнений в вариациях с начальным условием $(v(0), Dv(0))$.

Замечание 1.3.2. Тот факт, что норма $\|\cdot\|$ g -инвариантна важен, так как g -периодическая траектория вообще говоря, некомпактна, так что выбор произвольной нормы может из асимптотически устойчивой траектории сделать неустойчивую и наоборот.

Замечание 1.3.3. Так как G сохраняет $\|\cdot\|$, то $\|G^{-n}v(t)\| = \|v(t)\|$, $\|G^{-n}Dv(t)\| = \|Dv(t)\|$, $t = n\tau + t_0$, $0 \leq t_0 < \tau$.

Утверждение 1.3.9. Операторы

$$\hat{G}^{-1}P|_{t=0}: T_{\dot{\gamma}(0)}TM \rightarrow T_{\dot{\gamma}(0)}TM,$$

$$\hat{G}^{-1}P|_{t=\tau}: T_{\dot{\gamma}(0)}TM \rightarrow T_{\dot{\gamma}(0)}TM$$

имеют одинаковые собственные значения: равенства

$$\det(P(\gamma(0)) - \rho\hat{G}(\gamma(0))) = 0, \quad \det(P(\gamma(\tau)) - \rho\hat{G}(\gamma(\tau))) = 0$$

равносильны.

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений в вариациях при $\tau \leq t < 2\tau$:

$$\begin{cases} D\xi(t) = v(t), \\ Dv(t) = U(t)\xi(t), \quad \tau \leq t < 2\tau, \end{cases}$$

эквивалентно,

$$\begin{cases} D\xi(t + \tau) = v(t + \tau), \\ Dv(t + \tau) = U(t + \tau)\xi(t + \tau), \quad 0 \leq t < \tau. \end{cases}$$

Так как

$$D|_{t+\tau}\xi(t + \tau) = GD|_tG^{-1}\xi(t + \tau), U(t + \tau) = GU(t)G^{-1},$$

то

$$\begin{cases} D|_tG^{-1}\xi(t + \tau) = G^{-1}v(t + \tau), \\ D|_tG^{-1}v(t + \tau) = U(t)G^{-1}\xi(t + \tau), \quad 0 \leq t < \tau. \end{cases}$$

Тогда равенство $P|_{t=\tau} w = \tilde{w}$ равносильно равенству

$$P|_{t=0} \hat{G}^{-1}(0)w = \hat{G}^{-1}(0)\tilde{w}, w \in T_{\gamma(\tau)}M, \tilde{w} \in T_{\gamma(2\tau)}M.$$

Следовательно, равенство $(\hat{G}^{-1}P)|_{t=\tau} w = \tilde{w}$ эквивалентно

$$(\hat{G}^{-1}P)|_{t=0} \hat{G}^{-1}(0)w = \hat{G}^{-1}(0)\tilde{w}, w, \tilde{w} \in T_{\gamma(\tau)}M.$$

Откуда

$$(\hat{G}^{-1}P)_{t=\tau} = \hat{G}(0)(\hat{G}^{-1}P)|_{t=0} \hat{G}^{-1}(0).$$

□

Утверждение 1.3.10.

$$\text{ind } \gamma|_{[0,\tau]} = \text{ind } \gamma|_{[t_0, t_0+\tau]}, \quad \text{для любого } t_0,$$

где $\text{ind } \gamma|_{[t_0, t_0+\tau]}$ — индекс Морса кривой $\gamma(t)$, $t_0 \leq t \leq \tau + t_0$.

Доказательство. Нам понадобится случай $t_0 = \tau$, поэтому докажем его. Пусть $\xi(t)$, $\tau \leq t \leq 2\tau$ — векторное поле, принадлежащее подпространству, на котором форма $h|_{[\tau, 2\tau]}$ отрицательно определена, то есть

$$h|_{[\tau, 2\tau]}(\xi(t), \xi(t)) = \int_{\tau}^{2\tau} (D\xi, D\xi) + (U\xi, \xi) dt < 0$$

Тогда

$$\begin{aligned} h|_{[\tau, 2\tau]}(\xi(t), \xi(t)) &= \int_0^{\tau} (DG^{-1}\xi(t+\tau), DG^{-1}\xi(t+\tau)) \\ &+ (UG^{-1}\xi(t+\tau), \xi(t+\tau)) dt = h|_{[0,\tau]}(G^{-1}\xi(t+\tau), \xi(t+\tau)) < 0. \end{aligned}$$

Так как $G(\gamma(t))$ — изоморфизм $\bigcup_{0 \leq t \leq \tau} T_{\gamma(t)}M$ и $\bigcup_{\tau \leq t \leq 2\tau} T_{\gamma(t)}M$, то размерность отрицательного подпространства $h|_{[0,\tau]}(\xi, \xi)$ совпадает с размерностью отрицательного подпространства $h|_{[\tau, 2\tau]}(\xi, \xi)$. □

Об индексе Морса подробнее см. в [13].

Определение 1.3.12. Индексом g -периодической кривой γ будем называть индекс $\gamma|_{t_0 \leq t \leq t_0+\tau}$. Из утверждения 2.5.1 вытекает, что это определение корректно, т.е. не зависит от выбора t_0 .

Утверждение 1.3.11. Пусть отображение Пуанкаре $\hat{G}^{-1}P$ имеет мультипликатор, по модулю больший единицы. Тогда g -периодическая траектория неустойчива в линейном приближении.

Доказательство аналогично случаю периодической траектории.

Утверждение 1.3.12. Пусть $\sigma(-1)^{m+\text{ind } \gamma} < 0$. Тогда g -периодическая траектория неустойчива.

Доказательство. $F(\rho) = \det(P - \rho\hat{G})$ — многочлен степени $2m$. Поскольку $\det P > 0$, имеем: $F(+\infty) = +\infty$. Так как $F(1) < 0$, то существует вещественный корень ρ , больший единицы. \square

Следствие 1.3.8. Пусть $\sigma(-1)^m < 0$ и γ — невырожденный локальный минимум функционала действия \mathcal{A} . Тогда g -периодическая траектория γ неустойчива.

1.4 Вырождение в формуле Хилла (непрерывный случай)

В этом разделе мы рассмотрим случай, когда g -периодическая траектория γ вырождена, т.е. система уравнений в вариациях имеет ненулевое \hat{G} -периодическое решение $\zeta(t)$. Тогда из формулы Хилла следует, что отображение Пуанкаре $\hat{G}^{-1}P$ имеет ненулевой собственный вектор w : $\hat{G}^{-1}Pw = w$. Это имеет место, например, когда нелинейная лагранжева система (M, \mathcal{L}) имеет g -инвариантный первый интеграл \mathcal{J} , невырожденный на траектории $\gamma(t)$. Тогда можно показать, что система уравнений в вариациях имеет ненулевое \hat{G} -периодическое решение.

1.4.1 Непрерывная группа симметрий.

Представим систему (M, \mathcal{L}) как гамильтонову с гамильтонианом \mathcal{H} . Предположим, что система допускает алгебру \mathfrak{g} гамильтоновых полей симметрии порожденных гамильтонианами $\mathcal{J}_{\mathbf{v}}$, $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$. Предположим также, что

$$v(gx) = Gv(x), \quad \text{для всех } \mathbf{v} \in \mathfrak{g}. \quad (1.4.1)$$

Условие 1.4.1 выполняется, например, когда g — элемент этой группы симметрий. Пусть γ — g -периодическое решение в фазовом пространстве. Для $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$, $\zeta(t) = \mathbf{v}(\gamma(t))$ — \hat{G} -периодическое решение системы уравнений в вариациях и

$$Pw = \hat{G}w, \quad w = \mathbf{v}(\gamma(0)), \quad \mathbf{v} \in \mathfrak{g}. \quad (1.4.2)$$

Если система автономная, то гамильтоново векторное поле принадлежит \mathfrak{g} , а соответствующий собственный вектор $w = \dot{\gamma}(0)$.

Следуя работе [5] рассмотрим случай, когда \mathfrak{g} — k -мерная коммутативная алгебра. Тогда соответствующее собственное подпространство $V \subset \text{Ker}(\hat{G}^{-1}P - I)$ изотропно, а кратность единичного собственного значения не меньше $2k$. Для снятия вырождения воспользуемся методом Рауса. Подробнее о методе Рауса см. [3].

1.4.2 Редукция Рауса для линейных лагранжевых систем

Итак, предположим, что g -периодическая траектория вырождена, т.е. система уравнений в вариациях имеет ненулевое G -периодическое решение $\zeta(t)$. В этом случае линейное отображение Пуанкаре $\hat{G}^{-1}P$ имеет собственный вектор $w = \hat{G}^{-1}Pw$, соответствующий единичному собственному значению.

Утверждение 1.4.1. *Система уравнений в вариациях имеет линейный первый интеграл*

$$I_\zeta(\xi, D\xi) = (\zeta, D\xi) - (\xi, D\zeta).$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt} I_\zeta(\xi(t), D\xi(t)) = (\zeta, D^2\xi) - (\xi, D^2\zeta) = (\zeta, U\xi) - (\xi, U\zeta) = 0 \quad \square$$

В действительности $I_\zeta(\xi, D\xi) = \omega(w, v) = J_w(v)$ — значение симплектической формы на векторах $v, w \in W$ соответствующих ξ, ζ .

Предположим, что отображение Пуанкаре $\hat{G}^{-1}P$ имеет несколько собственных векторов, соответствующих единичному собственному значению. Пусть $V \subset \text{Ker}(\hat{G}^{-1}P - I)$ — изотропное подпространство, а $\Gamma \subset X$ — соответствующее пространство \hat{G} -периодических решений системы (E, Λ) . Пусть w^1, \dots, w^k — базис для V и $\zeta^1, \dots, \zeta^k \in \Gamma$ — соответствующие независимые решения. Система (E, Λ) имеет первые интегралы

$$I^\alpha(\xi, D\xi) = (\zeta^\alpha, D\xi) - (\xi, D\zeta^\alpha), \quad \alpha = 1, \dots, k,$$

В силу изотропности соответствующего пространства эти интегралы коммутируют:

$$I^\alpha(\zeta^\beta, D\zeta^\beta) = (\zeta^\alpha, D\zeta^\beta) - (\zeta^\beta, D\zeta^\alpha) = \omega(w^\alpha, w^\beta) = 0. \quad (1.4.3)$$

Обозначение 1.4.1. $I = (I^1, \dots, I^k)$.

$$F_t = \{\zeta(t) : \zeta \in \Gamma\} = \text{span}\{\zeta^1(t), \dots, \zeta^k(t)\}.$$

Примем следующее предположение невырожденности:

Предположение А: $\dim F_t = k$ при всех t .

Эквивалентно, векторы $\zeta^1(t), \dots, \zeta^k(t) \in E_t$ независимы для всех t . Отсюда матрица Грама

$$K = (k^{\alpha\beta}), \quad k^{\alpha\beta}(t) = (\zeta^\alpha(t), \zeta^\beta(t)) \quad (1.4.4)$$

невырождена при всех t .

Замечание 1.4.1. Можно показать [5], что предположение А излишне, а именно, сингулярное множество $\Sigma = \{t \in \mathbb{R}/\tau\mathbb{Z} : \dim F_t < k\}$ конечно и семейство $(F_t)_{t \notin \Sigma}$ может быть продолжено до гладкого k -мерного расслоения $(F_t)_{t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}}$.

При редукции Рауса линейной системы (E, Λ) , приведенное конфигурационное пространство $\tilde{E}_t = E_t/F_t$ можно отождествить с

$$E_t^\perp = \{u \in E_t : (u, w) = 0 \text{ для всех } w \in F_t\}$$

с помощью ортогональной проекции $\Pi = \Pi_t : E_t \rightarrow E_t^\perp$. Для гладкого поля $\xi(t) \in E_t$, обозначим $D^\perp \xi(t) = \Pi_t D\xi(t)$. В явном виде

$$\Pi \xi = \xi - k_{\alpha\beta}(\xi, \zeta^\beta) \zeta^\alpha, \quad D^\perp \xi = D\xi - k_{\alpha\beta}(D\xi, \zeta^\beta) \zeta^\alpha, \quad (1.4.5)$$

где $K^{-1} = (k_{\alpha\beta})$ — обратная к матрице Грама $K = (k^{\alpha\beta})$.

Определим приведенный лагранжиан Рауса Λ^\perp на $E^\perp = (E_t^\perp)$ по формуле

$$\Lambda^\perp(\eta, D\eta) = \frac{1}{2}(D^\perp \eta, D^\perp \eta) + \frac{1}{2}(U^\perp \eta, \eta), \quad \eta(t), D^\perp \eta(t) \in E_t^\perp,$$

где симметрический оператор $U^\perp(t) : E_t^\perp \rightarrow E_t^\perp$ задается формулой

$$(U^\perp u, u) = (Uu, u) - 3k_{\alpha\beta}(u, D^\perp \zeta^\alpha)(u, D^\perp \zeta^\beta), \quad u \in E_t^\perp.$$

Отсюда $U^\perp = \Pi U - 3C$, где²

$$Cu = k_{\alpha\beta}(u, D^\perp \zeta^\alpha) D^\perp \zeta^\beta.$$

Билинейная форма действия системы (E^\perp, Λ^\perp) имеет вид

$$\frac{1}{2}h^\perp(\eta, \eta) = \int_0^\tau \Lambda^\perp(\eta, D^\perp \eta) dt, \quad \eta(t) \in E_t^\perp. \quad (1.4.6)$$

² C не зависит от выбора базиса.

Лемма 1.4.1. Пусть

$$\eta(t) - \xi(t) \in F_t, \quad \xi(t) = \eta(t) + \lambda_\alpha(t)\zeta^\alpha(t). \quad (1.4.7)$$

Тогда ξ удовлетворяет уравнению $I_i^\alpha(\xi, D\xi) = c^\alpha$ при всех $\alpha = 1, \dots, k$ тогда и только тогда, когда

$$\dot{\lambda}_\alpha = k_{\alpha\beta}(c^\beta - I^\beta(\eta, D\eta)). \quad (1.4.8)$$

Действительно, $I^\alpha(\xi, D\xi) = I^\alpha(\eta, D\eta) + k^{\alpha\beta}\dot{\lambda}_\beta$. \square

Имеем теорему Рауса для линейных лагранжевых систем.

Теорема 8. Пусть $\xi(t) \in E_t$ – решение системы (E, Λ) такое, что $I(\xi, D\xi) \equiv 0$. Тогда $\eta(t) = \Pi\xi(t) \in E_t^\perp$ – решение системы (E^\perp, Λ^\perp) . Обратно, если $\eta(t)$ – решение системы (E^\perp, Λ^\perp) , то существует решение $\xi(t)$ системы (E, Λ) , единственное mod Γ , такое, что $I(\xi, D\xi) = 0$ и $\eta(t) = \Pi\xi(t)$.

Доказательство аналогично доказательству из [5].

1.4.3 Формула Хилла для приведенного отображения Пуанкаре

Обозначим через $G^\perp: E_t \rightarrow E_t^\perp$ оператор, определяемый соотношением

$$G^\perp(t)\xi(t) = G(t)\xi(t) - s_{\alpha\beta}(G\xi(t), G\zeta^\alpha)G\zeta^\beta, \xi(t) \in E_t.$$

Иными словами $G^\perp(t) = \Pi_t G(t)$. Заметим, что для всех $\xi(t) \in E_t^\perp$, $\zeta(t) \in \Gamma$: $(G\xi(t), \zeta(t + \tau)) = (\xi(t), \zeta(t)) = 0$.

Определение 1.4.1. Пусть $\tilde{P}: E_0^\perp \oplus E_0^\perp \rightarrow E_\tau^\perp \oplus E_\tau^\perp$ – отображение за период τ системы уравнений в вариациях

$$D^{\perp 2}\xi(t) = U^\perp\xi(t), \quad \hat{P} = (\hat{G}^\perp)^{-1}\tilde{P}: E_0^\perp \oplus E_0^\perp \rightarrow E_0^\perp \oplus E_0^\perp, \\ \hat{G}^\perp: \tilde{W}_0 \rightarrow \tilde{W}_\tau, \quad \hat{G}^\perp(\xi(t), \eta(t)) = (G^\perp\xi(t), G^\perp\eta(t)).$$

Определение 1.4.2. Положим

$$X^\perp = \{\eta \in X: \eta(t) \in E_t^\perp\}$$

и обозначим через

$$H^\perp = (-D^{\perp 2} + I)^{-1}(-D^{\perp 2} + U^\perp): X^\perp \rightarrow X^\perp$$

оператор Гессе для приведенной системы (E^\perp, Λ^\perp) . Пусть $Q^\perp: E_0^\perp \rightarrow E_0^\perp$ – линейное отображение параллельного переноса соответствующее уравнению $D^\perp\eta = 0$. Положим $\sigma^\perp = \det Q^\perp = \pm 1$. Если предположение А выполняется, то $\sigma = \sigma^\perp$, поскольку расслоение F ориентируемо.

Теперь можно записать формулу Хилла для приведенного отображения Пуанкаре $\tilde{P}: \tilde{W} \rightarrow \tilde{W}$.

Теорема 9.

$$\begin{aligned} \det(\hat{P} - I) &= \sigma^\perp(-1)^{m-k} \beta \det H^\perp, \\ \beta &= e^{(m-k)\tau} \det^{-2}(e^\tau G^\perp - Q^\perp) > 0. \end{aligned}$$

Отметим, что в общем случае $H^\perp \neq H|_{X^\perp}$, за исключением случая, когда $D^\perp \zeta = 0$. Причина в том, что пространство $X^\perp G^\perp$ -периодических $\eta(t) \in E_t^\perp$ не соответствует пространству G -периодических $\xi(t) \in E_t$ таких, что $I(\xi, D\xi) = 0$. Поэтому h^\perp не есть ограничение h на X^\perp как в геодезическом случае. Так что потребуется обсудить связь между h^\perp и h .

1.4.4 Исключение вырождения второй вариации

Определение 1.4.3. Определим следующие подпространства $Y, Z \subset X$ по формулам

$$Y = \{\xi \in X : I(\xi, D\xi) \equiv \text{const}\}, \quad (1.4.9)$$

$$Z = \{\xi \in X : \xi(t) \in F_t \text{ для всех } t\}. \quad (1.4.10)$$

Если $\zeta^1, \dots, \zeta^k \in \Gamma$ — базисные G -периодические решения, то

$$Z = \left\{ \xi(t) = \lambda_\alpha(t) \zeta^\alpha(t) : \lambda_\alpha(t + \tau) = \lambda_\alpha(t), \int_0^\tau k^{\alpha\beta} \dot{\lambda}_\alpha \dot{\lambda}_\beta dt < \infty \right\}.$$

Лемма 1.4.2. Для любого $\eta \in X$ существует $\xi = \Phi(\eta) \in Y$, единственное mod Γ , такое, что $\xi - \eta \in Z$. В явном виде, $\eta = \xi - \lambda_\alpha \zeta^\alpha$, где λ_α удовлетворяет уравнению (1.4.8), а $c^\alpha = c^\alpha(\eta)$ задается формулой

$$c^\alpha = \kappa^{\alpha\beta} \int_0^\tau k_{\beta\delta} I^\delta(\eta, D\eta) dt, \quad (\kappa^{\alpha\beta}) = (\bar{k}_{\alpha\beta})^{-1}, \quad \bar{k}_{\alpha\beta} = \int_0^\tau k_{\alpha\beta} dt. \quad (1.4.11)$$

Это вытекает из леммы 1.4.1 при G -периодических ξ, η . \square

Таким образом, построена проекция $\Phi: X \rightarrow \hat{Y} = Y/\Gamma$, тождественная на Y и равная нулю на Z . Получаем

Утверждение 1.4.2. $Y \cap Z = \Gamma$ и $Y + Z = X$.

Утверждение 1.4.3. Пространства Y, Z h -ортогональны, т.е. $h(\xi, \eta) = 0$ при всех $\xi \in Z, \eta \in Y$. Ограничение h на Z имеет вид

$$h(\lambda_\alpha \zeta^\alpha, \lambda_\beta \zeta^\beta) = \int_0^\tau k^{\alpha\beta} \dot{\lambda}_\alpha \dot{\lambda}_\beta dt. \quad (1.4.12)$$

Доказательство. Возьмем $\xi \in Z$, $\xi(t) = \lambda_\alpha(t)\zeta^\alpha(t)$. Тогда

$$\begin{aligned}
h(\lambda_\alpha\zeta^\alpha, \eta) &= \int_0^\tau \left((D(\lambda_\alpha\zeta^\alpha), D\eta) + (U\lambda_\alpha\zeta^\alpha, \eta) \right) dt \\
&= \int_0^\tau \left((\dot{\lambda}_\alpha\zeta^\alpha, D\eta) + (\lambda_\alpha D\zeta^\alpha, D\eta) + (\lambda_\alpha D^2\zeta^\alpha, \eta) \right) dt \\
&= \int_0^\tau \left(\frac{d}{dt}(\eta, \lambda_\alpha D\zeta^\alpha) + \dot{\lambda}_\alpha I^\alpha(\eta, D\eta) \right) dt \\
&= (\eta, \lambda_\alpha D\zeta^\alpha) \Big|_0^\tau + \int_0^\tau \dot{\lambda}_\alpha I^\alpha(\eta, D\eta) dt.
\end{aligned} \tag{1.4.13}$$

Здесь использовано, что ζ удовлетворяет системе уравнений в вариациях. Если $\eta = \lambda_\alpha\zeta^\alpha$, то $I^\alpha(\eta, D\eta) = k^{\alpha\beta}\dot{\lambda}_\beta$. Так что

$$h(\lambda_\alpha\zeta^\alpha, \lambda_\beta\zeta^\beta) = \int_0^\tau k^{\alpha\beta}\dot{\lambda}_\alpha\dot{\lambda}_\beta dt + (\lambda_\alpha\zeta^\alpha, \lambda_\beta D\zeta^\beta) \Big|_0^\tau. \tag{1.4.14}$$

Если $\eta \in Y - G$ -периодическое и $\lambda_\alpha(t + \tau) = \lambda_\alpha(t)$, то (1.4.13) дает 0, а (1.4.14) дает (1.4.12). Утверждение 1.4.3 доказано. \square

Обозначение 1.4.2. $\hat{X} = X/\Gamma$, $\hat{Y} = Y/\Gamma$, $\hat{Z} = Z/\Gamma$.

Тогда $\hat{Y} \oplus \hat{Z} = \hat{X}$. Билинейная форма h определяет форму \hat{h} на \hat{X} и $\hat{Y} \perp_{\hat{h}} \hat{Z}$, а $\hat{h}|_{\hat{Z}}$ положительно определена. Получаем:

Следствие 1.4.1. $\text{ind } h = \text{ind } \hat{h}|_{\hat{Y}}$ и $\text{null } h = \text{null } \hat{h}|_{\hat{Y}} + k$.

Следствие 1.4.2. Проекция $\Pi : X \rightarrow X^\perp$ определяет изоморфизм

$$\hat{\Pi}|_{\hat{Y}} : \hat{Y} \rightarrow X^\perp, \quad (\Pi|_{\hat{Y}})^{-1} = \Phi|_{X^\perp}. \tag{1.4.15}$$

Действительно, если $\Pi\xi = 0$ при $\xi \in Y$, то $\xi \in Z$, так что $\xi \in Y \cap Z = \Gamma$ (утверждение 1.4.2). Аналогично $Y + Z = X$ влечет $\Pi(Y) = X^\perp$. \square

Вычислим ограничение $h|_Y$. Пусть $h^\perp(\eta, \eta)$ — билинейная форма приведенной системы (E^\perp, Λ^\perp) .

Утверждение 1.4.4. Пусть $h^\top = h|_Y \circ \hat{\Pi}^{-1}$ — билинейная форма на X^\perp соответствующая форме $h|_Y$. Тогда для каждого $\eta \in X^\perp$ имеем

$$h^\top(\eta, \eta) = h^\perp(\eta, \eta) + \bar{k}_{\alpha\beta}c^\alpha c^\beta, \tag{1.4.16}$$

где $c^\alpha(\eta) = I^\alpha(\xi, D\xi)$, $\xi = \Phi\eta$, задаются формулой (1.4.11).

Это вытекает из следующей более общей формулы.

Лемма 1.4.3. Пусть $\xi(t) = \eta(t) + \lambda_\alpha(t)\zeta^\alpha(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, те же, что в лемме 1.4.1. Тогда

$$h(\xi, \xi) = h(\eta, \eta) - \int_0^\tau k_{\alpha\beta}(I^\alpha(\eta, D\eta) - c^\alpha)(I^\beta(\eta, D\eta) - c^\beta) dt + \left((\lambda_\alpha \zeta^\alpha, \lambda_\beta D\zeta^\beta) + 2(\lambda_\alpha \eta, D\zeta^\alpha) + 2c^\alpha \lambda_\alpha \right) \Big|_0^\tau, \quad (1.4.17)$$

Доказательство. Имеем

$$h(\xi, \xi) = h(\eta, \eta) + 2h(\eta, \lambda_\alpha \zeta^\alpha) + h(\lambda_\alpha \zeta^\alpha, \lambda_\beta \zeta^\beta).$$

Теперь (1.4.17) вытекает из (1.4.13)–(1.4.14) и (1.4.8). \square

Доказательство утверждения 1.4.4.

Если η — G -периодическое векторное поле и функции λ_α периодические, то

$$(\lambda_\alpha \zeta^\alpha, \lambda_\beta D\zeta^\beta) + 2(\lambda_\alpha \eta, D\zeta^\alpha) + 2c^\alpha \lambda_\alpha \Big|_0^\tau = 0$$

Согласно (1.4.11),

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau k_{\alpha\beta}(c^\alpha - I^\alpha(\eta, D\eta))(c^\beta - I^\beta(\eta, D\eta)) dt \\ &= \int_0^\tau k_{\alpha\beta} I^\alpha(\eta, D\eta) I^\beta(\eta, D\eta) dt - 2 \int_0^\tau k_{\alpha\beta} c^\alpha I^\beta(\eta, D\eta) dt + \bar{k}_{\alpha\beta} c^\alpha c^\beta \\ &= \int_0^\tau k_{\alpha\beta} I^\alpha(\eta, D\eta) I^\beta(\eta, D\eta) dt - \bar{k}_{\alpha\beta} c^\alpha c^\beta. \end{aligned}$$

Теперь используем, что $\eta = \Pi\xi \in X^\perp$. Тогда $I^\alpha(\eta, D\eta) = -2(\eta, D^\perp \zeta^\alpha)$, так что

$$\int_0^\tau k_{\alpha\beta} I^\alpha(\eta, D\eta) I^\beta(\eta, D\eta) dt = 4 \int_0^\tau k_{\alpha\beta}(\eta, D^\perp \zeta^\alpha)(\eta, D^\perp \zeta^\beta) dt.$$

Наконец

$$\begin{aligned} h(\eta, \eta) &= \int_0^\tau ((D^\perp \eta, D^\perp \bar{\eta}) + k_{\alpha\beta}(\eta, D^\perp \zeta^\alpha)(\eta, D^\perp \zeta^\beta) + (U\eta, \bar{\eta})) dt \\ &= h^\perp(\eta, \eta) + 4 \int_0^\tau k_{\alpha\beta}(\eta, D^\perp \zeta^\alpha)(\eta, D^\perp \zeta^\beta) dt. \end{aligned}$$

Остается подставить в формулу (1.4.17). \square

Рассмотрим пространство

$$Y^0 = \{\xi \in X : I(\xi, D\xi) \equiv 0\} \subset Y. \quad (1.4.18)$$

Согласно (1.4.16), $h|_{Y^0} = h^\perp \circ \Pi|_{Y^0}$.

Утверждение 1.4.5.

$$Y^0 + Z = \left\{ \eta \in X : \int_0^\tau k_{\alpha\beta}(D^\perp \zeta^\alpha, \eta^\beta) dt = 0 \right\}. \quad (1.4.19)$$

Таким образом, $Y^0 + Z = X$ тогда и только тогда, когда $D^\perp \zeta^\alpha = 0$. Эквивалентно, $DZ \subset Z$. Положим

$$X_0^\perp = \Pi Y^0 = \left\{ \eta \in X^\perp : \int_0^\tau k_{\alpha\beta}(D^\perp \zeta^\beta, \eta) dt = 0 \right\}. \quad (1.4.20)$$

Тогда X_0^\perp имеет коразмерность $\leq k$ в X^\perp . Имеем $h^\top \geq h^\perp$ и $h^\top = h^\perp$ на X_0^\perp . Так как $\text{ind } h^\top = \text{ind } h$, то

$$\text{ind } h^\perp \leq \text{ind } h|_X \leq \text{ind } h^\perp + k.$$

1.4.5 Индексы h и h^\perp

В этом разделе обсуждается связь между индексами $\text{ind } h = \text{ind } h|_Y$ и $\text{ind } h^\perp$. Пусть $\hat{G}^{-1}P: W \rightarrow W$ – отображение Пуанкаре. Как и в разделе 1.2.4, предположим что

$$N = \text{Ker}(\hat{G}^{-1}P - I)^2 = \{v \in W : \hat{G}^{-1}Pv - v \in V\}$$

– симплектическое пространство и $V = \text{Ker}(\hat{G}^{-1}P - I)$ – лагранжево подпространство в N . Пусть w^1, \dots, w^k – базис в пространстве V и q_1, \dots, q_k – базис в лагранжевом дополнении к V в N . Определим матрицы $A = (a_{\alpha\beta})$ и $A^\perp = (a_{\alpha\beta}^\perp)$ по формулам

$$a_{\alpha\beta} = s_{\alpha\delta} \kappa^{\delta\varepsilon} s_{\varepsilon\beta} - s_{\alpha\delta}, \quad a_{\alpha\beta}^\perp = s_{\alpha\beta} - \bar{k}_{\alpha\beta}. \quad (1.4.21)$$

Напомним условия невырожденности раздела 1.2.4:

Условие А. Симметричная матрица

$$K_i = (k_i^{\alpha\beta}), \quad k_i^{\alpha\beta} = \langle B_i w_i^\alpha, w_{i+1}^\beta \rangle,$$

невырождена при всех i ;

Условие В. Матрица

$$\bar{K} = \sum_{i=1}^n K_i^{-1} = (\bar{k}_{\alpha\beta}), \quad \bar{k}_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n k_{\alpha\beta i} \quad (1.4.22)$$

невырождена.

Условие С. Матрица $A^\perp = (a_{\alpha\beta}^\perp)$ невырождена.

Определение 1.4.4. Будем говорить, что γ невырождена mod V , если выполняются условия невырожденности A, B, C .

Теорема 10. Предположим, что γ невырождена mod V . Тогда

$$\text{ind } h - \text{ind } h^\perp = \text{ind } A - \text{ind } A^\perp. \quad (1.4.23)$$

Доказательство см. [5].

Так как форма $h|_{\dot{Z}}$ положительно определенная, как в доказательстве следствия 1.2.4, получаем

Следствие 1.4.3. Предположим, что $\det A \neq 0$. Тогда $(-1)^{\text{ind } h} = (-1)^{\text{ind } h^\perp + \text{ind } b}$.

1.4.6 Пример: автономные системы

Рассмотрим частный случай автономных лагранжевых систем. Тогда система уравнений в вариациях g -периодической траектории γ имеет G -периодическое решение $\zeta(t) = \dot{\gamma}(t)$. Будем предполагать, что γ невырождена в автономном смысле (только два единичных мультипликатора), и существует семейство γ_α g -периодических траекторий периода $\tau(\alpha)$ такое, что $\gamma_0 = \gamma$ и $\tau(0) = \tau$. Пусть $E(\alpha) = \mathcal{H}|_{\gamma_\alpha}$ и $A(\alpha) = \int_{\gamma_\alpha} \langle p, dx \rangle$ — энергия и действие Мопертюи траектории γ_α .

Лемма 1.4.4. Предположим, что $dE/d\tau \neq 0$. Тогда

$$(-1)^{\text{ind } b} = -\text{sign}(\tau'(\alpha)E'(\alpha)) = -\text{sign} \frac{dE}{d\tau}.$$

Доказательство. Объединение траекторий γ_α в фазовом пространстве $TM \cong T^*M$ — симплектический цилиндр Σ . Ограничивая гамильтонову систему на Σ , получим интегрируемую гамильтонову систему с одной степенью свободы и гамильтонианом $H(\vartheta, I) = E(I)$, где $\vartheta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $I \in \mathbb{R}$. Можно считать, что $\alpha = I$, $\gamma_\alpha(t) = (E'(\alpha)t, \alpha)$. Тогда $\tau(\alpha) = 1/\nu(\alpha)$, где частота равна $\nu(\alpha) = E'(\alpha)$. Имеем $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Матрица монодромии траектории γ_α равна $\hat{G}^{-1}P = \hat{G}^{-1}P_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \nu'/\nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Отсюда $\hat{G}^{-1}Pv = \begin{pmatrix} \nu'/\nu \\ 1 \end{pmatrix}$, так что $s = \omega(\hat{G}^{-1}Pv, v) = \nu'/\nu = -\tau^{-2} d\tau/dE$. \square

Обозначение 1.4.3. $\text{ind } \gamma = \text{ind } h(\gamma)$.

Утверждение 1.4.6. Пусть g -периодическая траектория γ имеет ровно 2 единичных мультипликатора. Предположим, что $\sigma(-1)^{m+\text{ind}\gamma} dE/d\tau < 0$. Тогда γ имеет вещественный мультипликатор $\rho > 1$.

Доказательство. Так как $\sigma = \sigma^\perp$, согласно следствию 1.4.3 и лемме 1.4.4,

$$(-1)^{\text{ind}h^\perp} = -\text{sign}(dE/d\tau)(-1)^{\text{ind}\gamma}.$$

Размерность приведенной системы равна $m^\perp = m - 1$. Так что

$$\sigma(-1)^{m^\perp+\text{ind}h^\perp} = \sigma(-1)^{m-1+\text{ind}\gamma}(-\text{sign}(dE/d\tau)) = -1.$$

Из следствия 1.3.12, примененного к приведенной формуле Хилла (7), вытекает, что существует мультипликатор $\rho > 1$. \square

Пример 1.4.1.

Пусть материальная точка в \mathbb{R}^m движется в потенциальном поле с однородным потенциалом

$$V(\lambda x) = \lambda^k V(x), \quad \lambda > 0, \quad k(k-2) \neq 0.$$

Предположим, что $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм, сохраняющий лагранжиан. Введем в \mathbb{R}^m обобщенные сферические координаты $(r, \phi_1, \dots, \phi_{m-1})$, $g(x) = (g_r(x), g_{\phi_1}(x), \dots, g_{\phi_{m-1}}(x))$. Тогда $V(x)$ можно представить в виде $V(x) = r^k f(\phi_1, \dots, \phi_{m-1})$, $g_r(x) = r$, $f(g_{\phi_1}(x), \dots, g_{\phi_{m-1}}(x)) = f(\phi_1, \dots, \phi_{m-1})$.

Пусть γ — g -периодическое решение с энергией E , $\gamma(t + \tau) = g\gamma(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда $\gamma_\lambda(t) = \gamma(\lambda^{k/2-1}t)$ — g -периодическая решение с “периодом” $\tau(\lambda) = \lambda^{1-k/2}\tau$ энергией $E(\lambda) = \lambda^k E$. Так что

$$\frac{dE(\lambda)}{d\tau(\lambda)} = \frac{2k}{k-2} \left(\frac{\tau(\lambda)}{\tau} \right)^{(k+2)/(k-2)} E. \quad (1.4.24)$$

Отсюда по лемме 1.4.4,

$$(-1)^{\text{ind}b} = \text{sign} \frac{2-k}{k}.$$

Рассмотрим задачу о движении материальной точки в \mathbb{R}^m в силовом поле с однородным потенциалом степени k , где $k(k-2) \neq 0$. Из уравнений $\sigma = 1$, (1.4.24), и предложения 1.4.6 вытекает

Предложение 1.4.1. Пусть g -периодическая траектория γ имеет ровно 2 единичных мультипликатора. Предположим, что $(-1)^{m+\text{ind}\gamma}(k-2)/k < 0$. Тогда γ имеет вещественный мультипликатор $\rho > 1$.

Глава 2

Диффузия Арнольда в окрестности сильных резонансов

2.1 Сепаратрисное отображение

Невозмущенная система имеет гиперболическое многообразие $N = \{u = v = 0\}$, расслаивающееся на инвариантные торы

$$N(y^0) = \{y = y^0, u = v = 0\}. \quad (2.1.1)$$

Рассмотрим асимптотические многообразия

$$\Gamma^\pm = \bigcup_{y \in \mathcal{D}} \{y\} \times \mathbb{T}^n \times \gamma^\pm \times \mathbb{T}. \quad (2.1.2)$$

Диффузионная траектория будет строиться в окрестности многообразия $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$.

Инвариантные в невозмущенной системе $(n + 1)$ -мерные торы (2.1.1) называются частично гиперболическими торами [40, 68], [22, 64]. Асимптотические многообразия $\Gamma^\pm(y^0)$,

$$\begin{aligned} \Gamma^+(y^0), \Gamma^-(y^0) &\subset \{(y, x, v, u, t) : y = y^0, H_0(y^0, v, u) = H_0(y^0, 0, 0)\}, \\ \Gamma^\pm(y^0) &= \{y^0\} \times \mathbb{T}^n \times \gamma^\pm \times \mathbb{T}. \end{aligned}$$

состоят из невозмущенных решений, которые стремятся к $N(y^0)$ при $t \rightarrow \pm\infty$.

Рассмотрим динамику возмущенной системы в малой окрестности множества

$$\Gamma = \bigcup_{y \in \mathcal{D}} (\Gamma^+(y) \cup \Gamma^-(y)).$$

Пусть T_ε – сдвиг вдоль фазового потока возмущенной системы за время 1. При $\varepsilon = 0$ сдвиг T_0 является интегрируемым симплектическим отображением, для которого $L(y) = \text{pr}(N(y))$ – n -мерные гиперболические торы и $\Sigma^\pm(y) = \text{pr}(\Gamma^\pm(y))$ – асимптотические поверхности, где pr – проекция $(y, x, v, u, t) \mapsto (y, x, v, u)$.

Определим теперь сепаратрисное отображение \mathcal{SM}_ε , соответствующее отображению T_ε , в окрестности Σ

$$\Sigma = \cup_{y \in \overline{\mathcal{D}}} (\Sigma^+(y) \cup \Sigma^-(y)).$$

Пусть U – окрестность невозмущенного гиперболического многообразия $L = \cup_{y \in \overline{\mathcal{D}}} L(y)$ и \mathbf{U} – окрестность Σ . Если выбрать \mathbf{U} достаточно малой, $\mathbf{U} \setminus U$ разбивается на две связные компоненты \mathbf{U}^+ и \mathbf{U}^- , такие что $\Sigma^\pm \subset \mathbf{U}^\pm \cup U$.

Рассмотрим точку $z \in \mathbf{U}^+ \cup \mathbf{U}^-$. Пусть $m_1 = m_1(z)$ – самое маленькое натуральное число, такое что $T_\varepsilon^{m_1}(z) \notin \mathbf{U}^+ \cup \mathbf{U}^-$ и пусть $m_2 = m_2(z)$ – минимальное натуральное число с $m_2 > m_1$ и $T_\varepsilon^{m_2}(z) \in \mathbf{U}^+ \cup \mathbf{U}^-$. Тогда для $m = m_1$ траектория $T_\varepsilon^m(z)$ выходит из области $\mathbf{U}^+ \cup \mathbf{U}^-$. При $m = m_2$ траектория возвращается в $\mathbf{U}^+ \cup \mathbf{U}^-$. Обозначим через \mathbf{G} множество точек z , таких что $m_2 < \infty$ и $T_\varepsilon^{m_1}(z), \dots, T_\varepsilon^{m_2-1}(z) \in U$. Полагая,

$$\mathbf{U}_\varepsilon = \mathbf{U}^+ \cup \mathbf{U}^- \cap \mathbf{G},$$

получим отображение $\mathbf{U}_\varepsilon \ni z \mapsto T_\varepsilon^{m_2(z)}(z)$.

Отображение \mathcal{SM}_ε называется сепаратрисным отображением:

$$z \mapsto \mathcal{SM}_\varepsilon(z) = T_\varepsilon^{t_+(z)}(z), \quad t_+(z) = m_2(z) + m.$$

2.2 Явный вид сепаратрисного отображения

В этом разделе кратко повторяются результаты работы [65], которые понадобятся нам в дальнейшем. Рассмотрим разложение функции $H_1(y, x, 0, 0, t): \mathcal{D} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ в ряд Фурье

$$H_1(y, x, 0, 0, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n, k_0 \in \mathbb{Z}} H_1^{k, k_0}(y) e^{2\pi i(\langle k, x \rangle + k_0 t)}.$$

Пусть $\phi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ – бесконечно гладкая функция, такая что $\phi(r) = 0$ для всех $|r| \geq 1$, и $\phi(r) = 1$ для всех $|r| \leq 1/2$.

Определение 2.2.1.

$$\overline{\mathbf{H}}(y, x, t) = \sum_{(k, k_0) \in \mathbb{Z}^{n+1}} \phi\left(\frac{\langle k, \nu(y) \rangle + k_0}{\varepsilon^{1/4}}\right) H_1^{k, k_0}(y) e^{2\pi i(\langle k, x \rangle + k_0 t)}, \quad (2.2.1)$$

$$\mathbf{H}(y, x) = \overline{\mathbf{H}}(y, x, 0). \quad (2.2.2)$$

Определение 2.2.2. Для любой функции $f \in C^j(\overline{\mathcal{D}} \times \mathbb{T}^n)$, $g \in C^0(\overline{\mathcal{D}} \times \mathbb{T}^n)$, и $\delta > 0$ будем говорить, что $f = O^{(\delta)}(g)$ если для любых $l', l'' \in \{0, 1, \dots\}$, $l' + l'' := l \leq j$

$$\left| \frac{\partial^{l'+l''} f}{\partial y_1^{l'_1} \dots \partial y_n^{l'_n} \partial x_1^{l''_1} \dots \partial x_m^{l''_m}} \right| < C_l \delta^{-l'} |g|, \quad y \in \overline{\mathcal{D}}, \quad x \in \mathbb{T}^n$$

где C_l не зависит от δ , $l' = l'_1 + \dots + l'_n$, $l'' = l''_1 + \dots + l''_m$. Здесь предполагается, что f принимает значения в \mathbb{R}^s , где s – произвольное натуральное число.

Из (2.2.2) следует, что $\overline{\mathbf{H}}, \mathbf{H} \in C^r(\overline{\mathcal{D}} \times \mathbb{T}^n)$ и $\mathbf{H} = O^{(\varepsilon^{1/4})}(1)$. Более точно,

$$\begin{aligned} |\mathbf{H}_x| &< C_H, \quad |\mathbf{H}_y| < (C_0 \varepsilon^{-1/4} + 1) C_H, \\ C_H &= 2\pi \sum_{(k, k_0) \in \mathbb{Z}^{n+1}} (1 + |k|) \|H_1^{k, k_0}\|_{C^1}, \quad C_0 = \|H_{0yy}\|_{C^0}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Утверждение 2.2.1. Для любых $y \in \overline{\mathcal{D}}$, $x \in \mathbb{T}^n$ и $t \in \mathbb{Z}$

$$\mathbf{H}(y, x + \nu(y)l) = \mathbf{H}(y, x) + O^{(\varepsilon^{1/4})}(\varepsilon^{1/4}l), \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (2.2.4)$$

В статьях [65]–[66] строятся координаты $(\rho, \zeta, r, \tau, \sigma)$ на $\mathbf{U}^+ \cup \mathbf{U}^-$, такие что

- 1) $dy \wedge dx + dv \wedge du = \varepsilon(d\rho \wedge d\zeta + dr \wedge d\tau)$,
- 2) для некоторой функции $f = f(y, u, v, \varepsilon) = O^{(\varepsilon^{1/4})}(1)$ с $f(y, 0, 0, 0) = 0$

$$\begin{aligned} \varepsilon\rho &= y + O^{(\varepsilon^{1/4})}(\varepsilon^{3/4}, H_0 - E), \quad \zeta = x + f(y, u, v, \varepsilon), \\ \varepsilon r &= H_0 - E + O^{(\varepsilon^{1/4})}(\varepsilon^{3/4}, H_0 - E), \end{aligned}$$

где $H_0 = H_0(y, u, v)$ и $E = E(y)$,

- 3) переменная $\tau \in [-1, 1]$ аналог времени t ,

4) $\sigma \in \{-1, 1\}$ обозначает область (1 соответствует \mathbf{U}^+ и -1 соответствует \mathbf{U}^-), в которой оказывается точка траектории.

Пусть $\mathcal{P}_m = (\rho_m, \zeta_m, r_m, \tau_m, t_m, \sigma_m)$, $m \in \mathbb{Z}$ – траектория \mathcal{SM}_ε . В работе [66] доказываются формулы, связывающие \mathcal{P}_{m+1} и \mathcal{P}_m . Для этого вводится дискретная переменная

$$\vartheta \in \{-1, 1\}, \quad \vartheta_{m+1} = \text{sign}(r_{m+1} - \mathbf{H}(\varepsilon\rho_{m+1}, \zeta_m)),$$

тогда имеет место

Теорема 11. ([61],[65],[66]). Пусть выполнены предположения $\mathbf{H}_0\mathbf{1}$ – $\mathbf{H}_0\mathbf{2}$, $\overline{K} = \frac{1}{10}|\log \varepsilon|$, $K_0 > 0$ – (большая) константа, не зависящая от ε и удовлетворяющая неравенству $\overline{K} + K_0 < \frac{1}{9}|\log \varepsilon|$.

Тогда существуют C^r -гладкие функции

$$\lambda, \kappa^\pm: \bar{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Theta^\pm: \bar{\mathcal{D}} \times \mathbb{T}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

и координаты $(\rho, \zeta, \tau, t, \sigma, \vartheta)$, такие что для любой траектории $(\rho_m, \zeta_m, \tau_m, t_m, \sigma_m, \vartheta_m)$ сепаратрисного отображения, где

$$-\bar{K} - K_0 \leq -\lambda t_{m+1} - \log \varepsilon \leq -K_0, \quad (2.2.5)$$

выполнены уравнения:

$$\begin{aligned} \rho_{m+1} &= \rho_m - \widehat{\Theta}_\zeta^{\sigma_m}(\varepsilon \rho_{m+1}, \zeta_m, \tau_m) + (\tau_{m+1} - \tau_m - t_{m+1}) \mathbf{H}_\zeta(\varepsilon \rho_{m+1}, \zeta_m) + \widehat{\mathbf{O}}_2, \\ \zeta_{m+1} &= \zeta_m + \nu t_{m+1} - (\tau_{m+1} - \tau_m - t_{m+1}) \mathbf{H}_\rho(\varepsilon \rho_{m+1}, \zeta_m) + \widehat{\mathbf{O}}_1, \\ \widehat{\Theta}_\tau^{\sigma_m}(\varepsilon \rho_{m+1}, \zeta_m, \tau_m) &= \frac{\lambda}{\varepsilon} \left(\frac{\vartheta_m}{\kappa^{\sigma_{m-1}}} e^{\lambda(\tau_m - \tau_{m-1} - t_m)} - \frac{\vartheta_{m+1}}{\kappa^{\sigma_m}} e^{\lambda(\tau_{m+1} - \tau_m - t_{m+1})} \right) + \widehat{\mathbf{O}}_2, \\ \sigma_{m+1} &= \sigma_m \vartheta_{m+1}. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Здесь $\lambda, \nu, \kappa^\sigma$ – функции от $\varepsilon \rho_{m+1}$;

$$\widehat{\Theta}(\varepsilon \rho, \zeta, \tau) = \Theta(\varepsilon \rho, \zeta - \nu(\varepsilon \rho)\tau, \tau); \quad (2.2.7)$$

$$\widehat{\mathbf{O}}_1 = O(\varepsilon^{-3/4})(\varepsilon^{7/8} \log^2 \varepsilon), \quad \widehat{\mathbf{O}}_2 = O(\varepsilon^{-3/4})(\varepsilon^{1/8} \log^2 \varepsilon), \quad \text{относительно } \rho_+.$$

Функции $\lambda > 0$ и $\kappa^\pm > 0$ определяются по невозмущенной системе. Кривые $\widehat{\gamma}^\pm$ параметризуются временем с точностью до сдвига: $t \mapsto t + t_0(y)$. Положим

$$H_*^\sigma(y, \xi, \tau, t) = H_1(\Gamma^\sigma(y, \xi, t), t - \tau) - H_1(y, \xi + \nu(y)t, 0, 0, t - \tau).$$

Тогда $H_*^\sigma(y, \xi, \tau, t)$ стремится к нулю с экспоненциальной скоростью при $t \rightarrow \pm\infty$. Определим

$$\widehat{\Theta}^\sigma(y, \zeta, \tau) = \Theta^\sigma(y, \zeta - \nu(y)\tau, \tau), \quad \Theta^\sigma(y, \xi, \tau) = - \int_{-\infty}^{+\infty} H_*^\sigma(y, \xi, \tau, t) dt.$$

Функции Θ^\pm – интегралы Пуанкаре-Мельникова и лежат в Λ_N . Заметим, что типичность функции H_1 эквивалентна типичности функций Θ^\pm в том смысле, что типичному множеству возмущений соответствует типичное множество интегралов Пуанкаре-Мельникова. Поэтому далее мы будем проверять условия на типичность для интегралов Пуанкаре-Мельникова.

2.3 Построение траектории

В этом разделе кратко приводятся результаты работы [66], см. также [63], которые позволяют строить траектории сепаратрисного отображения. Определяются такие понятия как квази-траектория (код) и приводятся правила, по которым разрешается продолжать код. Лемма 2.3.1, утверждает, что для удлиненного кода найдется соответствующая траектория.

Далее для простоты считается, что $\sigma \equiv 1$ и, следовательно, $\vartheta \equiv 1$.

Кроме переменных ρ, ζ, τ также используются переменные η, ξ, τ , которые связаны отображением

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2, \quad \pi(\rho, \zeta, \tau) = (\eta, \xi, \tau) = (\varepsilon\rho, \zeta - \nu(\varepsilon\rho)\tau, \tau), \\ \widehat{\Theta}^\sigma(y, \zeta, \tau) &= \Theta^\sigma(y, \zeta - \nu(y)\tau, \tau). \end{aligned}$$

В новых переменных интеграл Пуанкаре-Мельникова $\widehat{\Theta} = \widehat{\Theta}^+$ равен $\Theta = \Theta^+$, который периодичен по ξ и τ . Пусть

$$\bar{\partial} = -\langle \nu, \partial/\partial\xi \rangle + \partial/\partial\tau. \quad (2.3.1)$$

Определение 2.3.1. *Положим*

$$\begin{aligned} J_0 &= \{(\eta, \xi, \tau) \in \bar{\mathcal{D}} \times \mathbb{T}^{n+1} : \bar{\partial}\Theta(\eta, \xi, \tau) = 0, \bar{\partial}^2\Theta(\eta, \xi, \tau) \neq 0\}, \\ \mathcal{J}_0 &= \pi^{-1}(J_0) \cap \{(\rho, \zeta, \tau) : -1 < \tau < 1\} \subset \frac{1}{\varepsilon}\bar{\mathcal{D}} \times \mathbb{T}^n \times (-1, 1). \end{aligned}$$

Множество \mathcal{J}_0 также можно определить так:

$$\mathcal{J}_0 = \left\{ (\rho, \zeta, \tau) \in \frac{1}{\varepsilon}\bar{\mathcal{D}} \times \mathbb{T}^n \times (-1, 1) : \widehat{\Theta}_\tau(\varepsilon\rho, \zeta, \tau) = 0, \widehat{\Theta}_{\tau\tau}(\varepsilon\rho, \zeta, \tau) \neq 0 \right\}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\widehat{\Theta}_\tau(\varepsilon\rho, \zeta, \tau) = z, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (2.3.2)$$

Его можно разрешить относительно τ для малых $|z|$ около любой точки $(\rho_0, \zeta_0, \tau_0) \in \mathcal{J}_0$. Это решение является гладкой функцией $\Psi^{\rho_0, \zeta_0, \tau_0}(\varepsilon\rho, \zeta, z)$, принимающей значения внутри интервала $(-2, 2)$.

Определение 2.3.2.

$$\mathcal{J}_{c', c''} = \{(\rho_0, \zeta_0, \tau_0) \in \mathcal{J}_0 : \Psi = \Psi^{\rho_0, \zeta_0, \tau_0}(\varepsilon\rho, \zeta, z) \text{ гладкая для} \quad (2.3.3)$$

$$\varepsilon^{3/4}|\rho - \rho_0| < c', \quad |\zeta - \zeta_0| < c', \quad |z| < c', \text{ где} \quad (2.3.4)$$

$$|\Psi| < 2, \quad |\Psi_\rho| < \varepsilon^{3/4}/c'', \quad |\Psi_\zeta| < 1/c'', \quad |\Psi_z| < 1/c''\}, \quad (2.3.5)$$

$$J_{c', c''} = \{(\eta, \xi, \tau) \in J_0 : \pi^{-1}(\eta, \xi, \tau) \cap \mathcal{J}_{c', c''} \neq \emptyset\}. \quad (2.3.6)$$

Ясно, что

$$\bigcup_{c' > 0, c'' > 0} \mathcal{J}_{c', c''} = \mathcal{J}_0, \quad \bigcup_{c' > 0, c'' > 0} J_{c', c''} = J_0.$$

Пусть зафиксированы достаточно малые константы c', c'' . Обозначим

$$\Omega = (\rho, \zeta, \tau, t), \quad \mathcal{O} = (\Omega_0, \dots, \Omega_m), \quad \Omega_j = (\rho_j, \zeta_j, \tau_j, t_j), \quad 0 \leq j \leq m.$$

Определение 2.3.3. Пусть C – большая константа и константа b удовлетворяет неравенству

$$0 < b < \min\{1/3, c'/2\}$$

Определим

$$b_\rho = \frac{b^5}{60C^3} e^{K_0}, \quad b_\tau = \frac{b^4}{3C^2} e^{K_0}, \quad b_\zeta = \frac{b^5}{48C^3} e^{K_0}.$$

Здесь предполагается, что $K_0 = K_0(C, b)$ выбрана так, что числа b_ρ , b_τ и b_ζ достаточно велики.

Определение 2.3.4. Определим расстояние между двумя точками Ω', Ω'' по формуле

$$d(\Omega', \Omega'') = \begin{cases} +\infty, & \text{если } t' \neq t'', \\ \max\{b_\rho |\rho' - \rho''|, \varepsilon^{-3/4} b_\zeta |\zeta' - \zeta''|, b_\tau |\tau' - \tau''|\} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь $|\cdot|$ – стандартная метрика на соответствующем пространстве.

Определение 2.3.5. Будем называть последовательность $\bar{\mathcal{O}} = (\bar{\Omega}_0, \dots, \bar{\Omega}_m)$, $m \geq 0$ квази-траекторией или кодом, если

$$(\bar{\rho}_j, \bar{\zeta}_j, \bar{\tau}_j) \in \mathcal{J}_{c', c''}, \quad 0 \leq j \leq m, \quad (2.3.7)$$

$$\bar{t}_j \in \mathbb{N}, \quad |\bar{\tau}_j| < 1, \quad 0 \leq j \leq m, \quad (2.3.8)$$

$$K_0 \leq \lambda(\varepsilon \rho_j) \bar{t}_j + \log \varepsilon \leq K_0 + \bar{K}, \quad 0 < j \leq m. \quad (2.3.9)$$

По поводу констант K_0, \bar{K} см. теорему 11.

Определение 2.3.6. Траектория \mathcal{O} называется допустимой, если найдется код $\bar{\mathcal{O}}$, такой что

$$d(\Omega_j, \bar{\Omega}_j) < b(2 - b^{1+m-j}), \quad 0 \leq j \leq m, \quad (2.3.10)$$

$$(\rho_0, \zeta_0, \tau_0) \in \mathcal{J}_{c', c''}, \quad (\rho_m, \zeta_m, \tau_m) \in \mathcal{J}_{c', c''}. \quad (2.3.11)$$

Используя неравенство $2b < c'$, условия (2.3.11) можно записать как

$$\tau_0 = \Psi^{\bar{\rho}_0, \bar{\zeta}_0, \bar{\tau}_0}(\varepsilon \rho_0, \zeta_0, 0), \quad \tau_m = \Psi^{\bar{\rho}_m, \bar{\zeta}_m, \bar{\tau}_m}(\varepsilon \rho_m, \zeta_m, 0).$$

Определение 2.3.7. Пусть \mathcal{O} — допустимая траектория с кодом $\bar{\mathcal{O}}$. Квази-траектория (Ω, Ω_+) называется совместной с \mathcal{O} , если

$$\Omega = \bar{\Omega}_m, \quad (2.3.12)$$

$$|\rho_+ - \rho_m + \hat{\Theta}_\zeta(\varepsilon\rho_+, \zeta_m, \tau_m) - (\tau_+ - \tau_m - t_+)\mathbf{H}_\zeta(\varepsilon\rho_+, \zeta_m)| < \frac{b^2}{2b_\rho}, \quad (2.3.13)$$

$$|\zeta_+ - \zeta_m - \nu(\varepsilon\rho_+)t_+ + (\tau_+ - \tau_m - t_+)\mathbf{H}_\rho(\varepsilon\rho_+, \zeta_m)| < \frac{b^2\varepsilon^{3/4}}{2b_\zeta}. \quad (2.3.14)$$

Ниже приводится лемма из [63], см. также [66], которая нужна для построения траектории.

Лемма 2.3.1. Пусть $\mathcal{O}^0 = (\Omega_0^0, \dots, \Omega_m^0)$ — допустимая траектория с кодом $\bar{\mathcal{O}}$, и пусть квази-траектория $(\bar{\Omega}_m, \Omega_+)$ совместна с \mathcal{O}^0 . Тогда найдется траектория $\hat{\mathcal{O}} = (\hat{\Omega}_0, \dots, \hat{\Omega}_{m+1})$ с кодом

$$(\bar{\Omega}_0, \dots, \bar{\Omega}_{m+1}), \quad \bar{\Omega}_{m+1} = \Omega_+.$$

Таким образом, для продолжения допустимой траектории достаточно построить совместную с ней квази-траекторию.

2.4 Окрестность резонанса

В этом разделе обсуждается поведение типичной функции Θ в окрестности резонанса S_δ^k . Напомним, что $\delta = O(|\log^{-1} \varepsilon|)$. Существует константа $C(k)$, которая зависит от целочисленного вектора k , но не зависит от ε , такая что

$$S_\delta^k \subset \{\eta: \inf_{\eta_* \in S_0^k} |\eta - \eta_*| \leq C(k)\delta\}.$$

Далее через $\eta_* = \varepsilon\rho_*$ будем обозначать точку пересечения кривой χ с резонансной гиперповерхностью. Без ограничения общности можно считать, что $\eta_* = 0$. Пусть

$$\eta_0 \in B(\eta_*, C(k)\delta) = \{\eta: |\eta - \eta_*| \leq C(k)\delta\}.$$

Так как через точку η_* проходит ровно один сильный резонанс, то для достаточно малых ε , всегда можно добиться того, что через шар $B(0, C(k)\delta)$ не проходит никакой другой сильный резонанс, кроме S_0^k . Поскольку все резонансные целочисленные векторы, соответствующие ненулевым коэффициентам Фурье функции $\mathbf{H}(\eta, \zeta)$, являются сильными резонансами, то можно уточнить вид этой функции при $\eta \in B(0, C(k)\delta)$:

Замечание 2.4.1. $\mathbf{H}(\eta, \zeta) = \mathbf{H}_*(\eta, \varphi)$ для всех $\eta \in B(0, C(k)\delta)$, где $\varphi = \langle \bar{k}, \zeta \rangle$, и

$$\mathbf{H}_*(\eta, \varphi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi\left(j \frac{-\langle \bar{k}, \nu(\eta) \rangle + k_0}{\varepsilon^{1/4}}\right) H_1^{jk}(\eta) e^{2\pi i j \varphi}. \quad (2.4.1)$$

Согласно **Н₁1**, это конечная сумма.

Обозначим через $\beta \in \mathbb{R}^n$ произвольный вектор единичной длины $|\beta|$.

Утверждение 2.4.1. Для каждого Θ из некоторого типичного подмножества $\Xi \subset \Lambda_N$, $N \geq 1$ и любого $\epsilon > 0$, при достаточно малых положительных ε, c', c'' , найдется функция $s_{\beta,0} = s_{\beta,0}(\zeta): \mathbb{T}^n \rightarrow [0, (\bar{K}/\lambda)^{1/2}]$, такая что

1) $(\eta_0, \zeta - \nu(\eta_0)s_{\beta,0}(\zeta), \{s_{\beta,0}(\zeta)\}) \in \mathcal{J}_{2c', 2c''}$;

2) множество точек разрыва функции $s_{\beta,0}$ лежит в объединении конечного числа гладких компактных подмногообразий тора \mathbb{T}^n коразмерности 1;

3) $\left| \int_{\mathbb{T}^n} \hat{\Theta}_\zeta(\eta_0, \zeta, s_{\beta,0}(\zeta)) d\zeta - \lambda_0 \beta \right| < \epsilon$.

Здесь $\lambda_0 = \lambda_0(\Theta)$ – положительное число, которое не зависит от $\epsilon, \varepsilon, c', c''$, а семейство Ξ не зависит от выбора точки $\eta_0 \in B(0, C(k)\delta)$.

Доказательство утверждения см. в приложении 2.6.1.

Поскольку слагаемое $-\hat{\Theta}_\zeta^{\sigma_m}$ в (2.2.6) вносит важный вклад в приращение $\rho_{m+1} - \rho_m$, функции $s_{\beta,0}$ окажутся полезными для контроля за величиной $\langle \rho_{m+1} - \rho_m, \beta \rangle$, характеризующей продвижение траектории вдоль χ . По определению $\mathcal{J}_{2c', 2c''}$ (см. (2.3.3)) в малой окрестности любой точки $(\eta_0, \zeta_0 - \nu(\eta_0)\tau_0, \tau_0) \in \mathcal{J}_{2c', 2c''}$ можно разрешить относительно τ :

$$\tau = \Psi^{\eta_0/\varepsilon, \zeta_0, \tau_0}(\eta, \zeta, 0). \quad (2.4.2)$$

В частности, для всех $\eta \in B(\eta_0, c'\varepsilon^{1/4})$ определена гладкая при фиксированном ζ_0 функция от η :

$$\hat{s}_{\beta,0} = \hat{s}_{\beta,0}(\eta, \zeta_0) = \Psi^{\eta_0/\varepsilon, \zeta_0, \tau_0}(\eta, \zeta_0, 0). \quad (2.4.3)$$

Утверждение 2.4.2. Для типичной функции $\Theta \in \Lambda_N$, $N \geq 1$ для любого $\epsilon > 0$ существует $\varepsilon_0 > 0$, такое что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполнено:

1) $(\eta, \zeta - \nu(\eta)\hat{s}_{\beta,0}(\eta, \zeta), \{\hat{s}_{\beta,0}(\eta, \zeta)\}) \in \mathcal{J}_{2c', 2c''}$;

2) множество точек разрыва функции $\hat{s}_{\beta,0}(\eta, \cdot)$ лежит в гладком компактном подмногообразии тора \mathbb{T}^n коразмерности 1;

3) $\left| \int_{\mathbb{T}^n} \hat{\Theta}_\zeta(\eta, \zeta, \hat{s}_{\beta,0}(\eta, \zeta)) d\zeta - \lambda_0 \beta \right| < \epsilon$.

Поясним неформально, как будут выбираться точки η_0 . Траектория будет строиться отдельными участками, и будет показано, что на каждом участке траектория осуществляет продвижение вдоль χ , и средний сдвиг за каждый шаг

сепаратрисного отображения имеет порядок $O(\varepsilon)$. Пусть $(\eta_1, \zeta_1, \tau_1, t_1)$ — начальная точка какого-нибудь такого участка. Тогда в качестве η_0 будет браться точка из очень малой¹ окрестности точки η_1 , и эта точка η_0 будет использоваться на протяжении всего участка. Ниже мы покажем, что переменная η на протяжении всего участка будет находиться в $c'\varepsilon^{1/4}$ -окрестности точки η_0 , и функция (2.4.2) определена для всех точек участка.

Обозначим

$$F_{c',c'',\eta_0}^\beta(\eta, \zeta) = \Theta_\zeta(\eta, \zeta - \hat{s}_{\beta,0}(\eta, \zeta)\nu(\eta), \hat{s}_{\beta,0}(\eta, \zeta)), \quad (2.4.4)$$

Также для всех $\eta \in B(\eta_0, c'\varepsilon^{1/4})$ через $\mathcal{A}(\eta)$ обозначим множество точек разрыва $F_{c',c'',\eta_0}^\beta(\eta, \zeta)$ при фиксированном η :

$$\mathcal{A}(\eta) = \{\zeta \in \mathbb{T}^n : F_{c',c'',\eta_0}^\beta(\eta, \cdot) \notin C^0(\zeta)\}. \quad (2.4.5)$$

Далее считаем числа c', c'' зафиксированными, и соответствующие им индексы у отображения F_{c',c'',η_0}^β для краткости будем опускать. Также будем опускать индекс η_0 . Следующая лемма показывает, каким образом будет строиться совместная квази-траектория. Применяя затем лемму 2.3.1, получаем, что существует допустимая траектория, соответствующая удлинённому коду.

Лемма 2.4.1. *Пусть имеется допустимая траектория \mathcal{O} с кодом $\bar{\mathcal{O}}$ и целое число \bar{t}_{m+1} , удовлетворяющее неравенствам*

$$(K_0 - \log \varepsilon)/\lambda + (\bar{K}/\lambda)^{1/2} \leq \bar{t}_{m+1} \leq (K_0 + \bar{K} - \log \varepsilon)/\lambda. \quad (2.4.6)$$

Тогда для любого единичного $\beta \in \mathbb{R}^n$ найдется совместная квази-траектория $(\bar{\Omega}_m, \bar{\Omega}_{m+1})$, такая что

$$\hat{\Theta}_\zeta(\varepsilon\bar{\rho}_{m+1}, \bar{\zeta}_{m+1}, \bar{\tau}_{m+1}) = F^\beta(\varepsilon\rho_m, \zeta_m + \nu(\varepsilon\rho_m)\bar{t}_{m+1}) + \alpha_\beta, \quad (2.4.7)$$

$$|\alpha_\beta| = O(\varepsilon^{3/4}|\log \varepsilon|).$$

Доказательство. Для краткости обозначим $\Omega_+ = \bar{\Omega}_{m+1}$. Рассмотрим уравнение относительного неизвестного t :

$$\hat{\Theta}_\zeta(\varepsilon\rho_m, \zeta_m, \tau_m - t - \bar{t}_{m+1}) = F^\beta(\varepsilon\rho_m, \zeta_m + \nu(\varepsilon\rho_m)\bar{t}_{m+1}), \quad (2.4.8)$$

$$t \in \left[-(\bar{K}/\lambda)^{1/2}, 0 \right]. \quad (2.4.9)$$

По определению F^β найдется $t = \hat{t}$ из интервала (2.4.9), такое что $(\varepsilon\rho_m, \zeta_m + \nu(\varepsilon\rho_m)(\hat{t} + \bar{t}_{m+1} - \tau_m), \tau_m - \hat{t} - \bar{t}_{m+1}) \in \mathcal{J}_{2c', 2c''}$ и выполняется уравнение

¹порядка ε

(2.4.8). Определим $t_+, \tau_\beta, \zeta_\beta$ по формулам $t_+ - \tau_\beta = \hat{t} + \bar{t}_{m+1} - \tau_m$, $t_+ \in \mathbb{Z}$, $\tau_\beta \in (-1/2, 1/2]$, $\zeta_\beta = \zeta_m + \nu(\varepsilon\rho_m)t_+$. Тогда

$$t_+ \in \left[(K_0 - \log \varepsilon)/\lambda, (K_0 + \bar{K} - \log \varepsilon)/\lambda \right] \cap \mathbb{Z}.$$

Кроме того, $(\varepsilon\rho_m, \zeta_\beta - \nu(\varepsilon\rho_m)\tau_\beta, \tau_\beta) \in \mathcal{J}_{2c', 2c''}$ и

$$\hat{\Theta}_\zeta(\varepsilon\rho_m, \zeta_\beta, \tau_\beta) = F^\beta(\varepsilon\rho_m, \zeta_m + \nu(\varepsilon\rho_m)\bar{t}_{m+1}).$$

Определим ρ_+, ζ_+ по формулам

$$\rho_+ = \rho_m - \hat{\Theta}_\zeta(\varepsilon\rho_m, \zeta_m, \tau_m) + (\tau_\beta - \tau_m - t_+)\mathbf{H}_{*\varphi}(\varepsilon\rho_m, \langle \bar{k}, \zeta_m \rangle)\bar{k}, \quad (2.4.10)$$

$$\zeta_+ = \zeta_m + \nu(\varepsilon\rho_m)t_+ - (\tau_\beta - \tau_m - t_+)\mathbf{H}_{*\rho}(\varepsilon\rho_m, \langle \bar{k}, \zeta_m \rangle). \quad (2.4.11)$$

Найдем τ_+ из уравнения $\hat{\Theta}_\tau(\varepsilon\rho_+, \zeta_+, \tau_+) = 0$, тогда, $\tau_+ = \Psi^{\rho_m, \zeta_\beta, \tau_\beta}(\varepsilon\rho_+, \zeta_+, 0)$. Поскольку $\tau_\beta = \Psi^{\rho_m, \zeta_\beta, \tau_\beta}(\varepsilon\rho_m, \zeta_\beta, 0)$ и $|\zeta_+ - \zeta_\beta| = O(\varepsilon^{3/4}|\log \varepsilon|)$, то $|\tau_+ - \tau_\beta| = O(\varepsilon^{3/4}|\log \varepsilon|)$ и $|\tau_+| < 1$. Отсюда

$$\left| \hat{\Theta}_\zeta(\varepsilon\rho_+, \zeta_+, \tau_+) - \hat{\Theta}_\zeta(\varepsilon\rho_m, \zeta_\beta, \tau_\beta) \right| = O(\varepsilon^{3/4}|\log \varepsilon|).$$

Следовательно, удовлетворяются неравенства (2.3.14) и (2.3.13), $(\rho_+, \zeta_+, \tau_+) \in \mathcal{J}_{2c', 2c''}$ и $t_+ \in \mathbb{Z}$, $K_0 \leq \lambda t_+ + \log \varepsilon \leq K_0 + \bar{K}$, отсюда $(\bar{\Omega}_m, \bar{\Omega}_+)$ – совместная квази-траектория. \square

2.5 Переход через S_δ^k

Напомним, что $\chi \subset S_\delta^k$ – кусочно-гладкая кривая, трансверсально пересекающая S_0^k в точке η_* , не являющейся кратным резонансом, η_0, η_1 – концы этой кривой, которые лежат на разных компонентах границы S_δ^k , причем выполнены равенства (0.0.12). Напомним, что согласно (0.0.12)

$$\langle \bar{\nu}(\eta_0), k \rangle = \delta, \quad \langle \bar{\nu}(\eta_1), k \rangle = -\delta.$$

В этом разделе строится траектория сепаратрисного отображения, проекция которой на область \mathcal{D} начинается в $\varepsilon^{1/5}$ -окрестности точки η_0 и заканчивается в $\varepsilon^{1/(7n)}$ -окрестности точки η_1 , оставаясь при этом в $\varepsilon^{1/(8n)}$ -окрестности кривой χ . Также оценивается время, за которое траектория пересекает резонансную полосу.

Пусть имеется допустимая траектория $\mathcal{O} = (\Omega_1, \dots, \Omega_m)$ с кодом $\bar{\mathcal{O}} = (\bar{\Omega}_1, \dots, \bar{\Omega}_m)$. В лемме 2.4.1 строится следующий элемент квази-траектории $\bar{\Omega}_{m+1}$

по формулам (2.4.10)–(2.4.11). Тогда по лемме 2.3.1 более длинному коду соответствует траектория сепаратрисного отображения, которая близка к этому коду в метрике $d(\cdot, \cdot)$ (см. определение 2.3.4). Поскольку

$$|\rho_m - \bar{\rho}_m| < \frac{b(2-b)}{b_\rho}, \quad |\zeta_m - \bar{\zeta}_m| < \frac{b(2-b)\varepsilon^{3/4}}{b_\zeta}, \quad |\tau_m - \bar{\tau}_m| < \frac{b(2-b)}{b_\tau}, \quad \text{то}$$

$$|\hat{\Theta}_\zeta(\varepsilon\bar{\rho}_m, \bar{\zeta}_m, \bar{\tau}_m) - \hat{\Theta}_\zeta(\varepsilon\rho_m, \zeta_m, \tau_m)| < \frac{2b(2-b)}{b_\rho} \|\Theta\|_{C^2},$$

поэтому следующая дискретная система описывает динамику $\bar{\rho}_m$ и $\bar{\zeta}_m$:

$$\bar{\rho}_{m+1} - \bar{\rho}_m = -v_m + (\bar{\tau}_{m+1} - \tau_m - t_{m+1})\mathbf{H}_{*\varphi}(\varepsilon\bar{\rho}_m, \langle \zeta_m, \bar{k} \rangle) \bar{k} + r_m, \quad (2.5.1)$$

$$\bar{\zeta}_{m+1} - \bar{\zeta}_m = \nu(\varepsilon\bar{\rho}_m) t_{m+1} + s_m. \quad (2.5.2)$$

Здесь

$$\bar{t}_m - (\bar{K}/\lambda)^{1/2} \leq t_m \leq \bar{t}_m, \quad t_m \in \mathbb{Z}, \quad (2.5.3)$$

$$(K_0 - \log \varepsilon)/\lambda + (\bar{K}/\lambda)^{1/2} \leq \bar{t}_m \leq (K_0 + \bar{K} - \log \varepsilon)/\lambda, \quad (2.5.4)$$

$$|r_m| < \frac{b(2-b)}{b_\rho} (1 + 2\|\Theta\|_{C^2}), \quad |s_m| = O(\varepsilon^{3/4} |\log \varepsilon|). \quad (2.5.5)$$

Систему (2.5.1)–(2.5.2) можно рассматривать как систему с управлением v_m и шумом r_m и s_m , для которых имеются оценки (2.5.5). Согласно лемме 2.4.1, управление v_m можно выбрать равным $F^\beta(\varepsilon\bar{\rho}_{m-1}, \zeta_{m-1} + \nu(\varepsilon\bar{\rho}_{m-1})\bar{t}_m)$ для любых единичных векторов $\beta \in \mathbb{R}^n$ и \bar{t}_m , удовлетворяющих неравенствам (2.4.6).

Далее мы будем использовать уравнения (2.5.1)–(2.5.2) для доказательства следующего утверждения:

Утверждение 2.5.1. Пусть функция Θ типична в смысле, указанном в утверждении 2.4.2. Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует траектория $\{(\bar{\rho}_i, \zeta_i)\}_{i=1}^M$ системы (2.5.1)–(2.5.2), такая что

$$(i) \quad |\varepsilon\bar{\rho}_1 - \eta_0| < \varepsilon^{1/5}, \quad |\varepsilon\bar{\rho}_M - \eta_1| < \varepsilon^{1/(7n)},$$

$$(ii) \quad \text{dist}(\varepsilon\bar{\rho}_i, \chi) < \varepsilon^{1/(8n)} \quad \text{для всех } i,$$

$$(iii) \quad M < \frac{C}{\varepsilon^{|\log \varepsilon|}}.$$

Здесь $\text{dist}(x, \chi)$ – расстояние от точки x до кривой χ , C – постоянная, не зависящая от ε .

Теорема 2 вытекает из утверждения 2.5.1. Заметим, что поскольку один шаг сепаратрисного отображения требует времени в исходной гамильтоновой системе (0.0.13) порядка $O(|\log \varepsilon|)$, то $T = M \times O(|\log \varepsilon|) = O(\varepsilon^{-1})$.

Доказательство утверждения 2.5.1 будет проводиться в три этапа.

2.5.1 Этап 1: вдали от резонанса

На протяжении всего доказательства считаем, что $\varepsilon\bar{\rho}_m \in S_\delta^k$. Пусть расстояние до резонанса S_0^k не слишком мало:

$$|\langle \bar{\nu}(\varepsilon\bar{\rho}_m), k \rangle| > \varepsilon^{1/(6n)}. \quad (2.5.6)$$

В этом подразделе строится траектория системы (2.5.1)–(2.5.2), пересекающая часть полосы S_δ^k , на которой выполнено (2.5.6).

Обозначим $\sqrt{\varepsilon}\mu = \varepsilon\bar{\rho}$. Тогда уравнения (2.5.1)–(2.5.2) примут вид:

$$\mu_{m+1} - \mu_m = -\sqrt{\varepsilon}(v_m + t_{m+1}\mathbf{H}_{*\varphi}(\sqrt{\varepsilon}\mu_m, \langle \bar{k}, \zeta_m \rangle)\bar{k} + r_m), \quad (2.5.7)$$

$$\zeta_{m+1} - \zeta_m = \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_m)t_{m+1} + s_m, \quad (2.5.8)$$

здесь r_m, s_m, \bar{t}_m удовлетворяют (2.5.3)–(2.5.5). Множество точек μ , удовлетворяющих неравенству (2.5.6), состоит из двух компонент связности:

$$\{\mu: -\langle \bar{k}, \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu) \rangle + k_0 \in (\varepsilon^{1/(6n)}, \delta)\}, \quad (2.5.9)$$

$$\{\mu: -\langle \bar{k}, \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu) \rangle + k_0 \in (-\delta, -\varepsilon^{1/(6n)})\}. \quad (2.5.10)$$

Построим траекторию, пересекающую полосу (2.5.9), для полосы (2.5.10) она строится аналогично. Пусть χ^+, χ^- — два куска кривой χ , которые попали в полосы (2.5.9) и (2.5.10) соответственно. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ χ^+ — кусочно гладкая кривая. Разобьем χ^+ на равные участки длины $l \in [2\varepsilon^{1/5}, 3\varepsilon^{1/5}]$ и обозначим через $\{x_i\}$ концы этих участков. Пусть $\hat{\chi}^+$ — ломаная, соединяющая последовательные концы x_i, x_{i+1} . Тогда длина звеньев $\hat{\chi}^+$ не превосходит $3\varepsilon^{1/5}$. Наша цель — построить траекторию, которая движется вдоль ломаной и все время находится в $2\varepsilon^{1/5}$ -окрестности этой ломаной. Пусть мы построили кусок такой траектории $\{(\zeta_i, \mu_i)\}_{i=1}^m$, и $\sqrt{\varepsilon}\mu_m$ лежит в $\varepsilon^{1/5}$ -окрестности одного из узлов ломаной η' , через η'' обозначим следующий узел ломаной. Кроме того, пусть

$$\beta = -\frac{\eta'' - \sqrt{\varepsilon}\mu_m}{|\eta'' - \sqrt{\varepsilon}\mu_m|}.$$

Определим функцию F^β , взяв в качестве η_0 точку $\sqrt{\varepsilon}\mu_m$. Согласно **Н₁1** число резонансов конечно и не зависит от ε , поэтому для достаточно малых ε для η , удовлетворяющих (2.5.6), выполнено $\mathbf{H}_{*\varphi}(\eta, \varphi) = 0$. Тогда система (2.5.7)–(2.5.8) примет вид

$$\mu_{m+1} - \mu_m = -\sqrt{\varepsilon}\left(F^\beta(\sqrt{\varepsilon}\mu_{m-1}, \zeta_{m-1} + \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_{m-1})\bar{t}_m) + r_m\right), \quad (2.5.11)$$

$$\zeta_{m+1} - \zeta_m = \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_m)t_{m+1} + s_m, \quad (2.5.12)$$

здесь r_m, s_m, \bar{t}_m удовлетворяют (2.5.3)–(2.5.5).

Пусть \bar{t} — целое число, удовлетворяющее неравенствам

$$(K_0 - \log \varepsilon)/\lambda \leq \bar{t} \leq (K_0 + \bar{K} - \log \varepsilon)/\lambda - 2(\bar{K}/\lambda)^{1/2}. \quad (2.5.13)$$

Положим

$$\Delta = \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_m)\left(\bar{t} + \left[(\bar{K}/\lambda)^{1/2}\right]\right), \quad \hat{\zeta} = \zeta_{m-1} + \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_m)\bar{t}_m. \quad (2.5.14)$$

Утверждение 2.5.2. *Можно выбрать $\bar{t}_{m+l} \in \mathbb{Z}$ так, что для каждого $l \in \mathbb{Z}_+$ выполняются неравенства*

$$\bar{t} \leq \bar{t}_{m+l} \leq \bar{t} + \left[(\bar{K}/\lambda)^{1/2}\right],$$

$$|\zeta_{m+l-1} + \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_m)\bar{t}_{m+l} - \hat{\zeta} - l\Delta| \leq Cl^2\sqrt{\varepsilon}|\log \varepsilon|.$$

Доказательство. Доказательство по индукции. При $l = 0$ эти неравенства выполнены. Пусть они выполняются при некотором $l \geq 0$, тогда из (2.5.11)

$$\mu_{m+l} = \mu_m + O(\sqrt{\varepsilon}l), \quad (2.5.15)$$

отсюда из (2.5.12)

$$\zeta_{m+l} + \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_m)\bar{t}_{m+l+1} = \zeta_{m+l-1} + \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_m)(t_{m+l} + \bar{t}_{m+l+1}) + \psi_l,$$

где $|\psi_l| < Cl\sqrt{\varepsilon}|\log \varepsilon|$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \zeta_{m+l} + \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_m)\bar{t}_{m+l+1} \\ &= \zeta_{m+l-1} + \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_m)\bar{t}_{m+l} + \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_m)(t_{m+l} - \bar{t}_{m+l} + \bar{t}_{m+l+1}) + \psi_l. \end{aligned}$$

Поскольку $\bar{t}_{m+l} - t_{m+l} \in \left[0, (\bar{K}/\lambda)^{1/2}\right] \cap \mathbb{Z}$, то можно подобрать

$$\bar{t}_{m+l+1} \in \left[\bar{t} + (\bar{K}/\lambda)^{1/2}, \bar{t} + 2(\bar{K}/\lambda)^{1/2}\right]$$

таким, что

$$t_{m+l} - \bar{t}_{m+l} + \bar{t}_{m+l+1} = \bar{t} + \left[(\bar{K}/\lambda)^{1/2}\right].$$

Откуда получаем:

$$\zeta_{m+l} + \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_m)\bar{t}_{m+l+1} = \hat{\zeta} + (l+1)\Delta + \tilde{\psi}_l, \quad |\tilde{\psi}_l| \leq C(l+l^2)\sqrt{\varepsilon}|\log \varepsilon|.$$

□

Следствие 2.5.1. Из (0.0.9) и (2.5.15) вытекает, что

$$\zeta_{m+l} + \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_{m+l})\bar{t}_{m+l+1} = \hat{\zeta} + (l+1)\Delta + \delta_l, \quad |\delta_l| < 2Cl^2\sqrt{\varepsilon}|\log \varepsilon|.$$

Для $q < \varepsilon^{-1/5}$ положим

$$\begin{aligned} \Sigma &= - \sum_{l=0}^{q-1} F^\beta(\sqrt{\varepsilon}\mu_{m+l}, \zeta_{m+l} + \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_{m+l})\bar{t}_{m+l+1}), \\ \Sigma_1 &= - \sum_{l=0}^{q-1} F^\beta(\sqrt{\varepsilon}\mu_m, \zeta_{m+l} + \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_{m+l})\bar{t}_{m+l+1}). \end{aligned}$$

Следствие 2.5.2. Согласно (2.4.3) отображение $F^\beta(\cdot, \zeta)$ — гладкое в шаре $|\eta - \eta_0| < c'\varepsilon^{1/4}$ при фиксированном ζ , и его постоянная Липшица не превосходит $\|\Theta\|_{C^2}$, поэтому из (2.5.15) вытекает, что

$$\Sigma = \Sigma_1 + O(q^2\sqrt{\varepsilon}).$$

Теорема 12. (Дирихле) [9]. Пусть $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n) \in \mathbb{R}^n$, $N \in \mathbb{N}$. Тогда найдется $q \in \mathbb{N}$, такое что $q < N$ и $\max_i \|q\Delta_i\|_{\mathbb{Z}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{N}}$. Здесь $\|\cdot\|_{\mathbb{Z}}$ — расстояние до ближайшего целого числа.

Применим теорему Дирихле к Δ для $N = \varepsilon^{-1/5}$. В результате получим вектор $\bar{\Delta} = (\bar{\Delta}_1, \dots, \bar{\Delta}_n)$, у которого все компоненты — рациональные числа со знаменателем $q < N$, и

$$|\Delta - \bar{\Delta}|_\infty \leq 1/(q\sqrt[n]{N}). \quad (2.5.16)$$

Положим

$$\Sigma_2 = - \sum_{l=0}^{q-1} F^\beta(\sqrt{\varepsilon}\mu_m, \hat{\zeta} + (l+1)\Delta), \quad \Sigma_3 = - \sum_{l=0}^{q-1} F^\beta(\sqrt{\varepsilon}\mu_m, \hat{\zeta} + (l+1)\bar{\Delta}). \quad (2.5.17)$$

Точки множества $\Lambda = \{x = (l+1)\bar{\Delta} \bmod \mathbb{Z}^n, l = 0, \dots, q-1\}$ образуют решетку на торе \mathbb{T}^n , в которой можно выделить фундаментальный параллелепипед Π с наименьшим диаметром. Тор \mathbb{T}^n разбивается на q таких параллелепипедов $\{\Pi_l\}_{l=0}^{q-1}$. Введем следующие обозначения:

$$L = L(\mu_m) \subset \{0, \dots, q-1\} \text{ — индексы, для которых } \mathcal{A}(\sqrt{\varepsilon}\mu_m) \cap \Pi_l = \emptyset;$$

r_{\min} — диаметр минимального фундаментального параллелепипеда.

Лемма 2.5.1. Пусть $\bar{\Delta} = (\bar{\Delta}_1, \dots, \bar{\Delta}_n)$ таков, что $r_{\min} > r$. Тогда найдется вектор $k_* = (\bar{k}_*, k_{0*}) \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}$, такой что $\langle \bar{\Delta}, \bar{k}_* \rangle = k_{0*}$ и $|k_*|_\infty < c_n/r$, где c_n — константа, зависящая только от n .

Доказательство леммы приведено в приложении 2.6.4.

Лемма 2.5.2. Пусть $r > 0$ – постоянная, не зависящая от ε . Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$, такое что для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ можно подобрать целое число \bar{t} со следующими свойствами:

1) \bar{t} удовлетворяет неравенствам (2.5.13),

2) $\langle \bar{\Delta}, \bar{k}_* \rangle + k_{0*} \neq 0$ для всех $k_* = (\bar{k}_*, k_{0*}) \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}$, $|k_*|_\infty < c_n/r$.

Здесь $\bar{\Delta}$ – вектор с рациональными координатами, соответствующий этому числу \bar{t} .

Доказательство. Как уже говорилось в разделе 2.4, можно взять $\varepsilon_0 > 0$ настолько малым, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ множество

$$\{\mu: |\langle \bar{\nu}(\sqrt{\varepsilon}\mu), k \rangle| > \varepsilon^{1/(6n)}, \text{dist}(\sqrt{\varepsilon}\mu, \chi) < 5\varepsilon^{1/(8n)}\} \quad (2.5.18)$$

не пересекает никакую резонансную полосу S_0^h , где $|h|_\infty < c_n/r$.

Возьмем самое маленькое целое число \bar{t}_0 , удовлетворяющее неравенству (2.5.13). Пусть $\bar{t}_0 + i$, $\bar{t}_0 + j$ также удовлетворяют неравенствам (2.5.13), $i, j \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим

$$\Delta_i = \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_m)(\bar{t}_0 + i + \lceil K/\lambda \rceil).$$

Пусть $\bar{\Delta}_i$ – вектор с рациональными координатами, соответствующий Δ_i , $k_j = (\bar{k}_j, k_{0j}) \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}$ – наименьший по длине целочисленный вектор, ортогональный $(\bar{\Delta}_j, 1)$: $\langle \bar{\Delta}_j, k_j \rangle + k_{0j} = 0$. Тогда для $i \neq j$

$$\begin{aligned} |\langle \Delta_i, \bar{k}_j \rangle + k_{0j}| &\geq \left| |\langle \Delta_i, \bar{k}_j \rangle + k_{0j} - \langle \Delta_j, \bar{k}_j \rangle - k_{0j}| - |\langle \Delta_j, \bar{k}_j \rangle + k_{0j}| \right| \\ &\geq \left| \langle (j-i)\nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_m), \bar{k}_j \rangle \right| - \sqrt{n}|\Delta_j - \bar{\Delta}_j|_\infty |k_j|_\infty. \end{aligned}$$

Если $|k_j|_\infty < c_n/r$ и $\sqrt{\varepsilon}\mu_m \in O(\chi, \varepsilon^{1/(8n)})$, то $|\langle \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_m), \bar{k}_j \rangle| > \varepsilon^{1/(6n)}$ для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Это следует из определения ε_0 . Тогда

$$\begin{aligned} |\langle \bar{\Delta}_i, \bar{k}_j \rangle + k_{0j}| &\geq |\langle \Delta_i, \bar{k}_j \rangle + k_{0j}| - \sqrt{n}|\Delta_i - \bar{\Delta}_i|_\infty |k_j|_\infty \\ &> \varepsilon^{1/(6n)} - 2\sqrt{n}c_n\varepsilon^{1/(5n)}/r > 0, \end{aligned}$$

и, следовательно, векторы k_i и k_j не параллельны, если $i \neq j$. Так как число целочисленных векторов k_i , для которых $|k_i|_\infty < c_n/r$, конечно и не зависит от ε , то найдется число i , для которого $\bar{t}_0 + i$ удовлетворяет неравенствам (2.5.13) и $|k_i|_\infty > c_n/r$. \square

Далее мы будем использовать это число $\bar{t} = \bar{t}_0 + i$, для которого $|k_i|_\infty > c_n/r$, и определим Δ и $\hat{\zeta}$ по формулам (2.5.14).

Утверждение 2.5.3. Пусть $\lambda_0 = \lambda_0(\Theta) > 0$ из утверждения 2.4.2. Тогда найдется такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$\left| \mu_{m+q+1} - \mu_{m+1} - \sqrt{\varepsilon} q \lambda_0 \beta \right|_\infty < \sqrt{\varepsilon} q \lambda_0 / (4\sqrt{n}). \quad (2.5.19)$$

Доказательство. Обозначим через $G = G(\zeta)$ координату с номером j отображения $-F^\beta(\sqrt{\varepsilon}\mu_m, \zeta)$, $j = 1, \dots, n$. Множество точек разрыва функции $G : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ лежит в $\mathcal{A}(\sqrt{\varepsilon}\mu_m)$. Пусть

$$G_0 = \int_{\mathbb{T}^n} G(\zeta) d\zeta, \quad G_{\max} = \sup_{\mathbb{T}^n} G.$$

Ясно, что

$$0 < G_0 \leq G_{\max} \leq \max_{\mathcal{D} \times \mathbb{T}^{n+1}} |\Theta_\zeta(\eta, \zeta, \tau)| < +\infty.$$

Можно выбрать $\varepsilon_0 > 0$ и $r_0 > 0$, такие что для всех $\eta \in B(\eta_*, C(k)/|\log \varepsilon_0|)$

$$\text{vol} \left(O(\mathcal{A}(\eta), r_0) \right) < \frac{G_0}{100\sqrt{n}G_{\max}}. \quad (2.5.20)$$

Здесь $\text{vol} \left(O(\mathcal{A}(\eta), r_0) \right)$ — n -мерный объем r_0 -окрестности множества $\mathcal{A}(\eta)$. По теореме о среднем найдутся $\{\xi_i \in \Pi_i : i \in L\}$, и

$$\sum_{i \in L} \int_{\Pi_i} G(\zeta) d\zeta = \frac{1}{q} \sum_{i \in L} G(\xi_i).$$

Тогда, обозначив через $\Sigma_j, \Sigma_{1j}, \Sigma_{2j}$ и Σ_{3j} j -тые компоненты векторов $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$ и Σ_3 соответственно, получим

$$\begin{aligned} |\Sigma_{1j} - \Sigma_{2j}| &\leq \sum_{i \in L} C_G C q^2 \sqrt{\varepsilon} |\log \varepsilon| + 2 \sum_{i \notin L} G_{\max} \\ &= |L| C_G C q^2 \sqrt{\varepsilon} |\log \varepsilon| + 2 G_{\max} (q - |L|), \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

$$|\Sigma_{2j} - \Sigma_{3j}| \leq \sum_{i \in L} C_G / \sqrt[n]{N} + 2 \sum_{i \notin L} G_{\max} = |L| C_G / \sqrt[n]{N} + 2 G_{\max} (q - |L|), \quad (2.5.22)$$

$$|\Sigma_{3j} - qG_0| \leq \sum_{i \in L} C_G r_{\min} + 2 \sum_{i \notin L} G_{\max} = |L| C_G r_{\min} + 2 G_{\max} (q - |L|). \quad (2.5.23)$$

Здесь C_G — постоянная Липшица функции G на множестве параллелепипедов, на которых она непрерывна. Заметим, что C_G не превосходит числа $\|\Theta\|_{C^2}$.

Положим $r = \min\{r_0, G_0/(100\sqrt{n}C_G)\}$. В силу леммы 2.5.2, вектор $(\overline{\Delta}, 1)$ не ортогонален никакому ненулевому целочисленному вектору k_* с $|k_*|_\infty < c_n/r$.

Тогда из леммы 2.5.1 следует, что $r_{\min} < G_0/(100\sqrt{n}C_G)$. Поскольку $1/q < r_{\min} \leq r_0$, то из (2.5.20) следует

$$q - |L| < qG_0/(100\sqrt{n}G_{\max}).$$

Отсюда неравенства (2.5.21)–(2.5.23) принимают вид:

$$|\Sigma_{1j} - \Sigma_{2j}| < q^3 C_G C \sqrt{\varepsilon} |\log \varepsilon| + qG_0/(25\sqrt{n}) < qG_0/(20\sqrt{n}), \quad (2.5.24)$$

$$|\Sigma_{2j} - \Sigma_{3j}| < q/\sqrt[n]{N} + qG_0/(50\sqrt{n}) < qG_0/(20\sqrt{n}), \quad (2.5.25)$$

$$|\Sigma_{3j} - qG_0| < qC_G r_{\min} + qG_0/(50\sqrt{n}) < qG_0/(20\sqrt{n}). \quad (2.5.26)$$

Первое из этих неравенств следует из того, что $q < \varepsilon^{-1/5}$. Тогда, с учетом неравенств (2.5.24)–(2.5.26),

$$\begin{aligned} |\Sigma_j - qG_0| &\leq |\Sigma_j - \Sigma_{1j}| + |\Sigma_{1j} - \Sigma_{2j}| + |\Sigma_{2j} - \Sigma_{3j}| + |\Sigma_{3j} - qG_0| \\ &\leq O(q^2\sqrt{\varepsilon}) + 3qG_0/(20\sqrt{n}) < qG_0/(5\sqrt{n}). \end{aligned}$$

Следовательно, $\Sigma_j - qG_0 \in (-qG_0/(5\sqrt{n}), qG_0/(5\sqrt{n}))$, а поскольку

$$\mu_{m+q+1} - \mu_{m+1} = \sqrt{\varepsilon} \Sigma + \sqrt{\varepsilon} \sum_{l=0}^{q-1} r_{m+l+1}, \quad \left| \sum_{l=0}^{q-1} r_{m+l+1} \right| < \frac{2qb(2-b)}{b_\rho},$$

то воспользовавшись утверждением 2.4.2, получим

$$\|\mu_{m+q+1} - \mu_{m+1} + \sqrt{\varepsilon} q \lambda_0 \beta\|_\infty < \sqrt{\varepsilon} q \lambda_0 / (4\sqrt{n}).$$

□

Поскольку

$$\|\mu_{m+q+1} - \mu_{m+1} + \sqrt{\varepsilon} q \lambda_0 \beta\|_2 < \sqrt{\varepsilon} q \lambda_0 / 4 < \sqrt{\varepsilon} q \lambda_0 / \sqrt{10},$$

то точка $\sqrt{\varepsilon} \mu_{m+q+1}$ будет находиться в $\varepsilon^{1/5}$ -окрестности отрезка $[\eta', \eta'']$, и длина ортогональной проекции вектора $\sqrt{\varepsilon} \mu_{m+q+1} - \sqrt{\varepsilon} \mu_{m+1}$ на направление $\eta'' - \eta'$ больше, чем $9\varepsilon q \lambda_0 / (4\sqrt{10})$.

Далее повторяем всю процедуру снова, определяя функцию F^β для точки $\eta_0 = \sqrt{\varepsilon} \mu_{m+q}$ и соответствующего вектора β . Продолжаем это делать до тех пор, пока точка траектории не войдет в $\varepsilon^{1/5}$ -окрестность точки η'' . Таким образом, мы построили часть траектории, которая начинается в $\varepsilon^{1/5}$ -окрестности точки η' , приходит в $\varepsilon^{1/5}$ -окрестность точки η'' и все время находится в $2\varepsilon^{1/5}$ -окрестности отрезка $[\eta', \eta'']$. Поступая так для каждого звена ломаной $\hat{\chi}^-$, получим траекторию, пересекающую полосу (2.5.9).

Следствие 2.5.3. *Траектория $\{\sqrt{\varepsilon} \mu_l\}$ не более чем за M шагов проходит полосу (2.5.9) с $M \leq \frac{C}{\varepsilon^{|\log \varepsilon|}}$, находясь в $\varepsilon^{1/6}$ -окрестности кривой χ .*

2.5.2 Этап 2: вблизи резонанса

В этом подразделе обсуждается построение квази-траектории, пересекающей множество

$$\{\eta: |\langle \bar{\nu}(\eta), k \rangle| \in (\varepsilon^{1/4}, \varepsilon^{1/(6n)})\}. \quad (2.5.27)$$

Это множество состоит из двух связных компонент:

$$R_2^+ = \{\eta: \langle \bar{\nu}(\eta), k \rangle \in (\varepsilon^{1/4}, \varepsilon^{1/(6n)})\}, \quad (2.5.28)$$

$$R_2^- = \{\eta: \langle \bar{\nu}(\eta), k \rangle \in [-\varepsilon^{1/(6n)}, -\varepsilon^{1/4}]\}. \quad (2.5.29)$$

Ниже мы строим квази-траекторию, пересекающую полосу R_2^+ . Для полосы R_2^- она строится аналогично. Итак, пусть на предыдущем этапе был построен кусок квази-траектории $\bar{\Omega}_0, \dots, \bar{\Omega}_m$, а $(\bar{\rho}_m, \bar{\zeta}_m, \bar{\tau}_m, \bar{t}_m)$ — первая точка квази-траектории, для которой $\varepsilon \bar{\rho}_m$ попала в полосу R_2^+ . Тогда

$$\langle \bar{\nu}(\varepsilon \bar{\rho}_m), k \rangle = \varepsilon^\omega, \quad \text{для некоторого } \omega \in [1/(6n), 1/4]. \quad (2.5.30)$$

Заметим (см. подраздел 2.5.1), что можно считать, что $\varepsilon \bar{\rho}_m \in O(\chi, \varepsilon^{1/(6n)})$. Введем следующие обозначения:

$$\nu_* = \nu(0), \quad \nu'_* = \frac{\partial \nu}{\partial y}(0), \quad \varepsilon \bar{\rho}_l = \varepsilon^\omega \mu_l, \quad \varphi_l = \langle \zeta_l, \bar{k} \rangle. \quad (2.5.31)$$

Утверждение 2.5.4. *Для любых $l = m, m+1, \dots$ систему (2.5.1)–(2.5.2) можно записать в следующем виде:*

$$\mu_{l+1} - \mu_l = -\varepsilon^{1-\omega} (v_l - t_{l+1} \mathcal{E}_l^{(\mu)}), \quad (2.5.32)$$

$$\zeta_{l+1} - \zeta_l = \nu_* t_{l+1} + \varepsilon^\omega t_{l+1} (\nu'_* \mu_{l+1} + \mathcal{E}_l^{(\zeta)}), \quad (2.5.33)$$

где

$$v_l = F^\beta(0, \zeta_{l-1} + \nu_* \bar{t}_l), \quad (2.5.34)$$

для любых целых \bar{t}_l , удовлетворяющим неравенствам (2.4.6), и единичного вектора β , а ошибки $\mathcal{E}_l^{(\mu)}$ и $\mathcal{E}_l^{(\zeta)}$ удовлетворяют неравенствам

$$|t_{l+1} \mathcal{E}_l^{(\mu)}| < \tilde{c} |\log^{-1} \varepsilon|, \quad |\mathcal{E}_l^{(\zeta)}| < \tilde{c} \varepsilon^\omega. \quad (2.5.35)$$

Доказательство. Переобозначим в (2.5.1)–(2.5.2) индексы: $m = l$ и произведем замены (2.5.31). В итоге

$$\begin{aligned} \mu_{l+1} - \mu_l &= \varepsilon^{1-\omega} v_l + E_1 + E_2, \\ \zeta_{l+1} - \zeta_l &= \nu_* t_{l+1} + \varepsilon^\omega t_{l+1} \nu'_* \mu_{l+1} + E_3 + E_4, \end{aligned}$$

где ошибки E_1, E_2, E_3 и E_4 оцениваются следующим образом:

$$\begin{aligned} |E_1| &= |r_l \varepsilon^{1-\omega}| < \frac{2b(2-b)}{b_\rho} \|\Theta\|_{C^2} \varepsilon^{1-\omega}, \\ |E_2| &= \varepsilon^{1-\omega} |\hat{\Theta}_\zeta(0, \zeta_l, \tau_l) - \hat{\Theta}_\zeta(\varepsilon \rho_l, \zeta_l, \tau_l)| = O(\varepsilon), \\ E_3 &= s_l = O(\varepsilon^{3/4} |\log \varepsilon|), \\ E_4 &= t_{l+1} (\nu(\varepsilon^\omega \mu_{l+1}) - \nu_* - \varepsilon^\omega \mu_{l+1} \nu'_*) = O(\varepsilon^{2\omega} |\log \varepsilon|). \end{aligned}$$

□

Обозначим через \mathbf{n} вектор единичной нормали к гиперповерхности S_0^k в точке η_* , направленный внутрь области $\{\eta: \langle \bar{\nu}(\eta), k \rangle < 0\}$. Рассмотрим пространство $\mathcal{K}_* = (\text{span } \nu'_* \bar{k})^\perp \subset \mathbb{R}^n$ и единичный вектор $\beta \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}_*$, который имеет отрицательную проекцию на \mathbf{n} . Заметим, что в силу условия **H₀₃** $\mathcal{K}_* \neq \mathbb{R}^n$. Для вектора β определим вектор v_l по формуле (2.5.34). Также введем векторы μ_l^\perp , w_l^\perp и скаляры a, α_l и w_l по следующим формулам:

$$\begin{aligned} a &= \langle \beta, \nu'_* \bar{k} \rangle, \quad \mu_l = \beta \alpha_l + \mu_l^\perp, \quad \mu_l^\perp \in \mathcal{K}_*, \\ -v_l + t_{l+1} \mathcal{E}_l^{(\mu)} &= t_{l+1} (\beta w_l + w_l^\perp), \quad w_l^\perp \in \mathcal{K}_*. \end{aligned} \quad (2.5.36)$$

Поскольку $\beta \notin \mathcal{K}_*$, то $a \neq 0$. Спроектируем уравнение (2.5.32) на направление $\nu'_* \bar{k}$, а уравнение (2.5.33) — на направление \bar{k} . В результате получим:

$$\alpha_{l+1} - \alpha_l = \varepsilon^{1-\omega} t_{l+1} w_l, \quad (2.5.37)$$

$$\varphi_{l+1} - \varphi_l = \varepsilon^\omega t_{l+1} (a \alpha_{l+1} + \langle \bar{k}, \mathcal{E}_l^{(\zeta)} \rangle). \quad (2.5.38)$$

Последовательность $\{\alpha_l\}$ характеризует продвижение последовательности $\{\varepsilon \bar{\rho}_l\}$ в направлении β .

Функции g и h .

Рассмотрим кусочно-гладкое отображение $G: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^n$, определяемое в (2.6.7), и множество его точек разрыва $\hat{\Phi}$ (см. (2.6.19)). Для $\varepsilon > 0$ обозначим через $O(\mathcal{A}(0), \varepsilon)$ соответствующую окрестность множества $\mathcal{A}(0)$ (см. (2.5.20)).

Определим следующие функции g и h :

(i) Для $\varphi \in \mathbb{T}^1 \setminus O(\hat{\Phi}, \varepsilon |\bar{k}|)$ и $\zeta + \nu_* \bar{t}_{l+1} \in \mathbb{T}^n \setminus O(\mathcal{A}(0), \varepsilon)$ определим

$$g(\varphi) := -\frac{\langle \nu'_* \bar{k}, G(\varphi) \rangle}{\bar{t}a}, \quad h_l(\zeta) := \frac{\langle \nu'_* \bar{k}, G(\varphi) - F^\beta(0, \zeta + \nu_* \bar{t}_{l+1}) \rangle}{\bar{t}a}. \quad (2.5.39)$$

Тогда во всех точках $\varphi \in \mathbb{T}^1 \setminus O(\hat{\Phi}, \varepsilon |\bar{k}|)$ функция g является непрерывной и имеет ограниченную производную. Согласно (2.6.10)

$$\sup_{\zeta + \nu_* \bar{t}_{l+1} \in \mathbb{T}^n \setminus O(\mathcal{A}(0), \varepsilon)} |g(\langle \zeta, \bar{k} \rangle) - h_l(\zeta)| < \frac{c_* |\nu'_* \bar{k}| \varepsilon_0}{\bar{t}a}.$$

(ii) В точках $\varphi \in O(\hat{\Phi}, \epsilon|\bar{k}|)$ и $\zeta \in O(\mathcal{A}(0), \epsilon)$ доопределим g и h_l такими значениями, чтобы получившиеся функции $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ и $h_l: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ были непрерывными и

$$\sup_{\varphi \in \mathbb{T}^n} |g'(\varphi)| < K(\epsilon, \epsilon_0), \quad \sup_{\zeta \in \mathbb{T}^n} |g(\langle \zeta, \bar{k} \rangle) - h_l(\zeta)| < \frac{c_* |\nu'_* \bar{k}| \epsilon_0}{\bar{t} a}. \quad (2.5.40)$$

Здесь постоянная $K(\epsilon, \epsilon_0)$ зависит от ϵ и ϵ_0 и не зависит от ϵ .

Лемма 2.5.3. Пусть κ – положительное число, не зависящее от ϵ . Тогда можно подобрать $\epsilon > 0$ и целые числа \bar{t}_l так, что

- 1) \bar{t}_l удовлетворяют неравенствам (2.4.6);
- 2) для любой траектории (ζ_l, μ_l) , $m \leq l \leq m + M$, такой что последовательность $\{\varphi_l\} = \{\langle \zeta_l, \bar{k} \rangle\}$ делает один оборот на окружности, множество $O(\mathcal{A}(0), \epsilon)$ содержит не больше κM точек последовательности $\{\zeta_l + \nu_* \bar{t}_l\}$, $m \leq l \leq m + M$.

Доказательство этой леммы см. в приложении 2.6.5.

Замечание 2.5.1. Числа c_* , ϵ и ϵ_0 не зависят от ϵ .

Рассмотрим следующую дискретную систему:

$$\tilde{\alpha}_{l+1} - \tilde{\alpha}_l = \epsilon^{1-\omega} t_{l+1} g(\tilde{\varphi}_l), \quad (2.5.41)$$

$$\tilde{\varphi}_{l+1} - \tilde{\varphi}_l = \epsilon^\omega t_{l+1} (a \tilde{\alpha}_{l+1} + \langle \bar{k}, \mathcal{E}_l^{(\zeta)} \rangle). \quad (2.5.42)$$

Эта система в силу второго неравенства (2.5.40) и леммы 2.5.3 близка к системе (2.5.32)–(2.5.33). Ниже мы покажем, что при достаточно малых κ , ϵ и ϵ_0 если решение системы (2.5.41)–(2.5.42) приближается к резонансу, то это также справедливо для соответствующего решения системы (2.5.37)–(2.5.38).

Разделим уравнения (2.5.41)–(2.5.42) на $\epsilon^{1-\omega} \bar{t} = O(\epsilon^{1-\omega} |\log \epsilon|)$, где \bar{t} удовлетворяет неравенствам (2.5.13). Заметим, что (2.5.41)–(2.5.42) — дискретизация непрерывной системы

$$\dot{\alpha} = g(\varphi), \quad \dot{\varphi} = \epsilon^{2\omega-1} a \alpha. \quad (2.5.43)$$

Тогда для достаточно малого ϵ , функция g имеет отрицательное среднее:

$$\bar{g} = \int_0^1 g(x) dx < 0.$$

Фазовое пространство системы (2.5.43) — цилиндр

$$Z = \{(\alpha, \varphi \bmod 1) : \alpha \in [-\alpha_*, \alpha_*]\}. \quad (2.5.44)$$

Здесь $\alpha_* > 0$ – постоянная, не зависящая от ε , а резонансу η_* соответствует окружность $\mathbb{T}^1 = \{(0, \varphi)\} \subset Z$. Чтобы траектория $\{\varepsilon \bar{\rho}_m\}$ стремилась в среднем к резонансу S_0^k , нужно, чтобы соответствующая траектория $\{\alpha_l > 0\}$ в среднем приближалась к нулю, следовательно, в среднем убывала. Поскольку $\varepsilon \bar{\rho}_l \in R_2^+$, то $a\alpha_l < 0$.

Итак, пусть точка $(\alpha_m, \varphi_m) \in Z$ соответствует точке $(\bar{\rho}_m, \bar{\zeta}_m, \bar{\tau}_m, \bar{t}_m)$ квазитраектории. Рассмотрим решение $z(t) = (\alpha(t), \varphi(t))$ системы (2.5.43), проходящее через (α_m, φ_m) . Пусть для определенности $z(0) = (\alpha_m, \varphi_m)$, а $T = O(\varepsilon^{1-2\omega})$ – время, за которое угол φ системы (2.5.43) делает ровно один полный оборот.

В силу первого неравенства (2.5.40) дискретное решение $\{\tilde{\alpha}_l, \tilde{\varphi}_l\}$ системы (2.5.41)–(2.5.42) с начальным условием $(\tilde{\alpha}_m, \tilde{\varphi}_m) = (\alpha_m, \varphi_m) \in Z$ аппроксимирует $z(t)$ с точностью порядка

$$O(\varepsilon^{2\omega-1}) \times O(\varepsilon^{1-2\omega}) \times O(\varepsilon^{1-\omega} |\log \varepsilon|) < C_1 \varepsilon^{1-\omega} |\log \varepsilon|,$$

где $C_1 > 0$ не зависит от ε . Поскольку точка $z(T)$ находится ближе к резонансу \mathbb{T}^1 на величину порядка $O(\varepsilon^{1-2\omega} |\log \varepsilon^{-1}|)$, чем $z(0)$, то соответствующая $z(T)$ точка $\tilde{\alpha}_{m+M}$ будет находиться ближе к резонансу \mathbb{T}^1 , чем $\tilde{\alpha}_m$, на величину порядка

$$O(\varepsilon^{1-2\omega} |\log^{-1} \varepsilon|) > C_2 \varepsilon^{1-2\omega} |\log^{-1} \varepsilon| > 100 C_1 \varepsilon^{1-\omega} |\log \varepsilon|.$$

Здесь $C_2 > 0$ – не зависит от ε . Число шагов M можно оценить:

$$M = O(\varepsilon^{1-2\omega}) \times O(\varepsilon^{\omega-1} |\log^{-1} \varepsilon|) < C_3 \varepsilon^{-\omega} |\log^{-1} \varepsilon|, \quad C_3 > 0 \text{ не зависит от } \varepsilon.$$

Возьмем теперь

$$\kappa < \frac{aC_2}{12C_3 |\nu'_* \bar{k}| \sup_{\mathbb{T}^{n+1}} |\Theta_\zeta(0, \zeta, \tau)|_{\mathbb{T}^{n+1}}}, \quad \epsilon_0 < \frac{aC_2}{12C_3 |\nu'_* \bar{k}|_{C_*}} \quad (2.5.45)$$

и применим лемму 2.5.3. Тогда за M шагов решения $\{(\alpha_l, \varphi_l)\}$ системы (2.5.37)–(2.5.38) с начальным условием (α_m, φ_m) и $\{(\tilde{\alpha}_l, \tilde{\varphi}_l)\}$ системы (2.5.41)–(2.5.42) разойдутся на величину не больше, чем $C_2 \varepsilon^{1-2\omega} |5 \log \varepsilon|^{-1}$. Было использовано первое неравенство (2.5.35). Следовательно, точка α_{m+M} будет находиться ближе к резонансу \mathbb{T}^1 , чем α_m , по крайней мере на величину $4C_2 \varepsilon^{1-2\omega} |5 \log \varepsilon|^{-1}$. Отсюда последовательность $\{\alpha_l\}$, $l = m, m+1, \dots, m+M$, движется к резонансу со средней скоростью $O(\varepsilon^{1-\omega})$. Это означает, что последовательность $\{\varepsilon \bar{\rho}_l\}$, $l = m, m+1, \dots, m+M$, продвинулась в направлении резонанса на величину порядка $O(\varepsilon^{1-\omega} |\log^{-1} \varepsilon|)$ со средней скоростью порядка $O(\varepsilon)$.

Далее определяем новое число $\omega \in (1/(6n), 1/4)$ и повторяем описанную в этом подразделе процедуру до пересечения полосы $S_{\varepsilon^{1/4}}^k$. Таким образом, справедливо

Следствие 2.5.4. Построенная таким образом последовательность $\{\varepsilon\bar{\rho}_l\}$, $l = m, \dots, l + M$, пересекает полосу R_2^+ , где $M < C\varepsilon^{1/(6n)-1}$, C – постоянная, не зависящая от ε . При этом $\{\varepsilon\bar{\rho}_l\} \in O(\chi, \varepsilon^{1/(7n)})$ для всех $l = m, \dots, m + M$.

Замечание 2.5.2. Квази-траектория, которая пересекает полосу R_2^- , удаляясь от резонанса $\alpha = 0$, строится аналогично.

2.5.3 Этап 3: пересечение резонанса

В этом подразделе обсуждается пересечение траекторией полосы

$$S_{\varepsilon^{1/4}}^k = \{\eta \in \mathcal{D} : |\langle \bar{\nu}(\eta), k \rangle| \leq \varepsilon^{1/4}\}. \quad (2.5.46)$$

Для этого используются методы, аналогичные описанным в предыдущем подразделе. Дополнительная трудность, появляющаяся при пересечении полосы (2.5.46), состоит в том, что в системе (2.5.1) член $\mathbf{H}_{*\varphi}(\varepsilon\bar{\rho}_m, \langle \bar{k}, \zeta_m \rangle)$ становится отличен от нуля. По поводу определения функции \mathbf{H}_* см. (2.4.1). Однако мы покажем, что, поскольку среднее функции $\mathbf{H}_{*\varphi}(0, \cdot)$ на торе \mathbb{T} равно нулю, вклад $\mathbf{H}_{*\varphi}(\varepsilon\bar{\rho}_m, \langle \zeta_m, \bar{k} \rangle)$ в среднем будет малым. Нам потребуется следующее допущение относительно функции \mathbf{H}_* :

Н₁₂. Все критические точки φ_* функции $\mathbf{H}_*(0, \cdot)$ – невырожденные:

$$\mathbf{H}_{*\varphi}(0, \varphi_*) = 0, \quad \mathbf{H}_{*\varphi\varphi}(0, \varphi_*) \neq 0. \quad (2.5.47)$$

Замечание 2.5.3. Условие **Н₁₂** выполняется для типичного подмножества функций из Λ_N для всех $N \geq 1$.

Пусть на предыдущем этапе был построен кусок квази-траектории $\bar{\Omega}_0, \dots, \bar{\Omega}_m$, а $(\bar{\rho}_m, \bar{\zeta}_m, \bar{\tau}_m, \bar{t}_m)$ – первая точка квази-траектории, для которой $\varepsilon\bar{\rho}_m$ попала в полосу $S_{\varepsilon^{1/4}}^k$. Из результатов подраздела 2.5.2 следует, что $\varepsilon\bar{\rho}_m \in O(\chi, c\varepsilon^{1/(6n)})$. Ниже мы строим кусок квази-траектории $\bar{\Omega}_m, \bar{\Omega}_{m+1}, \dots, \bar{\Omega}_{m+M}$, которая пересекает резонансную гиперповерхность S_0^k в $C\varepsilon^{1/(6n)}$ -окрестности точки η_* . Квази-траектория, пересекающая вторую половину полосы (2.5.46), строится аналогично.

Введем следующие обозначения:

$$\nu_* = \nu(0), \quad \nu'_* = \frac{\partial \nu}{\partial y}(0), \quad \sqrt{\varepsilon}\bar{\rho}_l = \mu_l + \sqrt{\varepsilon}\bar{\tau}_l \hat{\mathbf{H}}_{*\varphi}(\mu_l, \varphi_l) \bar{k}, \quad \varphi_l = \langle \zeta_l, \bar{k} \rangle, \quad (2.5.48)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_*(\mu, \varphi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi\left(j \frac{-\langle \bar{k}, \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu) \rangle + k_0}{\varepsilon^{1/4}}\right) 2\pi i j H_1^{jk}(0) e^{2\pi i j \varphi}.$$

Утверждение 2.5.5. Для любых $l = m, m+1, \dots$ систему (2.5.1)–(2.5.2) можно записать в следующем виде:

$$\mu_{l+1} - \mu_l = -\sqrt{\varepsilon}v_l - \sqrt{\varepsilon}t_{l+1}(\bar{k}\hat{\mathbf{H}}_{*\varphi}(\mu_l, \varphi_l) - \mathcal{E}_l^{(\mu)}), \quad (2.5.49)$$

$$\zeta_{l+1} - \zeta_l = \nu_*t_{l+1} + \sqrt{\varepsilon}t_{l+1}(\nu'_*\mu_{l+1} + \mathcal{E}_l^{(\zeta)}), \quad (2.5.50)$$

где v_l из (2.5.34), а ошибки $\mathcal{E}_l^{(\mu)}$ и $\mathcal{E}_l^{(\zeta)}$ удовлетворяют неравенствам

$$t_{l+1}|\mathcal{E}_l^{(\mu)}| < \tilde{c}|\log \varepsilon|^{-2}, \quad |\mathcal{E}_l^{(\zeta)}| \leq \tilde{c}\varepsilon^{1/4}\mu_{l+1}. \quad (2.5.51)$$

Доказательство. Переобозначим в (2.5.1)–(2.5.2) индексы: $m = l$ и произведем замены (2.5.48). В итоге

$$\begin{aligned} \mu_{l+1} - \mu_l &= \sqrt{\varepsilon}v_l - \sqrt{\varepsilon}t_{l+1}\hat{\mathbf{H}}_{*\varphi}(\mu_l, \varphi_l) + \sum_{j=1}^6 E_j, \\ \zeta_{l+1} - \zeta_l &= \nu_*t_{l+1} + (\nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_{l+1}) - \nu_*)t_{l+1} + \sum_{j=7}^8 E_j, \end{aligned}$$

где ошибки E_j оцениваются следующим образом:

$$\begin{aligned} E_1 &= \sqrt{\varepsilon}\bar{\tau}_{l+1}\bar{k}(\mathbf{H}_{*\varphi}(\varepsilon\bar{\rho}_l, \varphi_l) - \hat{\mathbf{H}}_{*\varphi}(\mu_{l+1}, \varphi_{l+1})) = O(\varepsilon^{3/4}|\log \varepsilon|), \\ E_2 &= \sqrt{\varepsilon}\bar{\tau}_l\bar{k}(\hat{\mathbf{H}}_{*\varphi}(\mu_l, \varphi_l) - \mathbf{H}_{*\varphi}(\varepsilon\bar{\rho}_l, \varphi_l)) = O(\varepsilon^{3/2}), \\ E_3 &= \sqrt{\varepsilon}(\bar{\tau}_l - \tau_l)\mathbf{H}_{*\varphi}(\varepsilon\bar{\rho}_l, \varphi_l)\bar{k} = O(\sqrt{\varepsilon}|\log^{-1} \varepsilon|), \\ E_4 &= \sqrt{\varepsilon}t_{l+1}\bar{k}(\hat{\mathbf{H}}_{*\varphi}(\mu_l, \varphi_l) - \mathbf{H}_{*\varphi}(\varepsilon\bar{\rho}_l, \varphi_l)) = O(\varepsilon^{3/2}|\log \varepsilon|), \\ E_5 &= r_l\sqrt{\varepsilon} = O(\varepsilon^{5/4}|\log \varepsilon|), \\ |E_6| &= \sqrt{\varepsilon}|\hat{\Theta}_\zeta(0, \zeta_l, \tau_l) - \hat{\Theta}_\zeta(\varepsilon\rho_l, \zeta_l, \tau_l)| = O(\varepsilon^{3/4}), \\ E_7 &= t_{l+1}(\nu(\varepsilon\bar{\rho}_{l+1}) - \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_{l+1})) = O(\varepsilon|\log \varepsilon|), \\ E_8 &= s_l = O(\varepsilon^{3/4}|\log \varepsilon|). \end{aligned}$$

□

Пусть β — тот же единичный вектор, который использовался в подразделе 2.5.2. Определим векторы μ_l^\perp , w_l^\perp и скаляры a , α_l и w_l по формулам (2.5.36). Спроектируем уравнение (2.5.49) на направление $\nu'_*\bar{k}$, а уравнение (2.5.50) — на направление \bar{k} . В результате получим:

$$\alpha_{l+1} - \alpha_l = \sqrt{\varepsilon}t_{l+1}(w_l - a^{-1}\langle \bar{k}, \nu'_*\bar{k} \rangle \hat{\mathbf{H}}_{*\varphi}(\mu_l, \varphi_l)), \quad (2.5.52)$$

$$\varphi_{l+1} - \varphi_l = \sqrt{\varepsilon}t_{l+1}(a\alpha_{l+1} + \langle \bar{k}, \mathcal{E}_l^{(\zeta)} \rangle). \quad (2.5.53)$$

Рассмотрим следующую дискретную систему:

$$\tilde{\alpha}_{l+1} - \tilde{\alpha}_l = \sqrt{\varepsilon}t_{l+1}(g(\tilde{\varphi}_l) - a^{-1}\langle \bar{k}, \nu'_*\bar{k} \rangle \hat{\mathbf{H}}_{*\varphi}(\mu_l, \tilde{\varphi}_l)), \quad (2.5.54)$$

$$\tilde{\varphi}_{l+1} - \tilde{\varphi}_l = \sqrt{\varepsilon}t_{l+1}(a\tilde{\alpha}_{l+1} + \langle \bar{k}, \mathcal{E}_l^{(\zeta)} \rangle). \quad (2.5.55)$$

Здесь функция g та же, что и в предыдущем подразделе. Разделим уравнения (2.5.54)–(2.5.55) на $\sqrt{\varepsilon}t_{l+1} = O(\sqrt{\varepsilon}|\log \varepsilon|)$.

Уравнения (2.5.54)–(2.5.55) — дискретный аналог непрерывной системы

$$\dot{\alpha} = \bar{g} - \tilde{\mathbf{H}}_{*\varphi}(\mu, \varphi), \quad \dot{\varphi} = a\alpha. \quad (2.5.56)$$

Здесь

$$\bar{g} = \int_{\mathbb{T}} g(x) dx, \quad \tilde{\mathbf{H}}_*(\mu, \varphi) = a^{-1} \langle \bar{k}, \nu'_* \bar{k} \rangle \hat{\mathbf{H}}_*(\mu, \varphi) + \int_0^\varphi (\bar{g} - g(x)) dx.$$

Заметим, что согласно (2.5.39) $\bar{g} < -\lambda_0/(2\bar{t})$, и $\tilde{\mathbf{H}}_{*\varphi}(\mu, \varphi) = \tilde{\mathbf{H}}_{*\varphi}(0, \varphi)$ при

$$|\langle \bar{\nu}(\sqrt{\varepsilon}\mu), k \rangle| < \varepsilon^{1/4}/2. \quad (2.5.57)$$

Интересующая нас динамика системы (2.5.56) сосредоточена в цилиндре

$$Z = \{(\alpha, \varphi \bmod 1) : \alpha \in [\alpha_-, \alpha_+]\}, \quad \alpha_- = -c\varepsilon^{-1/4}, \quad \alpha_+ = c\varepsilon^{-1/4}, \quad (2.5.58)$$

где $c > 0$ — постоянная, не зависящая от ε . Обозначим его границы:

$$Z_{\pm} = \{(\alpha, \varphi) \in Z : \alpha = \alpha_{\pm}\}.$$

Для μ , удовлетворяющих неравенству (2.5.57) система (2.5.56) имеет интеграл энергии

$$E = \frac{a}{2}\alpha^2 - \bar{g}\varphi + \tilde{\mathbf{H}}_*(0, \varphi).$$

Если $\bar{g} = 0$, то сепаратрисы системы (2.5.56) были бы замкнуты. Однако в нашем случае $\bar{g} < 0$, поэтому сепаратрисы расщепляются, и через одну из неустойчивых неподвижных точек φ_* системы (2.5.56) выходит две ветви сепаратрисы γ_* (устойчивая и неустойчивая), которые соединяют Z_+ и Z_- , пересекая резонанс

$$Z_0 = \{(0, \varphi) \in Z\}.$$

Лемма 2.5.4. Пусть

$$M = \min_{\varphi \in \mathbb{T}} \tilde{\mathbf{H}}_*(0, \varphi), \quad A = \max_{\varphi \in \mathbb{T}} |\tilde{\mathbf{H}}_{*\varphi}(0, \varphi)|,$$

и φ_0 таково, что

$$\tilde{\mathbf{H}}_*(0, \varphi_0) \in I(\varphi_*) := (M + \bar{g}^2/(20A), M + \bar{g}^2/(10A)).$$

Тогда существуют t', t'' , такие что

$$z(t') \in Z_+, \quad z(t'') \in Z_-, \quad |t' - t''| < 2\alpha_+/|\bar{g}|.$$

Здесь $z(t) = (\alpha(t), \varphi(t))$ — траектория системы (2.5.56), такая что $z(0) = (0, \varphi_0)$.

Доказательство этой леммы см. в [63].

Таким образом, рядом с γ_* на расстоянии порядка $O(|\log^{-1} \varepsilon|)$ проходят траектории системы (2.5.56), соединяющие нижнюю и верхнюю границы цилиндра Z . Используя предположение **H₁₂**, несложно доказать следующую

Лемма 2.5.5. *Пусть выполнено условие **H₁₂**. Тогда у любой траектории $z(t) = (\alpha(t), \varphi(t))$, такой что $\tilde{\mathbf{H}}_*(0, \varphi(0)) \in I(\varphi_*)$, угол $\varphi(t)$ делает первый полный оборот за время $\tau < c_* |\log \varepsilon|^{1/2}$, где $c_* > 0$ не зависит от ε .*

Таким образом, траектория $z(t)$ пересекает цилиндр

$$\hat{Z} = \{(\alpha, \varphi) : |\alpha| < \bar{c} |\log \varepsilon|^{1/2}\}, \quad \bar{c} |\log \varepsilon| = -\bar{g},$$

за время $\tau < c_* |\log \varepsilon|^{1/2}$.

Теперь построим квази-траекторию, которая начнется с одной стороны полосы $S_{\varepsilon^{1/4}}^k$ (этой стороне соответствует Z_+), пересечет резонанс около точки $\eta = 0$ и выйдет с другой стороны $S_{\varepsilon^{1/4}}^k$ (Z_-). Квази-траектории $\bar{\Omega}_m, \dots, \bar{\Omega}_l, \bar{\Omega}_{l+1}, \dots$ сопоставим последовательность

$$(\alpha_m, \varphi_m), \dots, (\alpha_l, \varphi_l), (\alpha_{l+1}, \varphi_{l+1}), \dots \quad (2.5.59)$$

Если последовательность $\{\alpha_l\}$ пересекает цилиндр Z , то соответствующая последовательность $\{\varepsilon \bar{\rho}_l\}$ пересечет полосу (2.5.46).

Вначале пересечем множество $Z \setminus \hat{Z}$. Обе его связные компоненты пересекаются аналогично, поэтому мы построим траекторию $\{(\alpha_l, \varphi_l)\}$, приближающуюся к резонансу.

Пусть точка $(\alpha_m, \varphi_m) \in Z \setminus \hat{Z}$, соответствует точке $(\bar{\rho}_m, \bar{\zeta}_m, \bar{\tau}_m, \bar{t}_m)$ квази-траектории. Тогда

$$\alpha_m \in [\bar{c} |\log \varepsilon|^{-1/2}, c \varepsilon^{-1/4}].$$

Рассмотрим решение $z(t) = (\alpha(t), \varphi(t))$ системы (2.5.56), проходящее через (α_m, φ_m) . Пусть для определенности $z(0) = (\alpha_m, \varphi_m)$, а $T < 2/|a\alpha_m|$ — время, за которое угол φ системы (2.5.43) делает ровно один полный оборот. Тогда соответствующее дискретное решение $\{\tilde{\alpha}_l, \tilde{\varphi}_l\}$ системы (2.5.54)–(2.5.55) с начальным условием $(\tilde{\alpha}_m, \tilde{\varphi}_m) = (\alpha_m, \varphi_m) \in Z$ аппроксимирует непрерывное решение $z(t)$ с точностью

$$T \times O(\varepsilon |\log \varepsilon|^2) < C_1 |\alpha_m|^{-1} \varepsilon |\log \varepsilon|^2,$$

где $C_1 > 0$ не зависит от ε .

Поскольку точка $z(T)$ находится ближе к резонансу \mathbb{T}^1 на величину порядка $O(|\alpha_m \log \varepsilon|^{-1})$, чем $z(0)$, то соответствующая $z(T)$ точка $\tilde{\alpha}_{m+M}$ будет находиться

ближе к резонансу \mathbb{T}^1 , чем $\tilde{\alpha}_m$, на величину порядка

$$O(|\alpha_m \log \varepsilon|^{-1}) > C_2 |\alpha_m \log \varepsilon|^{-1} > 100C_1 |\alpha_m|^{-1} \varepsilon |\log \varepsilon|^2.$$

Здесь $C_2 > 0$ — не зависит от ε , а

$$M < C_3 \alpha_m^{-1} \varepsilon^{-1/2} |\log^{-1} \varepsilon|, \quad \text{где } C_3 > 0 \text{ не зависит от } \varepsilon.$$

Возьмем κ, ϵ_0 , удовлетворяющие неравенствам (2.5.45), и применим лемму 2.5.3. Тогда за M шагов решения $\{(\alpha_l, \varphi_l)\}$ системы (2.5.52)–(2.5.53) с начальным условием (α_m, φ_m) и $\{(\tilde{\alpha}_l, \tilde{\varphi}_l)\}$ системы (2.5.54)–(2.5.55) разойдутся на величину не больше, чем $1/5C_2 |\alpha_m \log \varepsilon|^{-1}$. Следовательно, точка α_{m+M} будет находиться ближе к резонансу \mathbb{T}^1 , чем α_m , по крайней мере на величину $4/5C_2 |\alpha_m \log \varepsilon|^{-1}$. Далее повторяем всю процедуру заново для другого непрерывного решения $z(t)$, проходящего через точку $(\alpha_{m+M}, \varphi_{m+M})$ до тех пор, пока последовательность $\{(\alpha_l, \varphi_l)\}$ не войдет в цилиндр \hat{Z} .

Следствие 2.5.5. *Таким образом построенная последовательность $\{(\alpha_l, \varphi_l)\}$ пересекает $Z \setminus \hat{Z}$ со средней скоростью порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$. Соответствующая траектория $\{\varepsilon \bar{\rho}_l\}$ движется к резонансу со средней скоростью порядка $O(\varepsilon)$.*

Теперь пересечем цилиндр \hat{Z} . Пусть $\tilde{\mathbf{H}}_*(0, \varphi_m) \in I(\varphi_*)$, $|\alpha_m| < \sqrt{\varepsilon} \log^2 \varepsilon$. Рассмотрим решение $z(t)$ системы (2.5.56), проходящее через (α_m, φ_m) . Согласно лемме 2.5.5 $z(t)$ пересекает цилиндр \hat{Z} за время порядка $T = O(|\log \varepsilon|^{1/2})$. Соответствующее дискретное решение $\{(\tilde{\alpha}_l, \tilde{\varphi}_l)\}$ системы (2.5.54)–(2.5.55) аппроксимирует $z(t)$ с точностью порядка

$$O(|\log \varepsilon|^{1/2}) \times O(\varepsilon |\log \varepsilon|^2) = O(\varepsilon |\log \varepsilon|^{5/2}) < C_1 \varepsilon |\log \varepsilon|^{5/2}, \quad C_2 = 2\bar{c},$$

поэтому траектория системы (2.5.54)–(2.5.55) пересекает цилиндр \hat{Z} вместе с $z(t)$ за число шагов

$$M = O(|\log \varepsilon|^{1/2}) \times O(\varepsilon^{-1/2} |\log^{-1} \varepsilon|) < C_3 \varepsilon^{-1/2} |\log \varepsilon|^{-1/2}.$$

Тогда для κ, ϵ , удовлетворяющих неравенствам (2.5.45), будет выполняться неравенство

$$|\alpha_{m+M} - \tilde{\alpha}_{m+M}| < 1/5C_2 |\log \varepsilon|^{-1/2},$$

значит последовательность $\{\alpha_l\}$ пересечет цилиндр \hat{Z} .

Следствие 2.5.6. *Соответствующая последовательность $\{\varepsilon \bar{\rho}_l\}$, $l = t, \dots, t + M$, пересекает полосу (2.5.46), где $M < C \varepsilon^{-3/4}$, C — постоянная, не зависящая от ε . При этом $\{\varepsilon \bar{\rho}_l\} \in O(\chi, \varepsilon^{1/(7n)})$ для всех $l = t, \dots, t + M$.*

Замечание 2.5.4. Далее, после пересечения полосы (2.5.46), траектория $\{\varepsilon\bar{\rho}_l\}$ продолжается по методам, описанным в подразделах 2.5.1, 2.5.2. Единственным отличием является то, что после пересечения полосы (2.5.28) точка $\varepsilon\bar{\rho}_{m+T}$ может, вообще говоря, не лежать в $\varepsilon^{1/5}$ -окрестности кривой χ . Поэтому для куска χ^- (см. подраздел 2.5.1) строится ломаная $\hat{\chi}^-$, у которой длина звеньев $l \in [2\varepsilon^{1/(7n)}, 3\varepsilon^{1/(7n)}]$, и расстояние от ее узлов до последовательности $\{\varepsilon\bar{\rho}_l\}$ не превосходит $\varepsilon^{1/(7n)}$.

Следствие 2.5.7. Траектория $\{\varepsilon\bar{\rho}_l\}$ не более чем за M шагов проходит полосу (2.5.10) с $M \leq \frac{C}{\varepsilon|\log \varepsilon|}$, находясь в $\varepsilon^{1/(8n)}$ -окрестности кривой χ .

2.6 Приложения

2.6.1 Доказательство утверждения 2.4.1

Напомним, что $k = (\bar{k}, k_0) \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}$ – целочисленный вектор, соответствующий пересекаемой резонансной гиперповерхности, η_* – точка пересечения кривой χ с резонансной гиперповерхностью. Обозначим:

$$\mathcal{J}_{2c', 2c''}(\eta_*) = \{(\zeta, \tau) : (\eta_*, \zeta, \tau) \in \mathcal{J}_{2c', 2c''}\}. \quad (2.6.1)$$

Тор \mathbb{T}^{n+1} расслаивается на n -мерные торы

$$\mathbb{T}_\varphi^n = \{(\zeta, \tau) \in \mathbb{T}^{n+1} : \langle \bar{k}, \zeta \rangle + k_0\tau = \varphi = \text{const}\}. \quad (2.6.2)$$

Обозначим также сечения торов \mathbb{T}_φ^n плоскостью $\tau = 0$:

$$\mathbb{T}_{\varphi, 0}^n = \{\zeta \in \mathbb{T}^n : \langle \bar{k}, \zeta \rangle = \varphi = \text{const}\}$$

1) Сначала покажем, что при достаточно малых положительных c', c'' для любой точки $\zeta \in \mathbb{T}^n$ найдется число $\tau \in [0, (\bar{K}/\lambda)^{1/2}]$, такое что $(\zeta - \nu(\eta_*)\tau, \tau) \in \mathcal{J}_{2c', 2c''}(\eta_*)$.

Н₁З. Для каждого $\varphi \in \mathbb{T}^1$ найдется точка $(\zeta^0(\varphi), \tau^0(\varphi)) \in \mathbb{T}_\varphi^n$, в которой

$$\bar{\partial}\Theta(\eta_*, \zeta^0(\varphi), \tau^0(\varphi)) = 0, \quad \bar{\partial}^2\Theta(\eta_*, \zeta^0(\varphi), \tau^0(\varphi)) \neq 0. \quad (2.6.3)$$

Замечание 2.6.1. (А) **Н₁З** выполнена для C^r -открытого плотного множества функций H_1 из Λ_N для всех $N \geq 1$.

(В) **Н₁З** выполняется для множества полной меры в любом типичном семействе функций H_1 из Λ_N для всех $N \geq 1$, зависящего от одного или нескольких параметров.

Далее считаем, что в точке η_* выполнено условие **H₁₃**.

Лемма 2.6.1. *Для достаточно малых положительных c' , c'' множество*

$$\bigcup_{t \in [0,1]} g_{\bar{\nu}(\eta_*)}^t(\mathcal{J}_{2c', 2c''}(\eta_*)) \cap \mathbb{T}_\varphi^n$$

содержит n -мерный шар радиуса R_Θ , где $R_\Theta = R_\Theta(\varphi)$ зависит только от $c', c'', \|H_0\|_{C^1}, \|\Theta\|_{C^2}, \varphi$ и n .

Доказательство этой леммы см. в [63] (лемма 6.1).

Определение 2.6.1. *Пусть a, K – положительные числа. Назовем точку $\eta \in \overline{\mathcal{D}}(a, K)$ –сложной, если для любого n -мерного открытого шара $B_a \subset \mathbb{T}_\varphi^n$ радиуса a*

$$\bigcup_{0 \leq t \leq K} g_{\bar{\nu}(\eta)}^t(B_a) \neq \mathbb{T}_\varphi^n. \quad (2.6.4)$$

Предложение 2.6.1. *Пусть точка $\eta \in S_0^k(a, K)$ –сложная и $\epsilon = \epsilon_{a,n,K} < 1/(2\pi)$, где*

$$\epsilon_{a,n,K} = \frac{4n \log(2l_{a,n} + 1)}{\pi K}, \quad l_{a,n} = \frac{3 \cdot 2^n}{\pi a_*^n \sin(\pi a_*/2)} + 1, \quad a_* = \frac{a}{(n+1)^{n/2} |k|_\infty^n}$$

Тогда найдется $l \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $l \nparallel k$, $|l|_\infty \leq 2\sqrt{n+1} l_{a,n} |k|_2$, такой что $\eta \in S_\epsilon^l$.

Доказательство этого предложения см. в приложении 2.6.3.

Иными словами сложные точки находятся вблизи кратных резонансов низкого порядка. Применим это предложение для $a = R_\Theta$, $K = (\overline{K}/\lambda)^{1/2} - 1$. Поскольку η_* – точка однократного резонанса, то она не является (a, K) –сложной для малых ϵ . Следовательно,

$$\bigcup_{0 \leq t \leq (\overline{K}/\lambda)^{1/2} - 1} g_{\bar{\nu}(\eta_*)}^t(B_a) = \mathbb{T}_\varphi^n. \quad (2.6.5)$$

Следовательно, траектория (с вектором частот $\bar{\nu}(\eta_*)$) каждой точки $(\zeta, \tau) \in \mathbb{T}^{n+1}$ побывает на гиперповерхности $\mathcal{J}_{2c', 2c''}$ за время $(\overline{K}/\lambda)^{1/2}$.

Поскольку $|g_{\bar{\nu}(\eta_0)}^t(\xi, t) - g_{\bar{\nu}(\eta_*)}^t(\xi, t)| < \hat{c} |\log \epsilon|^{-1/2}$ для всех $\eta_0 \in B(\eta_*, C(k)\delta)$, то для достаточно малых $\epsilon > 0$ для всех $\zeta \in \mathbb{T}$ найдется $\tau \in [0, (\overline{K}/\lambda)^{1/2}]$, такое что $(\zeta - \nu(\eta_0)\tau, \tau) \in \mathcal{J}_{2c', 2c''}(\eta_0)$.

2) Построим теперь функции $s_{\beta,*}$ для точки η_* . Обозначим через \mathcal{W} пространство кусочно-гладких отображений

$$w : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathcal{J}_0, \quad \varphi \mapsto (\zeta, \tau) = w(\varphi) \in \mathbb{T}_\varphi^n \cap \mathcal{J}_0. \quad (2.6.6)$$

“Кусочно-гладкие” означает, что существует конечное число интервалов $I_j \subset \mathbb{T}^1$, таких что $\mathbb{T}^1 = \cup \bar{I}_j$ и ограничения $w|_{I_j}$ – гладкие. Такие функции в общем случае имеют конечное число точек разрыва (концов интервалов I_j).

Н₁₄. Существует число $\varkappa_0 = \varkappa_0(\Theta) > 0$, такое, что для всех $\beta \in \mathbb{R}^n$, $|\beta| = 1$ и $\varkappa \in [0, \varkappa_0]$ выполнено $\int_{\mathbb{T}^1} G(\varphi) d\varphi = \varkappa\beta$ для некоторого $w \in \mathcal{W}$. Здесь $G(\varphi) = \Theta_\zeta(\eta_*, \zeta(\varphi), \tau(\varphi))$, $(\zeta(\varphi), \tau(\varphi)) = w(\varphi)$.

Лемма 2.6.2. **Н₁₄** выполняется для типичных функций $\Theta \in \Lambda_N$ для всех $N \geq 1$.

Доказательство леммы 2.6.2 см. в подразделе 2.6.2.

Далее считаем, что функция $\Theta(\eta_*, \cdot, \cdot): \mathbb{T}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет **Н₁₄**. Тогда найдется кусочно-гладкое отображение $w_\beta \in \mathcal{W}$, такое что

$$\int_{\mathbb{T}^1} G(\varphi) d\varphi = \varkappa_0\beta, \quad G(\varphi) := \Theta_\zeta(\eta_*, \zeta(\varphi), \tau(\varphi)). \quad (2.6.7)$$

Для достаточно малого $\epsilon_0 > 0$ множество

$$\bigcup_{t \in [0, 1]} g_{\bar{\nu}(\eta_*)}^t(\mathcal{J}_{2c', 2c''}(\eta_*)) \cap \mathbb{T}_\varphi^n \quad (2.6.8)$$

содержит шар $B(w_\beta(\varphi), \epsilon_0)$ радиуса ϵ_0 с центром в точке $w_\beta(\varphi)$ для всех точек непрерывности функции $w_\beta(\varphi)$. Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$, такой что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$\bigcup_{0 \leq t \leq (\bar{K}/\lambda)^{1/2}} g_{\bar{\nu}(\eta_*)}^t B(w_\beta(\varphi), \epsilon_0) = \mathbb{T}_\varphi^n. \quad (2.6.9)$$

Таким образом, траектория обмотки с вектором частот $\bar{\nu}(\eta_*)$ каждой точки $(\zeta, 0) \in \mathbb{T}_\varphi^n$ приходит в шар $B(w_\beta(\varphi), \epsilon_0)$ за время $\tau(\zeta) \leq (\bar{K}/\lambda)^{1/2}$ для всех $\varphi \in I_j$. Введем функцию $s_{\beta,*} = s_{\beta,*}(\tau)$, и в качестве ее значения в точке ζ положим $\tau(\zeta)$. Областью определения этой функции является следующее множество:

$$Z = \{\zeta : (\zeta, 0) \in \mathbb{T}_\varphi^n, \quad \varphi \notin \cup_j I_j\}.$$

Для всех остальных $\zeta \in \mathbb{T}^n \setminus Z$ положим $s_{\beta,*}(\zeta) = 0$.

Рассмотрим теперь точки непрерывности функции $s_{\beta,*}: \mathbb{T}^n \rightarrow [0, (\bar{K}/\lambda)^{1/2}]$. Если $\tau \in (0, (\bar{K}/\lambda)^{1/2})$, то близкие точки $(\zeta, 0)$ приходят в близкие точки $(\zeta - \nu(\eta_*)\tau, \tau)$. Следовательно, точки разрыва функций $s_{\beta,*}(\cdot)$ возникают лишь при $\varphi \notin \cup_j I_j$, при $\tau = 0$ или при $\tau = (\bar{K}/\lambda)^{1/2}$. Поскольку для почти всех ζ выполнено

$$\left| G(\langle \zeta, \bar{k} \rangle) - \Theta_\zeta(\eta_*, \zeta - \nu(\eta_*)s_{\beta,*}(\zeta), s_{\beta,*}(\zeta)) \right| < c_*\epsilon_0, \quad \text{то} \quad (2.6.10)$$

$$\left| \int_{\mathbb{T}^n} \Theta_\zeta(\eta_*, \zeta - \nu(\eta_*)s_{\beta,*}(\zeta), s_{\beta,*}(\zeta)) d\zeta - \varkappa_0 \text{vol}(\mathbb{T}_{\varphi,0}^n) \beta \right| < c_* \epsilon_0. \quad (2.6.11)$$

Здесь

$$c_* = 2 \|\Theta(\eta_*, \cdot, \cdot)\|_{C^2(\mathbb{T}^{n+1})},$$

а $\text{vol}(\mathbb{T}_{\varphi,0}^n) \geq 1$ обозначает $(n-1)$ -мерный объем тора $\mathbb{T}_{\varphi,0}^n$.

3) В окрестности каждой точки $(\eta_0, \zeta_0, \tau_0) \in \mathcal{J}_{2c',2c''}$ уравнение (2.3.2) можно разрешить относительно τ в виде гладкой функции $\tau = \Psi^{\eta_0/\varepsilon, \zeta_0, \tau_0}(\eta, \zeta, 0)$. Обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\eta_*, \eta, \varepsilon, \delta) &= \{\zeta \in \mathbb{T}^n : (\eta, \zeta, \tau) \in \mathcal{J}_{2c',2c''}, \quad |\eta - \eta_*| \leq C(k)\delta, \\ \Psi &= \Psi^{\eta_*/\varepsilon, \zeta, s_{\beta,*}(\zeta)}(\eta, \zeta, 0) \text{ непрерывная по } \zeta\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь произвольную точку $\eta_0 \in B(\eta_*, C(k)\delta)$. Тогда для всех $\zeta \in \mathcal{J}(\eta_*, \eta_0, \varepsilon, \delta)$ определим

$$s_{\beta,0}(\zeta) := \Psi^{\eta_*/\varepsilon, \zeta, s_{\beta,*}(\zeta)}(\eta_0, \zeta, 0). \quad (2.6.12)$$

Поскольку для всех $\zeta \in \mathbb{T}^n$ найдется такое $\tau(\zeta) \in [0, (\overline{K}/\lambda)^{1/2}]$, что $(\zeta - \nu(\eta_0)\tau(\zeta), \tau(\zeta)) \in \mathcal{J}_{2c',2c''}(\eta_0)$, то для всех $\zeta \in \mathbb{T}^n \setminus \mathcal{J}(\eta_*, \eta, \varepsilon, \delta)$ определим

$$s_{\beta,0}(\zeta) := \tau(\zeta). \quad (2.6.13)$$

Если $\tau(\zeta) \in (0, (\overline{K}/\lambda)^{1/2})$, то функция $\tau(\cdot)$ непрерывна в точке ζ . Таким образом, множество точек разрыва функции $\tau(\cdot)$ лежит в объединении прообразов концов отрезка $[0, (\overline{K}/\lambda)^{1/2}]$. Итак, функция $s_{\beta,0}(\zeta)$ определена для всех $\zeta \in \mathbb{T}^n$. Она может быть разрывна в точке ζ в двух случаях: если $\tau(\zeta)$ попала в один из концов отрезка $[0, (\overline{K}/\lambda)^{1/2}]$ или $\zeta \in \partial\mathcal{J}(\eta_*, \eta_0, \varepsilon, \delta)$, кроме того,

$$\left| \int_{\mathbb{T}^n} \Theta_\zeta(\eta_0, \zeta - \nu(\eta_0)s_{\beta,0}(\zeta), s_{\beta,0}(\zeta)) d\zeta - \varkappa_0 \text{vol}(\mathbb{T}_{\varphi,0}^n) \beta \right| < c_* \epsilon_0 + \hat{c} |\log \varepsilon|^{-1}.$$

Тогда для $\epsilon_0 < \epsilon/(2c_*)$, $\varepsilon_0 < e^{-\epsilon/2\hat{c}}$ и $\lambda_0 = \varkappa_0 \text{vol}(\mathbb{T}_{\varphi,0}^n)$ мы получаем утверждение 2.4.1. \square

2.6.2 Функция Θ на резонансной гиперповерхности

Используются обозначения

$$\mathbb{R}_\alpha^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle p, \alpha \rangle = 0\}, \quad \partial = \text{grad}, \quad \partial_v = \langle v, \partial \rangle,$$

где $\alpha \in \mathbb{R}^{n+1}$ и v — векторное поле.

Для любой гладкой функции $\vartheta: \mathbb{T}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ и ненулевого вектора $\alpha \in \mathbb{R}^{n+1}$ множество

$$J = \{x \in \mathbb{T}^{n+1} : \partial_\alpha \vartheta = 0\}$$

является гладким n -мерным многообразием, имеющим особенности лишь в точках, в которых $\partial \partial_\alpha \vartheta = 0$.

Пусть $\langle k, \alpha \rangle = 0$, где $k \in \mathbb{Z}^{n+1}$ — ненулевой вектор. Определим новую угловую переменную $\varphi = \langle k, x \rangle \bmod 1$, $x \in \mathbb{T}^{n+1}$. Тор \mathbb{T}^{n+1} расслаивается на n -мерные торы

$$\mathbb{T}_\varphi^n = \{x \in \mathbb{T}^{n+1} : \langle k, x \rangle = \varphi = \text{const}\}. \quad (2.6.14)$$

Пусть \mathcal{W} — пространство кусочно-гладких отображений

$$w : \mathbb{T}^1 \rightarrow J, \quad \varphi \mapsto x = w(\varphi) \in \mathbb{T}_\varphi^n \cap J. \quad (2.6.15)$$

Нас интересует отображение $\mathcal{P} : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha^n$,

$$\mathcal{W} \ni w \mapsto \mathcal{P}(w) = \int_{\mathbb{T}^1} \partial \vartheta(w(\varphi)) d\varphi. \quad (2.6.16)$$

Предложение 2.6.2. *Для типичной функции ϑ существует число $\varkappa_0 = \varkappa_0(\vartheta) > 0$, такое, что для всех $\kappa \in \mathbb{R}_\alpha^n$, $|\kappa| \in [0, \varkappa_0]$ выполнено $\mathcal{P}(w) = \kappa$ для некоторого $w \in \mathcal{W}$.*

Типичность функции означает, что для всех $r = 2, 3, \dots, \infty, \omega$ и $l \in \mathbb{Z}_+$ существует открытое плотное множество U в пространстве $C^r(\mathbb{T}_x^{n+1} \times B_c^l \rightarrow \mathbb{R})$ (переменные c на шаре $B^l \subset \mathbb{R}^l$ рассматриваются как параметры), такое что для любой функции $F \in U$ и всех $c \in B^l$ функция $\vartheta = F(\cdot, c)$ удовлетворяет предложению 2.6.2.

Для доказательства леммы 2.6.2 достаточно применить предложение 2.6.2 для

$$x = (\zeta, \tau), \quad \vartheta(x) = \Theta(\eta_*, \zeta, \tau), \quad \alpha = (-\nu(\eta_*), 1), \quad \kappa \parallel (\beta, \langle \nu(\eta_*), \beta \rangle).$$

Заметим, что направление вектора $\beta \in \mathbb{R}^n$ может быть выбрано произвольным.

Доказательство предложения 2.6.2. Мы строим отображение w так, что все точки $w(\varphi)$ расположены около точки максимума или минимума функции $\vartheta|_{\mathbb{T}_\varphi^n}$.

1. Пусть $x_+(\varphi)$ и $x_-(\varphi)$ (глобальные) максимумы и минимумы $\vartheta|_{\mathbb{T}_\varphi^n}$. Тогда $\partial \vartheta(x_\pm(\varphi)) \parallel k$. Следовательно

$$\partial \vartheta(x_\pm(\varphi)) = \frac{k}{|k|^2} \partial_k \vartheta(x_\pm(\varphi)), \quad \varphi \in \mathbb{T}. \quad (2.6.17)$$

Для типичной функции ϑ мы можем считать функции

$$x_{\pm} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}^{n+1} \quad \text{и} \quad \vartheta \circ x_{\pm} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$$

кусочно-гладкими и все (за исключением конечного множества) критические точки $x_{\pm}(\varphi)$ невырождены. Функции $\vartheta \circ x_{\pm} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны.

2. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in \mathbb{T}$ — множество точек, в которых x_+ или x_- разрывны. Можно считать, что они упорядочены на окружности \mathbb{T} . Тогда, интервалы

$$I_1 = (\varphi_1, \varphi_2), \quad I_2 = (\varphi_2, \varphi_3), \quad \dots, \quad I_N = (\varphi_N, \varphi_1).$$

образуют разбиение \mathbb{T} . Функции $x_{\pm}|_{I_j}$, $j = 1, \dots, N$ являются гладкими и

$$\frac{dx_{\pm}}{d\varphi} - \frac{k}{|k|^2} \perp k, \quad \varphi \in \mathbb{T}^1 \setminus \Phi, \quad \Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}. \quad (2.6.18)$$

Рассмотрим подмножество $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}$, такое что для любого отображения $w \in \mathcal{W}_0$ существует такое множество

$$\hat{\Phi} = \{\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_N\}, \quad \hat{\varphi}_j \in \bar{I}_j, \quad (2.6.19)$$

что w является гладкой на любом интервале

$$I_{j\downarrow} = (\varphi_j, \hat{\varphi}_j), \quad I_{j\uparrow} = (\hat{\varphi}_j, \varphi_{j+1}), \quad j = 1, \dots, N.$$

Ясно, что $x_{\pm} \in \mathcal{W}_0$ и, более того, для любого множества знаков $\sigma_{j\downarrow}, \sigma_{j\uparrow} \in \{+, -\}$, функция

$$\varphi \mapsto x_{\sigma, \Phi}(\varphi) := x_{\sigma(\varphi)}(\varphi), \quad \sigma(\varphi) = \begin{cases} \sigma_{j\downarrow}, & \text{если } \varphi \in I_{j\downarrow}, \\ \sigma_{j\uparrow}, & \text{если } \varphi \in I_{j\uparrow}. \end{cases} \quad (2.6.20)$$

также лежит в \mathcal{W}_0 .

3. Для того, чтобы контролировать проекцию интеграла (2.6.16) на $(\text{span } k)^{\perp}$, мы используем следующую лемму

Лемма 2.6.3. $\mathcal{P}(x_{\pm}) = 0$.

Доказательство. Из (2.6.17) и (2.6.18) мы имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x_{\pm}) &= \frac{k}{|k|^2} \int_{\mathbb{T}} \partial_k \vartheta(x_{\pm}(\varphi)) d\varphi \\ &= \int_{\mathbb{T}} \left\langle \partial \vartheta(x_{\pm}(\varphi)), \frac{dx_{\pm}(\varphi)}{d\varphi} \right\rangle d\varphi = \int_{\mathbb{T}} \frac{d\vartheta(x_{\pm}(\varphi))}{d\varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Поскольку функции $\vartheta \circ x_{\pm}$ непрерывны, то последний интеграл равен нулю. \square

Следствие 2.6.1. *Образ отображения \mathcal{P} содержит ноль.*

4. Для типичной ϑ функции $\partial_k \vartheta \circ x_{\pm}$ различны.

Следствие 2.6.2. *Для типичной ϑ существует число $\hat{\varkappa} = \hat{\varkappa}(\vartheta) > 0$, такое что множество $\mathcal{P}(\mathcal{W}_0)$ содержит интервал*

$$\{\varkappa k/|k| : \varkappa \in (-\hat{\varkappa}, \hat{\varkappa})\}.$$

5. Рассмотрим $w \in \mathcal{W}_0$ в малой окрестности $x_{\sigma, \Phi} \in \mathcal{W}_0$. Более точно, положим

$$w = x_{\sigma, \Phi} + \varepsilon v + O(\varepsilon^2),$$

где v непрерывна на $\mathbb{T} \setminus (\Phi \cup \hat{\Phi})$.

Для любой точки $\varphi \in \mathbb{T} \setminus (\Phi \cup \hat{\Phi})$ условие (2.6.15) влечет

$$\langle k, v \rangle = 0, \quad \langle A\alpha, v \rangle = 0, \quad (2.6.21)$$

где $(n+1) \times (n+1)$ -матрица $A(\varphi)$ — матрица Гессе:

$$A(\varphi) = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}(x_{\sigma, \Phi}(\varphi)).$$

Поскольку $\alpha \perp k$, уравнения (2.6.21) эквивалентны

$$\langle k, v \rangle = 0, \quad \langle A_k \alpha, v \rangle = 0, \quad A_k = \pi A \pi^*, \quad (2.6.22)$$

где

$$\pi(\cdot) = (\cdot) - \frac{k}{|k|^2} \langle k, \cdot \rangle$$

— ортогональный проектор на пространство $T\mathbb{T}_{\varphi}^n$, а π^* — его ограничение на $T\mathbb{T}_{\varphi}^n$.

Каждая точка $x_{\sigma, \Phi}(\varphi)$ является точкой максимума или минимума функции $\vartheta|_{\mathbb{T}_{\varphi}^n}$. Следовательно каждая матрица $A_k(\varphi)$ является неотрицательно или положительно определенной. Более того, для любой типичной функции ϑ операторы $A_k(\varphi)$ вырождены только в конечном числе точек $\varphi \in \mathbb{T}$.

6. Мы можем рассматривать v , удовлетворяющее (2.6.22), как элемент касательного пространства $T_{x_{\sigma, \Phi}} \mathcal{W}$. Компонента \mathcal{P} , перпендикулярная k , равна $\pi \mathcal{P}$. Мы имеем: $\pi \mathcal{P}(x_{\sigma, \Phi}) = 0$ и

$$d\pi \mathcal{P}(x_{\sigma, \Phi}) v = \int_{\mathbb{T}} \pi A(\varphi) v(\varphi) d\varphi = \int_{\mathbb{T}} A_k(\varphi) v(\varphi) d\varphi.$$

Тогда

$$d\pi \mathcal{P}(x_{\sigma, \Phi})(T_{x_{\sigma, \Phi}} \mathcal{W}) = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle p, k \rangle = \langle p, \alpha \rangle = 0\}.$$

По теореме о неявной функции \mathcal{P} -образ окрестности \mathcal{W}_0 в \mathcal{W} содержит окрестность интервала $(-\hat{\varkappa}k/(2|k|), \hat{\varkappa}k/(2|k|))$ в \mathbb{R}_{α}^n . \square

2.6.3 Кратные резонансы

В этом подразделе обсуждается доказательство предложения 2.6.1.

Лемма 2.6.4. *Рассмотрим вектор $k = (k_1, \dots, k_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}$, такой что $\text{НОД}(k_1, \dots, k_{n+1}) = 1$.² Тогда существует матрица $\mathcal{K} \in SL(n+1, \mathbb{Z})$, у которой первая строка совпадает с вектором k и*

$$\|\mathcal{K}\|_2 \leq \sqrt{n+1} |k|_2. \quad (2.6.23)$$

Доказательство этой леммы см. в [63] (лемма 18.1).

Пусть $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ – вектор с евклидовыми координатами, $(\zeta, \tau) = x \pmod{\mathbb{Z}^{n+1}}$. Напомним, что

$$\mathbb{T}_\varphi^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle k, x \rangle = \varphi \pmod{\mathbb{Z}}\}. \quad (2.6.24)$$

Применим линейное преобразование к \mathbb{R}^{n+1} с вышеназванной матрицей \mathcal{K} . Тогда образами торов (2.6.24) будут торы

$$\mathcal{K}\mathbb{T}_\varphi^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1 = \varphi \pmod{\mathbb{Z}}\}. \quad (2.6.25)$$

Обозначим через $E = \mathcal{K}B_a$ образ n -мерного шара $B_a \subset \mathbb{T}_\varphi^n$. В силу неравенства (2.6.23) и того, что $\det \mathcal{K} = 1$, множество E содержит n -мерный шар радиуса

$$a_\star = \frac{a}{(n+1)^{n/2} |k|_\infty^n}.$$

Тогда предложение 2.6.1 будет следовать из следующего предложения, доказываемого в [63]:

Предложение 2.6.3. *Пусть точка $\eta \in S_0^k(a, K)$ – сложная и $\epsilon = \epsilon_{a,n,K} < 1/(2\pi)$, где*

$$\epsilon_{a,n,K} = \frac{4n \log(2l_{a,n} + 1)}{\pi K}, \quad l_{a,n} = \frac{3 \cdot 2^n}{\pi a^n \sin(\pi a/2)} + 1$$

Тогда найдется $l \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $|l|_\infty \leq 2l_{a,n}$, такой что $\eta \in S_\epsilon^l$.

Применим это предложение к тору (2.6.25) с $a = a_\star$. Если точка $\eta \in S_0^k(a_\star, K)$ – сложная, то имеется резонанс $l \in \mathbb{Z}^{n+1}$, не параллельный вектору $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^{n+1}$.

²По определению $\text{НОД}(0, l) = |l|$ для $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

2.6.4 Плотность решеток на торе

Рассмотрим решетку $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ в обычном евклидовом пространстве $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Пусть $\| \cdot \|$ — соответствующая норма. Мы рассматриваем \mathbb{T}^n как факторпространство $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ с каноническим накрытием $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$.

Будем называть конечное множество $\Lambda \subset \mathbb{T}^n$, содержащее начало координат, решеткой, если для любых $x_0, x_1 \in \Lambda$ точка x_2 , удовлетворяющая равенству

$$x_2 = \pm x_1 \pm x_0 \pmod{\mathbb{Z}^n}, \quad (2.6.26)$$

также принадлежит Λ .

Рассмотрим соответствующую решетку в \mathbb{R}^n :

$$\hat{\Lambda} = \pi^{-1}(\Lambda).$$

Всегда можно выбрать n линейно независимых векторов $x_1, \dots, x_n \in \hat{\Lambda}$. Такую систему векторов будем называть *фундаментальной*, если параллелепипед Π с вершинами в точках

$$\sigma_1 x_1 + \dots + \sigma_n x_n, \quad \sigma_j \in \{0, 1\}. \quad (2.6.27)$$

не содержит других точек $\hat{\Lambda}$. Такой параллелепипед Π , будем называть *фундаментальным*.

Ясно, что для фундаментальную систему векторов для заданной решетки можно выбрать не единственным образом.

Лемма 2.6.5. *Предположим, что любой фундаментальный параллелепипед Π имеет диаметр, больший чем $\delta > 0$. Тогда найдется вектор $b \in \mathbb{Z}^n$, $0 < |b| < c_*/\delta$, такой что*

$$\langle b, x \rangle = 0 \pmod{\mathbb{Z}} \quad \text{для любого } x \in \Lambda.$$

Константа c_ зависит только от n .*

Доказательство. Прежде всего, покажем, что можно выбрать фундаментальную систему $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ так, что углы $\alpha_{i,j} = \angle(x_i, x_j)$ не слишком маленькие.

Предложение 2.6.4. *Фундаментальная система может быть выбрана так, что $|\cos \alpha_{ij}| \leq 1/2$.*

Доказательство. Выберем x_1, \dots, x_n так, что

$$\begin{aligned} |x_1| &= \min\{|x| : x \in \Lambda\}, \\ |x_2| &= \min\{|x| : x \in \Lambda, \text{ где } x, x_1 \text{ — линейно независимые}\}, \\ &\dots \\ |x_n| &= \min\{|x| : x \in \Lambda, \text{ где } x, x_1, \dots, x_{n-1} \text{ — линейно независимые}\}. \end{aligned}$$

В частности, имеем:

$$|x_1| \leq |x_2| \leq \dots \leq |x_n|. \quad (2.6.28)$$

Утверждение 2.6.1. Система $\{x_1, \dots, x_n\}$ является фундаментальной.

В самом деле, предположим, что $x \in \Pi \cap \Lambda$ — не вершина Π . Выберем такой номер j , что система x_1, \dots, x_{j-1}, x является линейно независимой, а вектора x_1, \dots, x_j, x — линейно зависимые. Построим параллелепипед Π_j (размерности j), соответствующий системе x_1, \dots, x_j . Пусть V_j — множество его вершин. Для любой вершины $v \in V_j$ определим j -мерный симплекс $S_v \subset \Pi_j$ как выпуклую оболочку v и всех вершин V_j , соединенных с v ребром. Тогда $\Pi_j = \cup_{v \in V_j} S_v$.

Каждый симплекс S_v содержит ребро, выходящее из v и имеющее длину $|x_j|$, в то время как из (2.6.28) длины остальных ребер, выходящих из v не превосходят $|x_j|$. Отсюда шар B_v с центром в v радиуса $|x_j|$ содержит S_v . Следовательно, $\Pi_j \subset \cup_{v \in V_j} B_v$.

Отсюда можно заключить, что x принадлежит некоторому шару B_v . Другими словами, $|v - x| < |x_j|$. Точка $v - x$ также принадлежит Λ и векторы $x_1, \dots, x_{j-1}, v - x$ линейно независимы. Это противоречит определению x_j . Это доказывает утверждение.

Для любых $1 \leq i < j \leq n$ имеем: $|x_j \pm x_i| \geq |x_j|$. Это эквивалентно

$$\langle x_j - x_i, x_j - x_i \rangle \geq \langle x_j, x_j \rangle,$$

откуда следует, что

$$|\cos \alpha_{ij}| \leq \frac{|\langle x_i, x_j \rangle|}{|x_i|^2} \leq \frac{1}{2}.$$

□

Ниже мы используем фундаментальную систему (2.6.28).

Следствие 2.6.3. Из (2.6.28) диаметр Π удовлетворяет неравенству $\delta < n|x_n|$.

Сдвиги Π на векторы $x \in \Lambda$ образуют покрытие \mathbb{T}^n , такое что для двух различных векторов $x_1, x_2 \in \Lambda$

$$\text{int}(x_1 + \Pi) \cap \text{int}(x_2 + \Pi) = \emptyset.$$

Назовем $(n - 1)$ -мерные грани параллелепипедов $x + \Pi$ черными, если они трансверсальны x_n .

Следствие 2.6.4. Существует константа c , зависящая только от n , такая что для построенной выше фундаментальной системы x_1, \dots, x_n высота h параллелепипеда Π , которая перпендикулярна черной грани, удовлетворяет неравенству

$$h \geq c|x_n|. \quad (2.6.29)$$

Пусть $\mathcal{B} \subset \mathbb{T}^n$ — объединение всех черных граней. Тогда \mathcal{B} — $(n - 1)$ -мерное (не обязательно гладкое) подмногообразие \mathbb{T}^n .

Рассмотрим гиперплоскость

$$\hat{\mathcal{T}} = \text{span}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^n : \langle p, \hat{x} \rangle = 0\}. \quad (2.6.30)$$

Положим $\mathcal{T} = \pi(\hat{\mathcal{T}}) \subset \mathbb{T}^n$. Тогда \mathcal{T} — связная компонента \mathcal{B} , содержащая 0.

Пусть d_0 — максимальный диаметр открытого шара в $\mathbb{T}^n \setminus \mathcal{T}$. Следующее предложение дает важную информацию о векторе p .

Для данного ненулевого вектора $a \in \mathbb{R}^n$ пусть $\hat{\mathcal{T}}_a$ — гиперплоскость

$$\hat{\mathcal{T}}_a = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^n : \langle a, \hat{x} \rangle = 0\}.$$

Определим $\mathcal{T}_a = \pi(\hat{\mathcal{T}}_a)$.

Предложение 2.6.5. *Предположим $\mathbb{T}^n \setminus \mathcal{T}_a$ содержит открытый шар B диаметра d . Тогда $a \parallel b \in \mathbb{Z}^n$, $0 < |b| \leq 1/d$.*

Доказательство. Рассмотрим полный прообраз

$$\pi^{-1}(\mathcal{T}_a) = \cup_{n \in \mathbb{Z}^n} (n + \hat{\mathcal{T}}_a) \subset \mathbb{R}^n.$$

Тогда $\mathbb{R}^n \setminus \pi^{-1}(\mathcal{T}_a)$ содержит шар \hat{B} диаметра d .

Если a не параллелен целочисленному вектору, неравенство $0 < \langle a, m \rangle < \varepsilon$ имеет решение $m_\varepsilon \in \mathbb{Z}^n$ для всех малых $\varepsilon > 0$. Плоскости $m_\varepsilon k + \hat{\mathcal{T}}_a$, $k \in \mathbb{Z}$ лежат в $\pi^{-1}(\mathcal{T}_a)$ и пересекают любой шар диаметра

$$\frac{\langle m_\varepsilon, a \rangle}{|a|} < \frac{\varepsilon}{|a|}.$$

Это означает, что $a \parallel b$ для некоторого целочисленного $b \neq 0$. Мы предполагаем, что $\text{НОД}(b_1, \dots, b_n) = 1$. Тогда

$$\min\{\langle m, b \rangle : m \in \mathbb{Z}^n, \langle m, b \rangle > 0\} = 1.$$

Пусть этот минимум достигается на $m_* \in \mathbb{Z}^n$. Тогда

$$\mathbb{R}^n \setminus \pi^{-1}(\mathcal{T}_a) = \cup_{k \in \mathbb{Z}} (m_* k + \hat{\mathcal{T}}_a).$$

Отсюда радиус любого шара $\hat{B} \subset \mathbb{R}^n \setminus \pi^{-1}(\mathcal{T}_a)$ меньше чем $1/b$. \square

По предложению 2.6.5 без ограничения общности вектор p , см. (2.6.30), удовлетворяет

$$p \in \mathbb{Z}^n, \quad \text{НОД}(p_1, \dots, p_n) = 1, \quad 0 < |p| \leq 1/d_0. \quad (2.6.31)$$

Пусть s — число компонент связности \mathcal{B} .

Предложение 2.6.6. (1) $\langle p, x \rangle = 0 \pmod{\mathbb{Z}}$ для всех $x \in \mathcal{T} \cap \Lambda$.

(2) $\langle p, x \rangle = 0 \pmod{\frac{1}{s}\mathbb{Z}}$ для всех $x \in \Lambda$.

Доказательство. Пункт (1) следует из (2.6.30). Заметим, что

$$\mathcal{B} = \mathcal{T} \cup (x_n + \mathcal{T}) \cup \dots \cup ((s-1)x_n + \mathcal{T}), \quad \mathcal{T} = (sx_n + \mathcal{T}).$$

Отсюда следует (2). □

Следствие 2.6.5. $\langle sp, x \rangle = 0 \pmod{\mathbb{Z}}$ для любого $x \in \Lambda$.

Остается оценить $|sp|$. Мы имеем:

$$|sp| < \frac{s}{d_0} \leq \frac{1}{h} \leq \frac{1}{c_*|x_n|} \leq \frac{n}{c_*\delta}$$

где первое неравенство следует из (2.6.31), второе – из определения h (см. 2.6.4), третье – из (2.6.29), а четвертое неравенство – из следствия 2.6.3.

2.6.5 Доказательство леммы 2.5.3

Как уже отмечалось в доказательстве утверждения 2.4.2, отображение $f(\zeta) = F^\beta(0, \zeta + \nu_*\bar{t}_{l+1})$ разрывно в точке ζ в двух случаях:

1) $\langle \zeta + \nu_*\bar{t}_{l+1}, \bar{k} \rangle \in \hat{\Phi}$;

2) $\tau(\zeta + \nu_*\bar{t}_{l+1})$ является одним из концов отрезка $\left[0, (\bar{K}/\lambda)^{1/2}\right]$.

Рассмотрим уравнения (2.5.38), описывающие динамику последовательности $\{\varphi_l\} = \{\langle \zeta_l, \bar{k} \rangle\}$. Ее члены монотонно движутся по окружности с переменным шагом $\Delta_l = \varepsilon^\omega t_{l+1}(a\alpha_{l+1} + \langle \bar{k}, \mathcal{E}_l^{(\zeta)} \rangle) < 0$, $d_1\varepsilon^\omega |\log \varepsilon| < |\Delta_l| < d_2\varepsilon^\omega |\log \varepsilon|$, где $d_{1,2} > 0$ не зависят от ε и l . Для некоторого $M = O(\varepsilon^{-\omega} |\log^{-1} \varepsilon|)$ последовательность $\{\varphi_l\}$, $l = m, m+1, \dots, m+M$, сделает полный оборот вокруг окружности, поэтому для достаточно малого $\varepsilon > 0$ мы можем сделать так, что в окрестность

$$O(\hat{\Phi} - \langle \nu_*, \bar{k} \rangle \bar{t}_{l+1}, \varepsilon|\bar{k}|) \subset \mathbb{T}$$

попала малая доля членов последовательности.

Если $\tau(\zeta_l + \nu_*\bar{t}_{l+1})$ является одним из концов отрезка $\left[0, (\bar{K}/\lambda)^{1/2}\right]$, то $\tau(\zeta_l) \in \{\bar{t}_{l+1}, \bar{t}_{l+1} + (\bar{K}/\lambda)^{1/2}\}$. Заменяем \bar{t}_{l+1} на $\bar{t}_{l+1} \pm 1$ так, чтобы удовлетворялись неравенства (2.4.6). Тогда $\tau(\zeta + \nu_*\bar{t}_{l+1}) \in \{1, (\bar{K}/\lambda)^{1/2} - 1\}$. □

Заключение.

В диссертации рассматриваются два блока вопросов, связанных со свойством неустойчивости траекторий в гамильтоновых системах.

Первая задача посвящена одному из обобщений периодических решений — так называемым g -периодическим траекториям. Здесь g — диффеоморфизм конфигурационного многообразия, сохраняющий лагранжиан системы. Рассматриваются системы как с непрерывным, так и с дискретным временем. Для обоих случаев получены обобщения знаменитой формулы Хилла для периодических траекторий, и из них выводятся достаточные условия орбитальной неустойчивости g -периодических траекторий, связывающие, например, такие величины, как индекс Морса траектории и размерность конфигурационного многообразия, с неустойчивостью траекторий. Рассмотрен случай вырождения траектории, и приводится редуцированная обобщенная формула Хилла. В качестве примера вырождения рассмотрен автономный случай.

Вторая задача посвящена такому явлению неустойчивости в динамике, как диффузия Арнольда. Рассматриваются многомерные априори неустойчивые близкие к интегрируемым гамильтоновы системы, у которых возмущение в первом приближении является тригонометрическим полиномом по быстрым переменным. Для этого случая доказано наличие диффузии в окрестности резонансов низкого порядка для типичного возмущения. Получена оценка скорости диффузии. В комбинации с результатами статьи [63] это доказывает наличие диффузии во всем пространстве действий в типичном случае для описанных выше систем. Нет никаких сомнений, что требование того, чтобы возмущение в первом приближении являлось тригонометрическим переменным по угловым переменным, можно опустить, и все результаты данной работы верны и в этом случае, однако это требует более сложных доказательств.

Литература

- [1] *Арнольд В. И.*, О неустойчивости динамической системы со многими степенями свободы. // Докл. АН СССР - 1964. - 156:1. - с. 9–12.
- [2] *Арнольд В.И.*, Математические методы классической механики, - Москва:URSS, 2003. - 416 с.
- [3] *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.*, Математические аспекты классической и небесной механики, - Москва:URSS, 2009. - 414 с.
- [4] *Болотин С. В.*, Об определителе Хилла периодической траектории, // Вестн. Моск. ун-та. - 1988. - Сер. 1. Матем., мех., № 3, - с. 30–34.
- [5] *Болотин С.В., Трещев Д.В.*, Формула Хилла, // Успехи Мат. Наук. - 2010, - 65:2(392), - с. 3–70.
- [6] *Веселов А.В.*, Интегрируемые отображения, // Успехи Мат. Наук. - 1991. - 46, выпуск 5(281), 190. - с. 3–45.
- [7] *Давлетшин М.Н.*, Формула Хилла для g -периодических траекторий лагранжевых систем, //Тр. ММО. - 2013. - 74, № 1, МЦНМО, М. - с. 75–113.
- [8] *Давлетшин М.Н., Трещев Д.В.*, Диффузия Арнольда в окрестности резонансов низкого порядка, //Современные проблемы механики. Сборник статей, Тр. МИАН, - 2016. - 295. - с. 54–91.
- [9] *Касселс Дж. В. С.*, Введение в теорию диофантовых приближений, - Москва:Издательство иностранной литературы, 1961. - 216 с.
- [10] *Козлов В.В., Трещев Д.В.*, Биллиарды: генетическое введение в динамику систем с ударами. - Москва:Издательство Московского Университета, 1991. - 168 с.
- [11] *Ляпунов А.М.*, Избранные труды, Москва:Издательство Академии наук СССР, 1948. - 541 с.

- [12] *Макдафф Д., Саламон Д.*, Введение в симплектическую топологию, Ижевск:Регулярная и хаотическая динамика, 2012, - 556 с.
- [13] *Милнор Дж.*, Теория Морса, Москва:ЛКИ, 2011, - 184 с.
- [14] *Трещев Д.В.*, О связи индекса Морса замкнутой геодезической с ее устойчивостью, //Труды семинара по векторному и тензорному анализу, Москва, Издательство Московского Университета. - 1988. с. 175–189.
- [15] *Трещев Д.В.*, К вопросу об устойчивости периодических траекторий бильярда Биркгофа, //Вестн. МГУ. Сер. I, матем., мех. - 1988. вып. 2. - с. 44–50.
- [16] *Aubry S., Abramovici G.*, Chaotic trajectories in the standard map: the concept of anti-integrability. //Physica, - 1990. - 43 D. - pp. 199–219.
- [17] *Bessi U.*, An approach to Arnold’s diffusion through the calculus of variations. //Nonlin. Anal. TMA. -1996. - 20. - pp. 1303–1318.
- [18] *Berti M., Bolle P.*, A functional analysis approach to Arnold Diffusion, //Annales Institute Henri Poincare’, analyse non-lineaire. - 2002. - 19, 4. - pp. 395–450.
- [19] *Berti M., Biasco L., Bolle P.*, Drift in phase space: A new variational mechanism with optimal diffusion time. //J. Math. Pures Appl. - 2003. - no. 6. - pp. 613–664.
- [20] *Bialy M.* Maximizing orbits for higher-dimensional convex billiards. // J. of Modern Dynamics. - 2009. - Vol. 3, No. 1. - pp. 51–59.
- [21] *Bolotin S.V., MacKay R.*, Multibump orbits near the anti-integrable limit for Lagrangian systems // Nonlinearity. - 1997. - V.10, No 5. - p. 1015.
- [22] *Bolotin S., Treschev D.*, Remarks on definition of hyperbolic tori of Hamiltonian systems. //Regular and Chaotic Dynamics. - 2000. - V. 5, No. 4. - pp. 401–412.
- [23] *Bolotin S., Treschev D.*. The anti-integrable limit. //Russian Math. Surveys. - 2015. - 70:6. - pp. 975–1030.
- [24] *Bott R.*, On the iteration of closed geodesics and Sturm intersection theory. //Comm. Pure. Appl. Math. - 1956. - 9. - pp. 171–206.
- [25] *Bounemoura A., Pennamen E.*, Instability for a priori unstable Hamiltonian systems: a dynamical approach. (English summary) // Discrete Contin. Dyn. Syst. - 2012. - 32. no. 3. - pp. 753–793.

- [26] *Chierchia L., Gallavotti G.*, Drift and diffusion in phase space. // Ann. Inst. Henri Poincaré. - 1994. - 60, (1). - pp. 1–144.
- [27] *Chenciner A., Montgomery R.*, A remarkable periodic solution of the 3 body problem in th case of equal masses. //Annals of Math. - 2000. - 152. - pp. 881–901.
- [28] *Chong-Qing Cheng, Jun Yan.*, Existence of diffusion orbits in a priori unstable Hamiltonian systems. //J. Differential Geom. - 2004. - 67, no. 3. - pp. 457–517.
- [29] *Chong-Qing Cheng, Jun Yan.*, Arnold diffusion in Hamiltonian systems: a priori unstable case //J. Differential Geom. - 2009. - Volume 82, Number 2. - pp. 229–277.
- [30] *Chong-Qing Cheng, Jinxin Xue.*, Arnold diffusion in nearly integrable Hamiltonian systems of arbitrary degrees of freedom. //arXiv:1503.04153v3. - 2015.
- [31] *Delshams A., de la Llave R., Seara T.M.*, A geometric mechanism for diffusion in Hamiltonian systems overcoming the large gap problem: heuristics and rigorous verification on a model. //Mem. Amer. Math. Soc. - 2006. - 179, no. 844. - viii+141 pp.
- [32] *Delshams A., de la Llave R., Seara T.M.*, Geometric properties of the scattering map of a normally hyperbolic invariant manifold, //Adv. Math. - 2008. - 217 (3). - pp. 1096–1153.
- [33] *Delshams A., Huguet G.*, Geography of resonances and Arnold diffusion in a priori unstable Hamiltonian systems. //Nonlinearity. - 2009. - 22, no. 8. - pp. 1997–2077.
- [34] *Delshams A., Huguet G.*, A geometric mechanism of diffusion: rigorous verification in a priori unstable Hamiltonian systems. (English summary). //J. Differential Equations. - 2011. - 250, no. 5. - pp. 2601–2623.
- [35] *Dullin H.R., Meiss J.D.*, Stability of minimal periodic orbits. //Phys. Lett. A. - 1998. - 247. - pp. 227–234.
- [36] *Ferrario D., Terracini S.*, On the existence of collisionless equivariant minimizers for the classical n -body problem. //Invent. Math. - 2004. - 155, no. 2. - pp. 305–362.

- [37] *Fontich E., Martin P.*, Arnold diffusion in perturbations of analytic integrable Hamiltonian systems. //Discrete Contin. Dynam. Systems. - 2001. - 7, no. 1. - pp. 61–84.
- [38] *Gallavotti G., Gentile G., Mastropietro V.*, Hamilton-Jacobi equation and existence of heteroclinic chains in three time scales systems. //Nonlinearity. - 2000. - 13. - pp. 323–340.
- [39] *Gidea M., Robinson C.*, Obstruction argument for transition chains of tori interspersed with gaps. //Discrete Contin. Dyn. Syst. - 2000. - Ser. S 2 no. 2. - pp. 393–416.
- [40] *Graff S. M.*, On the conservation of hyperbolic tori for Hamiltonian systems. //J. Differ. Equat. - 1974. - 15, No. 1. - pp. 1–69.
- [41] *Guardia M., Kaloshin V., Zhang J.*, A second order expansion of the separatrix map for trigonometric perturbations of a priori unstable systems. //Preprint. - 2015. - Режим доступа: <http://arxiv.org/pdf/1503.08301v2.pdf>
- [42] *Hill G.W.*, On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. //Acta Math. - 1886. - VIII, no.1. - pp. 1-36.
- [43] *Hu X., Sun S.*, Index and stability of symmetric periodic orbits in Hamiltonian systems with applications to figure-eight orbit. //Preprint. - 2009.
- [44] *Hu X., Sun S.*, Morse index and stability of Lagrangian solutions in the planar 3 body problem. // Preprint. - 2009.
- [45] *Hu X., Wang P.*, Conditional Fredholm determinant for the S-periodic orbits in Hamiltonian systems. //J. Funct. Anal. - 2011. - doi: 10.1016/j.jfa.2011.07.025.
- [46] *Kaloshin V., Levi M.*, Geometry of Arnold Diffusion. //SIAM Review. - 2008. - Vol. 50, No. 4. - pp. 702–720.
- [47] *Kaloshin V., Zhang K.*, A strong form of Arnold diffusion for two and a half degrees of freedom. //arXiv:1212.1150v2 - 2013.
- [48] *Kaloshin V., Zhang K.*, A strong form of Arnold diffusion for three and a half degrees of freedom, (Announcement of result). //Preprint. - 2014. Режим доступа: <http://www2.math.umd.edu/vkaloshi/>, <http://www.math.utoronto.ca/kzhang/publication.html>

- [49] *Kaloshin V., Zhang K.*, Dynamics of the dominant Hamiltonian, with applications to Arnold diffusion. //arXiv:1410.1844v2. - 2015.
- [50] *Kaloshin V., Zhang K.*, Arnold diffusion for smooth convex systems of two and a half degrees of freedom. // Nonlinearity. - 2015. - 28.8. - p. 2699.
- [51] *Kaloshin V., Zhang J., Zhang K.*, Normally Hyperbolic Invariant Laminations and diffusive behaviour for the generalized Arnold example away from resonances. //Preprint. - April 6, 2015. Режим доступа: <http://www.math.umd.edu/vkaloshi/papers/nhil-rand-model.pdf>
- [52] *Kozlov V.V.*, On the mechanism of the stability loss. //Differential Equations. - 2009. - 45. no. 4. - pp. 496–505.
- [53] *Kozlov V.V.*, Spectral properties of operators with polynomial invariants in real finite-dimensional spaces. //Proceedings of Steklov Inst. of Math. - 2010. - vol. 268. pp. 1–13.
- [54] *Kozlov V.V.*, The problem of stability of two-link trajectories in a multidimensional Birkhoff billiard. //Proceedings of Steklov Institute. - 2010. - V.269.
- [55] *Liu C., Long Y.*, Iterated index formula for closed geodesics with applications, //Science in China. - 2002. - 45(1). pp. 9–28.
- [56] *Long Y.*, Index Theory for Symplectic Paths with Applications, Birkhauser. Basel:Springer, Progress in Math. 207. - 2002. - 380 p.
- [57] *MacKay R. S., Meiss J. D.*, Cantori for symplectic maps near the anti-integrable limit. // Nonlinearity. - 1992. - V.5, V.149. - pp. 1–12.
- [58] *MacKay R. S., Meiss, J. D.*, Linear stability of periodic orbits in Lagrangian systems. // Phys. Lett. - 1983. - A 98, no. 3. - pp. 92–94.
- [59] *Nekhoroshev N.*, An exponential estimate of the time of stability in Hamiltonian systems close to integrable, // Russian Math. Surveys - 1977. - V. 32, No. 6. - pp. 1–65.
- [60] *Poincaré A.*, Les methodes nouvelles de la mecanique celeste. Vol 1–3, Paris:Gauthier-Villars, 1982, 1893, 1899.
- [61] *Piftankin G.N., Treshchev D.V.*, Separatrix maps in Hamiltonian systems. //Russian Math. Surveys. - 2007. -62, no. 2. pp. 219–322.

- [62] *Terracini S., Venturelli A.*, Symmetric trajectories for the $2N$ -body problem with equal masses. //Arch. Ration. Mech. Anal. - 2007. - 184, no. 3. - pp. 465–493.
- [63] *Treschev D.*, Arnold diffusion far from strong resonances in multidimensional a priori unstable Hamiltonian systems. //Nonlinearity. - 2012. - Vol. 25. - pp. 2717–2757.
- [64] *Treschev D., Zubelevich O.*, Introduction to the perturbation theory of Hamiltonian systems. - Springer-Verlag Berlin Heidelberg. - 2009, 211 p.
- [65] *Treschev D.*, Multidimensional symplectic separatrix maps. //J. Nonlin. Sci. - 2002. - V. 12, No 1. - pp. 27–58.
- [66] *Treschev D.*, Trajectories in a neighborhood of asymptotic surfaces of a priori unstable Hamiltonian systems. //Nonlinearity. - 2002. - Vol. 15. - pp. 2033–2052.
- [67] *Treschev D.*, Evolution of slow variables in a priori unstable Hamiltonian systems. //Nonlinearity. - 2004. - 17, no. 5. - pp. 1803–1841.
- [68] *Zehnder E.*, Generalized implicit function theorem with applications to some small divisor problems I,II. //Comm. Pure Appl. Math. - 28, No. 1, (1975). - pp. 91–140; 29, No. 1, (1976). - pp. 49–111.