

УТВЕРЖДАЮ

Директор ИПМ им. М.В. Келдыша РАН,  
член-корреспондент РАН  
А.И. Аптекарев



«20» января 2017 г.

## ОТЗЫВ

ведущей организации ИПМ им. М.В.Келдыша РАН  
на диссертационную работу Давлетшина Марса Наилевича  
«Некоторые аспекты неустойчивости в гамильтоновой динамике»,  
представленную на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук по специальности  
01.02.01 «Теоретическая механика»

Одной из главных задач многих исследований динамики механических систем является выделение и описание устойчивых и неустойчивых движений. Достижение полноты исследования при рассмотрении неустойчивых движений является более сложной проблемой: это обусловлено, с одной стороны, преимущественно нелокальным характером проявлений неустойчивости, а с другой стороны – разнообразием механизмов, вызывающих неустойчивость движения. До сих пор остается актуальным то, чему посвящена диссертация М.Н.Давлетшина: построение новых критериев устойчивости движения и изучение одного из самых интригующих проявлений неустойчивости движения в гамильтоновых системах - диффузии Арнольда.

Первая часть диссертации посвящена модификации формулы Хилла, устанавливающей связь вариационных характеристик функционала действия (или каких-либо его аналогов для дискретных систем) с устойчивостью или неустойчивостью рассматриваемого движения. Первоначальный вариант этой формулы, предложенный Д.У.Хиллом для системы с одной степенью свободы, долгое время считался математическим курьезом. Лишь в начале 80-ых годов XX века R.S.MacKay и J.D.Meiss и, независимо от них, Д.В.Трещев получили аналоги формулы Хилла, оказавшиеся очень эффективными при изучении бильiardных систем. Следующим важным шагом стала

работа С.В.Болотина, в которой подход Д.У.Хилла был обобщен на многомерный случай (1987 год). В дальнейшем очень много интересных результатов было установлено при рассмотрении того, как формула Хилла соотносится с другими характеристиками периодических движений (в частности, с индексами Морса-Маслова), как она видоизменяется при наличии в системе различных типов симметрии или каких-либо вырождений. Обзор достижений в данной области, опубликованный С.В.Болотиным и Д.В.Трещевым в 2010 году в журнале «Успехи математических наук», занимает почти 70 страниц.

Тем не менее, до сих пор ситуация, возникающая при наличии у системы различных типов симметрии, оставалась недостаточно изученной. Результаты первой главы диссертации закрывают этот пробел: М.Н.Давлетшин получил аналоги формул Хилла для так называемых  $g$ -периодических решений, удовлетворяющих условию  $x(t+T)=g(x(t))$ . Результаты соискателя охватывают как случай систем с дискретным временем, так и случай систем с непрерывным временем.

Задача, рассматриваемая во второй главе диссертации, относится к области исследований, в которой наблюдается острая конкуренция нескольких групп специалистов. Отправной точкой для этих исследований стала опубликованная в 1964 году работа В.И.Арнольда, содержащая пример близкой к интегрируемой гамильтоновой системы, допускающей значительные ( $\sim 1$ ) изменения переменных «действие». Б.В.Чириковым данное явление было названо «диффузией Арнольда». Пример В.И.Арнольда характеризуется наличием трудных для изучения методами теории возмущений экспоненциально малых эффектов. В 1994 году Chierchia и Gallavati установили, что необходимость в рассмотрении таких эффектов исчезает при изучении диффузии Арнольда в системах, названных ими «априори неустойчивыми». Среди активных исследователей диффузии Арнольда в априори неустойчивых системах можно отметить китайского математика Chong-Qing Cheng'a и работающего в США В.Калошина, опирающихся на предложенный J.Mather'ом вариационный подход. Каталонская группа, включающая известных специалистов A.Delshams'a и T.M.Seara, развивает т.н. «геометрический» подход, недостатком которого является отсутствие оценок скорости диффузии. Вероятно, самым мощным инструментом изучения диффузии Арнольда в априори неустойчивых системах является методика Д.В.Трещева, опирающаяся на сепаратрисное отображение. Используя свою методику, Д.В.Трещев в 2012 году получил

самые сильные на тот момент результаты, касающиеся свойств диффузии Арнольда в априори неустойчивых многомерных гамильтоновых системах (в диссертации результаты Д.В.Трещевы приведены в форме Теоремы 1). Однако в этом исследовании Д.В.Трещев ограничился рассмотрением диффузии в областях, далеких от сильных резонансов (в областях, где частоты изменения быстрых переменных не обладают соизмеримостями малых порядков).

Главным достижением второй главы диссертации является доказательство Теоремы 2 о поведении фазовых траекторий в окрестности гиперповерхностей, определяемых условием сильного резонанса. После этого в качестве следствия Теоремы 1 и Теоремы 2 соискатель сформулировал Теорему 3 о свойствах диффузии Арнольда (в частности, о ее скорости) для априори неустойчивой системы без ограничений на рассматриваемую область фазового пространства.

Диссертация М.Н.Давлетшина выполнена на высоком научном уровне. Но есть основания и для ряда замечаний.

1. Занимаясь написанием диссертации, соискатель, к сожалению, не проявлял должной заботы о читателе. Вопреки традиции, работа построена таким образом, что ее основные результаты фактически сформулированы в вводной части; в заключении приведено их краткое изложение на описательном уровне. Обзор предшествующих исследований по диффузии Арнольда в априори неустойчивых системах носит формальный характер: приведены ссылки на основные публикации с очень короткими комментариями. Было бы желательно иметь больше примеров (в частности, примеров  $g$ -периодических кривых, а также примеров, иллюстрирующих полученную автором оценку скорости диффузии Арнольда).

2. Так как применение формулы Хилла сводится к вычислению определителя некой матрицы, то на границах областей устойчивости может возникнуть ситуация плохой ее обусловленности. Приведенные в диссертации примеры слишком элементарны, и, может быть, в результате этого указанная проблема не проявилась существенным образом.

3. Во введении приведены формулы, в которых не все обозначения пояснены. В определении 1.1.4 на стр. 20 непонятно, как образованы индексы  $n$  и  $i$ .

4. На стр. 6, 24, 43, 92 фигурирует индекс Морса траектории. Так как стандартное определение индекса Морса дается для критической точки, соискателю следовало бы пояснить какой смысл эта величина имеет для траектории.

5. Лемма 1.2.3 на стр. 30 и утверждение 1.3.1 на стр. 34 приведены без доказательств. Даже если соискателю они кажутся тривиальными, доказательства стоило бы дать для полноты изложения (тем более, что утверждение 1.3.1 касается корректности определения важного для дальнейшего рассмотрения объекта).

6. Сформулировав в разделе 1.3 Теорему 7 (стр. 41), являющуюся одним из главных результатов диссертации, соискатель не указал, каким именно образом она вытекает из доказываемых вспомогательных утверждений.

7. Читателя может ввести в заблуждение название раздела 2.6 «Приложения» - он посвящен не применению полученных результатов к каким-то системам, а содержит доказательства вспомогательных утверждений.

В диссертации местами встречаются мелкие шероховатости текста и опечатки.

Впрочем, перечисленные недостатки не снижают ценности выполненной работы. Достоверность полученных результатов не вызывает сомнений. Работа является законченным научным исследованием и содержит новые подходы к исследованию динамики гамильтоновых систем.

Полученные результаты своевременно опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Полученные результаты могут найти применение в исследованиях динамических систем, описываемых гамильтоновыми уравнениями, проводимых в Московском государственном университете, в Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН, в Институте прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, в Институте космических исследований РАН, а также при чтении специальных курсов по гамильтоновой динамике для студентов старших курсов и аспирантов.

Рассматриваемая диссертация полностью удовлетворяет всем критериям «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства Российской Федерации от 24.09.2013 №842, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а ее автор Давлетшин Марс

Наилевич заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.01 – Теоретическая механика.

Отзыв на диссертацию составлен профессором, доктором физико-математических наук Сидоренко Владиславом Викторовичем, обсужден и одобрен на научном семинаре отдела N 5 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН 19 января 2017 г.

Ведущий научный сотрудник

отдела N 5 ИПМ им. М.В.Келдыша РАН,

профессор, доктор физико-математических наук



В.В.Сидоренко

125047, Москва, Миусская пл., дом 8

Тел. +7(499)220-78-76

E-mail: sidorenk@keldysh.ru

Заведующий отделом отдела N 5

ИПМ им. М.В.Келдыша РАН,

профессор, доктор физико-математических наук



Ю.Ф.Голубев

125047, Москва, Миусская пл., дом 8

Тел. +7(499)220-79-36

E-mail: golubev@keldysh.ru

*Примечание.* Полное название организации: Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук»