ФГБОУ ВО
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК

Айбатов Серик Жагалбаевич

МОДЕЛИ ТЕОРИИ ОЧЕРЕДЕЙ С ПРЕРЫВАНИЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2017

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор Афанасьева Лариса Григорьевна.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Дудин Александр Николаевич,
Белорусский государственный университет
факультет прикладной математики и информатики,
профессор кафедры теории вероятностей и
математической статистики;

кандидат физико-математических наук,
доцент Ткаченко Андрей Викторович,
старший преподаватель, факультет экономических наук,
департамент прикладной экономики, НИУ ВШЭ

Ведущая организация:

Федеральное государственное учреждение
"Воронежский государственный университет"

Защита диссертации состоится 17 марта 2017 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО "Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова"по адресу Москва, Ломоносовский проспект, 27, сектор А и на сайте механико-математического факультета: http://mech.math.msu.ru/∼snark/index.cgi

Автореферат разослан   февраля 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 на базе МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор   В. В. Власов.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена исследованию систем массового обслуживания с ненадежным и восстанавливающимся прибором, в которых функционирование обслуживающего устройства может быть прервано поломкой, после чего в течение некоторого времени (периода восстановления) происходит ремонт.

Основное внимание уделяется отысканию условий эргодичности систем с ненадежным прибором, нахождению операционных характеристик в стационарном режиме и оценке вероятности образования большой очереди.

Актуальность темы.

Системы с прерываниями обслуживания изучаются довольно давно. Одной из первых работ по данной тематике является статья H. White и L. Christie[1] в которой рассмотрена система $M/M/1/\infty$ с ненадежным прибором, где времена ремонта и рабочего состояния прибора имеют экспоненциальные распределения с разными параметрами. Одной из наиболее частых причин прерывания обслуживания является поступление в систему требования с более высоким приоритетом, статья R. Miller[2] посвящена такому виду прерывания. Отдельно стоит отметить работу D. Gaver[3], где рассмотрена система $M/G/1/\infty$, прибор в которой может ломаться только во время обслуживания требования, время рабочего состояния распределено экспоненциально, а время ремонта имеет произвольное распределение. В этой работе было введено понятие "полного времени обслуживания"(completion time), которое позволяет свести анализ системы с ненадежным прибором к классической системе $M/G/1/\infty$. Также там было рассмотрено несколько вариантов обслуживания требования после прерывания. Практически аналогичная модель была рассмотрена в книге П.П. Бочарова и А.В. Печинкина[4] с той разницей, что поломка прибора может происходить в любое время. Анализу подобных систем посвящено очень много работ, например, B. Doshi[5], J. Keilson[6]. В обзорной статье A. Krishnamoorty и др.[7] дано подробное описание имеющихся на данный момент в этом направлении результатов. Одной из последних работ является статья Л.Г. Афанасьевой и Е.Е. Баштовой[8], где

[1]H. White, L.S. Christie. (1958) Queuing with Preemptive Priorities or with Breakdown. *Operations Research. Vol. 6, No. 1 pp. 79-95*

[2]*Miller Jr R.G.* Priority queues. Ann. Math. Statist. 1960. **31**, № 1. 86–103.

[3]Gaver D.P. (1962) A waiting line with interrupted service including priority. *J Rl Stat Soc B 24:73–90*

[4]П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. (1995) Теория массового обслуживания. *М. : Изд-во Рос. ун-та дружбы народов.*

[5]Doshi B. T. Queueing systems with vacations — a survey //Queueing systems. – 1986. – **1**. – №1. – pp. 29-66.

[6]Keilson J. (1962) Queues subject to service interruptions. *Ann Math Stat 33(4):1314–1322*

[7]Krishnamoorthy A., Pramod P.K., Deepak T.G. (2009) On a queue with interruptions and repeat or resumption of service. *Nonlinear Anal Theory Methods Appl 71(12):1673–1683*

[8]*Afanaseva L.G., Bashtova E.E.* Coupling method for asymptotic analysis of queues with regenerative input and unreliable server. — Queueing Systems, 2014, v. 76, №2, p. 125–147.

рассмотрена система $Reg/G/1/\infty$ с ненадежным прибором, времена восстановления и рабочего состояния которого независимы и произвольно распределены.

Определение условий эргодичности процессов, описывающих функционирование систем, является одной из первых задач, которые приходится решать при анализе систем обслуживания. Эти условия представляют собой соотношения между параметрами модели, при которых не образуется бесконечно больших очередей. Доказательства соответствующих теорем приводят к анализу достаточно сложных случайных процессов, вообще говоря, не марковских. Если же удается построить цепь Маркова, описывающую функционирование системы, то доказательства предельных теорем основываются на результатах для марковских процессов. Одними из первых работ в данном направлении являются статьи F. Foster[9] и Д.Г. Кендалла[10], в которых найдены достаточные условия существования стационарного распределения у цепей Маркова, связанных с очередью в системе. Монография А.А. Боровкова[11] посвящена анализу свойств эргодичности и устойчивости широкого класса случайных процессов (цепей Маркова, стохастически рекурсивных последовательностей и рекурсивных цепей и др.). Анализ систем обслуживания часто сводится к изучению марковских процессов с помощью введения дополнительной переменной. Этот метод использован, например, Б.А. Севастьяновым[12] для исследования систем с отказами при произвольном распределении времени обслуживания, а также в И.Н. Коваленко[13] для систем с ограничениями. Другой метод доказательства эргодических теорем состоит в построении процессов, стохастически монотонных по времени. В этом случае из монотонности следует существование предела последовательности функций распределения. Условия, при которых этот предел задает распределение вероятностей, могут быть получены с помощью метода, предложенного в R. Loynes[14], (см., например, Л.Г. Афанасьева и А.В. Мартынов[15]).

Естественным и актуальным направлением развития теории является исследование моделей с входными потоками более общего вида. В настоящей работе представлены результаты для систем с регенерирующим входным

[9] Foster, F. G., “On the stochastic matrices associated with certain queuing processes”. *Ann. Math. Statist.*, 24, **2**, 355–360 (1953).

[10] Кендалл, Д. Г.,“Стохастические процессы, встречающиеся в теории очередей, и их анализ методом вложенных цепей Маркова”. *Математика*, 3, **6**, 97–111 (1959)

[11] Боровков, А. А., *Эргодичность и устойчивость случайных процессов.* М.: Едиториал УРСС, 440 с. (1999)

[12] Севастьянов, Б. А., “Эргодическая теорема для марковских процессов и её приложение к телефонным линиям с отказами”. *Теория вероятностей и её применения*, 2, **1**, 106–116 (1957).

[13] Коваленко, И. Н., “Некоторые задачи массового обслуживания с ограничением”. *Теория вероятностей и её применения*, 6, **2**, 222–228 (1961).

[14] *Loynes R.M.* The stability of a queue with non-independent inter-arrival and service times. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1962, v. 58, №3, p. 497–520.

[15] Афанасьева, Л. Г., Мартынов, А. В., “Об эргодических свойствах систем массового обслуживания с ограничением”. *Теория вероятностей и её применения*, 14, **1**, 105–114 (1969).

потоком и ненадежным прибором. Причем интервалы рабочего состояния прибора и ремонта определяются некоторым регенерирующим процессом, т.е. в нашей системе данные интервалы могут быть зависимыми, что является обобщением большинства систем с ненадежным прибором. Для такой модели найдено условие эргодичности процесса виртуального времени ожидания.

Если известно, что система стабильна и со временем очередь не растет до бесконечности, то возникает важная проблема связанная с оценкой вероятности образования сколь угодно большой очереди. То есть, если $\Psi(x)$ — функция распределения остаточного времени ожидания в стационарном режиме, то нас интересует асимптотика функции $1 - \Psi(x)$ при $x \to \infty$. Данному вопросу посвящено большое количество работ. В статье J. Abate и W. Whitt[16] данная задача решена для системы $M/G/1/\infty$ с приоритетами, в случае "тяжелых хвостов"и "легких". Вариант легких хвостов для системы $GI/G/1/\infty$ был рассмотрен в работах P. Glynn и W. Whitt[17], A. Ganesh и др.[18]. В статье Л.Г. Афанасьевой и Е.Е. Баштовой[19] этот результат был обобщен на систему $Reg/G/1/\infty$. В диссертации мы будем рассматривать только тяжелые хвосты. Как отмечено в S. Foss и др.[20], распределения с тяжелыми хвостами играют существенную роль при моделировании коммуникационных сетей. В силу различия в запросах от разных групп потребителей, часть трафика касается малых объемов работы, но есть запросы весьма большого объема и это приводит к распределениям с тяжелыми хвостами.

Хорошо известно (см. D. Lindley[21]), что время ожидания начала обслуживания n-го требования $(n = 1, 2, \dots)$ в система $GI/G/1/\infty$ определяется рекуррентным соотношением

$$w_{n+1} = \max(0, w_n + \eta_n - \zeta_n) = \max(0, w_n + u_n),$$

где η_n — время обслуживания n-го требования, ζ_n — интервал между моментами поступлений $(n+1)$-го и n-го требований, $u_n = \eta_n - \zeta_n$. Если $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ стационарная последовательность и $w_1 = 0$, то по распределению

$$w_n \overset{d}{=} \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} S_k,$$

[16] J. Abate, W. Whitt. (1997) Asymptotics for M/G/1 low-priority waiting time tail probabilities. *Queueing Systems, 25:173-233.*

[17] *Glynn P.W., Whitt W.* Logarithmic asymptotics for steadystate tail probabilities in a single-server queue. — Journal of Applied Probability, Special edition, 1994, v. 31A, p. 131—156.

[18] *Ganesh A., O'Connel N., Wischik D.* Big Queues. Springer, Verlag Berlin Heidelberg, 2004.

[19] Л.Г. Афанасьева, Е.Е. Баштова. (2015) Вероятности больших уклонений для системы обслуживания с регенерирующим входящим потоком. *Теория вероятностей и ее применения, 60(1):171-177.*

[20] *Foss S., Konstantopoulos T., Zachary S.* Discrete and continuous time modulated random walks with heavy-tailed increments. — Journal of Theoretical Probability, 2007, v. 20, №3, p. 581–612.

[21] *Lindley D.V.* The theory of queues with a single server. — Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Cambridge University Press, 1952, v. 48, №2, p. 277–289.

где $S_k = \sum_{j=1}^k u_j$ и $S_0 = 0$. Отсюда следует, что существует

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(w_n \leqslant x) = \mathsf{P}\left(\sup_{n\geqslant 0} S_n \leqslant x\right) \tag{1}$$

и $F(x)$ — функция распределения, когда $\mathsf{E}u_n < 0$ (см. R. Loynes[22]).

Первые результаты были получены для систем с управляющей последовательностью $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, состоящей из независимых одинаково распределенных случайных величин, на основе соотношения (1). Для регулярно меняющихся на $+\infty$ функций $G(x) = \int_x^{\infty} \mathsf{P}(u_n > y)dy$ асимптотика

$$\mathsf{P}\left(\sup_{n\geqslant 0} S_n > x\right) \sim \frac{G(x)}{-\mathsf{E}u_n} \quad (x \to \infty) \tag{2}$$

была установлена в работе J. Cohen[23], а затем обобщена на более широкий класс функций (надстепенных) в статье А.А. Боровкова[24]. Для субэкспоненциальных функций $G(x)$ асимптотика (2) доказана в V. Veraverbeke[25]. Дальнейшее развитие связано, с так называемыми, модулированными случайными блужданиями, для которых стационарная последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ состоит, вообще говоря, из зависимых случайных величин. Предполагается, что распределение приращения случайного блуждания $u_n = S_n - S_{n-1}$ определяется значением некоторого случайного процесса X_n. Отметим несколько статей на эту тему. K. Arndt[26] рассмотрел приращения с регулярно меняющимися хвостами, модулированные цепью Маркова с конечным множеством состояний. G. Alsmeyer и M. Sbignev[27], а также P. Jelenkovic и A. Lazar[28], исследовали распределение верхней грани случайного блуждания, модулированного цепью Маркова с конечным множеством состояний, но в предположении, что приращения u_n имеют субэкспоненциальный интегральный хвост. В работе S. Asmussen[29] рассмотрены случайные блуждания $Y(t)$ регенерирующей структуры. В предположении, что распределение верхней грани приращения $Y(t)$ на периоде регенерации асимптотически (при $x \to \infty$)

[22] *Loynes R.M.* The stability of a queue with non-independent inter-arrival and service times. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1962, v. 58, №3, p. 497–520.

[23] *Cohen J.W.* The single server queue. North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1969, 657 p.

[24] *Боровков А.А.* О факторизационных тождествах и свойствах распределения супремума последовательных сумм. — Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. 15, №3, с. 377–418.

[25] *Veraverbeke N.* Asymptotic behaviour of Wiener-Hopf factors of a random walk. — Stochastic Processes and their Applications, 1977, v. 5, №1, p. 27–37.

[26] *Arndt K.* Asymptotic properties of the distribution of the supremum of a random walk on a Markov chain. — Th. Prob. Appl., 1980, v. 25, p. 309–324.

[27] *Alsmeyer G., Sbignev M.* On the tail behaviour of the supremum of a random walk defined on a Markov chain. — Yokohama Math. J., 1999, v. 46, p. 139–159.

[28] *Jelenkovic P., Lazar A.* Subexponential asymptotics of a Markovmodulated random walk with queueing applications. — J. Appl. Prob., 1998, v. 25, p. 132—141.

[29] Asmussen, S., Semi-Markov queues with heavy tails. *Semi-Markov Models and Applications*, J. Janssen and N. Limnios, Kluwer, Dordrecht, 269–284 (1999).

эквивалентно распределению приращения за то же время, для случая субэкспоненциального интегрального хвоста получена асимптотика распределения верхней грани. Результаты применены к анализу системы обслуживания с полумарковским входящим потоком, для которой соответствующее случайное блуждание может рассматриваться как модулированное. В качестве модулирующей среды выступает полумарковский процесс. Установлены условия субэкспоненциальной асимптотики распределения процесса виртуального времени ожидания $W(t)$ в стационарном режиме.

В диссертации найдена асимптотика больших уклонений процесса виртуального времени ожидания в стационарном режиме для системы с регенерирующим входящим потоком, в предположении, что суммарная работа, поступившая в систему за период регенерации, имеет субэкспоненциальный интегральный хвост. Данный результат распространен на вложенные процессы w_n и $W_n = W(\theta_n)$, где θ_n — n-я точка регенерации входного потока. Мы также решили эту задачу в случае, когда прибор ненадежен.

Цель и задачи исследования.

Целью настоящей диссертационной работы являются:

- нахождение условий стабильности для системы $Reg/G/1/\infty$ с ненадежным прибором, если функционирование прибора определяется регенерирующим процессом, который не зависит от входящего потока;

- оценка вероятностей больших уклонений для функции распределения виртуального времени ожидания в стационарном режиме в случае "тяжелых"хвостов. Провести эту оценку для системы $Reg/G/1/\infty$ с надежным и ненадежным прибором;

- нахождение явного распределения виртуального времени ожидания и количества требований в системе в стационарном режиме для системы $M/G/1/\infty$ с ненадежным прибором и наличием приоритетных требований.

Научная новизна.

Все результаты работы являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Для системы обслуживания $Reg/G/1/\infty$ с ненадежным прибором, в которой процесс, описывающий моменты поломок и восстановления прибора, является регенерирующим, не зависящим от входного потока, установлены условия эргодичности.

2. Для системы обслуживания $M/G/1/\infty$ с ненадежным прибором и приоритетными требованиями получены условия эргодичности, найдены предельные распределения процессов виртуального времени ожидания

и числа требований в системе в терминах преобразования Лапласа-Стилтьеса, приведены выражения для важных операционных характеристик. Анализ проведен для двух дисциплин обслуживания требований после прерывания.

3. Найдена асимптотика вероятностей больших уклонений процесса виртуального времени ожидания для системы $Reg/G/1/\infty$ в предположении, что суммарное время обслуживания требований, поступивших в течение периода регенерации, имеет "тяжелый хвост". Аналогичный результат получен для системы $Reg/G/1/\infty$ с ненадежным прибором.

Методика исследования.

В диссертации используются различные методы и результаты теории вероятностей и теории случайных процессов: теоремы для стационарных процессов, теорема восстановления Блекуэлла, узловая теорема Смита, метод склеивания (coupling), теоремы о регенерирующих процессах, метод полного времени обслуживания.

Теоретическая и практическая значимость.

Диссертация носит теоретический характер. Её результаты могут найти применение в теории очередей, теории надежности, а также использоваться при исследовании телекоммуникационных систем.

Апробация работы.

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих семинарах механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова:

- Большом семинаре кафедры теории вероятностей под руководством действительного члена РАН, профессора А.Н. Ширяева (2016 г.),
- Семинаре «Исследование асимптотического поведения и устойчивости стохастических моделей» под руководством проф. Л.Г. Афанасьевой, проф. Е.В. Булинской, проф. Е.Б. Яровой (2013–2016 гг., неоднократно).

Результаты диссертации докладывались на:

- Международной конференции “XXXII International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models” в Норвегии (Тронхейм, 2014 г.);
- Международной конференции “16th Applied Stochastic Models and Data Analysis International Conference (ASMDA2015)” в Греции (Пирей, 2015 г.);
- Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» в МГУ (Москва, 2013-2016 гг.);

- Международной конференции по стохастическим методам (г. Новороссийск, пос. Абрау-Дюрсо, 2016 г.);

- Международной конференции по исследованию операций (ORM2016) в России (Москва, 2016г.).

Публикации.

Основные результаты диссертации содержатся в работах [1-4]. Все четыре статьи опубликованы в журналах из перечня ВАК. Также результаты диссертации содержатся в трудах международных конференций [5-12].

Структура и объём работы.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 85 наименований. Общий объем диссертации составляет 97 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Нумерация утверждений и условий совпадает с их нумерацией в соответствующих главах.

Во **введении** приводится краткий обзор исследований, посвящённых системам с ненадежными приборами, вопросам эргодичности различных систем и оценке вероятностей больших уклонений процесса виртуального времени ожидания. Историческая справка подкрепляется соответствующими ссылками на научные работы. Кроме того, во введении объясняется актуальность темы и научная новизна предпринятого автором исследования.

Первая глава посвящена поиску условий, при которых одноканальная система обслуживания с ненадежным прибором и регенерирующим входящим потоком является стабильной.

В разделе 1.1 даются основные определения, такие как случайный поток, регенерирующий процесс, регенерирующий поток, стохастическая ограниченность и эргодичность процесса. А также приводятся результаты, относящиеся к регенерирующим процессам и процессам восстановления (узловая теорема Смита, теорема Блекуэлла, основная теорема восстановления и др.). В этом разделе определяется следующий класс функций распределений.

Условие 1. Пусть τ случайная величина, тогда существует $n \geqslant 1$ и неотрицательная функция $f(x)$ такие, что $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dx > 0$ и

$$\mathsf{P}(\hat{\tau}_1 + \cdots + \hat{\tau}_n \in A) \geqslant \int_A f(x)dx, \quad A \in \mathcal{B},$$

где $\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_n$ независимые одинаково распределенные случайные величины, распределенные как τ. В зарубежной литературе такие распределения называются — *spread out distributions* (см. S. Asmussen[30]).

[30] *Asmussen S.* Applied Probability and Queues. Chichester: Wiley, 1987, 318 p.

В разделе 1.2 показано, что класс регенерирующих потоков довольно широк и он включает в себя многие потоки, обычно используемые в теории массового обслуживания. В качестве примеров таких потоков упоминаются дважды стохастический пуассоновский поток (ДСПП), у которого случайная интенсивность является регенерирующим процессом, поток с интенсивностью случайной амплитуды, поток со случайными периодами, марковски-модулированный поток (ММП), поток Льюиса, марковский поток поступлений (МПП), полумарковский поток (ПМП).

Далее,в разделе 1.3 дается описание модели. Рассматривается одноканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью и регенерирующим входящим потоком $X(t)$, определенным на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ с фильтрацией $\{\mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$, к которой он адаптирован. Случайные моменты $\{\theta_i^{(1)}, i \geqslant 1\}$ $(\mathsf{P}(\theta_0^{(1)} < \infty) = 1)$ — точки регенерации потока, $\tau_i^{(1)} = \theta_i^{(1)} - \theta_{i-1}^{(1)}$ — длина i-го периода регенерации, $\gamma_i^{(1)} = X(\theta_i^{(1)}) - X(\theta_{i-1}^{(1)})$. Предполагается, что $\mathsf{E}\tau_2^{(1)} < \infty$, $\mathsf{E}\gamma_2^{(1)} < \infty$, тогда интенсивность потока $\lambda_x = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{X(t)}{t} = \frac{\gamma_2^{(1)}}{\tau_2^{(1)}}$.

Здесь процесс $X(t)$ — это объем работы, который поступил в систему за время $[0, t]$.Заметим, что мы не накладываем никаких условий на отдельные времена обслуживания, они могут быть зависимыми в рамках одного периода регенерации.

Пусть $Y(t)$ — количество работы, которое может выполнить система за время $(0, t]$, если бы в системе всегда были требования. Считаем, что процессы $X(t)$ и $Y(t)$ не зависят друг от друга. В классической модели, когда прибор надежен и работает с единичной скоростью $Y(t) = t$. Здесь мы предполагаем, что

$$Y(t) = \int_0^t e(s)ds,$$

где $e(t, w)$ неотрицательный случайный процесс, все траектории которого интегрируемы по Лебегу в $(0, t]$. Кроме того, мы считаем, что процесс $\{e(t), t \geqslant 0\}$ — регенерирующий с точками регенерации $\{\theta_i^{(2)}\}_{i=1}^{\infty}$ $(\mathsf{P}(\theta_0^{(2)} < \infty) = 1)$ и случайные величины $\tau_i^{(2)} = \theta_i^{(2)} - \theta_{i-1}^{(2)}$, $\zeta_j = Y(\theta_j) - Y(\theta_{j-1}) = \int\limits_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} e(s)ds$ имеют конечные математические ожидания

$$\mathsf{E}\tau_2^{(2)} < \infty, \quad \mathsf{E}\zeta_2 < \infty.$$

Тогда $Y(t)$ будет регенерирующим потоком и его интенсивность $\lambda_y = \frac{\mathsf{E}\zeta_2}{\mathsf{E}\tau_2^{(2)}}$, а *коэффициент загрузки системы*

$$\rho = \frac{\lambda_x}{\lambda_y} = \frac{\mathsf{E}\gamma_2^{(1)}}{\mathsf{E}\zeta_2}\frac{\mathsf{E}\tau_2^{(2)}}{\mathsf{E}\tau_2^{(1)}}.$$

В модели, когда прибор может находиться в рабочем или нерабочем (он ремонтируется) состоянии, процесс

$$e(t) = \begin{cases} 0, & \text{прибор сломан} \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В данной модели предполагается, что при поломке прибора происходит немедленное прерывание обслуживания требования. Прерванное обслуживание продолжается после восстановления прибора, причем время обслуживания требования после восстановления прибора совпадает с остаточным временем обслуживания этого требования в момент поломки.

Введем процесс виртуального времени ожидания $W(t)$, представляющий собой суммарное остаточное время обслуживания требований, находящихся в системе в момент t. Как известно (см., например, Л. Такач[31]), для данной модели будет справедливо следующее равенство

$$W(t) = \max[W(0) + Z(t), \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} (Z(t) - Z(s))], \tag{3}$$

где $Z(t) = X(t) - Y(t)$. Приведем условие, при котором процесс $Z(t)$ при $t \to \infty$ стремится по распределению к процессу $\tilde{Z}(t)$ со стационарными приращениями.

Следуя общепринятой терминологии в теории восстановления, мы рассматриваем 2 случая:

- дискретный, когда все случайные величины, определяющие модель, имеют решетчатые распределения с одним и тем же шагом;
- непрерывный случай, когда эти распределения нерешетчатые.

Условие 2. В непрерывном случае: распределения случайных величин $\tau_2^{(1)}$ и $\tau_2^{(2)}$ удовлетворяют условию 1. В дискретном случае: распределения случайных величин $\tau_2^{(1)}$ и $\tau_2^{(2)}$ апериодичны.

Определение 1. Случайная величина τ имеет *апериодичное* распределение, если наибольший общий делитель $\{k : \mathsf{P}(\tau = k) > 0\} = 1$.

Лемма 1. *Если существует предельное распределение* $\pi(x) = \lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{P}(e(t) \leqslant x)$, *то интенсивность потока* $Y(t)$ *равна* $\lambda_y = \int\limits_0^\infty x d\pi(x)$. *Если процесс* $e(t)$ *принимает только два значения* $\{0, 1\}$ *и существует* $\lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{P}(e(t) = 1) = \pi$, *то* $\lambda_y = \pi$.

Следующее условие позволяет доказать наличие общих точек регенерации для потоков $X(t)$ и $Y(t)$.

[31] Takacs L. M. Combinatorial methods in the theory of stochastic processes. – New York : Wiley, 1967. – v. 126.

Условие 3. Для n-го ($n \geqslant 1$) периода регенерации потока $Y(t)$ имеет место представление:

$$\tau_n^{(2)} = v_n^{(1)} + v_n^{(2)},$$

где $v_n^{(1)}$ и $v_n^{(2)}$ независимы, $\mathsf{P}(v_n^{(1)} > x) = e^{-\delta x}$, $\delta \in (0,\infty)$ и $Y(\theta_{n-1}^{(2)} + v_n^1) = Y(\theta_{n-1}^{(2)})$ с вероятностью 1.

Лемма 2 (О синхронизации). *Пусть выполнено условие 2 в дискретном случае и условие 3 в непрерывном случае. Определим в дискретном случае*

$$T_0 = \min\left\{\theta_j^{(1)} : \bigcup_{l=0}^{\infty}(\theta_j^{(1)} = \theta_l^{(2)})\right\},$$

$$T_n = \min\left\{\theta_j^{(1)} > T_{n-1} : \bigcup_{l=0}^{\infty}(\theta_j^{(1)} = \theta_l^{(2)})\right\},$$

соответственно в непрерывном случае

$$T_0 = \min\left\{\theta_j^{(1)} : \theta_j^{(1)} \in \bigcup_{l=1}^{\infty}(\theta_{l-1}^{(2)}, \theta_{l-1}^{(2)} + v_l^{(1)})\right\},$$

$$T_n = \min\left\{\theta_j^{(1)} > T_{n-1} : \theta_j^{(1)} \in \bigcup_{l=1}^{\infty}(\theta_{l-1}^{(2)}, \theta_{l-1}^{(2)} + v_l^{(1)})\right\}.$$

Тогда $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— общие моменты регенерации для процессов* $X(t)$, $Y(t)$ *и*

$$\text{в дискретном случае} \qquad \mathsf{E}\tau_2 = \mathsf{E}\tau_2^{(1)}\mathsf{E}\tau_2^{(2)} < \infty,$$

$$\text{в непрерывном случае} \qquad \mathsf{E}\tau_2 = \delta\mathsf{E}\tau_2^{(1)}\mathsf{E}\tau_2^{(2)} < \infty,$$

где $\tau_n = T_n - T_{n-1}$, $n \geqslant 1$.

В разделе 1.4 приводится основная теорема главы.

Теорема 1. *Пусть* $W(t)$ *случайный процесс, определяемый по формуле 3. Тогда*

- *если* $\rho > 1$, *то* $W(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ *с вероятностью 1;*
- *если* $\rho < 1$ *и выполнено условие 2, то существует* $\lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{P}(W(t) \leqslant x) = \Psi(x)$ *и* $\Psi(x)$ *является функцией распределения, т.е. процесс* $W(t)$ *эргодичен;*
- *если* $\rho = 1$ *и выполнено условие 3, то* $W(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ *по вероятности.*

Далее, этот результат переносится на систему массового обслуживания $Reg/G/1/\infty$ с ненадежным прибором. Для этого введем входящий поток

$A(t)$, представляющий собой количество требований, поступивших в систему за время $(0,t]$. Поток $A(t)$ — регенерирующий с точками регенерации $\{\theta_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$. Пусть $\xi_n = A(\theta_n^{(1)}) - A(\theta_{n-1}^{(1)})$ и $\mathsf{E}\xi_n < \infty$, тогда для интенсивности потока $A(t)$ справедливо равенство $\lambda = \frac{\mathsf{E}\xi_n}{\mathsf{E}\tau_n^{(1)}}$.

Времена обслуживания описываются последовательностью $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathsf{E}\eta_n = b < \infty$. Причем эта последовательность не зависит от процесса $A(t)$. Тогда поток $X(t)$ определяется следующей формулой

$$X(t) = \sum_{k=1}^{A(t)} \eta_k.$$

Он тоже будет регенерирующим с точками регенерации $\{\theta_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$.

Следствие 1. *Теорема 1 верна для системы $Reg/G/1/\infty$ с ненадежным прибором и коэффициент загрузки принимает следующий вид*

$$\rho = \frac{\lambda b}{\pi}.$$

В разделе 1.5 приведены примеры приложений следствия 1.

Вторая глава посвящена исследованию моделей типа $M/G/1/\infty$ с ненадежным прибором и приоритетным обслуживанием. Анализ этих моделей проводится параллельно для двух дисциплин обслуживания требований после прерывания:

- D1 (*Preemptive-resume interruptions*). Прерывание обслуживания интерпретируется как поломка прибора и, соответственно, имеет немедленный эффект. Прерванное обслуживание продолжается после восстановления прибора, причем время обслуживания требования после восстановления прибора совпадает с остаточным временем обслуживания этого требования в момент поломки.

- D2 (*Preemptive-repeat-different interruptions*). Обслуживание требования прерывается немедленно, а время обслуживания требования после восстановления прибора имеет то же распределение, что и начальное время обслуживания, и не зависит от него.

В разделе 2.1 даются результаты из книги П.Бочарова, А.Печинкина[4] и статьи D.Gaver[3], которые мы используем в следующих разделах.

П.П. Бочаров, А.В. Печинкин[4] рассмотрели систему массового обслуживания $M/G/1/\infty$ с ненадежным прибором. Вероятность выхода прибора из строя на интервале времени $(t, t+\Delta)$ зависит только от состояния системы в момент t и, если система в момент t свободна, то равна $\mu^*\Delta + o(\Delta)$, а если на приборе находится требование, то равна $\mu\Delta + o(\Delta)$. Параметры μ^* и μ — интенсивности отказов в свободном и занятом состояниях системы соответственно.

Если в момент отказа прибора система свободна, то прибор ремонтируется случайное время, имеющее функцию распределения $G^*(x)$ с преобразованием Лапласа-Стилтьеса (ПЛС) $\zeta^*(s)$ и средним g^*. При этом первое требование, поступившее в свободную систему в момент ремонта прибора, становится на прибор, но его обслуживание начинается только после окончания ремонта. Остальные поступающие требования скапливаются в очереди.

Если же в момент отказа прибора на нем находится требование, то обслуживание прекращается, а прибор ремонтируется случайное время с функцией распределения $G(x)$, ПЛС $\zeta(s)$ и средним g. В течение этого времени требование продолжает находиться на приборе, причем после восстановления прибора требование дообслуживается остаточное время.

Время обслуживания требования имеет функцию распределения $B(x)$, математическое ожидание b и ПЛС $\beta(s)$.

При помощи результатов из D. Gaver[3], мы находим $\alpha(s)$ и $\alpha^*(s)$ — ПЛС времени пребывания требования на приборе (полное время обслуживания), пришедшего в занятую систему и свободную соответственно для обеих дисциплин обслуживания после прерывания:

$$\text{для } \mathsf{D1} \qquad \alpha(s) = \beta(s + \mu - \mu\zeta(s)), \tag{4}$$

$$\text{для } \mathsf{D2} \qquad \alpha(s) = \frac{\beta(s+\mu)}{1 - \zeta(x)\frac{\mu}{s+\mu}(1 - \beta(s+\mu))}. \tag{5}$$

Здесь λ — интенсивность поступления требований в систему. Формула для нахождения $\alpha^*(s)$ имеет следующий вид

$$\alpha^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu^* - \mu^*\zeta^*(\lambda)} \left[1 + \mu^* \frac{\zeta^*(s) - \zeta^*(\lambda)}{\lambda - s}\right] \alpha(s). \tag{6}$$

Введем процессы $q(t)$ и $W(t)$ — число требований в системе и виртуальное время ожидания в момент t соответственно. Пусть $\rho = \lambda a < 1$, где $a = -\alpha'(0)$. Тогда эти процессы имеют предельные стационарные распределения

$$p_i = \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(q(t) = i), \quad \Psi(x) = \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(W(t) \leqslant x).$$

При этом, если $P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i$ и $w(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} d\Phi(x)$, то

$$P(z) = \frac{\alpha(\lambda - \lambda z) - z\alpha^*(\lambda - \lambda z)}{\alpha(\lambda - \lambda z) - z} p_0,$$

$$w(s) = \frac{s + \mu^* - \mu^*\zeta^*(s)}{s - \lambda + \lambda\alpha(s)} \frac{1-\rho}{1 + \mu^* g^*}, \tag{7}$$

где $p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho+\lambda a^*}$, $a^* = -(\alpha^*)'(0)$.

В разделе 2.2 мы находим асимптотику функции $1-\Psi(x)$ при $x\to\infty$, предполагая, что распределения времени обслуживания и времен ремонта имеют регулярно меняющиеся хвосты, т.е.

Условие 5. Пусть l, m и m^* целые числа, большие 1, и при $x\to\infty$

$$
\begin{aligned}
1-B(x) &\sim \frac{(-1)^l}{\Gamma(1-p)}x^{-p}L_1(x), \quad l<p<l+1,\\
1-G(x) &\sim \frac{(-1)^m}{\Gamma(1-r)}x^{-r}L_2(x), \quad m<r<m+1,\\
1-G^*(x) &\sim \frac{(-1)^{m^*}}{\Gamma(1-r^*)}x^{-r^*}L_2^*(x), \quad m^*<r^*<m^*+1,
\end{aligned}
$$

где $L_1(x), L_2(x)$ и $L_2^*(x)$ — медленно меняющиеся функции.

Используя формулу 7 и теорему из N. Bingham&R. Doney[32], мы доказываем теорему.

Теорема 2. *Пусть требования после прерывания обслуживаются по дисциплине* D1. *Если выполнено условие 5, то при* $x\to\infty$

$$
1-\Psi(x) \sim \frac{(-1)^{\tilde{n}-1}}{\Gamma(2-\tilde{q})}x^{-\tilde{q}+1}L_4(x),
$$

где $\tilde{n} = \min(l, m, m^*)$, $\tilde{q} = \min(p, r, r^*)$ *и*

$$
\begin{aligned}
L_3(x) &:= 1(p\leqslant r)(1+\mu g_1)^p L_1(x) + 1(p\geqslant r)\mu b_1 L_2(x),\\
L_4(x) &:= 1(q\leqslant r^*)\frac{\lambda}{1-\rho}L_3(x) + 1(q\geqslant r^*)\frac{\mu^*}{1+\mu^* g_1^*}L_2^*(x).
\end{aligned}
$$

Аналогичный результат для системы с дисциплиной D2 приведен в следующей главе, причем для более общего входящего потока и сильно субэкспоненциальных функций распределения времени обслуживания.

Далее рассматриваются две модели (M_1 и M_2), в которых присутствуют два вида прерываний обслуживания (поломка прибора, поступление приоритетного требования). В обеих моделях мы предполагаем, что входящие потоки являются пуассоновскими соответственно с параметрами λ_1 и λ_2. Времена обслуживания требований i-го типа ($i=1,2$) образуют последовательность $\{\eta_n^i\}_{n=1}^\infty$ независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $B_i(x)$, средним b_i и ПЛС $\beta_i(s)$.

В модели M_1 считаем, что прибор выходит из строя и восстанавливаются независимо от того, обслуживает он требование или нет. При этом функционирование прибора определяется двумя независимыми последовательностями, каждая из которых состоит из независимых одинаково распределенных

[32]N.H. Bingham, R.A. Doney. (1974) Asymptotic Properties of Supercritical Branching Processes I: The Galton-Watson Process. *Advances in Applied Probability 6(4):711-731.*

случайных величин. При этом время рабочего состояния распределено экспоненциально с параметром ν, а время восстановления имеет функцию распределения $D(x)$, среднее d и ПЛС $\delta(s)$.

В модели M_2 предполагается, что прибор состоит из двух блоков, первый обслуживает требования первого типа, а второй — требования второго. При этом в любой момент времени может работать только один блок. Каждый блок может выйти из строя во время обслуживания требования. Время рабочего состояния i-го блока ($i = 1, 2$) имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_i, а время восстановления распределено по закону $G_i(x), \zeta_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG_i(x)$ и имеет математическое ожидание g_i.

В разделах 2.4 и 2.6 показано как M_1 и M_2 сводятся к модели, описанной в разделе 2.1. Благодаря этому мы находим стационарное распределение процессов $q(t)$ и $W(t)$ для этих моделей, а также получаем асимптотику вероятностей больших уклонений функции $1 - \Psi(x)$ при $x \to \infty$. Данные результаты получены для обеих дисциплин обслуживания требования после восстановления прибора.

В **третьей главе** найдены условия, при которых $\Psi(x)$ будет субэкспоненциальной функцией распределения. Сначала мы получаем результат для системы обслуживания с регенерирующим входящим потоком и надежным прибором, а затем переносим этот результат на систему с прерываниями.

В разделе 3.1 дается описание модели.

Рассматривается одноканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью и регенерирующим входящим потоком $X(t)$, определенным на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ с фильтрацией $\{\mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$, к которой он адаптирован. Процесс $X(t)$ имеет непрерывные справа неубывающие кусочно-постоянные траектории ($X(0) = 0$).

Случайные величины θ_j и $\tau_j = \theta_j - \theta_{j-1}\,(j = 1, 2, \dots)$ называются соответственно моментами и периодами регенерации. Здесь мы считаем, что $X(t)$ — суммарное время обслуживания поступивших требований, и обозначаем $\gamma_n = X(\theta_n) - X(\theta_{n-1})$ и ξ_n — число скачков $X(t)$ на n-ом периоде регенерации. Предположим, что $\mathsf{E}\gamma_2 < \infty$ и $\mathsf{E}\tau_2 < \infty$, и обозначим $G(y) = \mathsf{P}(\gamma_2 \leqslant y)$, $g(x) = \int_x^\infty (1 - G(y))dy$, $G^I(x) = \frac{1}{\mathsf{E}\gamma_2} \int\limits_0^x (1 - G(y))dy$.

Процесс $W(t)$ — виртуальное время ожидания. Определим два вложенных процесса $W_n = W(\theta_n - 0)$ и $w_n = W(t_n - 0)$, где t_n — момент n-го скачка процесса $X(t)$. Для сходимости последовательности функций $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(w_n \leqslant x) = F(x)$ при $n \to \infty$ достаточно потребовать выполнение условия апериодичности.

Считаем, что $\rho = \frac{\mathsf{E}\gamma_2}{\mathsf{E}\tau_2} < 1$ и существуют пределы

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(W_n \leqslant x),$$
$$\Psi(x) = \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(W(t) \leqslant x),$$
$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(w_n \leqslant x)$$

и $\Psi(x)$, $\Phi(x)$, $F(x)$ являются функциями распределения.

Основная задача главы — найти асимптотическое поведение функций $\Psi(x)$, $\Phi(x)$ и $F(x)$ при $x \to \infty$. Будем считать, что случайный вектор (τ, γ, ξ) имеет такое же распределение, как и вектор $(\tau_2, \gamma_2, \xi_2)$.

В разделе 3.3 мы приводим основной результат.

Теорема 3. *Пусть $G^I(x) \in \mathscr{S}$ (класс субэкспоненциальных распределений) и при $y \to \infty$*

$$\mathsf{P}(\gamma > y + \tau) \sim \bar{G}(y). \tag{8}$$

Тогда при $x \to \infty$

$$\bar{\Phi}(x) \sim a^{-1} g(x), \tag{9}$$

где $a = \mathsf{E}\tau - \mathsf{E}\gamma$. В доказательстве используются построение вспомогательных мажорирующих систем и результаты V. Veraverbeke[25] для случайных блужданий с приращениями, которые имеют тяжелые хвосты.

Чтобы получить аналогичную асимптотику для функции $\bar{\Psi}(x)$, мы воспользуемся результатами работы S. Asmussen[29]. Если в условиях теоремы 3 дополнительно потребовать, чтобы функция распределения $\mathsf{P}(\gamma > y + \tau)$ была локально постоянной (класс $\mathscr{L}$), то асимптотика (9) верна для $\bar{\Psi}(x)$.

Введем функцию

$$v(x) = \frac{1}{\mathsf{E}\xi} \sum_{j=0}^{\infty} j\, \mathsf{P}(\gamma > x, \xi = j).$$

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения теоремы 3, условие 6 и*

$$\lim_{t\to\infty} v(x)/g(x) = 0.$$

Тогда для $\bar{F}(x)$ имеет место (9).

Доказательство опирается на неравенства

$$\mathsf{P}(W_{r(n)-1} - \tau_{r(n)} > x) \leqslant \mathsf{P}(w_n > x) \leqslant \mathsf{P}(W_{r(n)-1} + \gamma_{r(n)} > x), \tag{10}$$

где $r(n)$ — номер периода регенерации, на котором пришло n-е требование. Далее, мы показываем, что верхняя и нижняя оценки асимптотически эквиваленты $\bar{\Phi}(x)$ при $x \to \infty$.

Приводится следствие, упрощающее проверку условий в случае, когда количество поступившей работы за период регенерации не зависит от длины этого периода.

Следствие 9. *Если $G(x) \in \mathscr{L}$, $G^I(x) \in \mathscr{S}$ и γ не зависит от τ, то* (9) *имеет место для функций $\bar{\Phi}(x)$ и $\bar{\Psi}(x)$.*

В разделе 3.3 мы рассматриваем стандартную систему $Reg/G/1/\infty$. Здесь мы предполагаем, что процесс $A(t)$, задающий число требований, поступивших в систему за $[0,t)$, является регенерирующим. Времена обслуживания $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ образуют последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, не зависящих от $A(t)$. Тогда $X(t) = \sum_{j=1}^{A(t)} \eta_j$ также регенерирующий процесс с теми же моментами регенерации, что и $A(t)$. Интенсивность потока $A(t)$ определяется соотношением $\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t} = \frac{\mathsf{E}\xi}{\mathsf{E}\tau}$, а коэффициент загрузки $\rho = \lambda b < 1$, где $b = \mathsf{E}\eta_j$. Пусть $B(x)$ — функция распределения времени обслуживания. Введем вспомогательную случайную величину $\tilde{\xi}$, которая имеет распределение $\mathsf{P}(\tilde{\xi} = k) = \frac{k}{\mathsf{E}\xi}\mathsf{P}(\xi = k)$, $(k = 1, 2, \dots)$.

Теорема 5. *Пусть $B(x) \in \mathscr{S}^*$ (класс сильносубэкспоненциальных распределений), распределение ξ апериодично. Тогда верны следующие утверждения.*

(i) Если существует $c > b$ такое, что $\mathsf{P}(c\xi > x) = o(\bar{B}(x))$, то при $x \to \infty$

$$\bar{\Psi}(x) \sim \bar{\Phi}(x) \sim \frac{\lambda}{1-\lambda b}\int_x^{\infty} \bar{B}(y)dy. \tag{11}$$

(ii) Если существует $c > b$ такое, что $\mathsf{P}(c\tilde{\xi} > x) = o(\bar{B}(x))$, то асимптотика (11) *справедлива и для функции $\bar{F}(x)$.*

Раздел 3.4 посвящен приложениям теоремы 5.

Так в примере 6 рассматривается случай, когда в системе $Reg/G/1/\infty$ прибор ненадежен. Прибор может выходить из строя только во время обслуживания. Время рабочего состояния распределено экспоненциально с параметром ν, а время восстановления прибора имеет функцию распределения $D(x)$ с ПЛС $d(s)$ и средним $d < \infty$. Если обслуживание требования было прервано, то после устранения прерывания требование обслуживается заново, причем новое время обслуживания не зависит от исходного (дисциплина D2).

Следствие 10. *Пусть для системы $Reg/G/1$ с ненадежным прибором и дисциплиной* D2 *функция распределения времени восстановления $D(x) \in \mathscr{S}^*$. Если $\mathsf{P}(r\xi > x) = o(\bar{D}(x))$ для некоторого $r > b_c$, то при $x \to \infty$*

$$\bar{\Psi}(x) \sim \bar{\Phi}(x) \sim \frac{\lambda(1-b(\nu))}{(1-\lambda b_c)b(\nu)}\int_x^{\infty} \bar{D}(y)dy.$$

Если $\mathsf{P}(r\tilde{\xi} > x) = o(\bar{D}(x))$, *то эта асимптотика верна для* $\bar{F}(x)$.

В примерах 7 и 8 рассмотрены случаи, когда в систему поступают ДСПП и полумарковски-модулированный поток. Показано, какой вид примет теорема 5 в этих случаях.

Заключение. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

- Найдены достаточные условия эргодичности процесса виртуального времени ожидания для одноканальной системы обслуживания с ненадежным прибором, в которой входящий поток требований и процесс, описывающий моменты поломок и ремонта прибора, являются регенерирующими и не зависят друг от друга.

- Для систем обслуживания $M/G/1/\infty$ с ненадежным прибором и наличием приоритетных требований получены стационарные распределения процессов виртуального времени ожидания и числа требований в терминах преобразования Лапласа-Стилтьеса. Найдена асимптотика вероятностей больших уклонений для процесса виртуального времени ожидания в стационарном режиме в случае, когда время обслуживания и времена ремонта имеют распределения с "тяжелыми хвостами". Результаты приведены для двух дисциплин обслуживания требования после восстановления прибора.

- Получены достаточные условия субэкспоненциальности стационарного распределения виртуального времени ожидания в системе с регенерирующим входящим потоком и надежным прибором. Данный результат распространен на случай ненадежного прибора.

Дальнейшее исследование темы диссертации может быть связано с получением аналогичных результатов для многоканальной системы обслуживания с регенерирующим входящим потоком, где параметры функционирования каждого прибора определяются регенерирующими процессами. Большой интерес представляет анализ очереди, где прерывание обслуживания может происходить по многим причинам и источники прерываний взаимосвязаны.

Благодарности. Автор благодарит научного руководителя доктора физико-математических наук, профессора Афанасьеву Ларису Григорьевну за постановку задач и постоянное внимание к работе. Автор высоко ценит содействие, оказанное работе сотрудниками кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] *Айбатов С.Ж.* Эргодическая теорема для системы обслуживания с ненадежным прибором. — Математические заметки, **97** №6, 803–814. 2015.

[2] *Айбатов С.Ж.* Система с приоритетным обслуживанием и ненадежным прибором. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Механ., №3, 39–42. 2016.

[3] *Айбатов С.Ж.* Вероятности больших уклонений для системы $M/G/1/\infty$ с ненадежным прибором. — Теория вероятн. и её примен., 2016, т. 61, №2, с. 378–384.

[4] Aibatov S.Z. Queueing System with Preemptive Resume Service Discipline and Unreliable Server. Journal of Mathematical Sciences, 2016, **218**, №2, pp. 111–118.

[5] Aibatov S.Z. Waiting-time tail probabilities in queue with regenerative input flow and unreliable server. VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM 2016) Moscow, Conference Proceedings, vol. 1, 202–205.

[6] *Айбатов С.Ж.* Вероятности больших уклонений для системы обслуживания с входящим ДСПП и ненадежным прибором. XXIII Международная молодежная научная конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов», Тезисы докладов, МАКС Пресс, Москва, 2016.

[7] *Айбатов С.Ж., Афанасьева Л.Г.* Условия субэкспоненциальности стационарного времени ожидания в одноканальной системе обслуживания с регенерирующим входящим потоком. Материалы международной конференции по стохастическим методам, Тезисы докладов, с. 47, ЮФУ, Ростов-на-Дону, 2016.

[8] Aibatov S.Z. Queueing System with Preemptive Resume Service Discipline and Unreliable Server. 16th Applied Stochastic Models and Data Analysis International Conference (ASMDA2015), Book of Abstracts, 8-9, ISAST University of Piraeus, Greece, 2015.

[9] *Айбатов С.Ж.* Система с приоритетным обслуживанием и ненадежным прибором. XXII Международная молодежная научная конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов», Тезисы докладов, МАКС Пресс, Москва, 2015.

[10] Aibatov S.Z. Ergodic Theorem for a Single-Server Queue in a Random Environment. Book of abstracts of XXXII International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models. June 16–21, Trondheim, Norway, 2014

[11] *Айбатов С.Ж.* Система с приоритетным обслуживанием и ненадежным прибором. Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математики, тезисы докладов, 28 сентября – 5 октября, 2014.

[12] *Айбатов С.Ж.* Эргодическая теорема для одноканальных систем обслуживания с ненадежным прибором, функционирующих в случайной среде. XXI Международная молодежная научная конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов», Тезисы докладов, МАКС Пресс, Москва, 2014.