Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.518

Малофеев Илья Игоревич

ПОВЕРХНОСТНЫЕ МЕРЫ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва, 2017

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Богачев Владимир Игоревич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Лифшиц Михаил Анатольевич,
профессор кафедры теории вероятностей
и математической статистики
математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета,

кандидат физико-математических наук
Кругова Елена Павловна, ВИНИТИ РАН,
старший научный сотрудник ОНИ ПФМНиИТ.

Ведущая организация: Санкт-Петербургское отделение Математического института имени В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 17 марта 2017 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» по адресу: 119234, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Московского гоусдарственного университета имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, 27, сектор А) и на сайте механико-математического факультета http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi.

Автореферат разослан   февраля 2017 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 на базе МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор   В.В. Власов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Исследование поверхностных мер и концептуально близких к ним условных мер, порожденных мерами на бесконечномерных пространствах, имеет важное значение в целом ряде направлений современной теории меры, функционального анализа и стохастического анализа. Эти объекты и связанные с ними результаты находят весьма разнообразные применения даже при рассмотрении мер на конечномерных пространствах, в которых наличие классической меры Лебега существенно уменьшает или даже полностью исключает технические трудности, возникающие в бесконечномерных пространствах. Однако многие прикладные задачи приводят к необходимости не только рассматривать бесконечномерные вероятностные распределения, но и использовать соответствующие им поверхностные и условные меры. Условные распределения случайных процессов — классический объект теории вероятностей и теории меры, восходящий к работам А.Н. Колмогорова и Дж. Дуба и хорошо исследованный многими авторами за последние десятилетия. Понятие поверхностной меры возникло позже, поскольку оно, в отличие от весьма общего понятия условного распределения, требует наличия некоторой дифференциальной структуры на вероятностном пространстве. Конструкция поверхностных мер, порожденных квазиинвариантными или дифференцируемыми мерами на бесконечномерных пространствах, была предложена в 70-х годах прошлого века А.В. Скороходом[1,2], а в весьма специальном случае гауссовских мер ей предшествовала менее явная конструкция из работы Стенгла[3], где вместо поверхностных мер использовались условные математические ожидания (гауссовский случай развивался также Гудмэном[4], Го (Куо)[5] и Хертле[6]). Другая конструкция была предложена и развита в серии ра-

[1]Скороход А.В. Поверхностные интегралы и формула Грина в гильбертовом пространстве. Теория вероятн. и матем. статист. 1970. №2. С. 172–175.

[2]Скороход А.В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. Наука, М., 1975.

[3]Stengle G. A divergence theorem for Gaussian stochastic process expectations. J. Math. Anal. Appl. 1968. V. 21. P. 537–546.

[4]Goodman V. A divergence theorem for Hilbert space. Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 164. P. 411–426.

[5]Го Х. Гауссовские меры в банаховых пространствах. Мир, М., 1979.

[6]Hertle A. Gaussian surface measures and the Radon transform on separable Banach spaces. Lecture Notes in Math. 1980. V. 794. P. 513–531.

бот А.В. Угланова[7,8,9,10], где с использованием этого метода изучалась, в частности, гладкость распределений интегральных функционалов на пространствах с гладкими мерами. Однако основной целью этих построений А.В. Угланова были применения к дифференциальным уравнениям с частными производными на бесконечномерных пространствах, что продолжает оставаться важной мотивировкой и в настоящее время. Геометрический подход, на котором основан метод Угланова, требует довольно жестких ограничений дифференциально-топологического характера на рассматриваемые поверхности (в частности, задающая поверхность функция должна быть непрерывна; кроме того, требуются некоторые условия непрерывности на ее производную). Метод Угланова применялся В.Ю. Яхлаковым[11] для построения поверхностных мер на поверхностях конечной коразмерности. Совершенно иной подход предложили Э. Эро и П. Маллявэн[12] для гауссовских мер (этот подход представлен также в книге Маллявэна[13]). Несмотря на сужение класса мер, принципиальным отличием их работы было то, что рассматривались меры на поверхностях уровня соболевских функций без каких-либо топологических условий типа непрерывности. При этом результаты о существовании поверхностных мер выводились из результатов о регулярности распределений функционалов, а не наоборот, как это было в работах А.В. Угланова. В.И. Богачевым [14,15,16] был указан способ построения поверхностных мер для необязательно гауссовских гладких мер на основе исчисления Маллявэна. Этот способ был существенно развит в работах О.В. Пугаче-

[7] Угланов А.В. Поверхностные интегралы в банаховом пространстве. Матем. сб. 1979. Т. 110, № 2. С. 189–217.

[8] Угланов А.В. Поверхностные интегралы в пространствах Фреше. Матем. сб. 1998. Т. 189, № 11. С. 139–157.

[9] Угланов А.В. Поверхностные интегралы в локально выпуклых пространствах. Тр. Моск. матем. об-ва. 2001. Т. 62. С. 262–285.

[10] Uglanov A.V. Integration on infinite-dimensional surfaces and its applications. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[11] Яхлаков В.Ю. Поверхностные меры на поверхностях конечной коразмерности в банаховом пространстве. Матем. заметки 1990. Т. 47, № 4. С. 147–156.

[12] Airault H., Malliavin P. Intégration géometrique sur l’espace de Wiener. Bull. Sci. Math. (2). 1988. V. 112, № 1. P. 3–52.

[13] Malliavin P. Stochastic analysis. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[14] Bogachev V.I. Differential properties of measures on infinite dimensional spaces and the Malliavin calculus. Acta Univ. Carolinae, Math. et Phys. 1989. V. 30. № 2. P. 9–30.

[15] Bogachev V.I. Differentiable measures and the Malliavin calculus. J. Math. Sci. (New York). 1997. V. 87, №4. P. 3577–3731.

[16] Bogachev V.I. Differentiable measures and the Malliavin calculus. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2010.

ва[17,18,19]. В настоящей работе проведено дальнейшее усовершенствование этого способа, а тем самым и способа, восходящего к Маллявэну.

Отметим также, что имеется немало работ, в которых изучаются весьма близкие к поверхностным мерам объекты, в частности, книга Ю.А. Давыдова, М.А. Лифшица, Н.В. Смородиной[20] посвящена распределениям функционалов на вероятностных пространствах с помощью метода расслоений, в котором важную роль играют условные меры (см. также статьи Н.В. Смородиной[21,22,23] и обзор[24]), меры Хаусдорфа, ассоциированные с гауссовскими мерами, рассмотрены Д. Фейелем и А. де Ла Праделем[25], Дж. Да Прато, А. Лунарди, Л. Тубаро и их соавторы (см.[26,27,28]) применяют поверхностные меры к решению краевых задач в бесконечномерных пространствах, а О.Г. Смолянов[29] предложил конструкцию дифференциальных форм конечной костепени, также позволяющую строить поверхностные меры. О.Г. Смолянов предложил и конструкцию поверхностных мер на поверхностях бесконечной коразмерности (см.[30], [31], где есть дополнительные ссылки).

[17]Пугачев О.В. Формула Гаусса – Остроградского в бесконечномерном пространстве. Матем. сб. 1998. Т. 189, № 5. С. 115–128.

[18]Пугачев О.В. Построение негауссовских поверхностных мер методом Маллявэна. Матем. заметки. 1999. Т. 65, № 3. С. 377–388.

[19]Пугачев О.В. Емкости и поверхностные меры в локально выпуклых пространствах. Теория вероятн. и ее примен. 2008. Т. 53, № 1. С. 178–188.

[20]Давыдов Ю.А., Лифшиц М.А., Смородина Н.В. Локальные свойства распределений стохастических функционалов. Физматлит, М., 1995.

[21]Смородина Н.В. Дифференциальное исчисление на измеримых пространствах и условия гладкости плотностей распределений случайных величин. Докл. АН СССР. 1987. Т. 282, №5. С. 1053–1057.

[22]Смородина Н.В. Дифференциальное исчисление в пространстве конфигураций и устойчивые меры. I. Теория вероятн. и ее примен. 1988. Т. 33, № 3. С. 522–534.

[23]Смородина Н.В. Формула Гаусса – Остроградского на пространстве конфигураций. Теория вероятн. и ее примен. 1990. Т. 35, №4. С. 727–739.

[24]Давыдов Ю.А., Лифшиц М.А. Метод расслоений в некоторых вероятностных задачах. Итоги науки и техн. Теория вероятн., мат. статист. Теор. киберн. ВИНИТИ. 1984. Т. 22. С. 61–157.

[25]Feyel D., de La Pradelle A. Hausdorff measures on the Wiener space. Potential. Anal. 1992. V. 1, № 2. P. 177–189.

[26]Caselles V., Lunardi A., Miranda M. (jun.), Novaga M. Perimeter of sublevel sets in infinite dimensional spaces. Adv. Calc. Var. 2012. V. 5, № 1. P. 59–76.

[27]Celada P., Lunardi A. Traces of Sobolev functions on regular surfaces in infinite dimensions. J. Funct. Anal. 2014. V. 266, № 4. P. 1948–1987.

[28]Da Prato G., Lunardi A., Tubaro L. Surface measures in infinite dimension. Rendic. Lincei 2014. V. 25, № 3. P. 309–330.

[29]Смолянов О.Г. Потоки Де Рама и формула Стокса в гильбертовом пространстве. Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, №3. С. 554–558.

[30]Смолянов О.Г., фон Вайцзеккер Х., Виттих О. Два типа поверхностных мер на траекториях в римановых подмногообразиях евклидовых пространств. Докл. РАН. 2011. Т. 436, №1. С. 174–178.

[31]Sidorova N.A., Smolyanov O.G., von Weizsacker H., Wittich O. The surface limit of Brownian motion in tubular neighborhoods of an embedded Riemannian manifold. J. Funct. Anal. 2004. V. 206. P. 391–413.

Цель работы. Разработать новую конструкцию поверхностных мер в измеримых пространствах, основанную на дифференцируемости мер вдоль векторных полей в смысле Скорохода. Получить новые условия абсолютной непрерывности распределений гладких функционалов на бесконечномерных пространствах с мерами. Получить широкие условия измеримой зависимости условных мер от параметра.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Разработана новая конструкция поверхностных мер в абстрактных измеримых пространствах, ориентированная на построение поверхностных мер в бесконечномерных пространствах для мер, обладающих векторными полями дифференцируемости в смысле А.В. Скорохода. Дано положительное решение задачи М. Рёкнера о непрерывной зависимости поверхностных мер от параметра.
2. Получены широкие достаточные условия абсолютной непрерывности распределений гладких функционалов на бесконечномерных пространствах с мерами. Дан положительный ответ на вопрос, поставленный С.Б. Куксиным об абсолютной непрерывности распределений аналитических функционалов на пространствах с гауссовскими мерами.
3. Получены широкие достаточные условия измеримой зависимости условных мер от параметра в ситуации, когда от параметра зависит как базовая мера, для которой строятся условные меры, так и отображение, на множествах уровня которого сосредоточены условные меры.

Методы исследования. В работе применяются методы теории меры и функционального анализа, элементы стохастического анализа, а также некоторые оригинальные конструкции.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов в области теории меры, функционального анализа и теории вероятностей. Результаты и методы, развитые в диссертации, могут найти применения в исследованиях, проводимых в Математическом институте имени В.А. Стеклова РАН, Петербургском отделении Математического института имени В.А. Стеклова РАН, Институте математики имени С.Л. Соболева СО РАН, С.-Петербургском государственном университете, Новосибирском государственном университете, Высшей школе экономики, Московском государственном техническом университете имени Н.Э. Баумана.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

● научно-исследовательский семинар «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В.И. Богачева, Н.А. Толмачева и С.В. Шапошникова (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2011 – 2016 г., неоднократно),

● Международные научные конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2015» и «Ломоносов-2016» (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова),

● международная конференция «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы» (Российский университет дружбы народов, Москва, 2014 г.),

● международная конференция “Analysis, Geometry and Probability” (Москва, МГУ, 2016).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы с доказательствами в 3 работах автора в журналах из перечня ВАК (2 из них написаны в соавторстве с В.И. Богачевым) и представлены также в 4 тезисах международных конференций. Список этих работ приведен в конце диссертации.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, включающих 10 параграфов, заключения и списка литературы из 92 наименований. Общий объем диссертации составляет 91 страницу.

В диссертацию вошли результаты, полученные при работе над проектом, поддержанным Российским научным фондом (грант 14-11-00196 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова).

Краткое содержание диссертации

Глава 1.

В первой главе изучаются поверхностные меры на множествах уровня функций, заданных на общих вероятностных пространствах с мерами, дифференцируемыми вдоль векторных полей, и предлагается новая простая конструкция поверхностных мер. Стандартные поверхностные меры, возникающие для гауссовских мер в исчислении Маллявэна, можно получить этим способом. Дан положительный ответ на поставленный М. Рёкнером вопрос о непрерывной зависимости поверхностных мер от параметра. В формулировках утверждений в скобках указаны их номера из текста диссертации.

Развиваемая в этой главе концепция поверхностной меры применима к абстрактным пространствам с мерами, снабженным некоторыми дополнительными структурами, позволяющими вводить дифференцирование мер вдоль векторных полей. Однако для небольшого технического упрощения и большей наглядности эта концепция будет рассмотрена для радоновских мер на топологических пространствах. Напомним, что радоновская мера (или мера Радона) μ на топологическом пространстве X есть ограниченная счетно-аддитивная мера со значениями в $\mathbb{R}$, заданная на σ-алгебре $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ борелевских множеств и удовлетворяющая следующему условию: для всякого борелевского множества B и всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $K \subset B$, что $|\mu|(B \backslash K) < \varepsilon$, где $|\mu|$ — полная вариация меры μ. Пусть $C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$ — класс всех ограниченных бесконечно дифференцируемых функций на пространстве $\mathbb{R}^d$ с ограниченными производными, $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ — его подкласс, состоящий из функций с компактными носителями.

Одним из важнейших модельных классов мер, к которым применимы основные конструкции и результаты работы, является класс радоновских гауссовских мер на локально выпуклом пространстве X. Напомним, что вероятностная радоновская мера γ на X называется центрированной гауссовской, если каждый непрерывный линейный функционал на X является центрированной гауссовской случайной величиной относительно γ. Пространство Камерона – Мартина H меры γ состоит из всех векторов, сдвиги на которые дают эквивалентные γ меры. Известно, что общая центрированная радоновская гауссовская мера, не сосредоточенная на конечномерном пространстве, изоморфна посредством линейного борелевского отображения стандартной гауссовской мере на счетной степени прямой $\mathbb{R}^\infty$, представляющей собой счетную степень стандартной гауссовской меры на прямой, т. е. меры с плотностью $(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$. Пространство Камерона – Мартина стандартной гауссовской меры на $\mathbb{R}^\infty$ есть классическое гильбертово пространство l^2. Обсуждаемые в диссертации свойства и задачи инвариантны относительно линейных борелевских изоморфизмов, поэтому без потери общности при рассмотрении гауссовских мер всегда можно считать, что речь идет именно об этой конкретной стандартной гауссовской мере. Конечно, можно также взять в качестве эталонной меру Винера на пространстве непрерывных функций $C[0,1]$; ее пространство Камерона – Мартина есть класс Соболева абсолютно непрерывных функций h, для которых $h(0) = 0$ и $h' \in L^2[0,1]$.

Ряд результатов работы использует классы Соболева $W^{p,k}(\gamma)$ по гауссовской мере, определяемые аналогично классам Соболева по мере Лебега. Особо наглядно определение в случае стандартной гауссовской меры на $\mathbb{R}^\infty$. Здесь класс $W^{p,1}(\gamma)$ вводится как пополнение класса функций от конечного числа переменных вида $f(x_1, \ldots, x_n)$, где $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, по соболевской норме

$$\|f\|_{L^p(\gamma)} + \||Df|_H\|_{L^p(\gamma)},$$

где $Df(x) = (\partial_{x_1} f(x), \ldots, \partial_{x_n} f(x), 0, 0, \ldots)$ рассматривается как отображение со значениями в гильбертовом пространстве $H = l^2$ с его естественной нормой. Аналогично определяются классы $W^{p,k}(\gamma)$ с $k > 1$, причем в качестве норм производных $D^k f(x)$ используются нормы Гильберта – Шмидта, т. е. $\left(\sum |\partial_{x_{i_1}} \ldots \partial_{x_{i_k}} f(x)|^2\right)^{1/2}$.

Пусть $\mathcal{F}$ — некоторый класс ограниченных $\mathcal{B}$-измеримых вещественных функций. Напомним, что класс функций *разделяет меры*, если две меры совпадают всякий раз, когда они приписывают равные интегралы всем функциям из этого класса. Будем предполагать всюду далее, что $\mathcal{F}$ удовлетворяет следующим условиям:

(F1) $\mathcal{F}$ — линейное пространство, разделяющее радоновские меры на пространстве X и $\varphi(f) \in \mathcal{F}$ для всех $f \in \mathcal{F}$ и всех $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$.

Например, если X — метрическое пространство, то класс всех ограниченных липшицевых функций на X удовлетворяет условиям (F1).

Для многих приложений можно взять в качестве $\mathcal{F}$ в точности класс всех ограниченных липшицевых функций (см. ниже).

Другой пример: если дан некоторый класс $\mathcal{F}_0$ $\mathcal{B}$-измеримых функций, то возьмем в качестве $\mathcal{F}$ класс всех композиций $\varphi(f_1, \ldots, f_n)$, где $f_i \in \mathcal{F}_0$ и $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Этот класс является линейным пространством и замкнут относительно композиции с функциями из C_b^∞; разумеется, по-прежнему необходимо дополнительное условие, что он должен разделять меры (которое тривиально выполнено, если класс $\mathcal{F}_0$ разделяющий).

Далее предполагается, что фиксирована некоторая ненулевая неотрицательная мера Радона μ.

Определение 1. *Векторное поле на* X (*или* $\mathcal{F}$*-векторное поле, если необходимо указать его зависимость от* $\mathcal{F}$) *есть линейное отображение* (*дифференцирование*)

$$v\colon\ \mathcal{F} \to L^1(\mu), \quad f \mapsto \partial_v f,$$

такое, что

$$\partial_v(\varphi \circ f) = \varphi'(f)\partial_v f \quad \mu\text{-п.в.}$$

для всех $f \in \mathcal{F}$ *и* $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$.

Определение 2. *Мера* μ *называется дифференцируемой по Скороходу вдоль* v (*относительно* $\mathcal{F}$)*, если существует мера Радона* $d_v\mu$ *на* $\mathcal{B}$*, называемая производной Скорохода меры* μ *вдоль* v*, такая, что*

$$\int_X \partial_v f(x)\mu(dx) = -\int_X f(x)d_v\mu(dx) \quad \forall\, f \in \mathcal{F}.$$

Будем говорить, что μ *дифференцируема по Фомину вдоль поля* v*, если* $d_v\mu \ll \mu$; *в этом случае плотность Радона – Никодима меры* $d_v\mu$ *относительно* μ *обозначается через* β_v *и называется логарифмической производной меры* μ *вдоль* v *или дивергенцией поля* v *относительно* μ.

Для меры μ на прямой дифференцируемость по Скороходу по постоянному полю $v(x) = 1$ равносильна тому, что обобщенная производная меры μ есть мера; это также равносильно тому, что μ имеет плотность ограниченной вариации.

Дифференцируемость меры μ на локально выпуклом пространстве по Скороходу по постоянному полю $v(x) = h$ влечет непрерывность меры μ вдоль h, т. е. соотношение $\|\mu_{th} - \mu\| \to 0$ при $t \to 0$. Для меры на $\mathbb{R}^d$ непрерывность по всем направлениям равносильна существованию плотности, а в бесконечномерных пространствах нет ненулевых мер, непрерывных по всем направлениям. Тем более нет ненулевых мер, дифференцируемых по всем постоянным векторным полям. Это обстоятельство усложняет построение векторных полей дифференцируемости в бесконечномерном случае.

Определение 3. *Пусть* μ *дифференцируема по Скороходу вдоль векторного поля* v*. Будем говорить, что* $\mathcal{B}$*-измеримая функция* Ψ *принадлежит классу* $\mathfrak{D}_v$*, если* $\Psi \in L^1(\mu) \cap L^1(d_v\mu)$ *и существует последовательность функций* $f_n \in \mathcal{F}$*, сходящаяся к* Ψ *в* $L^1(\mu)$ *и в* $L^1(d_v\mu)$*, такая, что* *функции $\partial_v f_n$ сходятся в $L^1(\mu)$ к некоторой функции w и функции $f_n\partial_v g$ сходятся в $L^1(\mu)$ для каждой $g\in\mathcal{F}$. Тогда положим*

$$\partial_v\Psi := w.$$

Пусть мера μ дифференцируема по Скороходу вдоль v. Будем предполагать, что $F\colon\ X\to\mathbb{R}$ — такая $\mathcal{B}$-измеримая функция, что

(F2) $\psi(F)\in\mathfrak{D}_v$ для каждой функции $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и существует такая $\mathcal{B}$-измеримая функция $\partial_v F$, что $\partial_v(\psi\circ F)=\psi'(F)\partial_v F$ п.в. для каждой функции $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Кроме того,

$$\partial_v F\geqslant 0,\quad \partial_v F\in L^1(\mu).$$

Положим

$$\nu := (\partial_v F)\cdot\mu,\quad \eta := d_v\mu\circ F^{-1}.$$

Мера ν конечна и неотрицательна (она может быть нулевой). Условные меры на множествах уровня $F^{-1}(y)$, порожденные мерой ν, будем обозначать через ν^y (в случае, когда μ сосредоточена на счетном объединении метризуемых компактов). Напомним, что условные меры представляют меру ν виде

$$\nu(B)=\int\nu^y(B)\,\nu\circ F^{-1}(dy).$$

При наших предположениях такие меры существуют и определены однозначно для $\nu\circ F^{-1}$-п.в. y.

Теперь введем наши поверхностные меры σ^y; иногда целесообразно использовать символ σ_v^y, чтобы подчеркнуть зависимость от v. Определение использует только дифференцируемость функций распределений

$$\Phi_f(y) := \int_{\{F<y\}} f(x)\nu(dx)$$

в данной точке. В этом смысле никакой топологической структуры не требуется. Однако для вывода дополнительных свойств наших поверхностных мер будут нужны некоторые дополнительные предположения. Положим

$$\varrho_f(y)=\Phi_f'(y)=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi_f(y+h)-\Phi_f(y)}{h}.$$

Определение 4. *Пусть $y\in\mathbb{R}$. Предположим, что функция Φ_f дифференцируема в точке y для каждой $f\in\mathcal{F}$ и существует такая радоновская мера σ^y на $\mathcal{B}$, что*

$$\int_X f(x)\sigma^y(dx)=\varrho_f(y)\quad\forall\, f\in\mathcal{F}.$$

Тогда мера σ^y называется поверхностной мерой, ассоциированной с множеством уровня $F^{-1}(y)$.

Основной результат этой главы дает широкие достаточные условия существования поверхностных мер.

Теорема 1 (теорема 1.2.7). *Пусть мера μ дифференцируема по Фомину вдоль поля v с логарифмической производной β_v. Предположим, что выполнены условия* (F1) *и* (F2), *причем $\mu \circ F^{-1}$ не имеет атомов* (*т.е.* $\mu(F^{-1}(y)) = 0$ *для всех* y). *Предположим также, что выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

(i) X *— полное метрическое пространство, а $\mathcal{F}$ содержит все ограниченные липшицевы функции*;

(ii) *мера μ имеет компактный носитель*;

(iii) *существует неотрицательная функция $W \in \mathfrak{D}_v$, для которой $W\beta_v, W\partial_v F \in L^1(\mu)$ и множества $\{W \leqslant R\}$ компактны при $R \geqslant 0$.*

Тогда для каждого $y \in \mathbb{R}$ существует радоновская поверхностная мера σ^y, ассоциированная с $F^{-1}(y)$.

Кроме того, если μ сосредоточена на счетном объединении метризуемых компактов, то для $\nu \circ F^{-1}$-п.в. y, где $\nu = (\partial_v F) \cdot \mu$, мера σ^y сосредоточена на $F^{-1}(y)$ и справедливо равенство

$$\sigma^y = \varrho_1(y) \cdot \nu^y,$$

где ϱ_1 — плотность меры $\nu \circ F^{-1}$.

Другое классическое понятие, возникающее при рассмотрении поверхностных мер, — емкость (см.[16]). Предположим, что класс $\mathcal{F}$ наделен нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ такой, что сходимость по этой норме влечет сходимость в $L^1(\mu)$. На практике часто это бывает норма подходящего пространства Соболева $W^{p,1}(\mu)$. Эта норма порождает емкость: для всякого открытого множества $U \subset X$ определим его емкость, ассоциированную с $\mathcal{F}$, формулой

$$C_{\mathcal{F}}(U) = \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}}\colon\ f \in \mathcal{F},\ f \geqslant 0,\ f \geqslant 1\ \ \mu\text{-п.в. на } U\}.$$

Для всякого множества $B \subset X$ положим теперь

$$C_{\mathcal{F}}(B) = \inf\{C_{\mathcal{F}}(U)\colon\ U \supset B \text{ открыто}\}.$$

Функцию f называют $C_{\mathcal{F}}$-квазинепрерывной, если для каждого n есть такое замкнутое множество A_n, что $C_{\mathcal{F}}(X \backslash A_n) < 1/n$ и функция $f|_{A_n}$ непрерывна.

Известно, что всякая функция $f \in \mathcal{F}$ имеет $C_{\mathcal{F}}$-квазинепрерывную версию (см.[16]), если норма $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ строго выпукла, как в случае L^p-нормы с любым показателем $p \in (1, +\infty)$, или, более общим образом, любой нормы вида $\|f\|_{\mathcal{F}} = \|T^{-1}f\|_{L^p(m)}$, где m — вероятностная мера и T — ограниченный инъективный линейный оператор из $L^p(m)$ в $L^1(\mu)$; в частности, последний случай охватывает большинство классов Соболева. Однако вместо таких допущений мы просто предположим в дополнение к условиям (F1) и (F2), что выполнено условие

(F3) $\quad F$ *имеет квазинепрерывную версию.*

Теперь зафиксируем квазинепрерывную версию функции F; следующая теорема относится к этой версии!

Теорема 2 (теорема 1.4.2). *Предположим, что в теореме* 1 *для некоторого* $p > 1$ *мы имеем* $\beta_v \in L^{p/(p-1)}(\mu)$ *и что выполнены условия*

$$\|f\|_{L^p(\mu)} + \|\partial_v f\|_{L^1(\mu)} \leqslant \|f\|_{\mathcal{F}}, \quad f \in \mathcal{F} \tag{1}$$

и (F3) (*что обеспечивается использованием в качестве нормы на* $\mathcal{F}$ *функции, определяемой левой частью* (1)). *Тогда каждая мера* σ^y *сосредоточена на множестве* $F^{-1}(y)$ *и обращается в нуль на всех множествах* $C_{\mathcal{F}}$*-емкости нуль.*

В диссертации рассмотрены примеры применения этой теоремы.

Пример 1. Предположим, что X — банахово пространство, мера μ дифференцируема по Фомину вдоль ненулевого постоянного вектора v и F — такая непрерывная функция на X, дифференцируемая вдоль поля v, что $\partial_v F$ непрерывна и $c_1 \leqslant \partial_v F \leqslant c_2$ для некоторых положительных чисел c_1 и c_2. Тогда существуют поверхностные меры σ^y на множествах уровня $F^{-1}(y)$. Кроме того, можно использовать эквивалентные «традиционные» поверхностные меры $|\partial_v F|^{-2} \cdot \sigma^y$.

Очевидный недостаток постоянных векторных полей заключается в том, что они дают мало шансов получить положительную $\partial_v F$. Например, если X — гильбертово пространство и функция F дифференцируема по Гато, то оптимальным в этом смысле было бы взять $v = \nabla F$, что дает функцию $\partial_v F(x) = \|\nabla F(x)\|^2$. Однако даже для очень хороших функций F может не быть естественных мер, дифференцируемых вдоль ∇F. Например, если для $F(x) = (x, x)$ мы захотим определить поверхностные меры на сферах, то нам придется обеспечить дифференцируемость μ вдоль поля $v(x) = x$, но, скажем, гауссовские меры на бесконечномерных пространствах не дифференцируемы вдоль этого поля. По этой причине необходимо рассматривать векторные поля со значениями в подходящих аналогах пространства Камерона – Мартина.

Пример 2. Рассмотрим случай центрированной гауссовской меры μ (скажем, стандартной гауссовской меры на $\mathbb{R}^\infty$) с пространством Камерона – Мартина H и функции F, принадлежащей соболевскому классу $W^{2,2}(\mu)$. В этом случае градиентное поле $v = D_H F \in W^{2,1}(\mu, H)$ имеет дивергенцию $\beta_v = LF \in L^2(\mu)$, где L — оператор Орнштейна – Уленбека (замыкание оператора $Lf(x) = \sum_i (\partial^2_{x_i} f(x) - x_i \partial_{x_i} f(x))$ на гладких цилиндрических функциях), и $\partial_v F = |D_H F|^2_H$ принадлежит $L^1(\mu)$.

Глава 2.

Во второй главе мы рассматриваем достаточные условия абсолютной непрерывности распределения гладкой функции f на бесконечномерном локально выпуклым пространстве X, наделенном вероятностной мерой Радона μ. Некоторые условия такого рода известны для ряда различных классов функций и мер, см.[32,20,24,14,15,16,33,34,35]. Важное достаточное условие известно для одномерного случая: если μ — абсолютно непрерывная мера и f — произвольная функция, то для множества D всех точек, где f имеет ненулевую производную, получаем, что сужение меры μ на D под действием функции f переходит в абсолютно непрерывную меру, т. е. мера $\mu|_D \circ f^{-1}$ абсолютно непрерывна (известно, что в рассматриваемом случае множество D всегда измеримо по Лебегу и f измерима на множестве D). Полученные результаты дают ответ на вопрос, поставленный С.Б. Куксиным об абсолютной непрерывности аналитических функций на пространствах с гауссовскими мерами. Они используются в недавней работе[36].

Приведем основные результаты главы 2.

Теорема 3 (теорема 2.2.1). *Пусть μ — радоновская вероятностная мера на локально выпуклом пространстве X, непрерывная вдоль векторов из счетного множества S, и пусть f — μ-измеримая функция на X такая, что все частные производные $\partial_{h_1} \cdots \partial_{h_n} f$ существуют всюду для*

---

[32] Богачев В.И., Смолянов О.Г. Аналитические свойства бесконечномерных распределений. Успехи матем. наук. 1990. Т. 45, № 3. С. 3–83.

[33] Bogachev V.I. Gaussian measures. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1998.

[34] Bouleau N., Hirsch F. Dirichlet forms and analysis on Wiener space. De Gruyter, Berlin – New York, 1991.

[35] Shigekawa I. Absolute continuity of probability laws of Wiener functionals. Proc. Jap. Acad. Ser. A. 1978. V. 54, № 8. P. 230–233.

[36] Guan H., Kuksin S. The KdV equation under periodic boundary conditions and its perturbations. Nonlinearity. 2014. V. 27, №9. P. R61–R88.

всех $h_1, \ldots, h_n$ из линейной оболочки множества S. Пусть

$$E = \{x\colon \exists\, h_1, \ldots, h_n \in S \quad c \quad \partial_{h_1} \cdots \partial_{h_n} f(x) \neq 0\}.$$

Тогда мера $\mu|_E \circ f^{-1}$ абсолютно непрерывна.

Фактически новшеством является даже одномерный случай. Вывод из него общего утверждения основан на стандартной технике условных мер или методе расслоений (см.[20,24]).

Следствие 1. *Пусть μ — центрированная радоновская гауссовская мера на X, $f \in W^{p,\infty}(\mu)$ и*

$$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x\colon\ D_H^n f(x) \neq 0\}.$$

Тогда мера $\mu|_E \circ f^{-1}$ абсолютно непрерывна.

Следствие 2. *Пусть μ — центрированная радоновская гауссовская мера на X и f — такая борелевская функция на X, что для некоторого ортонормированного базиса $\{e_n\}$ в H функции $t \mapsto f(x + te_n)$ являются вещественно-аналитическими для почти всех x. Тогда функция f либо имеет абсолютно непрерывное распределение, либо совпадает μ-почти всюду с постоянной.*

Получен также естественный многомерный аналог предыдущего следствия. Если $f = (f_1, \ldots, f_d)$, где $f_i \in W^{1,1}_{loc}(\mu)$, то матрица с элементами $(D_H f_i, D_H f_j)_H$ называется матрицей Маллявэна. Известно, что ее невырожденность является достаточным условием для абсолютной непрерывности меры $\mu \circ f^{-1}$ на $\mathbb{R}^d$. При условиях предыдущего следствия определитель этой матрицы либо почти всюду отличен от нуля, либо равен нулю почти всюду.

Глава 3.

В третьей главе получены широкие достаточные условия для существования собственных условных вероятностей, измеримо зависящих от параметра, в случае параметрических семейств мер и отображений.

Хорошо известно, что для каждой вероятностной меры μ на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(X)$ суслинского пространства X (хаусдорфова пространства, которое является непрерывным образом полного сепарабельного метрического пространства) и каждого борелевского отображения f из X в суслинское пространство Y множества уровня $f^{-1}(y)$ могут быть наделены борелевскими вероятностными мерами μ^y, называемыми условными мерами, порожденными отображением f, обладающими следующими свойствами: пусть $\mu \circ f^{-1}$ есть образ меры μ под действием отображения f, определяемый равенством

$$\mu \circ f^{-1}(E) = \mu(f^{-1}(E)),\ E \in \mathcal{B}(Y);$$

тогда

1) мера μ^y сосредоточена на множестве $f^{-1}(y)$ для каждого $y \in f(X)$, т. е. $\mu^y(f^{-1}(y)) = 1,\ y \in f(X)$,

2) для всякого множества $B \in \mathcal{B}(X)$ функция $y \mapsto \mu^y(B)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{S}(X)$, порожденной классом суслинских множеств в X,

3) для всех борелевских множеств $B \subset X$ и $E \subset Y$, верно равенство

$$\mu(B \cap f^{-1}(E)) = \int_E \mu^y(B)\, \mu \circ f^{-1}(dy).$$

Условные меры с такими свойствами называют регулярными условными вероятностями.

Основной результат главы 3 состоит в следующем. Пусть X, Y, Z — вполне регулярные суслинские пространства.

Теорема 4 (теорема 3.2.1). *Предположим, что дано борелевское отображение*

$$f\colon\ (x,z) \mapsto f_z(x), \quad X \times Z \to Y.$$

Предположим также, что для каждого $z \in Z$ задана борелевская вероятностная мера μ_z на X, причем отображение $z \mapsto \mu_z,\ Z \to \mathcal{P}(X)$ измеримо по Борелю при условии, что пространство вероятностных мер $\mathcal{P}(X)$ наделено слабой топологией. Тогда существуют такие собственные условные меры $\{\mu_z^y\}_{y\in Y}$ для всех пар (μ_z, f_z), что для каждого борелевского множества B в X функция $(y,z) \mapsto \mu_z^y(B)$ на $Y \times Z$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{S}(Y \times Z)$, или, что равносильно, отображение $(y,z) \mapsto \mu_z^y,\quad Y \times Z \to \mathcal{P}(X)$ измеримо, когда пространство $Y \times Z$ наделено σ-алгеброй $\mathcal{S}(Y \times Z)$ и $\mathcal{P}(X)$ наделено борелевской σ-алгеброй.

Измеримость относительно σ-алгебры, порожденной суслинскими множествами, обеспечивает измеримость относительно всякой борелевской меры на суслинском пространстве.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Владимиру Игоревичу Богачеву за постановку задач и постоянное внимание к работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации рассмотрена новая конструкция поверхностных мер в измеримых пространствах, получены новые условия абсолютной непрерывности распределений гладких функционалов на бесконечномерных пространствах с мерами, получены условия измеримой зависимости условных мер от параметра. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Разработана новая конструкция поверхностных мер в абстрактных измеримых пространствах, ориентированная на построение поверхностных мер в бесконечномерных пространствах для мер, обладающих векторными полями дифференцируемости в смысле А.В. Скорохода. Дано положительное решение задачи о непрерывной зависимости поверхностных мер от параметра.
2. Получены широкие достаточные условия абсолютной непрерывности распределений гладких функционалов на бесконечномерных пространствах с мерами. Дан положительный ответ на вопрос об абсолютной непрерывности распределений аналитических функционалов на пространствах с гауссовскими мерами.
3. Получены широкие достаточные условия измеримой зависимости условных мер от параметра в ситуации, когда от параметра зависит как базовая мера, для которой строятся условные меры, так и отображение, на множествах уровня которого сосредоточены условные меры.

Дальнейшее развитие методов диссертации имеет перспективы в аналитической теории меры и бесконечномерном анализе. Возможные применения результатов диссертации связаны со стохастическим анализом, теорией вероятностей и математической статистикой.

Работы автора по теме диссертации

[1] Богачев В.И., Малофеев И.И. О распределениях гладких функций на бесконечномерных пространствах с мерами. Докл. РАН. 2014. Т. 454, № 1. С. 11–14.

В работе [1] диссертанту принадлежат лемма 1, теорема 1, а также следствия 1,2,4; В.И. Богачеву принадлежит общая постановка задачи и следствие 3.

[2] Малофеев И.И. Измеримая зависимость условных мер от параметра. Докл. РАН. 2016. Т. 470, № 1. С. 13–17.

[3] Bogachev V.I., Malofeev I.I. Surface measures generated by differentiable measures. Potential Anal. 2016. V. 44, №4. P. 767–792.

В работе [3] диссертанту принадлежат определение 2.5, теоремы 2.7, 4.2, 6.5, леммы 3.1, 4.1, 6.4, предложения 4.4, 6.1, 6.2, следствие 3.3 и примеры 5.1, 5.2; В.И. Богачеву принадлежат общая постановка задачи, определение 2.3, лемма 3.2, замечания 4.3, 5.3.

Тезисы конференций:

[4] Малофеев И.И. Конструкция поверхностных мер в бесконечномерных пространствах. «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы» (тезисы и тексты докладов международной конференции 15–18 декабря 2014 года). РУДН, М., 2014. С. 49–51.

[5] Малофеев И.И. Поверхностные меры, порождаемые дифференцируемыми мерами. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2015», МГУ, М., 2015.

[6] Малофеев И.И. Измеримая зависимость условных мер от параметра. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2016», МГУ, М., 2016.

[7] Malofeev I.I. Measurable dependence of conditional measures on a parameter. 4th International Workshop “Analysis, Geometry and Probability” (Moscow, September 26 – October 1, 2016), Book of Abstracts, p. 49. Moscow, Moscow State University, 2016.