Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.518

Малофеев Илья Игоревич

Поверхностные меры в бесконечномерных пространствах

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук, профессор В.И. Богачев.

Москва, 2016

Содержание

Введение 3

Глава 1. Поверхностные меры, порождаемые дифференцируемыми мерами 19

1.1. Обозначения и терминология 20

1.2. Поверхностные меры, связанные с векторными полями дифференцируемости 26

1.3. Доказательство основного результата 34

1.4. Дополнительные результаты, связанные с емкостями 42

1.5. Примеры 47

1.6. Поверхностные меры на поверхностях более высокой коразмерности 53

Глава 2. Абсолютная непрерывность распределений гладких функций на бесконечномерных пространствах с мерами . . . 63

2.1. Вспомогательные результаты 64

2.2. Основные результаты 66

Глава 3. Измеримая зависимость условных мер от параметра 71

3.1. Постановка задачи 71

3.2. Основной результат 74

Заключение 82

Литература 83

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Исследование поверхностных мер и концептуально близких к ним условных мер, порожденных мерами на бесконечномерных пространствах, имеет важное значение в целом ряде направлений современной теории меры, функционального анализа и стохастического анализа. Эти объекты и связанные с ними результаты находят весьма разнообразные применения даже при рассмотрении мер на конечномерных пространствах, в которых наличие классической меры Лебега существенно уменьшает или даже полностью исключает технические трудности, возникающие в бесконечномерных пространствах. Однако многие прикладные задачи приводят к необходимости не только рассматривать бесконечномерные вероятностные распределения, но и использовать соответствующие им поверхностные и условные меры. Условные распределения случайных процессов — классический объект теории вероятностей и теории меры, восходящий к работам А.Н. Колмогорова и Дж. Дуба и хорошо исследованный многими авторами за последние десятилетия. Понятие поверхностной меры возникло позже, поскольку оно, в отличие от весьма общего понятия условного распределения, требует наличия некоторой дифференциальной структуры на вероятностном пространстве. Конструкция поверхностных мер, порожденных квазиинвариантными или дифференцируемыми мерами на бесконечномерных пространствах, была предложена в 70-х годах прошлого века А.В. Скороходом [19], [20], а в весьма специальном случае гауссовских мер ей предшествовала менее явная конструкция из работы Стенгла [79], где вместо поверхностных мер использовались условные математические ожидания (гауссовский случай развивался также Гудмэном [54], Го (Куо) [6] и Хертле [56]). Другая конструкция была предложена и развита в серии работ А.В. Угланова [27], [28], [83], [29] (и в совместной работе Е.И. Ефимовой и А.В. Угланова [13]), где с использованием этого метода изучалась, в частности, гладкость распределений интегральных функционалов на пространствах с гладкими мерами. Однако основной целью этих построений А.В. Угланова были применения к дифференциальным уравнениям с частными производными на бесконечномерных пространствах, что продолжает оставаться важной мотивировкой и в настоящее время. Геометрический подход, на котором основан метод Угланова, требует довольно жестких ограничений дифференциально-топологического характера на рассматриваемые поверхности (в частности, задающая поверхность функция должна быть непрерывна; кроме того, требуются некоторые условия непрерывности на ее производную). Метод Угланова применялся В.Ю. Яхлаковым [31] для построения поверхностных мер на поверхностях конечной коразмерности. Совершенно иной подход предложили Э. Эро и П. Маллявэн [32] для гауссовских мер (этот подход представлен также в книге Маллявэна [66]). Несмотря на сужение класса мер, принципиальным отличием их работы было то, что рассматривались меры на поверхностях уровня соболевских функций без каких-либо топологических условий типа непрерывности. При этом результаты о существовании поверхностных мер выводились из результатов о регулярности распределений функционалов, а не наоборот, как это было в работах А.В. Угланова. В.И. Богачевым [37], [38], [40] был указан способ построения поверхностных мер для необязательно гауссовских гладких мер на основе исчисления Маллявэна. Этот способ был существенно развит в работах О.В. Пугачева [15], [16], [17], [18]. В настоящей работе проведено дальнейшее усовершенствование этого способа, а тем самым и способа, восходящего к Маллявэну.

Отметим также, что имеется немало работ, в которых изучаются весьма близкие к поверхностным мерам объекты, в частности, книга Ю.А. Давыдова, М.А. Лифшица, Н.В. Смородиной [8] посвящена распределениям функционалов на вероятностных пространствах с помощью метода расслоений, в котором важную роль играют условные меры (см. также статьи Н.В. Смородиной [24] – [26] и обзор [7]), Д. Фейелем и А. де Ла Праделем [52] рассмотрены меры Хаусдорфа, ассоциированные с гауссовскими мерами, Дж. Да Прато, А. Лунарди, Л. Тубаро и их соавторы (см. [47], [48], [51]) применяют поверхностные меры к решению краевых задач в бесконечномерных пространствах, а О.Г. Смолянов [22] предложил конструкцию дифференциальных форм конечной костепени, также позволяющую строить поверхностные меры. О.Г. Смолянов предложил также конструкцию поверхностных мер на поверхностях бесконечной коразмерности (см. [23], [78], где есть дополнительные ссылки).

Цель работы. Разработать новую конструкцию поверхностных мер в измеримых пространствах, основанную на дифференцируемости вдоль векторных полей в смысле А.В. Скорохода. Получить новые условия абсолютной непрерывности распределений гладких функционалов на бесконечномерных пространствах с мерами. Получить широкие условия измеримой зависимости условных мер от параметра.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Разработана новая конструкция поверхностных мер в абстрактных измеримых пространствах, ориентированная на построение поверхностных мер в бесконечномерных пространствах для мер, обладающих векторными полями дифференцируемости в смысле А.В. Скорохода. Дано положительное решение задачи М. Рёкнера о непрерывной зависимости поверхностных мер от параметра.

2. Получены широкие достаточные условия абсолютной непрерывности распределений гладких функционалов на бесконечномерных пространствах с мерами. Дан положительный ответ на вопрос, поставленный С.Б. Куксиным об абсолютной непрерывности распределений аналитических функционалов на пространствах с гауссовскими мерами.

3. Получены широкие достаточные условия измеримой зависимости

условных мер от параметра в ситуации, когда от параметра зависит как базовая мера, для которой строятся условные меры, так и отображение, на множествах уровня которого сосредоточены условные меры.

Методы исследования. В работе применяются методы теории меры и функционального анализа, элементы стохастического анализа, а также некоторые оригинальные конструкции.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов в области теории меры, функционального анализа и теории вероятностей. Результаты и методы, развитые в диссертации, могут найти применения в исследованиях, проводимых в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, С.-Петербургском государственном университете, Новосибирском государственном университете, НИУ «Высшая школа экономики», Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана.

Апробация диссертации. Результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на научно-исследовательском семинаре «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В.И. Богачева, Н.А. Толмачева и С.В.Шапошникова (2011 – 2016 г.), на Международных научных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2015» и «Ломоносов-2016» (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова), на международной конференции «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы» (Российский университет дружбы народов, Москва, 2014) и на международной конференции “Analysis, Geometry and Probability” (Москва, МГУ, 2016).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы с доказательствами в 3 работах автора в журналах из перечня ВАК (2 из них написаны в соавторстве с В.И. Богачевым) и представлены также в 4 тезисах международных конференций. Список этих работ приведен в конце диссертации.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, включающих 10 параграфов, заключения и списка литературы из 92 наименований. Общий объем диссертации составляет 91 страницу.

В диссертацию вошли результаты, полученные при работе над проектом, поддержанным Российским научным фондом (грант 14-11-00196 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова).

Краткое содержание диссертации

Здесь приведена сводка основных результатов (в скобках указаны номера утверждений из основного текста). Чтобы сделать этот раздел независимым, мы приводим также основные определения (в основном тексте они повторяются, в некоторых случаях в более развернутом виде).

Глава 1.

В первой главе изучаются поверхностные меры на множествах уровня функций, заданных на общих вероятностных пространствах с мерами, дифференцируемыми вдоль векторных полей, и предлагается новая простая конструкция поверхностных мер. Стандартные поверхностные меры, возникающие для гауссовских мер в исчислении Маллявэна, можно получить этим способом. Дан положительный ответ на поставленный М. Рёкнером вопрос о непрерывной зависимости поверхностных мер от параметра.

Развиваемая в этой главе концепция поверхностной меры применима к абстрактным пространствам с мерами, снабженным некоторыми дополнительными структурами, позволяющими вводить дифференцирование мер вдоль векторных полей. Однако для небольшого технического упрощения и большей наглядности эта концепция будет рассмотрена для радоновских мер на топологических пространствах. Напомним, что радоновская мера (или мера Радона) μ на топологическом пространстве X есть ограниченная счетно-аддитивная мера со значениями в $\mathbb{R}$, заданная на σ-алгебре $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ борелевских множеств и удовлетворяющая следующему условию: для всякого борелевского множества B и всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $K \subset B$, что $|\mu|(B\backslash K) < \varepsilon$, где $|\mu|$ — полная вариация меры μ.

Пусть $C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$ — класс всех ограниченных бесконечно дифференцируемых функций на пространстве $\mathbb{R}^d$ с ограниченными производными, $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ — его подкласс, состоящий из функций с компактными носителями.

Одним из важнейших модельных классов мер, к которым применимы основные конструкции и результаты работы, является класс радоновских гауссовских мер на локально выпуклом пространстве X. Напомним, что вероятностная радоновская мера γ на X называется центрированной гауссовской, если каждый непрерывный линейный функционал на X является центрированной гауссовской случайной величиной относительно γ. Пространство Камерона – Мартина H меры γ состоит из всех векторов, сдвиги на которые дают эквивалентные γ меры. Известно, что общая центрированная радоновская гауссовская мера, не сосредоточенная на конечномерном пространстве, изоморфна посредством линейного борелевского отображения стандартной гауссовской мере на счетной степени прямой $\mathbb{R}^\infty$, представляющей собой счетную степень стандартной гауссовской меры на прямой, т. е. меры с плотностью $(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$. Пространство Камерона – Мартина стандартной гауссовской меры на $\mathbb{R}^\infty$ есть классическое гильбертово пространство l^2. Обсуждаемые в диссертации свойства и задачи инвариантны относительно линейных борелевских изоморфизмов, поэтому без потери общности при рассмотрении гауссовских мер всегда можно считать, что речь идет именно об этой конкретной стандартной гауссовской мере. Конечно, можно также взять в качестве эталонной меру Винера на пространстве непрерывных функций $C[0,1]$; ее пространство Камерона – Мартина есть класс Соболева абсолютно непрерывных функций h, для которых $h(0)=0$ и $h'\in L^2[0,1]$.

Ряд результатов работы использует классы Соболева $W^{p,k}(\gamma)$ по гауссовской мере, определяемые аналогично классам Соболева по мере Лебега. Особо наглядно определение в случае стандартной гауссовской меры на $\mathbb{R}^\infty$. Здесь класс $W^{p,1}(\gamma)$ вводится как пополнение класса функций от конечного числа переменных вида $f(x_1,\ldots,x_n)$, где $f\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, по соболевской норме

$$\|f\|_{L^p(\gamma)}+\||Df|_H\|_{L^p(\gamma)},$$

где $Df(x)=(\partial_{x_1}f(x),\ldots,\partial_{x_n}f(x),0,0,\ldots)$ рассматривается как отображение со значениями в гильбертовом пространстве $H=l^2$ с его естественной нормой. Аналогично определяются классы $W^{p,k}(\gamma)$ при $k > 1$, причем в качестве норм производных $D^k f(x)$ используются нормы Гильберта – Шмидта, т. е. $\left(\sum |\partial_{x_{i_1}} \dots \partial_{x_{i_k}} f(x)|^2\right)^{1/2}$.

Пусть $\mathcal{F}$ — некоторый класс ограниченных $\mathcal{B}$-измеримых вещественных функций. Напомним, что класс функций *разделяет меры*, если две меры совпадают всякий раз, когда они приписывают равные интегралы всем функциям из этого класса. Будем предполагать всюду далее, что $\mathcal{F}$ удовлетворяет следующим условиям:

(F1) $\mathcal{F}$ — линейное пространство, разделяющее радоновские меры на X и $\varphi(f) \in \mathcal{F}$ для всех $f \in \mathcal{F}$ и всех $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$.

Например, если X — метрическое пространство, то класс всех ограниченных липшицевых функций на X удовлетворяет условиям (F1).

Для многих приложений можно взять в качестве $\mathcal{F}$ в точности класс всех ограниченных липшицевых функций (см. ниже).

Другой пример: если дан некоторый класс $\mathcal{F}_0$ $\mathcal{B}$-измеримых функций, то возьмем в качестве $\mathcal{F}$ класс всех композиций $\varphi(f_1, \dots, f_n)$, где $f_i \in \mathcal{F}_0$ и $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Этот класс является линейным пространством и замкнут относительно композиции с функциями из C_b^∞; разумеется, по-прежнему необходимо дополнительное условие, что он должен разделять меры (которое тривиально выполнено, если класс $\mathcal{F}_0$ разделяющий).

Далее предполагается, что фиксирована некоторая ненулевая неотрицательная мера Радона μ.

Определение 1. *Векторное поле на* X (*или* $\mathcal{F}$-*векторное поле, если необходимо указать его зависимость от* $\mathcal{F}$) *есть линейное отображение* (*дифференцирование*)

$$v\colon\ \mathcal{F} \to L^1(\mu), \quad f \mapsto \partial_v f,$$

такое, что

$$\partial_v(\varphi \circ f) = \varphi'(f)\partial_v f \quad \mu\text{-п.в.}$$

для всех $f \in \mathcal{F}$ *и* $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$.

Определение 2. *Мера μ называется дифференцируемой по Скороходу вдоль v (относительно $\mathcal{F}$), если существует мера Радона $d_v\mu$ на $\mathcal{B}$, называемая производной Скорохода меры μ вдоль v, такая, что*

$$\int_X \partial_v f(x)\mu(dx) = -\int_X f(x) d_v\mu(dx) \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Будем говорить, что μ дифференцируема по Фомину вдоль поля v, если $d_v\mu \ll \mu$; в этом случае плотность Радона – Никодима меры $d_v\mu$ относительно μ обозначается через β_v и называется логарифмической производной меры μ вдоль v или дивергенцией поля v относительно μ.

Для меры μ на прямой дифференцируемость по Скороходу по постоянному полю $v(x) = 1$ равносильна тому, что обобщенная производная меры μ есть мера; это также равносильно тому, что μ имеет плотность ограниченной вариации.

Дифференцируемость меры μ на локально выпуклом пространстве по Скороходу по постоянному полю $v(x) = h$ влечет непрерывность меры μ вдоль h, т. е. соотношение $\|\mu_{th} - \mu\| \to 0$ при $t \to 0$. Для меры на $\mathbb{R}^d$ непрерывность по всем направлениям равносильна существованию плотности, а в бесконечномерных пространствах нет ненулевых мер, непрерывных по всем направлениям. Тем более нет ненулевых мер, дифференцируемых по всем постоянным векторным полям. Это обстоятельство усложняет построение векторных полей дифференцируемости в бесконечномерном случае.

Определение 3. *Пусть μ дифференцируема по Скороходу вдоль векторного поля v. Будем говорить, что $\mathcal{B}$-измеримая функция Ψ принадлежит классу $\mathfrak{D}_v$, если $\Psi \in L^1(\mu) \cap L^1(d_v\mu)$ и существует последовательность функций $f_n \in \mathcal{F}$, сходящаяся к Ψ в $L^1(\mu)$ и в $L^1(d_v\mu)$, такая, что функции $\partial_v f_n$ сходятся в $L^1(\mu)$ к некоторой функции w и функции $f_n \partial_v g$ сходятся в $L^1(\mu)$ для каждой $g \in \mathcal{F}$. Тогда положим*

$$\partial_v \Psi := w.$$

Пусть мера μ дифференцируема по Скороходу вдоль v. Будем предполагать, что $F\colon\ X \to \mathbb{R}$ — такая $\mathcal{B}$-измеримая функция, что

(F2) $\psi(F) \in \mathfrak{D}_v$ для каждой функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и существует такая $\mathcal{B}$-измеримая функция $\partial_v F$, что $\partial_v(\psi \circ F) = \psi'(F)\partial_v F$ п.в. для каждой функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Кроме того,

$$\partial_v F \geqslant 0, \quad \partial_v F \in L^1(\mu).$$

Положим

$$\nu := (\partial_v F) \cdot \mu, \quad \eta := d_v\mu \circ F^{-1}.$$

Мера ν конечна и неотрицательна (она может быть нулевой). Условные меры на множествах уровня $F^{-1}(y)$, порожденные мерой ν, будем обозначать через ν^y (в случае, когда μ сосредоточена на счетном объединении метризуемых компактов). Напомним, что условные меры представляют меру ν виде

$$\nu(B) = \int \nu^y(B)\, \nu \circ F^{-1}(dy).$$

При наших предположениях такие меры существуют и определены однозначно для $\nu \circ F^{-1}$-п.в. y.

Теперь введем наши поверхностные меры σ^y; иногда целесообразно использовать символ σ_v^y, чтобы подчеркнуть зависимость от v. Определение использует только дифференцируемость функций распределений

$$\Phi_f(y) := \int_{\{F<y\}} f(x)\nu(dx)$$

в данной точке. В этом смысле никакой топологической структуры не требуется. Однако для вывода дополнительных свойств наших поверхностных мер будут нужны некоторые дополнительные предположения. Положим

$$\varrho_f(y) = \Phi'_f(y) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi_f(y+h) - \Phi_f(y)}{h}.$$

Определение 4. *Пусть $y \in \mathbb{R}$. Предположим, что функция Φ_f дифференцируема в точке y для каждой $f \in \mathcal{F}$ и существует такая радоновская мера σ^y на $\mathcal{B}$, что*

$$\int_X f(x)\sigma^y(dx) = \varrho_f(y) \quad \forall\, f \in \mathcal{F}.$$

Тогда мера σ^y называется поверхностной мерой, ассоциированной с множеством уровня $F^{-1}(y)$.

Основной результат этой главы дает широкие достаточные условия существования поверхностных мер.

Теорема 1 (теорема 1.2.7). *Пусть мера μ дифференцируема по Фомину вдоль поля v с логарифмической производной β_v. Предположим, что выполнены условия* (F1) *и* (F2), *причем $\mu \circ F^{-1}$ не имеет атомов* (*т. е.* $\mu(F^{-1}(y)) = 0$ *для всех y*). *Предположим также, что выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

(i) X — *полное метрическое пространство, а $\mathcal{F}$ содержит все ограниченные липшицевы функции*;

(ii) *мера μ имеет компактный носитель*;

(iii) *существует неотрицательная функция $W \in \mathfrak{D}_v$, для которой $W\beta_v, W\partial_v F \in L^1(\mu)$ и множества $\{W \leqslant R\}$ компактны при $R \geqslant 0$.*

Тогда для каждого $y \in \mathbb{R}$ существует радоновская поверхностная мера σ^y, ассоциированная с $F^{-1}(y)$.

Кроме того, если μ сосредоточена на счетном объединении метризуемых компактов, то для $\nu \circ F^{-1}$-п.в. y, где $\nu = (\partial_v F) \cdot \mu$, мера σ^y сосредоточена на $F^{-1}(y)$ и справедливо равенство

$$\sigma^y = \varrho_1(y) \cdot \nu^y,$$

где ϱ_1 — плотность меры $\nu \circ F^{-1}$.

Другое классическое понятие, возникающее при рассмотрении поверхностных мер, — емкость (см. [39] или [40]). Предположим, что класс $\mathcal{F}$ наделен нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ такой, что сходимость по этой норме влечет сходимость в $L^1(\mu)$. На практике часто это бывает норма подходящего пространства Соболева $W^{p,1}(\mu)$. Эта норма порождает емкость: для всякого открытого множества $U \subset X$ определим его емкость, ассоциированную с $\mathcal{F}$, формулой

$$C_{\mathcal{F}}(U) = \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}}\colon\ f \in \mathcal{F},\ f \geqslant 0,\ f \geqslant 1\ \ \mu\text{-п.в. на } U\}.$$

Для любого множества $B \subset X$ пусть

$$C_{\mathcal{F}}(B) = \inf\{C_{\mathcal{F}}(U)\colon\ U \supset B \text{ открыто}\}.$$

Функцию f называют $C_{\mathcal{F}}$-квазинепрерывной, если для каждого n есть такое замкнутое множество A_n, что $C_{\mathcal{F}}(X\backslash A_n) < 1/n$ и функция $f|_{A_n}$ непрерывна.

Известно, что всякая функция $f \in \mathcal{F}$ имеет $C_{\mathcal{F}}$-квазинепрерывную версию (см. [40, § 8.13]), если норма $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ строго выпукла, как в случае L^p-нормы с $p \in (1, +\infty)$, или, более общим образом, любой нормы вида $\|f\|_{\mathcal{F}} = \|T^{-1}f\|_{L^p(m)}$, где m — вероятностная мера и T — ограниченный инъективный линейный оператор из $L^p(m)$ в $L^1(\mu)$; в частности, последний случай охватывает большинство классов Соболева. Однако вместо таких допущений мы просто предположим в дополнение к (F1) и (F2), что выполнено условие

(F3) F *имеет квазинепрерывную версию.*

Теперь зафиксируем квазинепрерывную версию функции F; теорема ниже относится к этой версии!

Теорема 2 (теорема 1.4.2). *Предположим, что в теореме* 1 *для некоторого $p > 1$ мы имеем $\beta_v \in L^{p/(p-1)}(\mu)$ и что выполнены условия*

$$\|f\|_{L^p(\mu)} + \|\partial_v f\|_{L^1(\mu)} \leqslant \|f\|_{\mathcal{F}}, \quad f \in \mathcal{F} \tag{1}$$

и (F3) (*что обеспечивается использованием в качестве нормы на $\mathcal{F}$ функции, определяемой левой частью* (1)). *Тогда каждая мера σ^y сосредоточена на множестве $F^{-1}(y)$ и обращается в нуль на всех множествах $C_{\mathcal{F}}$-емкости нуль.*

Пример 1. Предположим, что X — банахово пространство, мера μ дифференцируема по Фомину вдоль ненулевого постоянного вектора v и F — такая непрерывная функция на X, дифференцируемая вдоль v, что функция $\partial_v F$ непрерывна и $c_1 \leqslant \partial_v F \leqslant c_2$ для некоторых положительных чисел c_1 и c_2. Тогда существуют поверхностные меры σ^y на множествах уровня $F^{-1}(y)$. Кроме того, можно использовать эквивалентные «традиционные» поверхностные меры $|\partial_v F|^{-2} \cdot \sigma^y$.

Очевидный недостаток постоянных векторных полей заключается в том, что они дают мало шансов получить положительную $\partial_v F$. Например, если X — гильбертово пространство и функция F дифференцируема по Гато, то оптимальным в этом смысле было бы взять $v = \nabla F$, что дает функцию $\partial_v F(x) = \|\nabla F(x)\|^2$. Однако даже для очень хороших функций F может не быть естественных мер, дифференцируемых вдоль ∇F. Например, если для $F(x) = (x, x)$ мы захотим определить поверхностные меры на сферах, то нам придется обеспечить дифференцируемость μ вдоль поля $v(x) = x$, но, скажем, гауссовские меры на бесконечномерных пространствах не дифференцируемы вдоль этого поля. По этой причине необходимо рассматривать векторные поля со значениями в подходящих аналогах пространства Камерона – Мартина.

Пример 2. Рассмотрим случай центрированной гауссовской меры μ с пространством Камерона – Мартина H и функции F, принадлежащей соболевскому классу $W^{2,2}(\mu)$. В этом случае H-значное градиентное поле $v = D_H F \in W^{2,1}(\mu, H)$ имеет дивергенцию $\beta_v = LF \in L^2(\mu)$, где L — оператор Орнштейна – Уленбека (см. определение на с. 23), причем функция $\partial_v F = |D_H F|_H^2$ принадлежит $L^1(\mu)$.

Глава 2.

Во второй главе мы рассматриваем достаточные условия абсолютной непрерывности распределения гладкой функции f на бесконечномерном локально выпуклым пространстве X, наделенном вероятностной мерой Радона μ. Некоторые условия такого рода известны для ряда различных классов функций и мер, см. [5], [7], [8], [37], [38], [40], [39], [46], [77]. Важное достаточное условие известно для одномерного случая: если μ — абсолютно непрерывная мера и f — произвольная функция, то для множества D всех точек, где f имеет ненулевую производную, получаем, что сужение меры μ на D под действием функции f переходит в абсолютно непрерывную меру, т. е. мера $\mu|_D \circ f^{-1}$ абсолютно непрерывна (известно, что в рассматриваемом случае множество D всегда измеримо по Лебегу и f измерима на множестве D). Полученные результаты дают ответ на вопрос, поставленный С.Б. Куксиным об абсолютной непрерывности аналитических функций на пространствах с гауссовскими мерами. Они используются в недавних работах [62], [63].

Приведем основные результаты главы 2.

Теорема 3 (теорема 2.2.1). *Пусть μ — радоновская вероятностная мера на локально выпуклом пространстве X, непрерывная вдоль векторов из счетного множества S, и пусть f — μ-измеримая функция на X такая, что все частные производные $\partial_{h_1}\cdots\partial_{h_n}f$ существуют всюду для всех $h_1,\ldots,h_n$ из линейной оболочки множества S. Пусть*

$$E = \{x\colon\ \exists\, h_1,\ldots,h_n \in S \quad c \quad \partial_{h_1}\cdots\partial_{h_n}f(x)\neq 0\}.$$

Тогда мера $\mu|_E \circ f^{-1}$ абсолютно непрерывна.

Фактически новшеством является даже одномерный случай. Вывод из него общего утверждения основан на стандартной технике условных мер или методе расслоений (см. [7], [8]).

Следствие 1. *Пусть μ — центрированная радоновская гауссовская мера на X, $f\in W^{p,\infty}(\mu)$ и*

$$E := \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\colon\ D^n_H f(x)\neq 0\}.$$

Тогда мера $\mu|_E\circ f^{-1}$ абсолютно непрерывна.

Следствие 2. *Пусть μ — центрированная радоновская гауссовская мера на X и f — такая борелевская функция на X, что для некоторого ортонормированного базиса $\{e_n\}$ в H функции $t\mapsto f(x+te_n)$ являются вещественно-аналитическими для почти всех x. Тогда функция f либо имеет абсолютно непрерывное распределение, либо совпадает μ-почти всюду с постоянной.*

Получен также естественный многомерный аналог предыдущего следствия. Если $f = (f_1, \dots, f_d)$, где $f_i \in W^{1,1}_{loc}(\mu)$, то матрица с элементами $(D_H f_i, D_H f_j)_H$ называется матрицей Маллявэна. Известно, что ее невырожденность достаточна для абсолютной непрерывности меры $\mu \circ f^{-1}$ на $\mathbb{R}^d$. При условиях предыдущего следствия определитель этой матрицы либо почти всюду отличен от нуля, либо равен нулю почти всюду.

Глава 3.

В третьей главе получены широкие достаточные условия для существования собственных условных вероятностей, измеримо зависящих от параметра, в случае параметрических семейств мер и отображений.

Хорошо известно, что для каждой вероятностной меры μ на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(X)$ суслинского пространства X (хаусдорфова пространства, которое является непрерывным образом полного сепарабельного метрического пространства) и каждого борелевского отображения f из X в суслинское пространство Y множества уровня $f^{-1}(y)$ могут быть наделены борелевскими вероятностными мерами μ^y, называемыми условными мерами, порожденными отображением f, обладающими следующими свойствами: пусть $\mu \circ f^{-1}$ есть образ меры μ под действием отображения f, определяемый равенством

$$\mu \circ f^{-1}(E) = \mu(f^{-1}(E)),\ E \in \mathcal{B}(Y);$$

тогда

1) мера μ^y сосредоточена на множестве $f^{-1}(y)$ для каждого $y \in f(X)$, т. е. $\mu^y(f^{-1}(y)) = 1,\ y \in f(X)$,

2) для всякого множества $B \in \mathcal{B}(X)$ функция $y \mapsto \mu^y(B)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{S}(X)$, порожденной классом суслинских множеств в X,

3) для всех борелевских множеств $B \subset X$ и $E \subset Y$, верно равенство

$$\mu(B \cap f^{-1}(E)) = \int_E \mu^y(B)\, \mu \circ f^{-1}(dy).$$

Условные меры с такими свойствами называют регулярными условными вероятностями. Пусть X, Y, Z — вполне регулярные суслинские пространства.

Основной результат главы 3 состоит в следующем.

Теорема 4 (теорема 3.2.1.). *Предположим, что дано борелевское отображение*

$$f\colon\ (x,z)\mapsto f_z(x),\quad X\times Z\to Y.$$

Предположим также, что для каждого $z\in Z$ задана борелевская вероятностная мера μ_z на X, причем отображение

$$z\mapsto \mu_z,\ Z\to\mathcal{P}(X)$$

измеримо по Борелю при условии, что пространство вероятностных мер $\mathcal{P}(X)$ наделено слабой топологией. Тогда существуют такие собственные условные меры $\{\mu_z^y\}_{y\in Y}$ для всех пар (μ_z, f_z), что для каждого борелевского множества B в X функция

$$(y,z)\mapsto \mu_z^y(B)$$

на $Y\times Z$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{S}(Y\times Z)$, или, что равносильно, отображение

$$(y,z)\mapsto \mu_z^y,\quad Y\times Z\to\mathcal{P}(X)$$

измеримо, когда пространство $Y\times Z$ наделено σ-алгеброй $\mathcal{S}(Y\times Z)$ и $\mathcal{P}(X)$ наделено борелевской σ-алгеброй.

Измеримость относительно σ-алгебры, порожденной суслинскими множествами, обеспечивает измеримость относительно всякой борелевской меры на суслинском пространстве.

Глава 1

Поверхностные меры, порождаемые дифференцируемыми мерами

В этой главе изучаются поверхностные меры на множествах уровня функций, заданных на общих вероятностных пространствах с мерами, дифференцируемыми вдоль векторных полей, и предлагается новая простая конструкция поверхностных мер. Наше построение применимо также к множествам уровня отображений со значениями в конечномерных пространствах. Стандартные поверхностные меры, возникающие для гауссовских мер в исчислении Маллявэна, можно получить этим способом.

Поверхностные меры на общих пространствах стали популярной темой исследований в последние годы в связи с развитием исчисления Маллявэна, геометрической теории меры с измеримыми метрическими пространствами и бесконечномерного стохастического анализа, см. [4], [33], [34], [45], [47], [48], [49], [51], [53], [58], [59], [73] и [74], где можно найти обсуждения различных проблем, явно или неявно связанных с поверхностными мерами в бесконечномерных пространствах. Богатая теория поверхностных мер на бесконечномерных пространствах, наделенных дифференцируемыми мерами, была разработана А.В. Углановым в 1970–1980-х годах и представлена в его книге [83] (см. также [13], [27], [29], [28]). В те же годы подход к поверхностным мерам для гауссовских объемных мер был развит в рамках исчисления Маллявэна, которое предоставляет эффективные средства для изучения индуцированных мер.

По поводу этого подхода см. [32], [38], [39], [43] и [66]; далеко идущие обобщения на случай дифференцируемых мер получены в [15], [16], [17], [18], [69]. Близкая конструкция для конфигурационных пространств развита в [8], [25], [26]. Меры Хаусдорфа, ассоциированные с гауссовскими мерами, рассмотрены в [52]; дополнительные ссылки для гауссовского случая можно найти в [40] и [39].

Цель этой главы — разработать конструкцию поверхностных мер, которая следует идее Маллявэна, но применяется к нелинейным пространствам и требует меньшей регулярности функции F, порождающей поверхность. Наша поверхностная мера на $F^{-1}(y)$ есть слабый предел мер $r^{-1}I_{\{y<F<y+r\}} \cdot \theta_F \cdot \mu$ при $r \to 0$, где θ_F — некоторая весовая функция (для достаточно регулярных поверхностей можно взять в качестве θ_F производную функции F вдоль «нормали к поверхности»). В гауссовском случае это построение применяется к один раз дифференцируемым функциям Маллявэна с градиентами, имеющими дивергенции, и также содержит некоторые новшества, когда применяется к поверхностям более высокой коразмерности. В невырожденном случае наши поверхностные меры эквивалентны стандартным. Однако даже в известных случаях излагаемый подход приводит к более коротким и простым доказательствам, в частности, само существование поверхностных мер доказывается в несколько строк. Кроме того, дается положительный ответ на вопрос, поставленный М. Рёкнером о непрерывной зависимости поверхностных мер от параметра y, задающего множества уровня $F^{-1}(y)$.

1.1 Обозначения и терминология

Пусть X — вполне регулярное топологическое пространство с борелевским σ-полем $\mathcal{B}$ и μ — ограниченная неотрицательная радоновская мера на $\mathcal{B}$, т. е. для каждого борелевского множества B и каждого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K_\varepsilon \subset B$ такой, что $\mu(B\backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$ (см. подробное обсуждение таких мер в [42]). Ниже также используются знакопеременные меры

Радона, т. е. борелевские меры m такие, что $|m|$ — радоновская мера, где $|m| = m^+ + m^-$ — обычная полная вариация меры m.

В некоторых утверждениях мы будем считать, что μ сосредоточена на счетном объединении метризуемых компактов, что всегда выполнено в случае, если пространство X является суслинским или метризуемым, а также если μ — гауссовская мера. Основное определение поверхностной меры не использует это предположение и в действительности применимо к общим вероятностным пространствам, но оно становится важным для того, чтобы сравнить поверхностные меры с условными мерами и гарантировать, что наши поверхностные меры действительно сосредоточены на множествах уровня.

Последовательность радоновских мер μ_n слабо сходится к радоновской мере μ если, для каждой ограниченной непрерывной функции f имеем

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X f(x)\mu_n(dx).$$

Семейство радоновских мер $\mathcal{M}$ на топологическом пространстве X называется равномерно плотным, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество K_ε, что $|\mu|(X\backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$ для всех $\mu \in \mathcal{M}$. Согласно теореме Прохорова, всякая слабо сходящаяся последовательность борелевских мер на полном сепарабельном метрическом пространстве равномерно плотна (наоборот, из равномерно плотной последовательности можно выбрать слабо сходящуюся).

Напомним некоторые понятия, связанные с гауссовскими мерами (см. [2], [6], [14], [39], [40], [41]). Пусть X — локально выпуклое пространство и X^* — топологически двойственное к нему пространство. Радоновская вероятностная мера μ на X называется центрированной гауссовской, если для всякого функционала $l \in X^*$ индуцированная мера $\mu \circ l^{-1}$ на прямой является центрированной гауссовской, т. е. мерой Дирака в нуле или мерой с симметричной гауссовской плотностью относительно меры Лебега. Пространство Камерона – Мартина H меры μ состоит из всех векторов h

с конечной нормой

$$|h|_H := \sup\{l(h)\colon\ l \in X^*,\ \|l\|_{L^2(\mu)} \leqslant 1\}.$$

Известно, что H с этой нормой является сепарабельным гильбертовым пространством, компактно вложенным в X; соответствующее скалярное произведение обозначается через $(\cdot,\cdot)_H$. Кроме того, пространство Камерона – Мартина H совпадает со множеством всех векторов, сдвиги на которые дают меры, эквивалентные γ. Типичный пример: μ — счетная степень стандартной гауссовской меры на действительной прямой, X — пространство $\mathbb{R}^\infty$ всех действительных последовательностей (счетная степень действительной прямой) и $H = l^2$.

Для всякого $h \in H$ существует измеримый линейный функционал $\widehat{h}$, принадлежащий замыканию множества X^* в $L^2(\mu)$, для которого

$$l(h) = \int_X l(x)\widehat{h}(x)\mu(dx) \quad \forall\, l \in X^*.$$

Мера μ дифференцируема по Фомину вдоль постоянного векторного поля h и $\beta_h = -\widehat{h}$, что является тривиальным следствием формулы Камерона – Мартина для плотности сдвинутой меры.

Класс Соболева $W^{p,1}(\mu)$, $p \in [1,+\infty)$ определяется как пополнение класса $\mathcal{FC}$ функций вида

$$f(x) = f_0(l_1(x),\ldots,l_n(x)), \quad f_0 \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n),\ l_i \in X^*$$

по соболевской норме

$$\|f\|_{p,1} = \|f\|_{L^p(\mu)} + \|D_H f\|_{L^p(\mu)} = \|f\|_{L^p(\mu)} + \left(\int_X |D_H f(x)|_H^p \mu(dx)\right)^{1/p},$$

где градиент $D_H f(x) \in H$ определяется формулой

$$(D_H f(x), h)_H = \partial_h f(x) = \lim_{t\to 0} t^{-1}(f(x+th) - f(x)).$$

Если $\{e_n\}$ — ортогональный базис в H, то вектор $D_H f(x)$ имеет координаты $\partial_{e_n} f(x)$.

В вышеупомянутом случае стандартной гауссовской продакт-меры функции класса $\mathcal{FC}$ есть просто гладкие функции с ограниченными производными по конечному числу переменных и $D_H f(x) = \nabla f(x)$. Подобным образом определяется класс Соболева $W^{p,1}(\mu, E)$ отображений со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве E; в этом случае $D_H f(x)$ — оператор из H в E, норма Гильберта – Шмидта $\|\cdot\|_{HS}$ которого используется для задания соболевской нормы. Это означает, что вместо $|D_H f(x)|_H$ в предыдущей формуле используется величина $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\partial_{e_n} f(x)|_E^2\right)^{1/2}$.

В результате пополнения каждая соболевская функция $f \in W^{p,1}(\mu)$ получает градиент $D_H f$, который является L^p-отображением со значениями в H. Он удовлетворяет формуле интегрирования по частям

$$\int_X \psi(x)(D_H f(x), h)_H \mu(dx) = -\int_X f(x)[\partial_h \psi(x) - \psi(x)\widehat{h}(x)]\mu(dx)$$

для всех $\psi \in \mathcal{FC}$. На самом деле это равенство переносится на все функции $\psi \in W^{q,1}(\mu)$, $q = p/(p-1)$. Непосредственно используя формулу интегрирования по частям, можно показать, что μ дифференцируема вдоль векторных полей $v \in W^{p,1}(\mu, H)$. В этом случае для поля $v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) e_n$ имеем

$$\beta_v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\partial_{e_n} v(x) - v_n(x)\widehat{e}_n(x)),$$

где ряд сходится в $L^p(\mu)$.

По индукции определяются классы Соболева более высокого порядка $W^{p,k}(\mu, E)$ с производными до порядка k. Например, класс $W^{p,2}(\mu)$ состоит из функций $f \in W^{p,1}(\mu)$ таких, что $D_H f \in W^{p,1}(\mu, H)$. Следовательно, мера μ дифференцируема вдоль поля градиента $v = D_H F$ в случае $F \in W^{p,2}(\mu)$. В этом случае $\beta_v = LF$, где L — оператор Орнштейна – Уленбека; в случае пространства $\mathbb{R}^\infty$ он определяется как замыкание оператора

$$Lf(x) = \sum_i [\partial_{x_i}^2 f(x) - x_i \partial_{x_i} f(x)]$$

на гладких цилиндрических функциях. Однако принадлежность к классу Соболева $W^{p,2}(\mu)$ для какого-либо p не требуется для существования дивергенции поля $D_H F$, что происходит уже в конечномерном случае.

Если задана измеримая функция $F\colon\ X \to \mathbb{R}$ или измеримое отображение $F\colon\ X \to \mathbb{R}^d$, то можно рассмотреть образ меры $\mu\circ F^{-1}$, определяемый формулой

$$\mu \circ F^{-1}(B) := \mu(F^{-1}(B))$$

на борелевском σ-поле в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^d$ соответственно.

Если μ сосредоточена на счетном объединении метризуемых компактов, то найдутся так называемые условные меры μ^y на X, такие, что функция $y \mapsto \mu^y(B)$ μ-измерима для каждого $B \in \mathcal{B}$, μ^y сосредоточена на $F^{-1}(y)$ для всех y (или $\mu \circ F^{-1}$-п.в. y) и μ есть интеграл мер μ^y по мере $\mu \circ F^{-1}$, что записывается как

$$\mu = \mu^y \cdot \mu \circ F^{-1}(dy)$$

в том смысле, что

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) = \int \int_X f(x)\mu^y(dx)\mu \circ F^{-1}(dy)$$

для всякой ограниченной борелевской функции f на X; интеграл существует в силу предположения об измеримости μ^y, см. подробности в [42, глава 10] или [40, глава 1]. Эта классическая конструкция конкурирует, однако, с другой естественной и более старой концепцией поверхностной меры. Последняя обычно вводится в более специальной ситуации, где можно рассмотреть подходящие окрестности «поверхностей» $\{F = y\}$ и получить разумный предел после подходящего масштабирования. Например, обычная поверхностная мера в $\mathbb{R}^d$ возникает как предел отношения объема ε-окрестности поверхности и ε при $\varepsilon \to 0$. Предлагаемая конструкция поверхностной меры σ^y на множестве уровня $F^{-1}(y)$ следующая: введем некоторую весовую функцию θ_F и положим

$$\int f(x)\sigma^y(dx) := \lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \int_{\{y<F<y+r\}} f(x)\theta_F(x)\mu(dx)$$

для подходящего класса функций f (скажем, ограниченных липшицевых). При наших предположениях поверхностная мера будет на самом деле слабым пределом мер

$$r^{-1}I_{\{y<F<y+r\}}\theta_F \cdot \mu.$$

В отличие от случая условных мер, такие построения требуют некоторых ограничений на меры и функции о которых идет речь. В случае гауссовской меры μ на локально выпуклом пространстве X эта конструкция применима к F из класса Соболева $W^{2,2}(\mu)$, если мы возьмем $\theta_F = |D_H F|^2$, где $D_H F$ — соболевский градиент отображения F вдоль пространства Камерона – Мартина H меры μ (или к F из класса Соболева $W^{1,1}(\mu)$, если $D_H F/|D_H F|_H$ обладает дивергенцией). Весовую функцию θ_F можно впоследствии отбросить при условии, что она существенно невырожденна; она необходима для того, чтобы дать возможность рассматривать вырожденное F и уменьшить требуемый порядок дифференцируемости отображения F. Подход, предложенный в этой работе может быть также интересен для изучения поверхностных мер на измеримых метрических пространствах (см. [50], [55], [65], [81]).

Почему недостаточно условных мер, которые существуют в большей общности? Причина по существу та же, что и в конечномерном случае: потребность в формуле Гаусса – Остроградского – Стокса и интегрировании по частям. Условных мер для этого недостаточно. Вместе с тем это объясняет, почему необходимы известные условия гладкости на объемную меру и функцию, порождающую множества уровня. Другая причина состоит в том, что условные меры μ^y зависят не только от множеств уровня $F^{-1}(y)$, но также от образа меры $\mu\circ F^{-1}$ (правда, для индуцированных мер с положительными плотностями эта зависимость сводится к наличию постоянного множителя для каждого фиксированного y). Наше построение обладает этим свойством зависимости, но допускает модификацию, которая более инвариантна.

1.2 Поверхностные меры, связанные с векторными полями дифференцируемости

Мера Радона $\mu \geqslant 0$ на пространстве X, указанная выше, фиксирована всюду далее.

Пусть $C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$ — класс всех ограниченных бесконечно дифференцируемых функции на $\mathbb{R}^d$ с ограниченными производными, $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ — его подкласс, состоящий из функций с компактным носителем.

Пусть $\mathcal{F}$ — класс ограниченных $\mathcal{B}$-измеримых вещественных функций. Напомним, что класс функций *разделяет меры*, если две меры совпадают всякий раз, когда они приписывают равные интегралы всем функциям в этом классе. Будем предполагать всюду далее, что $\mathcal{F}$ удовлетворяет следующим условиям:

(F1) $\mathcal{F}$ — линейное пространство, разделяющее радоновские меры на X и $\varphi(f) \in \mathcal{F}$ для всех $f \in \mathcal{F}$ и всех $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$.

Например, если X — метрическое пространство, то класс всех ограниченных липшицевых функций на X удовлетворяет условиям (F1).

Для многих приложений можно взять в качестве $\mathcal{F}$ в точности класс всех ограниченных липшицевых функций (см. п. 1.5).

Другой пример: дан некоторый класс $\mathcal{F}_0$, состоящий из $\mathcal{B}$-измеримых функций, возьмем в качестве $\mathcal{F}$ класс всех композиций $\varphi(f_1, \ldots, f_n)$, где $f_i \in \mathcal{F}_0$ и $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Этот класс является линейным пространством и замкнут относительно композиции с функциями из C_b^∞; разумеется, попрежнему необходимо дополнительное условие, что он должен разделять меры (которое тривиально выполнено, если класс $\mathcal{F}_0$ разделяющий). См. также модификацию условия (F1) для многомерных отображений, рассматриваемых в п. 1.6.

Из условия (F1) следует, что $1 \in \mathcal{F}$ и $fg \in \mathcal{F}$ для всех $f, g \in \mathcal{F}$. Действительно, $f^2 \in \mathcal{F}$ для всех $f \in \mathcal{F}$, потому что в качестве φ можно взять функцию из $C_b^\infty(\mathbb{R})$, которая совпадает с x^2 на ограниченном множестве значений функции f, таким образом, осталось воспользоваться равенством $2fg = (f+g)^2 - f^2 - g^2$. Введенные объекты используются в определении векторного поля.

Определение 1.2.1. *Векторное поле на* X (*или* $\mathcal{F}$*-векторное поле, если необходимо указать на его связь с* $\mathcal{F}$) *есть линейное отображение* (*дифференцирование*)

$$v\colon\ \mathcal{F} \to L^1(\mu), \quad f \mapsto \partial_v f,$$

такое, что

$$\partial_v(\varphi \circ f) = \varphi'(f)\partial_v f \quad \mu\text{-п.в.} \tag{1.2.1}$$

для всех $f \in \mathcal{F}$ *и* $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$.

Подобным образом можно определить более общие векторные поля, для которых функции $\partial_v f$ принадлежат пространству $L^0(\mu)$ μ-измеримых функций.

Применяя (1.2.1) к $f, g, f+g$ и φ такой, что $\varphi(t) = t^2$ на достаточно большом интервале, получаем правило Лейбница

$$\partial_v(fg) = f\partial_v g + g\partial_v f \quad \forall\, f, g \in \mathcal{F}. \tag{1.2.2}$$

Стоит заметить, что $\partial_v 1 = 0$, так как можно взять $\varphi = 1$ в (1.2.1) или же можно положить $f = g = 1$ в (1.2.2).

Ниже фиксированное векторное поле v будет играть роль нормального поля на множествах уровня (и в некоторых случаях действительно можно использовать поля единичных нормалей).

Определение 1.2.2. *Мера* μ *называется дифференцируемой по Скороходу вдоль* v (*относительно* $\mathcal{F}$)*, если существует мера Радона* $d_v\mu$ *на* $\mathcal{B}$*, называемая производной Скорохода меры* μ *вдоль* v*, такая, что*

$$\int_X \partial_v f(x)\mu(dx) = -\int_X f(x) d_v\mu(dx) \quad \forall\, f \in \mathcal{F}. \tag{1.2.3}$$

Будем говорить, что μ *дифференцируема по Фомину вдоль поля* v*, если* $d_v\mu \ll \mu$*; в этом случае плотность Радона–Никодима меры* $d_v\mu$ *относительно* μ *обозначается через* β_v *и называется логарифмической производной меры* μ *вдоль* v *или дивергенцией поля* v *относительно* μ.

Например, если μ — мера на $\mathbb{R}^d$ с гладкой плотностью ϱ и v — ненулевой постоянный вектор, то $d_v\mu$ задается плотностью $\partial_v\varrho$ и

$$\beta_v = (\partial_v\varrho)/\varrho,$$

что объясняет терминологию. Если $v = 1$ на действительной прямой, то обычная мера Лебега λ на $[0,1]$, рассматриваемая как мера на $\mathbb{R}$ дифференцируема по Скороходу и $d_1\lambda = \delta_0 - \delta_1$, так что она не дифференцируема по Фомину. Обзор теории дифференцируемых мер см. в [1], [40].

Оригинальное определение Фомина использовало постоянные векторные поля на линейных пространствах. Дифференцируемость мер вдоль непостоянных векторных полей была рассмотрена уже в 1980 – 1990-х годах (иногда неявно) в исчислении Маллявэна и его модификациях (см. [80], [9], [24], [25], [7], [8], [35], [43]); близкая конструкция возникает в обобщенных стохастических интегралах (см. [10], [21], [11], [67]) и в связи с так называемыми операторами “carré du champ” (см. [46]). Очевидно, свойство дифференцируемости зависит от $\mathcal{F}$. Однако в разумных ситуациях дифференцируемость относительно небольших классов (разделяющих меры) часто влечет дифференцируемость относительно бóльших классов. Например, в случае $v(x) = 1$ на действительной прямой дифференцируемость относительно C_0^∞ влечет дифференцируемость относительно класса ограниченных липшицевых функций.

Заметим, что $d_v\mu(X) = 0$, это следует из (1.2.3), примененного к $f = 1$, таким образом, $d_v\mu$ с необходимостью является знакопеременной мерой.

Для исследования возникающих в приложениях функций необходимо расширение оператора ∂_v на функции, не принадлежащие классу $\mathcal{F}$.

Определение 1.2.3. *Пусть μ дифференцируема по Скороходу вдоль векторного поля v. Будем говорить, что $\mathcal{B}$-измеримая функция Ψ принадлежит классу $\mathfrak{D}_v$, если $\Psi \in L^1(\mu) \cap L^1(d_v\mu)$ и существует последовательность функций $f_n \in \mathcal{F}$, сходящаяся к Ψ в $L^1(\mu)$ и в $L^1(d_v\mu)$, такая, что функции $\partial_v f_n$ сходятся в $L^1(\mu)$ к некоторой функции w и функции $f_n\partial_v g$*

сходятся в $L^1(\mu)$ *для каждой* $g \in \mathcal{F}$. *Тогда положим*

$$\partial_v \Psi := w.$$

Заметим, что из сходимости последовательности $\{f_n\}$ в $L^1(\mu)$ следует, что последовательность $\{f_n \partial_v g\}$ сходятся в $L^1(\mu)$ в точности тогда, когда она равномерно μ-интегрируема. Это условие выполнено, если $\{f_n\}$ сходятся к функции Ψ в $L^p(\mu)$ для некоторого $p > 1$ и все функции $\partial_v g$ для $g \in \mathcal{F}$ принадлежат $L^q(\mu)$, $q = p/(p-1)$.

Это определение до некоторой степени техническое, потому что мы хотим сделать его достаточно широким. Похожие технические детали возникают уже на действительной прямой, если желательно интегрировать по частям неограниченные функции относительно мер с плотностями ограниченной вариации (но не абсолютно непрерывных), таких, что производная может быть сингулярной. В случае меры μ, дифференцируемой по Фомину и имеющей логарифмическую производную $\beta_v \in L^2(\mu)$, естественно сказать, что функция $\Psi \in L^2(\mu)$ имеет соболевскую производную $\partial_v \Psi \in L^2(\mu)$, если существует последовательность функций f_n, сходящаяся к Ψ в $L^2(\mu)$, такая, что $\{\partial_v f_n\}$ также сходится в $L^2(\mu)$. В этом случае предельная функция для $\{\partial_v f_n\}$ будет удовлетворять формуле интегрирования по частям. Определение выше следует схожей идее при более слабых условиях интегрируемости. Наиболее существенное ослабление условия связано с переходом к $L^1(\mu)$ вместо $L^2(\mu)$ (переход к $L^p(\mu)$ с $p > 1$ проще).

Функция w (если она существует) определена однозначно. Действительно, для каждой функции $g \in \mathcal{F}$ имеем

$$\begin{aligned}
\int_X g(x)w(x)\mu(dx) &= \lim_{n\to\infty} \int_X g(x)\partial_v f_n(x)\mu(dx) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X [\partial_v(gf_n)(x) - f_n(x)\partial_v g(x)]\mu(dx) = \\
&= -\lim_{n\to\infty} \int_X (gf_n)(x) d_v\mu(dx) - \int_X \Psi \partial_v g \mu(dx) = \\
&= -\int_X (g\Psi)(x) d_v\mu(dx) - \int_X \Psi(x)\partial_v g(x)\mu(dx).
\end{aligned}$$

Следовательно, интеграл от функции gw определен однозначно для каждой функции $g \in \mathcal{F}$, что однозначно определяет w согласно условию (F1).

Замечание 1.2.4. Если f ограничена, то последовательность $\{f_n\}$ со свойствами, указанными в определении, можно заменить на равномерно ограниченную последовательность так, что техническое условие равномерной интегрируемости будет выполнено автоматически. В самом деле, взяв такую функцию $\zeta \in C_b^\infty(\mathbb{R})$, что $\zeta(t) = t$ на интервале, содержащем область значений функции f, получаем новую последовательность $g_n = \zeta(f_n)$, которая равномерно ограничена и сходится к f в $L^1(\mu)$ и $L^1(d_v\mu)$. Кроме того, функции $\partial_v g_n = \zeta'(f_n)\partial_v f_n$ сходятся к $\partial_v f$ в $L^1(\mu)$.

Пусть μ дифференцируема по Скороходу вдоль v. Будем предполагать, что $F\colon\ X \to \mathbb{R}$ — такая $\mathcal{B}$-измеримая функция, что

(F2) $\psi(F) \in \mathfrak{D}_v$ для каждой функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и существует такая $\mathcal{B}$-измеримая функция $\partial_v F$, что $\partial_v(\psi \circ F) = \psi'(F)\partial_v F$ п.в. для каждой $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Более того,

$$\partial_v F \geqslant 0, \quad \partial_v F \in L^1(\mu).$$

Положим

$$\nu := (\partial_v F) \cdot \mu, \quad \eta := d_v\mu \circ F^{-1}. \tag{1.2.4}$$

Мера ν конечна и неотрицательна (она может быть нулевой). Условные меры на множествах уровня $F^{-1}(y)$, порожденные мерой ν, будем обозначать через ν^y (в случае, когда μ сосредоточена на счетном объединении метризуемых компактов).

Теперь введем наши поверхностные меры σ^y; можно было бы использовать символ σ_v^y, чтобы подчеркнуть зависимость от v. Определение использует только дифференцируемость функций распределения

$$\Phi_f(y) := \int_{\{F<y\}} f(x)\nu(dx)$$

в данной точке. В этом смысле никакой топологической структуры не требуется. Однако для вывода дополнительных свойств наших поверхностных мер будут нужны некоторые дополнительные предположения. Положим

$$\varrho_f(y) = \Phi'_f(y) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi_f(y+h) - \Phi_f(y)}{h}. \tag{1.2.5}$$

Определение 1.2.5. *Пусть $y \in \mathbb{R}$. Предположим, что функция Φ_f дифференцируема в точке y для каждой функции $f \in \mathcal{F}$ и существует такая радоновская мера σ^y на $\mathcal{B}$, что*

$$\int_X f(x)\sigma^y(dx) = \varrho_f(y) \quad \forall\, f \in \mathcal{F}. \tag{1.2.6}$$

Тогда меру σ^y будем называть поверхностной мерой, ассоциированной с множеством уровня $F^{-1}(y)$.

Замечание 1.2.6. Здесь не требуется, чтобы поверхностная мера была сосредоточена на множестве уровня $F^{-1}(y)$, но при широких предположениях (см. следующую теорему) это действительно мера на $F^{-1}(y)$. В этом отношении ситуация похожа на ситуацию с условными мерами.

Однако если F непрерывна (что мы не предполагаем) и для всякой точки $z \in X\backslash F^{-1}(y)$ и всякой окрестности U точки z существует неотрицательная функция $f \in \mathcal{F}$ с носителем в U, положительная в окрестности точки z (что выполнено, если $\mathcal{F}$ содержит все ограниченные липшицевы функции в случае метрического пространства), то σ^y автоматически сосредоточена на $F^{-1}(y)$. Это легко получить из (1.2.6), потому что можно взять U такое, что $|F(x) - y| > |F(z) - y|/2$ для всех $x \in U$, из чего с помощью (1.2.5) получаем, что $\varrho_f(y) = 0$, следовательно, интеграл от функции f по мере σ^y обращается в нуль, так что z не принадлежит топологическому носителю меры σ^y.

Схожие рассуждения показывают, что σ^y заведомо сосредоточена на $F^{-1}(y)$ при условии, что F обладает тем свойством, что $\varphi(F) \in \mathcal{F}$ для всех $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$. В этом случае, рассматривая подходящие функции $f = \varphi(F)$, получаем, что множества $\{F > y + 1/n\}$ и $\{F < y - 1/n\}$ имеют σ^y-меру нуль для всех $n \in \mathbb{N}$. Последнее условие с композициями выполнено, если в гауссовском случае взять в качестве $\mathcal{F}$ класс всех ограниченных функций из класса Соболева $W^{2,2}(\mu)$ и $F \in W^{2,2}(\mu)$.

Ясно, что предположение о дифференцируемости функции Φ_f выполнено, если μ дифференцируема вдоль v и F удовлетворяет указанным выше условиям (F1) и (F2). В типичных случаях выполнение предположений этого определения обеспечивается выполнением следующих двух условий: меры $\nu_r = r^{-1} I_{\{y<F<y+r\}} \cdot \nu$ слабо сходятся при $r \to 0$, что в свою очередь обеспечивается их равномерной плотностью и сходимостью интегралов по мере ν_r от ограниченных функций из класса, разделяющего меры. Именно это будет реализовано ниже.

Это построение близко к описанному в [43], [38], [39] и позже развитому в [17] для мер на локально выпуклых пространствах, дифференцируемых вдоль постоянных векторов, но в нашем случае требуется только однократная дифференцируемость функции F; в [17] требуется принадлежность функции F к классу Соболева $W^{p,2}(\mu)$ для некоторого p, а в [51], в гауссовском случае, также используется вторая производная (функция F принадлежит классу Соболева $W^{p,1}(\mu)$ для некоторого p, но ее соответствующим образом масштабированный градиент Маллявэна должен также лежать в классе Соболева $W^{p,1}(\mu)$ для некоторого p).

Наш основной результат дает широкие достаточные условия существования поверхностных мер.

Теорема 1.2.7. *Пусть мера μ дифференцируема по Фомину вдоль v с логарифмической производной β_v. Предположим, что выполнены условия* (F1) *и* (F2)*, причем мера $\mu \circ F^{-1}$ не имеет атомов* (*т. е. для всех y имеем $\mu(F^{-1}(y)) = 0$*)*. Предположим также, что выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

(i) *X — полное метрическое пространство, $\mathcal{F}$ содержит все ограниченные липшицевы функции*;

(ii) *мера μ имеет компактный носитель*;

(iii) *существует неотрицательная функция $W \in \mathfrak{D}_v$, для которой $W\beta_v, W\partial_v F \in L^1(\mu)$ и множества $\{W \leqslant R\}$ являются компактами для всех $R \geqslant 0$.*

Тогда для каждого $y \in \mathbb{R}$ существует радоновская поверхностная *мера σ^y, ассоциированная с множеством уровня $F^{-1}(y)$.*

Кроме того, если μ сосредоточена на счетном объединении метризуемых компактов, то для $\nu \circ F^{-1}$-п.в. y, где

$$\nu = (\partial_v F) \cdot \mu,$$

мера σ^y сосредоточена на $F^{-1}(y)$ и имеет место равенство

$$\sigma^y = \varrho_1(y) \cdot \nu^y,$$

где ϱ_1 — плотность меры $\nu \circ F^{-1}$.

Доказательство будет дано в следующем параграфе после нескольких вспомогательных результатов, но прямо сейчас можно сказать, что во всех этих случаях мера σ^y будет получена как предел мер $r^{-1} I_{\{y<F<y+r\}} \cdot \nu$ в слабой топологии; в случаях (i) и (ii) это будет немедленным следствием наших предположений, а в случае (iii) необходима небольшая дополнительная работа.

Суть дела в том, что при предположениях теоремы для каждой функции $f \in \mathcal{F}$ функция $\Phi_f(y)$ непрерывно дифференцируема. Это можно объяснить непосредственно в случае $F \in \mathcal{F}$. Функция $\Phi_f(y)$ есть функция распределения ограниченной меры

$$m_f := (f \cdot \nu) \circ F^{-1}$$

на действительной прямой. Следовательно, достаточно показать, что эта мера обладает непрерывной плотностью ϱ_f относительно меры Лебега. Это будет сделано, если мы покажем, что производная меры m_f в смысле обобщенных функций — ограниченная мера η_f без точек ненулевой меры. Используя стандартные в исчислении Маллявэна рассуждения, мы сейчас покажем, что

$$\eta_f = (f \cdot d_v \mu + \partial_v f \cdot \mu) \circ F^{-1}$$

является обобщенной производной меры m_f. Пусть $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Имеем

$$\begin{aligned}\int \psi'(t) m_f(dt) = \int \psi'(t)(f\cdot\nu)\circ F^{-1}(dt) = \\ = \int_X \partial_v(\psi(F))(x) f(x)\mu(dx) = \\ = \int_X \partial_v(f\psi(F))(x)\mu(dx) - \int_X \psi(F(x))\partial_v f(x)\mu(dx) = \\ = -\int_X \psi(F(x)) f(x) d_v\mu(dx) - \int_X \psi(F(x))\partial_v f(x)\mu(dx) = \\ = -\int \psi(t)\eta_f(dt). \quad (1.2.7)\end{aligned}$$

Наконец, η_f не имеет точек ненулевой меры, если это верно для $\mu\circ F^{-1}$ и $d_v\mu \ll \mu$ (последнее выполнено в случае дифференцируемости по Фомину). Доказательство ниже аналогично, нам только необходимо расширить (1.2.7) на более общие функции F, удовлетворяющие (F2).

Стоит отметить, что при наших предположениях (F1) и (F2) мера $\nu\circ F^{-1}$ абсолютно непрерывна (см. ниже), следовательно, мера $\mu\circ F^{-1}$ также абсолютно непрерывна при условии, что $\partial_v F > 0$ μ-п.в. (тогда μ и ν эквивалентны). В частности, в последнем случае $\mu\circ F^{-1}$ не имеет атомов. Вообще говоря, конечно, это неверно, так как F может быть постоянна на множестве положительной меры.

Из доказательства станет ясно, что если нас интересуют только поверхностные меры на $F^{-1}(y)$ для y в некотором интервале I, то достаточно, чтобы было выполнено $\mu(F^{-1}(y)) = 0$ только для $y \in I$. Кроме того, во многих случаях конструкция может быть «локализована» заменой μ на меру $f\cdot\mu$, где $f \in \mathcal{F}$ имеет подходящий носитель. Таким образом, можно сделать предположения относительно v также более локальными (заметим, что поверхностные меры в [39] строятся локально).

1.3 Доказательство основного результата

Следующие классические понятия и факты являются ключевыми для нашего основного результата.

По теореме А.Д. Александрова слабая сходимость последовательности радоновских вероятностных мер к радоновской вероятностной мере μ равносильна соотношению $\mu(W) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mu_n(W)$ для каждого открытого множества W (см. [42, § 8.2]).

По теореме Ле-Кама (см. [42, следствие 8.6.3]), в случае полных метрических пространств, если последовательность неотрицательных мер μ_n такова, что интегралы каждой ограниченной липшицевой функции относительно этих мер сходятся, то эта последовательность сходится слабо к некоторой радоновской мере.

Наконец, из теоремы Прохорова следует (см. [42, § 8.6]), что если последовательность радоновских мер ν_n на X равномерно ограничена по вариации и равномерно плотна, причем найдется такой класс ограниченных борелевских функций на X, разделяющих радоновские меры, что интегралы от функции f по мерам μ_n сходятся для каждой функции f в этом классе, то меры μ_n слабо сходятся к некоторой радоновской мере μ на X (теорема Прохорова обеспечивает существование радоновской меры μ, которая является поточечным пределом последовательности $\{\mu_n\}$ в слабой топологии, второе условие гласит, что этот поточечный предел единственный, следовательно, последовательность слабо сходится к нему).

Ниже будет использовано простое наблюдение, что для того, чтобы иметь равномерную плотность неотрицательных радоновских мер ν_n, достаточно иметь такую неотрицательную борелевскую функцию W на X, что множества $\{W \leqslant R\}$ компактны для всех $R \geqslant 0$ и интегралы от W по мерам ν_n равномерно ограничены некоторым числом C. В этом случае с помощью неравенства Чебышёва получаем

$$\nu_n(X\backslash\{W \leqslant R\}) \leqslant CR^{-1}.$$

Лемма 1.3.1. *Пусть мера μ дифференцируема по Скороходу вдоль v. Тогда*

(i) *для всех $f \in \mathfrak{D}_v$, мера $(\partial_v f \cdot \mu) \circ f^{-1}$ абсолютно непрерывна, а про-*

изводная ее распределения есть $(f \cdot d_v\mu) \circ f^{-1}$*, поэтому*

$$\int_{\{f<t\}} \partial_v f(x)\mu(dx) = \int_{-\infty}^{t} \int_{\{f<s\}} f(x) d_v\mu(dx) ds. \qquad (1.3.1)$$

(ii) $\varphi(f) \in \mathfrak{D}_v$ *для всяких липшицевой функции* φ *и функции* $f \in \mathcal{F}$.

Кроме того, $\varphi(f) \in \mathfrak{D}_v$ *для всякой непрерывно дифференцируемой функции* φ *с ограниченной производной и всякой* $f \in \mathfrak{D}_v$*. В обоих случаях* $\partial_v(\varphi \circ f) = \varphi'(f)\partial_v f$ μ*-п.в.*

Доказательство. (i) Доказательство абсолютной непрерывности меры $m = (\partial_v f \cdot \mu) \circ f^{-1}$ в основных чертах такое же, как в (1.2.7): проверяем, что обобщенная производная меры m представляет собой ограниченную меру.

Пусть f_n — функции, указанные в определении класса $\mathfrak{D}_v$. Для всякой функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ имеем

$$\begin{aligned}
\int \psi'(t) m(dt) &= \int_X \psi'(f(x))\partial_v f(x)\mu(dx) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X \psi'(f_n(x))\partial_v f_n(x)\mu(dx) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X \partial_v(\psi \circ f_n)(x)\mu(dx) = \\
&= -\lim_{n\to\infty} \int_X \psi(f_n(x)) d_v\mu(dx) = \\
&= -\int_X \psi(f(x)) d_v\mu(dx) = -\int \psi(t)\eta(dt),
\end{aligned}$$

где $\eta = d_v\mu \circ f^{-1}$. Таким образом, $m' = \eta$. Равенство (1.3.1) следует из этого равенства.

(ii) В первом утверждении можно считать, что φ имеет ограниченный носитель, так как f ограничена. Существует такая последовательность функций $\varphi_n \in C_b^\infty(\mathbb{R})$, равномерно сходящаяся к φ, что функции φ_n' равномерно ограничены и $\varphi_n'(t) \to \varphi'(t)$ для почти всех t. Функции $\varphi_n(f) \in \mathcal{F}$ сходятся равномерно к $\varphi(f)$. Заметим, что функции

$$\partial_v(\varphi_n(f)) = \varphi_n'(f)\partial_v f$$

сходятся к $\varphi'(f)\partial_v f$ в $L^1(\mu)$. Действительно, в силу равномерной ограниченности последовательности функций $\varphi_n'(f)$ и интегрируемости функции $\partial_v f$ достаточно показать, что имеется сходимость μ-п.в. Это следует из (i), поскольку мера $m := (\partial_v f \cdot \mu)\circ f^{-1}$ на действительной прямой абсолютно непрерывна и почти всюду имеем $\varphi_n'(t) \to \varphi'(t)$. Из этого вытекает, что $\psi(f) \in \mathfrak{D}_v$ и $\partial_v(\psi(f)) = \psi'(f)\partial_v f$ μ-п.в.

Предположим теперь, что $f \in \mathfrak{D}_v$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ и ψ' ограничена. Тогда $\psi(f) \in L^1(\mu)$. Возьмем такую последовательность функций $\psi_n \in C_b^\infty(\mathbb{R})$, сходящуюся к ψ локально равномерно, что функции ψ_n' равномерно ограничены и сходятся к ψ' локально равномерно. Найдутся функции $f_n \in \mathcal{F}$ со свойствами, указанными в определении класса $\mathfrak{D}_v$. Тогда функции $\psi_n(f_n) \in \mathcal{F}$ сходятся к $\psi(f)$ в $L^1(\mu)$ и $L^1(d_v\mu)$, так как

$$|\psi_n(f_n) - \psi(f)| \leqslant |\psi_n(f_n) - \psi_n(f)| + |\psi_n(f) - \psi(f)|,$$

где первый член оценивается через $C|f_n - f|$, а второй член стремится к нулю в $L^1(\mu)$ и $L^1(d_v\mu)$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. Поскольку функции ψ_n равномерно липшицевы, то имеет место оценка $|\psi_n(f_n)| \leqslant C + C|f_n|$, что влечет равномерную интегрируемость функций $\psi_n(f_n)\partial_v g$ для каждой функции $g \in \mathcal{F}$.

Осталось проверить сходимость функций $\partial_v(\psi_n \circ f_n) = \psi_n'(f_n)\partial_v f_n$ к $\psi'(f)\partial_v f$ в $L^1(\mu)$. Это следует из сходимости функций $\partial_v f_n$ к $\partial_v f$ в силу того, что функции $\psi_n'(f_n)$ равномерно ограничены и сходятся к $\psi'(f)$ по мере μ. Чтобы увидеть это, достаточно показать, что всякая подпоследовательность в $\psi_n'(f_n)$ имеет свою подпоследовательность с указанным свойством. Поэтому можно считать, что $\{f_n\}$ сходится к f почти всюду. По теореме Егорова для любого $\delta > 0$ существует множество B с $\mu(X\backslash B) < \delta$, на котором сходимость равномерна, откуда вытекает, что $\psi_n'(f_n) \to \psi'(f)$ на B. Снова имеем $\partial_v(\psi(f)) = \psi'(f)\partial_v f$ μ-п.в. □

Лемма 1.3.2. *Для каждой ограниченной липшицевой функции ψ на прямой имеем $\psi(F) \in \mathfrak{D}_v$. Кроме того,*

$$\partial_v(\psi(F)) = \psi'(F)\partial_v F.$$

Доказательство. Найдем равномерно ограниченную и равномерно липшицеву последовательность функций $\psi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, которая сходится к ψ локально равномерно, причем $\psi_n' \to \psi'$ почти всюду. Ясно, что имеет место сходимость $\psi_n(F) \to \psi(F)$ в L^1 для любой ограниченной меры.

Функции $\partial_v(\psi_n \circ F) = \psi_n'(F)\partial_v F$ сходятся в $L^1(\mu)$ к $\psi'(F)\partial_v F$. Действительно, из утверждения (i) предыдущей леммы следует, что мера $(\partial_v F \cdot \mu) \circ F^{-1}$ абсолютно непрерывна: достаточно применить это утверждение к функциям $\zeta_n \circ F \in \mathfrak{D}_v$, где $\zeta_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\zeta_n(t) = t$ при $t \in [-n, n]$ и $\sup_{n,t} |\zeta_n'(t)| < \infty$; тогда меры $\zeta_n'(F)\partial_v F \cdot \mu$ сходятся к $\partial_v F \cdot \mu$ по вариации, значит, их образы при отображении F также сходятся по вариации. Из абсолютной непрерывности неотрицательной меры $(\partial_v F \cdot \mu) \circ F^{-1}$ и сходимости $\psi_n'(t) \to \psi'(t)$ почти всюду получаем, что

$$\psi_n'(F)\partial_v F \to \psi'(F)\partial_v F \quad \mu\text{-п.в.}$$

Это доказывает упомянутую сходимость в $L^1(\mu)$ с помощью теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

Согласно замечанию 1.2.4, для любого n существует равномерно ограниченная последовательность функций $f_{n,k} \in \mathcal{F}$, сходящаяся к $\psi_n(F)$ в $L^1(\mu)$ и $L^1(d_v\mu)$, такая, что $\partial_v f_{n,k} \to \partial_v(\psi_n(F))$ в $L^1(\mu)$. Более того, из рассуждений в этом замечании ясно, что эту последовательность можно выбрать равномерно ограниченной одновременно по n и k. Теперь выберем k_n таким, что функции $f_n = f_{n,k_n}$ сходятся к $\psi(f)$ в $L^1(\mu)$ и $L^1(d_v\mu)$ и функции $\partial_v f_n$ сходятся к $\psi'(F)\partial_v F$ в $L^1(\mu)$. $\square$

Следствие 1.3.3. *В предположениях* (F1) *и* (F2) *имеем*

$$(\nu \circ F^{-1})' = \eta = d_v\mu \circ F^{-1}$$

в смысле обобщенных функций, где ν и η определены в (1.2.4)*. Следовательно, мера $\nu \circ F^{-1}$ имеет плотность ϱ_1 ограниченной вариации, более того,*

$$\varrho_1(t) = \eta((-\infty, t)) = d_v\mu(x\colon\ F(x) < t).$$

Если мера $\mu \circ F^{-1}$ не имеет атомов и μ дифференцируема по Фомину вдоль v, то $|d_v\mu|(\{F = t\}) = 0$ для всех t, следовательно, эта плотность непрерывна. Кроме того, для каждой функции $f \in \mathcal{F}$ имеем

$$((f \cdot \nu) \circ F^{-1})' = (f \cdot d_v\mu) \circ F^{-1} + (\partial_v f \cdot \mu) \circ F^{-1}, \tag{1.3.2}$$

$$\|((f \cdot \nu) \circ F^{-1})'\| \leqslant \|f \cdot d_v\mu + \partial_v f \cdot \mu\|.$$

Если мера $\mu \circ F^{-1}$ не имеет атомов, то мера $(f \cdot \nu) \circ F^{-1}$ обладает непрерывной плотностью ϱ_f ограниченной вариации и

$$|\varrho_f(y)| \leqslant \|f \cdot d_v\mu + \partial_v f \cdot \mu\| \leqslant \|d_v\mu\| \cdot \|f\|_\infty + \|\partial_v f\|_{L^1(\mu)}.$$

Наконец, если $d_v\mu = \beta_v \cdot \mu$, где $\beta_v \in L^q(\mu)$, $q = p/(p-1)$, то

$$|\varrho_f(y)| \leqslant \|\beta_v\|_{L^q(\mu)}\|f\|_{L^p(\mu)} + \|\partial_v f\|_{L^1(\mu)}. \tag{1.3.3}$$

Доказательство. Аналогично (1.2.7) находим, что

$$\int \psi'(t)(f \cdot \nu) \circ F^{-1}(dt) = \int_X \partial_v(\psi \circ F)(x) f(x)\mu(dx) =$$
$$= -\int_X \psi(F(x)) f(x) d_v\mu(dx) - \int_X \psi(F(x))\partial_v f(x)\mu(dx),$$

что дает (1.3.2), откуда следуют все наши утверждения. □

Замечание 1.3.4. Отметим, что «ненормализованные» поверхностные меры, введенные выше, по-прежнему не являются настоящими «поверхностными мерами», поскольку они зависят не только от множеств уровня $F^{-1}(y)$, но также от всей функции F, и, очевидно, вся конструкция также зависит от нашего выбора векторного поля v. Однако присутствует некоторая инвариантность масштабирования конструкции: например, если заменить F на kF с некоторым числом $k > 0$, то множество $F^{-1}(0)$ не изменится, как и наша мера σ^0 на нем: множества $\{0 < kF < r\}$ есть старые множества $\{0 < F < r/k\}$, таким образом, при вычислении производной функции распределения в нуле появляется множитель k, возникающий из $\partial_v(kF)$, и мы получаем прежнюю величину.

Тем не менее, если v тоже зависит от F, например, если взять в качестве v подходящий градиент функции F без нормировки, то эта инвариантность теряется. Это некоторый недостаток нашего определения, который будет частично преодолен ниже (посредством нормализации поверхностных мер с помощью весов или с использованием нормализованных векторных полей), но необходимо помнить, что даже если иметь дело с очень хорошими функциями F на бесконечномерных пространствах, известные конструкции на самом деле не определяют поверхностные меры на отдельных множествах уровня $F^{-1}(y)$, как это происходит с обычными хорошими поверхностями в $\mathbb{R}^d$. По-прежнему необходимо, чтобы каждая фиксированная поверхность входила в специальное семейство множеств уровня (за исключением некоторых особенно простых поверхностей). С другой стороны, используя весовые функции, можно получить «геометрические поверхностные меры» на основе наших поверхностных мер в случае разумных индивидуальных поверхностей, т. е. задаваемых гладкими по Фреше функциями с невырожденными производными.

Доказательство теоремы 1.2.7. Пусть $y = 0$. Из следствия 1.3.3 известно, что для всех $f \in \mathcal{F}$ функция распределения меры $(f \cdot \nu) \circ F^{-1}$ дифференцируема в нуле и ее производная есть $\varrho_f(0)$. Ясно, что

$$\varrho_f(0) = \lim_{n\to\infty} n \int_{B_n} f(x)\nu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X f(x)\nu_n(dx),$$

где

$$B_n = \{0 < F < n^{-1}\} \quad \text{и} \quad \nu_n := nI_{B_n} \cdot \nu.$$

Конечно, вместо n^{-1} можно взять числа $h_n > 0$, убывающие к нулю (тогда множитель n заменится на h_n^{-1}). Неотрицательные меры ν_n равномерно ограничены, так как их значения на всем пространстве X сходятся к $\varrho_1(0)$.

Если либо (i), (ii), либо (iii) выполнены, из этого следует, что существует ограниченная неотрицательная радоновская мера σ^0 на X такая, что

$$\int_X f(x)\sigma^0(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X f(x)\nu_n(dx).$$

Действительно, в случае (i) применим теорему Ле-Кама. Заметим, что меры ν_n радоновы и сосредоточены на общем сепарабельном подпространстве. В случае (ii), очевидно, имеем равномерную плотность мер ν_n, которая дает радоновский предел, как объяснено выше.

То же самое верно также в случае (iii), потому что интегралы

$$\int_X W(x)\nu_n(dx) = n\int_{B_n} W(x)\nu(dx)$$

равномерно ограничены, что следует из тех же рассуждений, которые доказывают существование функции $\varrho_1(0)$, только вместо μ берем $W \cdot \mu$; наши предположения в (iii) таковы, что это работает. Это завершает доказательство теоремы 1.2.7.

Сравним построенные меры σ^y с условными мерами ν^y, в предположении, что μ сосредоточена на счетном объединении метризуемых компактов. Из определения функции $\varrho_f(y)$ следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_X f(x)\sigma^y(dx)dy = \int_X f(x)\nu(dx) = \int_{\mathbb{R}}\int_X f(x)\nu^y(dx)\nu\circ F^{-1}(dy).$$

Интеграл слева можно записать как

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_X f(x)\frac{1}{\varrho_1(y)}\sigma^y(dx)\varrho_1(y)dy = \int_{\mathbb{R}}\int_X f(x)\frac{1}{\varrho_1(y)}\sigma^y(dx)\nu\circ F^{-1}(dy),$$

следовательно, мера $\sigma^y/\varrho_1(y)$ совпадает с условной мерой ν^y для $\nu\circ F^{-1}$-п.в. y с учетом нашего предположения, что $\mathcal{F}$ разделяет меры на $\mathcal{B}$, и существенной однозначности условных мер. □

Замечание 1.3.5. (i) Предположение о том, что мера μ сосредоточена на метризуемых компактах, не использовалось для доказательства существования меры σ^y; оно необходимо только для сравнения поверхностных мер с условными мерами и локализации σ^y на $F^{-1}(y)$.

(ii) Вместо множеств $\{y < F < y+h\}$ можно рассматривать множества $\{y - h < F < y + h\}$, но тогда множитель h^{-1} необходимо заменить на $(2h)^{-1}$.

(iii) Из нашей конструкции следует, что в случаях (i) – (iii) отображение $y \mapsto \sigma^y$ непрерывно при условии, что пространство вероятностных мер наделено слабой топологией. Действительно, согласно (1.2.6), всякий раз, когда $y_j \to y$, для любой функции $f \in \mathcal{F}$ интегралы от функции f по мерам σ^{y_j} сходятся к интегралу от функции f по мере σ^y, что при соответствующих предположениях влечет слабую сходимость. Это дает положительный ответ на вопрос, поставленный М. Рёкнером.

1.4 Дополнительные результаты, связанные с емкостями

Теперь сформулируем некоторые дополнительные условия, при которых существует более каноническая версия меры σ^y, сосредоточенная на множестве уровня $F^{-1}(y)$ для каждого y. Здесь мы будем считать, что мера μ дифференцируема по Фомину вдоль v (также будем предполагать некоторую более высокую степень интегрируемости функции β_v). Заметим, что меры σ^y не изменятся, если взять другую версию функции F, но множества $F^{-1}(y)$ могут измениться. Напомним, что, как отмечалось выше, это не является проблемой, если F непрерывна и для всякой точки z из дополнения множества $F^{-1}(y)$ и всякой окрестности U точки z существует неотрицательная непрерывная функция из класса $\mathcal{F}$, положительная в точке z и имеющая носитель в U.

Еще одно понятие, сопутствующее поверхностным мерам, — емкость (см. [39] или [40]). Предположим, что класс $\mathcal{F}$ наделен нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ такой, что сходимость по этой норме дает сходимость в $L^1(\mu)$. На практике часто это будет норма подходящего пространства Соболева $W^{p,1}(\mu)$. Эта норма порождает емкость: для всякого открытого множества $U \subset X$ определим его емкость, ассоциированную с $\mathcal{F}$, формулой

$$C_{\mathcal{F}}(U) = \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}}\colon\ f \in \mathcal{F},\ f \geqslant 0,\ f \geqslant 1\ \ \mu\text{-п.в. на } U\}.$$

Для всякого множества $B \subset X$ положим

$$C_{\mathcal{F}}(B) = \inf\{C_{\mathcal{F}}(U)\colon\ U \supset B \text{ открыто}\}.$$

В типичных случаях емкости рассматриваемого вида плотны (см. [72], [69], [18]), т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт K_ε, что выполнена оценка $C_{\mathcal{F}}(X\backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$. Однако наличие этого свойства не предполагается.

Напомним, что функцию f называют $C_{\mathcal{F}}$-квазинепрерывной, если для каждого n есть замкнутое множество A_n такое, что $C_{\mathcal{F}}(X\backslash A_n) < 1/n$ и сужение $f|_{A_n}$ непрерывно.

Известно, что всякая функция $f \in \mathcal{F}$ имеет $C_{\mathcal{F}}$-квазинепрерывную версию (см. [40, параграф 8.13]) при условии, что норма $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ строго выпуклая, как в случае L^p-нормы с $p \in (1, +\infty)$ и, более общим образом, любой нормы вида $\|f\|_{\mathcal{F}} = \|T^{-1}f\|_{L^p(m)}$, где m — вероятностная мера и T — ограниченный инъективный линейный оператор из $L^p(m)$ в $L^1(\mu)$; в частности, последний случай охватывает большинство классов Соболева. Однако вместо таких допущений мы просто предположим в дополнение к (F1) и (F2), что выполнено условие

(F3) $\quad F$ *имеет квазинепрерывную версию.*

Теперь зафиксируем квазинепрерывную версию функции F; результаты ниже относятся к этой версии!

Лемма 1.4.1. *Предположим, что найдется $p > 1$ такое, что*

$$\|f\|_{L^p(\mu)} + \|\partial_v f\|_{L^1(\mu)} \leqslant \|f\|_{\mathcal{F}}, \quad f \in \mathcal{F}. \tag{1.4.1}$$

Предположим также, что $\beta_v \in L^{p/(p-1)}(\mu)$. Тогда для всякого открытого множества $W \subset X$ и всякого $r > 0$ мера $\nu = (\partial_v F)\cdot\mu$ удовлетворяет неравенству

$$\nu(W \cap \{y < F < y + r\}) \leqslant rC(\mu)C_{\mathcal{F}}(W), \tag{1.4.2}$$

где

$$C(\mu) = \|\mu\| + \|\beta_v\|_{L^q(\mu)},\ q = \frac{p}{p-1}.$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{F}$, $f \geqslant 0$ и $f \geqslant 1$ μ-п.в. на W. Тогда $f \geqslant 1$

ν-п.в. на W, следовательно, ввиду (1.3.3) и (1.4.1) получаем

$$\nu(W \cap \{y < F < y + r\}) \leqslant \int_{W \cap \{y < F < y + r\}} f(x)\nu(dx) \leqslant$$
$$\leqslant \int_{y < F < y + r} f(x)\nu(dx) \leqslant rC(\mu)(\|f\|_{L^p(\mu)} + \|\partial_v f\|_{L^1(\mu)}) \leqslant rC(\mu)\|f\|_{\mathcal{F}},$$

что дает заявленную оценку после перехода к inf по f. $\square$

Конечно, всегда можно наделить $\mathcal{F}$ нормой, заданной левой частью неравенства (1.4.1). Более того, это строго выпуклая норма (так как такова L^p-норма), а сходимость по ней влечет сходимость в $L^p(\mu)$, следовательно, в $L^1(\mu)$. Однако в конкретных примерах могут быть другие естественные нормы на $\mathcal{F}$, не связанные с v, например, известные соболевские нормы. Квазинепрерывные версии функции F зависят от нашего выбора емкости $C_{\mathcal{F}}$, следовательно, от нашего выбора нормы на $\mathcal{F}$.

Теорема 1.4.2. *Предположим, что в теореме* 1.2.7 *для некоторого* $p > 1$ *мы имеем* $\beta_v \in L^{p/(p-1)}(\mu)$ *и что выполнены условия* (1.4.1) *и* (F3) (*что обеспечивается использованием в качестве нормы на* $\mathcal{F}$ *функции, определяемой левой частью* (1.4.1)). *Тогда каждая мера* σ^y *сосредоточена на множестве* $F^{-1}(y)$ *и обращается в нуль на всех множествах* $C_{\mathcal{F}}$*-емкости нуль.*

Доказательство. Покажем, что $\sigma^y(X \backslash F^{-1}(y)) = 0$. Снова можно предполагать, что $y = 0$. Достаточно показать, что σ^0 обращается в нуль на каждом множестве $U := \{|F| > \delta\}$, где $\delta > 0$. По предположению, для каждого n, существует замкнутое множество A_n такое, что $C_{\mathcal{F}}(X \backslash A_n) < 1/n$ и $F|_{A_n}$ непрерывна. Множества

$$U_n = U \cap (X \backslash A_n)$$

открыты, потому что $\{|F| \leqslant \delta\} \cap A_n$ замкнуты в силу непрерывности ограничения $F|_{A_n}$. Имеем $U \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Пусть $k > 1/\delta$. Тогда $\nu_k(U) = 0$, где, как и выше, $\nu_k = kI_{\{0 < F < k^{-1}\}} \cdot \nu$. Таким образом, по лемме имеем

$$\nu_k(U_n) = \nu_k(X \backslash A_n) \leqslant C(\mu)n^{-1},$$

следовательно $\sigma^0(U_n) \leqslant C(\mu)n^{-1}$, что дает $\sigma^0(U) = 0$. Заметим, что мы не можем вывести это непосредственно из равенства $\nu_k(U) = 0$, потому что U может не быть открытым.

Теперь докажем, что $\sigma^y(B) = 0$ для всякого $B \in \mathcal{B}$ нулевой $C_{\mathcal{F}}$-емкости. Снова достаточно рассмотреть случай $y = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. По определению существует такое открытое множество W, содержащее B, что $C_{\mathcal{F}}(W) < \varepsilon$. Поэтому существует функция $f \in \mathcal{F} \geqslant 0$ такая, что $f \geqslant 1$ μ-п.в. на W и $\|f\|_{\mathcal{F}} < \varepsilon$. Из леммы следует, что

$$|\nu_n(W)| \leqslant \varepsilon C(\mu),$$

что дает $|\sigma^0(W)| \leqslant \varepsilon C(\mu)$. Полагая $\varepsilon \to 0$, мы приходим к желаемому выводу. □

В рамках описанного выше подхода не существует естественного способа нормализации наших поверхностных мер. Один из способов сделать конструкцию более инвариантной следующий: предполагая, что существует некоторая внутренняя норма $|v|_H$ (что имеет место для гауссовских мер) и $|v(x)|_H > 0$ почти всюду относительно μ, можно использовать единичное поле $v/|v|_H$, которое приводит к весу $\partial_v F/|v|_H$ вместо $\partial_v F$. Однако во избежание возможных проблем с дифференцируемостью вдоль этого нового поля мы предположим лишь, что мера $|v|_H^{-1} \cdot \nu$ конечна и рассмотрим новые меры

$$\sigma_0^y := |v|_H^{-1} \cdot \nu^y$$

на тех же множествах уровня $F^{-1}(y)$. Эти меры конечны для $\nu \circ F^{-1}$-п.в. y, следовательно, также для $\mu \circ F^{-1}$-п.в. y. Наконец, если вес не используется, приходим к поверхностным мерам, которые совпадают с условными мерами.

Замечание 1.4.3. Отметим, что для любой ограниченной непрерывной функции g мера $g \cdot \sigma^y$ естественно определяется для всех y не только почти всюду. Из теоремы 1.4.2 легко видеть, что то же верно для любой ограниченной квазинепрерывной функции g. Чтобы приписать конечные интегралы относительно всех поверхностных мер σ^y некоторым неограниченным функциям g, можно использовать следующий прием: использовать поверхностные меры, порожденные новой мерой $g\cdot\mu$. Очевидно, что это требует некоторых дополнительных предположений относительно g, потому что наш подход основан на положительных дифференцируемых мерах. Однако он работает, если существует $p>1$ такое, что $\partial_v f\in L^p(\mu)$ для всех $f\in\mathcal{F}$, $\beta_v\in L^p(\mu)$, $\partial_v F\in L^p(\mu)$, $g\geqslant 0$ принадлежит $\mathfrak{D}_v\cap L^{p'}(\mu)$, $\partial_v g\in L^{p'}(\mu)$, где $p'=p/(p-1)$. Используя этот прием отдельно для g^+ и g^-, можно перенести это на некоторые знакопеременные функции. Можно показать, что если в этой ситуации g — ограниченная непрерывная функция, то эта процедура дает обычное произведение $g\cdot\sigma^y$.

Следует отметить, что если применить ту же конструкцию к исходной мере μ вместо ν, то для того, чтобы интегрировать по частям равенство с $\psi'(F)$, необходимо искусственно добавить множитель $\partial_v F$, чтобы получить выражение $\partial_v(\psi(F))$. Эффект этого в том, что мы должны применять предположения дифференцируемости не к μ, а к мере $(\partial_v F)^{-1}\cdot\mu$. В принципе, это вполне возможно, но требует некоторых дополнительных предположений.

В рассматриваемой ситуации имеет место следующая версия формулы Гаусса – Остроградского – Стокса с нашими ненормализованными поверхностными мерами. Положим

$$V_r=F^{-1}(-\infty,r),\quad S_r=F^{-1}(r).$$

Предложение 1.4.4. *Пусть u — другое векторное поле, вдоль которого μ дифференцируема, удовлетворяющее тем же условиям, что и v. Тогда*

$$\int_{V_r}\beta_u(x)\mu(dx)=-\int_{S_r}\frac{\partial_u F(x)}{\partial_v F(x)}\,\sigma^r(dx),$$

при условии, что или функция $\xi:=\partial_u F/\partial_v F$ — ограниченная квазинепрерывная функция, или ξ^+ и ξ^- удовлетворяют дополнительным условиям, указанным в предыдущем замечании.

Доказательство. Пусть

$$\psi_h(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s \leqslant r; \\ 0, & \text{если } s \geqslant r + h; \\ C - s/h, & \text{если } r < s < r + h, \end{cases}$$

где $C = 1 + r/h$. Тогда

$$\psi_h'(s) = \begin{cases} -1/h & \text{в интервале } (r, r+h); \\ 0 & \text{вне замыкания этого интервала.} \end{cases}$$

Имеем $\partial_u(\psi_h \circ F) = -h^{-1}\partial_u F$ на множестве $\{r < F < r + h\}$ и

$$\int_X \psi_h(F(x))\beta_u(x)\mu(dx) = -\int_X \partial_u \psi_h(F(x))\mu(dx) = \\ = h^{-1}\int_{r<F<r+h} \partial_u F(x)\mu(dx).$$

При $h \to 0$ левая часть этого тождества стремится к интегралу от β_u по множеству V_r, а правая часть стремится к поверхностному интегралу от функции $\partial_u F/\partial_v F$ по поверхностной мере σ^r. Последнее условие выполнено, если либо ξ — ограниченная квазинепрерывная функция, либо существуют поверхностные меры, ассоциированные с двумя новыми мерами $\xi^+ \cdot \mu$ и $\xi^- \cdot \mu$. □

1.5 Примеры

Из комментариев выше ясно, что все наши предположения имеют весьма общий характер за исключением требования дифференцируемости меры μ вдоль подходящего векторного поля. На самом деле векторные поля дифференцируемости могут быть найдены также для достаточно общих мер (см. [40, гл. 11]), единственное серьезное ограничение возникает, если мы хотим найти это поле таким способом, чтобы функция $\partial_v F$ не очень сильно вырождалась и позволяла связать наши поверхностные меры с более традиционными поверхностными мерами, как объяснено выше. Именно по этой причине мы включили $\partial_v F$ в нашу меру. В частности, тождественно нулевое v подходит под нашу конструкцию наилучшим образом и дает нулевые поверхностные меры. Для того, чтобы избежать таких бессмысленных ситуаций, теперь мы рассмотрим некоторые примеры, где для данной функции F найдется подходящее поле v с $\partial_v F > 0$ μ-п.в.

Пример 1.5.1. Предположим, что X — банахово пространство, мера μ дифференцируема по Фомину вдоль ненулевого постоянного вектора v, и F — непрерывная функция на X, дифференцируемая вдоль v, причем функция $\partial_v F$ непрерывна и $c_1 \leqslant \partial_v F \leqslant c_2$ для некоторых положительных чисел c_1 и c_2. Тогда существуют поверхностные меры σ^y на множествах уровня $F^{-1}(y)$. Кроме того, можно использовать эквивалентные «традиционные» поверхностные меры $|\partial_v F|^{-2} \cdot \sigma^y$. Также можно использовать локальную версию этой конструкции, умножая μ на липшицеву функцию с носителем в окрестности точки x_0, где $\partial_v F(x_0) > 0$.

В этой ситуации можно применить как (i), так и (ii) из теоремы 1.2.7. Применимость условия (i) следует из того факта, что любая липшицева функция на X μ-п.в. дифференцируема вдоль v, что следует из одномерного случая и существования дифференцируемых условных мер на прямых $x + \mathbb{R}v$ (см. [40, гл. 3]). Случай (iii) может быть применен здесь, если взять в качестве $\mathcal{F}$ тот же класс ограниченных липшицевых функций или класс гладких цилиндрических функций вида $f(l_1, \ldots, l_n)$, где $l_i \in X^*$ и $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Наконец, в качестве W можно взять функцию вида $W(x) = w(\|x\|)$, где w — неограниченная липшицева функция достаточно медленного роста на $\mathbb{R}$, такая, что W μ-интегрируема (такую функцию всегда можно найти).

Очевидный недостаток постоянных векторных полей заключается в том, что они дают мало шансов получить положительную производную $\partial_v F$. Например, если X — гильбертово пространство и F дифференцируема по Гато, то оптимальным в этом смысле было бы взять $v = \nabla F$, что дает функцию $\partial_v F(x) = \|\nabla F(x)\|^2$. Однако даже для очень хороших функций F может не быть естественных мер, дифференцируемых вдоль ∇F. Например, если мы возьмем $F(x) = (x, x)$ и захотим определить поверхностные меры на сферах, то нам придется обеспечить дифференцируемость μ вдоль поля $v(x) = x$, но, скажем, гауссовские меры (см. ниже) на бесконечномерных пространствах не дифференцируемы вдоль этого поля. По этой причине необходимо рассматривать векторные поля со значениями в подходящих аналогах пространства Камерона – Мартина.

Пример 1.5.2. Рассмотрим случай центрированной гауссовской меры μ с пространством Камерона – Мартина H и функции F, принадлежащей соболевскому классу $W^{2,2}(\mu)$. Тогда поле $v = D_H F \in W^{2,1}(\mu, H)$ имеет дивергенцию $\beta_v = LF \in L^2(\mu)$ и $\partial_v F = |D_H F|_H^2$ принадлежит $L^1(\mu)$.

Если $F \in W^{p,2}(\mu)$ с некоторым $p \in (1, 2)$, то можно использовать векторное поле

$$v = D_H F/|D_H F|_H^2,$$

для которого $\partial_v F = 1$ (и получить поверхностную меру из [51]), либо векторное поле

$$v = D_H F/|D_H F|_H,$$

являющееся единичной нормалью к поверхности (но относительно нормы Камерона – Мартина!) и $\partial_v F = |D_H F|_H$, но теперь в обоих случаях необходимо требовать, чтобы v обладало дивергенцией. В первом случае достаточно иметь $\|D_H^2 F\|_{HS}/|D_H F|_H^2 \in L^p(\mu)$, а во втором случае достаточно иметь $\|D_H^2 F\|_{HS}/|D_H F|_H \in L^p(\mu)$ (соответствующие поверхностные меры будут различны!). Также можно воспользоваться менее конструктивным (но более слабым) предположением, что $F \in W^{1,1}(\mu)$ и одно из указанных двух векторных полей обладает дивергенцией β_v из $L^1(\mu)$.

Если X — банахово пространство, то можно взять в качестве $\mathcal{F}$ класс всех ограниченных липшицевых функций. Условия (F1)–(F3) легко проверить в этом случае. На самом деле случай общего локально выпуклого пространства с радоновской гауссовской мерой сводится к этому случаю с помощью теоремы Цирельсона о линейном изоморфизме (см. [39, гл. 3]).

Если $\beta_v \in L^p(\mu)$, то можно взять $\mathcal{F} = \mathcal{FC}$ (гладкие цилиндрические функции) и применить случай (iii) в теореме 1.2.7. Если X секвенциально полно, то в качестве W можно взять функционал Минковского p_Q абсолютно выпуклого компактного множества Q положительной меры. Известно, что $p_Q \in W^{r,1}(\mu)$ для всех $r \geqslant 1$.

Если же интересоваться только гауссовской мерой μ на банаховом пространстве, то конструкция поверхностных мер по этой схеме становится еще проще: рассмотрим меры

$$\nu_r = r^{-1} I_{\{y<F<y+r\}} |D_H F|_H \cdot \mu$$

(рассматривая поле $v = D_H F/|D_H F|_H$, для которого $\partial_v F = |D_H F|_H$) и легко проверим с помощью формулы интегрирования по частям, что для каждой ограниченной липшицевой функции f интегралы от f по ν_r сходятся при $r \to 0$, так как $(f|D_H F|_H \cdot \mu) \circ F^{-1}$ обладает непрерывной плотностью при условии, что $D_H F/|D_H F|_H$ обладает дивергенцией в $L^1(\mu)$ (скажем, если $F \in W^{p,2}(\mu)$ и $1/|D_H F|_H \in L^{p/(p-1)}(\mu)$). Вспомогательные леммы здесь не требуются.

В частности, если $D_H F \neq 0$ п.в., то нашу конструкцию можно сравнить с поверхностными мерами, рассматриваемыми в работах [32], [66], [39], [40], [51] (заметим, что в последней работе разрабатывается конструкция, основанная на функциях распределения, связанных с самой мерой μ, так что она приводит к поверхностным мерам, которые не инвариантны при масштабировании функции F, как обсуждалось выше). Для того чтобы прийти к полезным поверхностным мерам необходимо либо рассматривать единичное поле $D_H F/|D_H F|_H$, либо брать поле $v = D_H F$ и тогда умножать полученные поверхностные меры на $1/|D_H F|_H$.

Подчеркнем, что для хороших поверхностей (типа множеств уровня непрерывно дифференцируемых по Фреше функций с невырожденными производными) нет необходимости привлекать переменные векторные поля $D_H F$: становится намного проще определить поверхностные меры локально, используя только постоянные векторные поля дифференцируемости меры μ, как в примере 1.5.1. В этом случае вторые производные функции F не возникают вообще и таким способом мы получаем теоремы существования из [83] (даже при более слабых предположениях).

Вместо гауссовской меры μ можно рассматривать радоновскую вероятностную меру μ на локально выпуклом пространстве X, которая дифференцируема по Фомину вдоль непрерывно вложенного плотного гильбертова пространства H. Простой пример — счетная степень вероятностной меры на $\mathbb{R}$ с гладкой плотностью с компактным носителем; тогда можно взять $X = \mathbb{R}^\infty$ и $H = l^2$; эту же меру можно также рассматривать на весовом гильбертовом пространстве всех таких вещественных последовательностей (x_n), что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n^2 < \infty, \quad \text{где } \alpha_n > 0 \text{ и } \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty.$$

Тогда можно также определить классы Соболева. Эта ситуация изучалась в [17], [69], [18]. В более поздней работе [51] те же результаты были получены заново в гауссовском случае (заметим, что доказательство того факта, что построенные поверхностные меры сосредоточены на соответствующих множествах уровня, данное в [51], неверно, если определяемая функция не является непрерывной: может не быть ненулевых непрерывных функций с носителем в множестве $\{|F| > r\}$). Подход, предложенный здесь, приводит к более коротким и более простым доказательствам, чем в цитируемых работах.

Замечание 1.5.3. (i) Следует отметить, что случай пространства Фреше сводится к случаю сепарабельного рефлексивного банахова пространства, так как всякая радоновская мера на пространстве Фреше сосредоточена на компактно вложенном сепарабельном рефлексивном банаховом пространстве (см. [42, теорема 7.12.4]). Для многих мер на банаховом пространстве (гауссовских, дифференцируемых) класс ограниченных липшицевых функций оказывается подходящим кандидатом на роль $\mathcal{F}$, так как такие функции почти всюду дифференцируемы по таким мерам.

(ii) Класс $\mathcal{FC}$ гладких цилиндрических функций и больший класс ограниченных липшицевых цилиндрических функций удовлетворяют условию (F1), но, вообще говоря, они не обладают тем свойством всего класса ограниченных липшицевых функций, что сходимость интегралов от таких функций относительно последовательности вероятностных мер обеспечивает слабую сходимость этих мер (скажем, это неверно для бесконечномерных гильбертовых пространств, хотя верно для $\mathbb{R}^\infty$). Именно поэтому мы рассматривали случаи (ii) и (iii) в теореме 1.2.7. Как уже отмечалось, можно определить поверхностные меры локально в подходящем смысле (например, на компактах), заменяя μ на $\zeta \cdot \mu$, где $\zeta \geqslant 0$ — выпуклая функция, носитель которой дает желаемую локализацию. Например, в гауссовском случае или в случае дифференцируемой меры на банаховом пространстве всегда можно выбрать функцию ζ таким образом, что ее носитель будет компактным и будет содержать заданное компактное множество, а мера $\zeta \cdot \mu$ останется дифференцируемой по Фомину вдоль тех же направлений, что и μ. Это может дать локальные поверхностные меры в более общих ситуациях, где нет глобальных поверхностных мер. Возможный способ склеивания этих локальных поверхностных мер основан на установлении их равномерной плотности.

Если X наделено подходящей структурой касательного пространства, дающей возможность рассматривать v не как дифференциальное, а как настоящее векторное поле, обладающее соответствующей нормой $|v(x)|$, то можно попытаться использовать поля единичной длины, но снова возникает вопрос их выбора. Выбор $v = D_H F$ в гауссовском случае связан с другим естественным объектом: H-окрестностями множеств. Для данного борелевского множества B, возьмем множество $B^r = B + rU_H$, где U_H — единичный шар в пространстве Камерона – Мартина H. Множество B^r, вообще говоря, намного меньше, чем обычная метрическая r-окрестность множества B. Тогда для определенных «поверхностей» B поверхностные меры множества B можно получить как предел мер $\mu(B^r)/r$ при $r \to 0$. Однако точное определение таким способом оказывается более сложным.

Среди различных ограничений на μ и F, наложенных выше, конечно, наиболее сильным является существование векторных полей дифференцируемости для μ. Например, во многих случаях для меры μ, заданной на метрическом пространстве, в качестве $\mathcal{F}$ можно взять пространство ограниченных липшицевых функций; если функция F локально липшицева, то единственная проблема состоит в том, чтобы найти подходящие поля дифференцируемости для меры. Не всегда возможно построить такие поля из постоянных векторных полей (это происходит уже для распределений диффузионных процессов с непостоянными коэффициентами диффузии см. [40, глава 4]). Представляет интерес изучение векторных полей дифференцируемости мер в рамках метрических пространств с мерами.

1.6 Поверхностные меры на поверхностях более высокой коразмерности

Конструкция поверхностных мер, разработанная в предыдущих параграфах, работает также в случае поверхностей более высокой коразмерности, но требует немного большей регулярности отображения

$$F = (F_1, \dots, F_d)\colon\ X \to \mathbb{R}^d$$

на тех множествах уровня, на которых мы хотим определить поверхностные меры. Напомним, что условные меры вообще не чувствительны к этому изменению, они существуют даже для отображений со значениями в очень общих бесконечномерных пространствах.

Теперь необходимо иметь d векторных полей $v_1, \dots, v_d$, вдоль которых дифференцируема мера μ. Однако в многомерном случае разумно модифицировать наши условия на $\mathcal{F}$ следующим образом:

$$\varphi(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{F} \quad \forall\, f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$$

для всех функций $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ и

$$\partial_{v_i}(\varphi(f_1, \dots, f_n)) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}\varphi(f_1, \dots, f_n)\partial_{v_i} f_j.$$

Предположим, что $\psi(F) \in \mathfrak{D}_{v_i}$ для всех функций $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ и каждого $i = 1, \ldots, d$. Это дает возможность определить функции $\partial_{v_i} F_j$, как это сделано в одномерном случае в (F2).

Вместо $\partial_v F$ теперь возьмем определитель Δ_F матрицы Маллявэна

$$(\sigma_{ij})_{i,j\leqslant d}, \quad \sigma_{ij} := \partial_{v_i} F_j.$$

Пусть $M^{ij}(x) = (-1)^{i+j} m^{ji}$, где $m^{ji}(x)$ — минор матрицы Маллявэна, соответствующий элементу $\sigma_{ji}(x)$. Таким образом, M^{ij} — транспонированная матрица алгебраических дополнений элементов матрицы Маллявэна. Если матрица $(\sigma_{ij}(x))_{i,j\leqslant d}$ обратима, обратная матрица определяется формулой $(\gamma^{ij}(x))_{i,j\leqslant d}$. В этом случае $\gamma^{ij} = M^{ij}/\Delta_F$. Следовательно,

$$\sum_{k\leqslant d} M^{ij}(x)\sigma_{jk}(x) = \Delta_F(x)\delta_{ik}, \tag{1.6.1}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера. Действительно, это верно для обратимых матриц, но остается верным для любой матрицы в силу возможности приближения последней обратимыми матрицами.

В гауссовском случае, рассмотренном выше, возьмем $v_i = D_H F_i$, так что

$$\sigma_{ij} = (D_H F_i, D_H F_j)_H$$

и матрица $(\sigma_{ij})_{i,j\leqslant d}$ неотрицательно определена.

Вместо (F2) предположим, что $\Delta_F \geqslant 0$ и $\Delta_F \in L^1(\mu)$. Положим

$$\nu = \Delta_F \cdot \mu.$$

Пусть $U_r = \{x \in \mathbb{R}^d\colon\ |x| < r\}$ и $W_r = \{|F| < r\}$.

Предложение 1.6.1. (i) *Предположим, что $fM^{ij} \in \mathfrak{D}_{v_j}$ для всех индексов $i, j \leqslant d$ и всех функций $f \in \mathcal{F}$, обращающихся в нуль вне множества W_r. Тогда мера $\nu \circ F^{-1}$ абсолютно непрерывна на U_r и имеет плотность ϱ класса $BV(U_r)$. В частности, $\varrho \in L^{d/(d-1)}(U_r)$.*

Если $\Delta_F(x) \neq 0$ μ-п.в. на W_r, то $\varrho \in W^{1,1}(U_r)$.

(ii) *Если, кроме того,*

$$u_i := \frac{I_{W_r}}{\Delta_F} \sum_{j \leqslant d} [\partial_{v_j} M^{ij} + M^{ij} \beta_{v_j}] \in L^s(\nu) \quad \text{для некоторого } s > d, \tag{1.6.2}$$

то эта плотность ϱ *принадлежит* $W^{p,1}(U_r)$ *с некоторым* $p > d$ *и имеет непрерывную версию.*

(iii) *Если* $s > 2d$, *то для всякой функции* $f \in \mathcal{F}$ *мера* $(f \cdot \nu) \circ F^{-1}$ *абсолютно непрерывна на* U_r *и обладает ограниченной непрерывной плотностью* ϱ_f *такой, что*

$$\sup_{y \in U_r} |\varrho_f(y)| \leqslant C\Big(\|f\|_{L^{2d}(\nu)} + \sum_{j=1}^{d} \|\partial_{v_j} f\|_{L^{2d}(\nu)} \Big), \tag{1.6.3}$$

где C — *некоторое число, которое зависит только от* $d, s, r_0, \|u_i\|_{L^s(\nu)}$ *и* $\|I_{W_r} M^{ij}/\Delta_F\|_{L^s(\nu)}$, *где* $r \leqslant r_0$ *и* $r_0 > 0$ *фиксировано.*

Доказательство. (i) Пусть $\psi \in C_0^\infty(U_r)$. Из (1.6.1) имеем

$$\int_{U_r} \partial_{y_i} \psi(y) \nu \circ F^{-1}(dy) = \int_{W_r} \partial_{y_i} \psi(F(x)) \Delta_F(x) \mu(dx) =$$

$$= \int_X \sum_{j,k \leqslant d} M^{ij}(x) \sigma_{jk}(x) [\partial_{y_k} \psi(F(x))] \mu(dx) =$$

$$= \int_X \sum_{j \leqslant d} \partial_{v_j} (\psi \circ F)(x) M^{ij}(x) \mu(dx) =$$

$$= -\sum_{j \leqslant d} \int_X (\psi \circ F)(x) M^{ij}(x) d_{v_j} \mu(dx) - \sum_{j \leqslant d} \int_X (\psi \circ F)(x) \partial_{v_j} M^{ij}(x) \mu(dx) =$$

$$= -\sum_{j \leqslant d} \int_X (\psi \circ F)(x) [\partial_{v_j} M^{ij}(x) + M^{ij}(x) \beta_{v_j}(x)] \mu(dx).$$

Правую часть можно записать как интеграл от функции ψ по ограниченной мере на U_r, следовательно, мера $\nu \circ F^{-1}$ на U_r имеет плотность ϱ из класса $BV(U_r)$. По теореме вложения Соболева $\varrho \in L^{d/(d-1)}(U_r)$, см., например, [40, глава 2] или [85].

В случае, если мера ν эквивалентна μ, правую часть можно записать как интеграл от $\psi g_i \varrho$, где g_i — условное математическое ожидание

ν-интегрируемой функции $-u_i$ относительно меры ν и σ-поля, порожденного функцией F. Поэтому $\varrho \in W^{1,1}(U_r)$.

(ii) Заметим, что

$$\partial_{y_i}\varrho = g_i\varrho.$$

По неравенству Йенсена для условных математических ожиданий включение $|u_i|^s \in L^1(\nu)$ дает включение $|g_i|^s\varrho \in L^1(U_r)$.

Теперь покажем, что $\partial_{y_i}\varrho$ лучше интегрируема в предположениях последнего утверждения. Предположим, что $\varrho \in L^p(U_r)$ для некоторого $p \geqslant 1$. По неравенству Гёльдера имеем $g_i\varrho \in L^{sp/(p+s)}(U_r)$. Следовательно, $\varrho \in W^{p_1,1}(U_r)$ с $p_1 = sp/(p+s)$, что в случае $p_1 < d$ по теореме вложения Соболева дает $\varrho \in L^{p_2}(U_r)$ с

$$p_2 = \frac{dp_1}{d-p_1} = p\frac{ds}{ds-p(s-d)} \geqslant p\frac{ds}{ds-s+d} = \lambda p, \quad \lambda = \frac{ds}{ds-s+d} > 1.$$

Если $p_1 = d$, то $\varrho \in L^q(U_r)$ для любого $q < \infty$, следовательно, получаем $\partial_{y_i}\varrho \in W^{s-\varepsilon,1}(U_r)$ для всякого $\varepsilon > 0$. Поэтому за конечное число шагов приходим к ситуации, где $\partial_{y_i}\varrho \in W^{p,1}(U_r)$ с некоторым $p > d$. Соболевское вложение обеспечивает непрерывность плотности.

(iii) Из рассуждений выше следует, что если заменить ν мерой $f\cdot\nu$, то обобщенная частная производная меры $(f\cdot\nu)\circ F^{-1}$ по переменной y_i будет равна $\widehat{g}_i\varrho$, где $\widehat{g}_i$ — условное математическое ожидание функции

$$\widehat{u}_i = fu_i + \frac{I_{W_r}}{\Delta_F}\sum_{j\leqslant d} M^{ij}\partial_{v_j}f$$

относительно меры ν и σ-алгебры, порожденной отображением F. Таким образом, имеем

$$\partial_{y_i}\varrho_f = \widehat{g}_i\varrho.$$

Однако теперь мы уже знаем, что ϱ — ограниченная непрерывная функция на множестве U_r, а из предыдущего шага следует, что ее супремум на U_r оценивается константой, которая зависит от d, s, r и $L^s(\nu)$-нормы функции u_i. Следовательно, выбирая $\varepsilon > 0$ так, что

$$s = 2d(d+\varepsilon)/(d-\varepsilon),$$

и полагая $t = d + \varepsilon > d$, приходим к выводу, что $L^t(U_r)$-норма функции $\partial_{y_i}\varrho_f$ оценивается константой, зависящей от указанных величин и $L^t(\nu)$-нормы функции $\widehat{u}_i$. По неравенству Гёльдера

$$\|uw\|_t \leqslant \|u\|_s \|w\|_{st/(s-t)}, \quad \frac{st}{s-t} = 2d.$$

Применим это неравенство с $u = u_i$ и $w = f$, а также с $u = I_{W_r} M^{ij}/\Delta_F$ и $w = \partial_{v_j} f$. Это дает оценку $W^{t,1}(U_r)$-нормы функции ϱ_f через величину

$$\|f\|_{L^{2d}(\nu)} + \sum_{j=1}^{d} \|\partial_{v_j} f\|_{L^{2d}(\nu)},$$

умноженную на константу, что обеспечивает искомую оценку с помощью теоремы вложения Соболева. $\square$

Теперь будет дано конструктивное достаточное условие непрерывности плотностей многомерных распределений, связанных с мерой μ, а не с мерой ν. Это требует, однако, вторых производных отображения F. В следующем утверждении мы предполагаем, что производные $\partial_{v_k}\partial_{v_j} F_i$ можно определить таким же образом, как $\partial_{v_j} F_i$ выше, используя то, что $\psi(\partial_{v_j} F) \in \mathfrak{D}_{v_k}$ для гладких функций на $\mathbb{R}^d$ с компактным носителем.

Предложение 1.6.2. (i) *Предположим, что для каждого $r \in \mathbb{N}$ существует $\varepsilon_r > 0$ такое, что функции*

$$\exp\Bigl(\varepsilon_r \Bigl|\sum_k (\gamma^{ik}\beta_{v_k} + \partial_{v_k}\gamma^{ik})\Bigr|\Bigr) \tag{1.6.4}$$

μ-интегрируемы на множестве $\{|F| < r\}$. Тогда мера $\mu \circ F^{-1}$ имеет непрерывную плотность без нулей.

(ii) *Предположим, что для всякого $r \in \mathbb{N}$ существует $p_r > d$ такое, что функции*

$$\Bigl|\sum_k \gamma^{ik}\beta_{v_k}\Bigr|^{p_r}, \ \Bigl|\sum_k \partial_{v_k}\gamma^{ik}\Bigr|^{p_r}$$

μ-интегрируемы на множестве $\{|F| < r\}$. Тогда мера $\mu \circ F^{-1}$ имеет непрерывную плотность.

Доказательство. (i) Воспользуемся следующим результатом (см. [44] или [40, предложение 6.4.1]): если неотрицательная функция ϱ на шаре U в $\mathbb{R}^d$ принадлежит классу Соболева $W^{1,1}(U)$ и существует такое число $\varepsilon > 0$, что $\varrho \exp(\varepsilon|\nabla\varrho|/\varrho) \in L^1(U)$, где мы полагаем $\nabla\varrho/\varrho = 0$ на множестве $\{\varrho = 0\}$, то ϱ имеет непрерывную версию, которая является или тождественно нулевой, или положительной.

Зафиксируем $r \in \mathbb{N}$ и пусть U — открытый шар радиуса r в $\mathbb{R}^d$ с центром в нуле. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(U)$. Имеем

$$\int_U \partial_{y_i}\varphi(y)\mu\circ F^{-1}(dy) = \int_X \partial_{y_i}\varphi(F(x))\mu(dx) = \\ = \int_X \sum_{k,j\leqslant d} \gamma^{ik}\sigma_{kj}\partial_{y_j}\varphi(F(x))\mu(dx),$$

что равно

$$\int_X \sum_{k\leqslant d}\gamma^{ik}\partial_{v_k}(\varphi\circ F)(x)\mu(dx) = \\ = -\int_{|F|<r} \sum_{k\leqslant d} \varphi(F(x))[\partial_{v_k}\gamma^{ik} + \gamma^{ik}\beta_{v_k}]\mu(dx) = \\ = -\int_U \varphi(y)\eta_i(y)\mu\circ F^{-1}(dy),$$

где η_i — условное математическое ожидание функции

$$\sum_k [\partial_{v_k}\gamma^{ik} + \gamma^{ik}\beta_{v_k}] I_{\{|F|<r\}}$$

относительно меры μ и σ-алгебры, порожденной отображением F. Из этого следует, что обобщенная производная меры $\mu\circ F^{-1}$ на U по переменной y_i есть мера $\eta_i\cdot(\mu\circ F^{-1}) \ll \mu\circ F^{-1}$. Следовательно, μ на U имеет плотность $\varrho \in W^{1,1}(U)$ и $\partial_{y_i}\varrho/\varrho = \eta_i$. По нашему условию (1.6.4) и неравенству Йенсена для условных математических ожиданий приходим к условию, указанному выше.

(ii) Если дано, что μ имеет локально ограниченную плотность ϱ, то предыдущее соотношение можно записать как

$$\int_U \partial_{y_i}\varphi(y)\varrho(y)dy = -\int_U \varphi(y)\eta_i(y)\varrho(y)dy,$$

что означает, что $\partial_{y_i}\varrho = \eta_i\varrho$ на U в смысле обобщенных функций. Снова получаем, что $\varrho \in W^{1,1}(U)$, но теперь делаем вывод, что $\partial_{y_i}\varrho \in L^{p_r}(U)$ посредством такой же итерации теоремы вложения Соболева, как и в предыдущем утверждении. Следовательно, по теореме вложения Соболева ϱ имеет непрерывную плотность (теперь не утверждается, что она положительна). $\square$

Чтобы обеспечить (1.6.4) в терминах матрицы Маллявэна, заметим, что

$$\partial_{v_k}\gamma^{ik} = \partial_{v_k}(M^{ik}\Delta_F^{-1}) = (\partial_{v_k}M^{ik})\Delta_F^{-1} - (\partial_{v_k}\Delta_F)\Delta_F^{-2}.$$

Первый член — сумма функций вида $\Delta_F^{-1}\partial_{v_k}\sigma^{ij}w$, где w — произведение $d-2$ матричных элементов матрицы Маллявэна. Второй член — сумма функций вида $\Delta_F^{-2}\partial_{v_k}\sigma^{ij}w$ с функцией w того же вида, как и выше. Следовательно, достаточно иметь μ-интегрируемость функций

$$\exp\Big(\frac{\varepsilon_r}{\Delta_F^2}|\partial_{v_k}\partial_{v_j}F_i|\,|\partial_{v_l}F_m|^{d-1}\Big),\ \exp\Big(\frac{\varepsilon_r}{\Delta_F}|\beta_{v_k}|\,|\partial_{v_l}F_m|^{d-1}\Big)$$

на множестве $\{|F| < r\}$. Например, это выполнено, если для некоторого $\delta_r > 0$ экспоненты выражений

$$\delta_r\Delta_F^{-4}, \quad \delta_r|\partial_{v_k}\partial_{v_j}F_i|^4, \quad \delta_r|\partial_{v_l}F_m|^{4d-4}, \quad \delta_r\beta_{v_k}^2$$

интегрируемы.

Определение 1.6.3. *Поверхностная мера σ^y определятся как такая радоновская мера, что*

$$\int_X f(x)\sigma^y(dx) = \varrho_f(y) \quad \forall\, f \in \mathcal{F}.$$

Это определение означает, что

$$\int_X f(x)\sigma^y(dx) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{|U_r|}\int_{\{|F-y|<r\}} f(x)\nu(dx),$$

где $|U_r|$ — обычный объем шара U_r. Существование предела в правой части — единственное условие, выполнение которого требуется в определении, причем это условие выполнено в ситуации предложения 1.6.1.

Как и в случае поверхности коразмерности 1, требуется показать, что это соотношение задает радоновскую меру.

Нам понадобится аналог леммы 1.4.1.

Лемма 1.6.4. *Предположим, что выполнены условия случая* (iii) *из предложения* 1.6.1 *и*

$$\|f\|_{L^{2d}(\mu)} + \sum_{j=1}^{d} \|\partial_{v_j} f\|_{L^{2d}(\mu)} \leqslant C_0 \|f\|_{\mathcal{F}} \quad \forall\, f \in \mathcal{F}. \tag{1.6.5}$$

Тогда для всякого открытого множества $W \subset X$ и всякого $r > 0$ имеем

$$\nu(W \cap \{|F - y| < r\}) \leqslant C_0 C_1 r^d C_{\mathcal{F}}(W), \tag{1.6.6}$$

где C_1 зависит от тех же величин, что и в утверждении (iii) *предложения* 1.6.1.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{F}$, $f \geqslant 0$ и $f \geqslant 1$ μ-п.в. на W. Тогда $f \geqslant 1$ ν-п.в. на W, следовательно, как в доказательстве леммы 1.4.1, получаем

$$\nu(W \cap \{|F - y| < r\}) \leqslant r^d \sup_{z\colon\, |z-y|<r} |\varrho_f(z)|,$$

где ϱ_f — плотность меры $(f \cdot \nu) \circ F^{-1}$. Согласно утверждению (iii) предложения 1.6.1 можно оценить максимум непрерывной версии функции ϱ_f на W_r через величину

$$\|f\|_{L^{2d}(\nu)} + \sum_{j=1}^{d} \|\partial_{v_j} f\|_{L^{2d}(\nu)},$$

умноженную на некоторую константу, зависящую от величин, указанных в том же утверждении. □

Теорема 1.6.5. *В ситуации предложения* 1.6.1(iii) *справедливо заключение теоремы* 1.2.7.

Заключение теоремы 1.4.2 *справедливо, если выполнено условие предыдущей леммы, причем рассматриваются соответствующие квазинепрерывные версии отображений F_i.*

Доказательство по-существу такое же, однако необходимо заметить, что предположения теперь более сильные.

Как и в случае $d = 1$, можно наделить $\mathcal{F}$ нормой, задаваемой левой частью (1.6.5). Однако это не всегда удобно, так как эта норма зависит от F и v. В гауссовском случае может быть предпочтительнее использовать некоторую соболевскую норму на $\mathcal{F}$. Например, если взять $v_i = D_H F_i$, как в примере 1.5.2, то $\partial_{v_i} f = (D_H f, D_H F_i)_H$, причем $\partial_{v_i} f \in L^{2d}(\nu)$ при условии, что

$$f \in W^{4d,1}(\mu),\ F_i \in W^{8d,1}(\mu),\ \Delta_F^{-1} \in L^{8d-4}(\mu).$$

Для мер, дифференцируемых по Фомину, описанная конструкция применима при более широких предположениях, чем в [31].

Замечание 1.6.6. Так как $\sigma^y = \varrho_1(y)\nu^y$, то каждая ν-интегрируемая $\mathcal{B}$-измеримая функция g является σ^y-интегрируемой для $\nu \circ F^{-1}$-почти каждого y. Это дает возможность определить поверхностные меры для меры $g \cdot \nu$.

Следует заметить, что представленная конструкция главным образом ориентирована на бесконечномерные пространства, где типичные меры не обладают свойством удвоения и отличаются также в других отношениях от мер, обычных на так называемых «метрических пространствах с мерами». Тем не менее было бы интересно сравнить подходящие меры Хаусдорфа на метрических пространствах с мерами и поверхностные меры, описанные выше; меры, дифференцируемые вдоль векторных полей, и все другие объекты, рассматриваемые выше (дифференцирования, градиенты, классы Соболева, и т. д.), имеют смысл на таких пространствах (см., например, [50], [55], [65], [75] и [76]). В частности, если дано дифференцирование вида $f \mapsto \Gamma(f, g)$, определяемое фиксированной функцией из пространства Дирихле (см. [75]), построенного на вероятностном пространстве (X, μ), наделенном структурой “carré du champ” $\Gamma(f, g)$ (билинейной формой), такой, что

$$2\Gamma(f, g) = L(fg) - fLg - gLf,$$

где L — симметрический генератор Маркова такой, что

$$\mathrm{E}\Gamma(f, g) = -\mathrm{E} f L g,$$

то видим, что Lg — в точности дивергенция рассматриваемого поля (похожая схема рассматривается в [80]).

Глава 2

Абсолютная непрерывность распределений гладких функций на бесконечномерных пространствах с мерами

В этой главе исследуются условия абсолютной непрерывности распределения гладкой функции f на бесконечномерном пространстве X, наделенном мерой μ. Будем предполагать, что X — локально выпуклое пространство и μ — вероятностная мера Радона на X. Ряд условий такого рода известен для многих конкретных классов функций и мер, см. [5], [7], [8], [37], [38], [40], [39], [46], [77]. Полезное достаточное условие известно для одномерного случая, где справедливо следующее простое утверждение: если μ — абсолютно непрерывная мера и f — произвольная функция, то, обозначив через D множество всех точек, где f имеет ненулевую производную, получаем, что сужение меры μ на D под действием функции f переходит в абсолютно непрерывную меру, т. е. мера $\mu|_D \circ f^{-1}$ — абсолютно непрерывна (известно, что в рассматриваемом случае множество D всегда измеримо по Лебегу и f измерима на множестве D). Полученные в этой главе результаты дают ответ на вопрос, поставленный С.Б. Куксиным. Они используются в недавних работах [62], [63].

2.1 Вспомогательные результаты

Всюду далее образ меры μ при отображении f обозначается (как и ранее) через $\mu\circ f^{-1}$ и определяется формулой $\mu\circ f^{-1}(B) = \mu(f^{-1}(B))$. Известно, что множество всех точек дифференцируемости произвольной функции f всегда измеримо по Лебегу и f измерима на нем (см. теорему Данжуа – Юнг – Сакса в [42, § 5.8(v)]).

Упомянутый одномерный факт допускает следующее очевидное бесконечномерное обобщение.

Предположим, что $h \neq 0$ — вектор из X такой, что мера μ допускает абсолютно непрерывные условные меры μ^y на прямых $y + \mathbb{R}h$, где $y \in Y$ и Y — замкнутая гиперплоскость, дополняющая $\mathbb{R}h$. Это означает, что

$$\mu(B) = \int_Y \mu^y(B)\,\mu_Y(dy),$$

где μ_Y — естественная проекция меры μ на множество Y. Тогда для любой измеримой функции f образ сужения меры μ на множество D, где частная производная $\partial_h f$ существует и не обращается в нуль, при отображении f абсолютно непрерывен. Частную производную естественно определить как

$$\partial_h f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}.$$

Существование абсолютно непрерывных условных мер равносильно непрерывности меры μ вдоль вектора h, т. е. непрерывности функций вещественных $t \mapsto \mu(B+th)$ для всех борелевских множеств B, которая, в свою очередь, равносильна равенству $\lim\limits_{t\to 0} \|\mu - \mu_{th}\| = 0$, где $\|\cdot\|$ — вариационная норма и $\mu_h(B) = \mu(B-h)$.

Как следствие получаем, что мера $\mu\circ f^{-1}$ абсолютно непрерывна при условии, что f — такая измеримая функция, что существует счетный набор векторов h_n, вдоль которых μ непрерывна, причем для почти всякой точки x найдется n такое, что $\partial_{h_n} f$ существует в точке x и не обращается в нуль.

Имеется также многомерный аналог этого результата для отображений

$$f = (f_1, \ldots, f_d)$$

со значениями в $\mathbb{R}^d$: при тех же предположениях относительно меры μ достаточно, чтобы μ-почти всюду существовали векторы $h_{i_1}, \ldots, h_{i_d}$ такие, что частные производные $\partial_{h_i} f_j$ существуют и матрица $(\partial_{h_i} f_j)_{i,j\leqslant d}$ не вырождена. По-видимому, нельзя надеяться на эффективные обобщения данных результатов. Однако может представлять интерес получение эффективно проверяемых условий, которые гарантируют, что выполнены сформулированные предположения. В этом случае можно довольствоваться рассмотрением менее общих функций. В одномерном случае может быть полезно следующее простое наблюдение, которое и лежит в основе общей теоремы ниже.

Лемма 2.1.1. *Если $f \in C^k(\mathbb{R})$, то множество*

$$\{x\colon\ f'(x) = 0\} \cap \{x\colon\ f^{(k)}(x) \neq 0\}$$

не содержит своих предельных точек и не более чем счетно. Значит, образ сужения меры Лебега на множество всех точек, где какие-либо из производных функции f не обращаются в нуль, при отображении f абсолютно непрерывен. В частности, если функция f бесконечно дифференцируема и

$$E = \{x\colon \text{ существует } k \text{ такое, что } f^{(k)}(x) \neq 0\},$$

то образ ограничения меры Лебега на множество E при отображении f абсолютно непрерывен.

Доказательство. Так как мы имеем абсолютную непрерывность образа при отображении f ограничения меры Лебега на множество, где f' не обращается в нуль, то достаточно доказать только первое утверждение. Это утверждение, однако, очевидно: если $f'(x) = 0$ и найдется такая нетривиальная последовательность $x_n \to x$, что $f'(x_n) = 0$ и $f^{(k)}(x_n) \neq 0$, то найдется другая нетривиальная последовательность $z_n \to x$, такая, что

$f''(z_n) = 0$, следовательно, $f''(x) = 0$. Продолжая таким образом, получаем, что $f^{(k)}(x) = 0$, так что x не принадлежит указанному множеству. Так как множество $\{x\colon\ f^{(k)}(x) \neq 0\}$ открыто и состоит из конечной или счетной совокупности интервалов, то получаем, что пересечение замкнутого множества $\{x\colon\ f'(x) = 0\}$ с любым из этих интервалов не более чем счетно. $\square$

2.2 Основные результаты

Перейдем к основным результатам этой главы, дающим обобщения упомянутых выше фактов на бесконечномерный случай. Фактически новшеством является рассмотренный выше одномерный случай. Вывод из него общего утверждения основан на стандартной технике условных мер или методе расслоений (см. [7], [8]).

Теорема 2.2.1. *Пусть μ — радоновская вероятностная мера на локально выпуклом пространстве X, непрерывная вдоль векторов из счетного множества S, и пусть f — μ-измеримая функция на X такая, что все частные производные $\partial_{h_1} \cdots \partial_{h_n} f$ существуют всюду для всех $h_1, \ldots, h_n$ из линейной оболочки множества S. Пусть*

$$E = \{x\colon\ \exists\, h_1, \ldots, h_n \in S \text{ с } \partial_{h_1} \cdots \partial_{h_n} f(x) \neq 0\}.$$

Тогда мера $\mu|_E \circ f^{-1}$ абсолютно непрерывна.

Доказательство. Заметим, что каждый дифференциальный оператор вида $\partial_{h_1} \cdots \partial_{h_n}$ может быть записан как линейная комбинация дифференциальных операторов вида ∂_v^k, где $k \leqslant n$ и v есть линейная комбинация векторов $h_1, \ldots, h_n$ с рациональными коэффициентами. Добавив к множеству S все возможные линейные комбинации его элементов с рациональными коэффициентами, мы можем считать с самого начала, что S замкнуто относительно взятия таких линейных комбинаций. Поэтому достаточно доказать наше утверждение для множества

$$E_0 = \{x\colon\ \exists\, h \in S,\ n \in \mathbb{N} \text{ и } \partial_h^n f(x) \neq 0\}.$$

Теперь можно применить лемму. Действительно, если $Z \subset \mathbb{R}$ есть множество лебеговой меры нуль, то для проверки того, что $f^{-1}(Z)$ имеет μ-меру нуль, достаточно показать, что пересечение множества $f^{-1}(Z)$ с каждым из множеств $E_{v,n} = \{x\colon\ \partial_h^n f(x) \neq 0\}$, где $v \in S$ и $n \in \mathbb{N}$, имеет меру нуль. Таким образом, остается заметить, что для каждого такого y, что условная мера μ^y абсолютно непрерывна, пересечение $E_{v,n} \cap (y + \mathbb{R}v)$ имеет лебегову меру нуль на прямой $y + \mathbb{R}v$. □

Напомним, что классы Соболева по гауссовским мерам введены в главе 1.

Класс $W^{p,\infty}(\mu)$ определяется как пересечение всех классов $W^{p,k}(\mu)$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $W^{\infty}(\mu) = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} W^{p,\infty}(\mu)$.

Теперь введем локальные соболевские классы $W^{p,k}_{loc}(\mu)$ и их пересечения. Говорят, что f принадлежит $W^{p,k}_{loc}(\mu)$, если существует такая последовательность функций $\chi_n \in W^{\infty}(\mu)$, что множества $\{\chi_n = 1\}$ возрастают и их объединение есть множество полной меры. Последовательность $\{\chi_n\}$ называют локализующей.

Замечание 2.2.2. Если f — борелевская функция на секвенциально полном пространстве X, ограниченная на компактных множествах и имеющая производные Фреше $D^k_{_H} f$ вдоль H всякого порядка k со значениями в пространстве $\mathcal{H}_k$ k-линейных функций Гильберта – Шмидта, причем соответствующие нормы Гильберта – Шмидта производных также ограничены на компактах, то $f \in W^{\infty}_{loc}(\mu)$. Действительно, найдется локализующая последовательность $\chi_h \in W^{\infty}(\mu)$ такая, что $0 \leqslant \chi_n \leqslant 1$ и $\chi_n = 0$ вне некоторого абсолютно выпуклого компакта K_n (их существование показано ниже). Тогда $\chi_n f \in W^{\infty}(\mu)$, что следует из известных описаний соболевских классов (см. [40, гл. 8] и [39, гл. 5]). Поясним, как построить χ_n (подробности можно найти в [39, предложение 5.4.12 и замечание 5.4.13]). Поскольку X секвенциально полно, то существуют такие метризуемые абсолютно выпуклые компакты K_n, что их объединение имеет полную меру (по теореме Цирельсона), см. [39, теорема 3.4.1]; в случае произвольного X найдутся возрастающие метризуемые компактные множества с объединением полной меры, а в случае секвенциально полного пространства абсолютно выпуклая замкнутая оболочка метризуемого компактного множества компактна и метризуема. Используя функционал Минковского множества K_n, легко построить функцию $f_n \in W^{p,1}(\mu)$ такую, что $0 \leqslant f_n \leqslant 1$, f липшицева вдоль H, $f_n = 1$ на множестве K_n, $f_n = 0$ вне множества $2K_n$. Затем можно воспользоваться полугруппой Орнштейна – Уленбека для сглаживания f_n и получения необходимой функции.

Следствие 2.2.3. *Пусть μ — центрированная радоновская гауссовская мера на X, $f \in W^{p,\infty}(\mu)$ и*

$$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x\colon\ D_H^n f(x) \neq 0\}.$$

Тогда мера $(\mu|_E) \circ f^{-1}$ абсолютно непрерывна. То же самое верно в случае класса $f \in W^{p,\infty}_{loc}(\mu)$.

Следствие 2.2.4. *Пусть μ — центрированная радоновская гауссовская мера на X и f — такая борелевская функция на X, что для некоторого ортонормированного базиса $\{e_n\}$ в H функции $t \mapsto f(x + te_n)$ являются вещественно-аналитическими для почти всех x. Тогда функция f либо имеет абсолютно непрерывное распределение, либо совпадает μ-почти всюду с постоянной.*

Доказательство. Предположим, что мера $\mu \circ f^{-1}$ не является абсолютно непрерывной. Тогда получаем, что пересечение Z множеств

$$E_n = \{x\colon\ \partial_{e_n} f(x) = 0\}$$

имеет положительную меру. Если мы покажем, что $\mu(Z) = 1$, то из аналитичности функции f вдоль e_n мы получим, что для каждого фиксированного n функция $t \mapsto f(x + te_n)$ постоянна для почти всех x. По закону 0-1 это даст, что f почти всюду равна постоянной (см. [39, следствие 3.2.11]). Итак, остается показать, что $\mu(Z) = 1$. Функция

$$t \mapsto \partial_{e_n} f(x + te_n)$$

является вещественно-аналитической для всякого такого x, что функция

$$t \mapsto f(x + te_n)$$

вещественно-аналитична. Следовательно, множество Z содержит всякую прямую $x + \mathbb{R}e_n$, которая пересекает Z по несчетному множеству. Поэтому множество Z совпадает с $Z + \mathbb{R}e_n$ с точностью до множества меры нуль для каждого фиксированного n. В результате, применяя это для $n = 1, 2, \ldots$, получаем, что Z совпадает с точностью до множества нулевой меры с $Z + L$, где L — линейная оболочка множества $\{e_n\}$. Снова пользуясь законом 0-1, получаем, что $\mu(Z) = 1$, что завершает наше доказательство. □

Заметим, что если H плотно в X и функция f непрерывна и равна константе μ-п. в., то она постоянна. Это следует из известного факта, что мера μ положительна на всех непустых открытых множествах, если H плотно.

Приведем естественный многомерный аналог предыдущего следствия. Напомним, что если $f = (f_1, \ldots, f_d)$, где $f_i \in W^{1,1}_{loc}(\mu)$, то матрица с элементами $(D_{\scriptscriptstyle H} f_i, D_{\scriptscriptstyle H} f_j)_H$ называется матрицей Маллявэна. Ее невырожденность является достаточным условием для абсолютной непрерывности меры $\mu \circ f^{-1}$ на $\mathbb{R}^d$ (см. [40, гл. 9]).

Следствие 2.2.5. *Пусть $f = (f_1, \ldots, f_d)$, где каждая компонента f_i удовлетворяет тем же условиям, что и f в предыдущем следствии, причем $f \in W^{1,1}_{loc}(\mu)$. Тогда либо мера $\mu \circ f^{-1}$ абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}^d$, либо матрица Маллявэна отображения f вырождена почти всюду.*

Доказательство. Определитель матрицы Маллявэна отображения f представляет собой борелевскую функцию, удовлетворяющую тем же предположениям, что и f в предыдущем следствии. Следовательно, множество ее нулей имеет меру либо 0, либо 1. □

Для функций, аналитических вдоль всех e_n, необходимое и достаточное условие принадлежности к классу Соболева $W^{1,1}(\mu)$ состоит в μ-

интегрируемости самой функции и H-нормы ее формального градиента, представляющего собой вектор в H с компонентами $\partial_{e_n} f(x)$ (полученными обычным дифференцированием по направлениям). Аналогично можно сформулировать и условие принадлежности к локальному классу $W^{1,1}_{loc}(\mu)$. Однако на самом деле приведенное следствие остается в силе и без предположения о локальной соболевости функций f_i. Для этого достаточно взять условные меры на d-мерных подпространствах, параллельных фиксированному пространству $E_{e_{n_1},\ldots,e_{n_d}}$, порожденному векторами $e_{n_1},\ldots,e_{n_d}$. Если множество точек, где определитель матрицы Маллявэна отличен от нуля, имеет меру 1, то это множество покрывается счетным набором множеств $M_{e_{n_1},\ldots,e_{n_d}}$, на которых сюръективно отображение из $E_{e_{n_1},\ldots,e_{n_d}}$ в $\mathbb{R}^d$, построенное по частным производным $\partial_{e_{n_j}} f_i$. С помощью условных мер утверждение сводится к случаю отображений d-мерного пространства.

Пусть μ — радоновская вероятностная мера на локально выпуклом пространстве X, бесконечно дифференцируемая вдоль векторов из плотно вложенного сепарабельного гильбертова пространства H. Можно ввести соболевские пространства относительно дифференцируемых мер (см. книгу [40]). Те же соображения дают следующий результат.

Следствие 2.2.6. *Пусть $f \in W^{\infty}(\mu)$ и*

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x\colon\ D^n_H f(x) \neq 0\}.$$

Тогда мера $\mu|_E \circ f^{-1}$ абсолютно непрерывна. То же верно для локального класса Соболева $W^{\infty}_{loc}(\mu)$.

Глава 3

Измеримая зависимость условных мер от параметра

В этой главе получены широкие достаточные условия для существования собственных условных вероятностей, измеримо зависящих от параметра в случае параметрических семейств мер и отображений.

3.1 Постановка задачи

Здесь мы немного уточним сказанное в главе 1 про условные меры применительно к суслинским пространствам (это ограничение привносит некоторую специфику). Известно, что для каждой вероятностной меры μ на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(X)$ суслинского пространства X (хаусдорфова пространства, которое является непрерывным образом полного сепарабельного метрического пространства, см., например, [42], [64]) и каждого борелевского отображения f из X в суслинское пространство Y множества уровня $f^{-1}(y)$ могут быть наделены борелевскими вероятностными мерами μ^y, называемыми условными мерами, порожденными отображением f, обладающими следующими свойствами: пусть $\mu \circ f^{-1}$ есть образ меры μ под действием отображения f, определяемый равенством

$$\mu \circ f^{-1}(E) = \mu(f^{-1}(E)),\ E \in \mathcal{B}(Y);$$

тогда

1) мера μ^y сосредоточена на множестве $f^{-1}(y)$ для каждого $y \in f(X)$, т. е.

$$\mu^y(f^{-1}(y)) = 1,\ y \in f(X),$$

2) функции

$$y \mapsto \mu^y(B), \quad B \in \mathcal{B}(X),$$

измеримы относительно σ-алгебры $\mathcal{S}(X)$, порожденной классом суслинских множеств в X,

3) для всех борелевских множеств $B \subset X$ и $E \subset Y$ верно следующее равенство:

$$\mu(B \cap f^{-1}(E)) = \int_E \mu^y(B)\, \mu \circ f^{-1}(dy).$$

Условные меры с такими свойствами называют регулярными условными вероятностями. Различные аспекты теории условных мер обсуждаются в [42], [40], [30], [60], [61], [70] и [82], где можно найти дополнительные ссылки.

Равенство в 3) означает, что для каждой борелевской функции φ на пространстве X верны равенства

$$\int_{f^{-1}(E)} \varphi\, d\mu = \int_E \int_X \varphi(x)\, \mu^y(dx)\, \mu \circ f^{-1}(dy) = \\ = \int_{f^{-1}(E)} \int_X \varphi(x)\, \mu^{f(u)}(dx)\, \mu(du).$$

Следовательно, в качестве условного математического ожидания данной функции φ относительно σ-алгебры $\mathcal{B}^f$, порожденной f, можно взять функцию

$$E(\varphi|\mathcal{B}^f)(u) = \int_X \varphi(x)\, \mu^{f(u)}(dx).$$

Более того, условные меры определены однозначно с точностью до переопределения для точек y из множества меры нуль относительно индуцированной меры $\mu \circ f^{-1}$.

Стоит отметить, что условия 1) и 2) могут быть модифицированы следующим образом: измеримость по Борелю всех функций в 2) может быть получена ценой замены 1) более слабым условием, что оно выполнено для $\mu\circ f^{-1}$-почти всех y. Известно, что в общем случае невозможно получить измеримость по Борелю функций в 2), требуя, чтобы 1) было выполнено для каждого y; контрпримеры существуют даже для случая, когда X является борелевским подмножеством отрезка $[0,1]$ и f — бесконечно дифференцируемая функция (см. [36], [42, с. 430]). В случае польских пространств необходимое (но не достаточное) условие для того, чтобы условие 2) можно было усилить до измеримости по Борелю при сохранении 1), состоит в том, что $f(X)$ — борелевское множество. Необходимое и достаточное условие для этого заключается в существовании отображения $F\colon X\to X$, измеримого относительно пары σ-алгебр $\mathcal{B}^f$ и $\mathcal{B}(X)$ и удовлетворяющего уравнению $f(F(x))=f(x)$. См. также [71] о различных сложностях с измеримостью, связанных с собственными условными мерами.

Теперь предположим, что мера μ и отображение f измеримо зависят от параметра α из некоторого другого суслинского пространства Z. Можно ли выбрать условные меры таким образом, что они будут измеримо зависеть от этого параметра?

Этот вопрос может быть интересен для приложений, в частности, в параметрической статистике и в оптимальной транспортировке, где естественным образом возникают условные меры для разных мер и отображений (см., например, [68], [3] и [84]). Ниже доказано, что ответ положителен для подходящего понятия измеримости. Стоит заметить, что регулярные условные математические ожидания, зависящие от параметра, изучались в [12] , где рассматривалась другая задача в другой постановке (в частности, основные вероятностные меры были фиксированы).

Будем всюду далее предполагать, что X, Y, Z — вполне регулярные суслинские пространства. Через $C_b(X)$ обозначим пространство ограниченных непрерывных функций на X.

Пусть $\mathcal{P}(X)$ — пространство всех борелевских вероятностных мер на пространстве X. Рассмотрим это пространство со слабой топологией (порожденной двойственностью с $C_b(X)$) и с соответствующей борелевской структурой. Известно, что $\mathcal{P}(X)$ также является вполне регулярным суслинским пространством (см. [42, теорема 8.9.6]).

Отображение $m\colon (\Omega, \mathcal{E}) \to \mathcal{P}(X)$ из измеримого пространства$(\Omega, \mathcal{E})$ измеримо в точности тогда, когда все функции

$$\omega \mapsto \int_X \varphi(x)\, m(\omega)(dx), \quad \varphi \in C_b(X)$$

измеримы относительно $\mathcal{E}$. Это равносильно $\mathcal{E}$-измеримости всех функций

$$\omega \mapsto \int_X \varphi_n(x)\, m(\omega)(dx)$$

для фиксированной счетной совокупности функций $\varphi_n \in C_b(X)$, полученной взятием многочленов с рациональными коэффициентами от конечного числа элементов последовательности функций из $C_b(X)$, разделяющей точки множества X (такая последовательность существует при наших предположениях). Следует заметить, что из этой измеримости получаем (с помощью теоремы о монотонных классах), что все функции

$$\omega \mapsto m(\omega)(B), \text{ где } B \in \mathcal{B}(X),$$

$\mathcal{E}$-измеримы (на самом деле это эквивалентное условие). Действительно, класс ограниченных измеримых по Борелю функций ψ на X, для которых функция

$$\omega \mapsto \int_X \psi(x)\, m(\omega)(dx)$$

является $\mathcal{E}$-измеримой, замкнут относительно взятия равномерных пределов и пределов монотонно возрастающих равномерно ограниченных последовательностей. Тем самым этот класс совпадает с классом всех ограниченных борелевских функций при условии, что он содержит множество $C_b(X)$ (см. [42, теорема 6.7.7]).

3.2 Основной результат

Основной результат этой главы позволяет выбирать условные меры измеримым образом и состоит в следующем.

Теорема 3.2.1. *Предположим, что дано борелевское отображение*

$$f\colon\ (x,z)\mapsto f_z(x),\quad X\times Z\to Y.$$

Предположим также, что для каждого $z\in Z$ задана борелевская вероятностная мера μ_z на X такая, что отображение

$$z\mapsto\mu_z,\ Z\to\mathcal{P}(X)$$

измеримо по Борелю при условии, что пространство $\mathcal{P}(X)$ наделено слабой топологией. Тогда существуют такие собственные условные меры $\{\mu_z^y\}_{y\in Y}$ для всех пар (μ_z,f_z), что для каждого борелевского множества B в X функция

$$(y,z)\mapsto\mu_z^y(B)$$

на $Y\times Z$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{S}(Y\times Z)$, или, что равносильно, отображение

$$(y,z)\mapsto\mu_z^y,\quad Y\times Z\to\mathcal{P}(X)$$

измеримо, когда пространство $Y\times Z$ наделено σ-алгеброй $\mathcal{S}(Y\times Z)$ и $\mathcal{P}(X)$ наделено борелевской σ-алгеброй.

Доказательство. Введем меры

$$\sigma_z:=\mu_z\circ f_z^{-1}.$$

Для каждого $z\in Z$ рассмотрим возрастающую последовательность конечных алгебр $\mathcal{B}_{z,n}$, объединение которых порождает прообраз

$$\mathcal{B}_z:=f_z^{-1}(\mathcal{B}(Y))$$

всей борелевской σ-алгебры пространства Y при отображении f_z. Можно считать, что $\mathcal{B}_{z,n}$ порождена конечным разбиением множества X на непересекающиеся множества

$$A_{z,n,1}=f_z^{-1}(B_{n,1}),\ldots,A_{z,n,m_n}=f_z^{-1}(B_{n,m_n}),$$

где $B_{n,1}, \dots, B_{n,m_n}$ — конечное разбиение множества Y на непересекающиеся борелевские множества такие, что объединение всех этих множеств порождает борелевскую σ-алгебру множества Y. Например, если $Y = [0,1)$, можно взять множества $A_{z,n,i} = f_z^{-1}([i/n, (i+1)/n))$. В общем случае можно взять непрерывное инъективное отображение T из Y в компактное метрическое пространство $[0,1]^\infty$, покрыть множество $[0,1]^\infty$ конечным числом шаров радиуса $1/n$ и затем взять прообразы относительно отображения T полученного конечного разбиения.

Легко в явном виде найти условные меры для μ_z, соответствующие σ-алгебре $\mathcal{B}_{z,n}$:

$$\mu^y_{z,n}(A) = \sum_{i=1}^{m_n} \frac{\mu_z(A \cap A_{z,n,i})}{\mu_z(A_{z,n,i})} I_{B_{n,i}}(y),$$

где в случае $\mu_z(A_{z,n,i}) = 0$ полагаем $\mu_z(A \cap A_{z,n,i})/\mu_z(A_{z,n,i}) = 0$. Легко видеть, что это выражение совпадает с элементарным условным математическим ожиданием функции I_A относительно σ-алгебры $\mathcal{B}_{z,n}$ и меры μ_z. Аналогичным образом для каждой ограниченной измеримой по Борелю функции φ на X получаем, что условное математическое ожидание $E_z(\varphi|\mathcal{B}_{z,n})$ функции φ относительно σ-алгебры $\mathcal{B}_{z,n}$ и меры μ_z совпадает с интегралом

$$\int_X \varphi(x)\, \mu^y_{z,n}(dx).$$

По теореме о сходимости мартингалов функции $E_z(\varphi|\mathcal{B}_{z,n})$ сходятся σ_z-почти всюду и в пространстве $L^1(\sigma_z)$ к условному математическому ожиданию $E_z(\varphi|\mathcal{B}_z)$ функции φ относительно σ-алгебры $\mathcal{B}_z$ и меры μ_z.

С другой стороны, известно, что условные меры μ^y_z также могут быть использованы для построения тех же условных математических ожиданий. К сожалению, это не решает нашу проблему в силу того, что эти соотношения выполнены почти всюду и соответствующие множества меры нуль могут зависеть от φ (и, конечно, зависят от z). Следовательно, необходима эффективная процедура выбора наших условных мер (которые, в свою очередь, определены не однозначно, но всего лишь единственным образом с точностью до множеств меры нуль, зависящих от z).

Для этой цели сначала докажем следующие два вспомогательных утверждения. Предположим, что $\psi\colon\ X\times Z\to\mathbb{R}$ — ограниченная функция, измеримая относительно σ-алгебры $\mathcal{S}(X)\otimes\mathcal{S}(Z)$. Тогда функция

$$h(z)=\int_X \psi(x,z)\,\mu_z(dx)$$

$\mathcal{S}(Z)$-измерима на Z. Если ψ измерима по Борелю, то функция h также измерима по Борелю. Действительно, в первом случае класс $\mathcal{H}$ всех ограниченных $\mathcal{S}(X)\otimes\mathcal{S}(Z)$-измеримых функций ψ с этим свойством очевидным образом замкнут относительно взятия равномерных пределов и пределов возрастающих равномерно ограниченных последовательностей. Кроме того, этот класс содержит все функции вида

$$\varphi_1(x)\psi_1(z)+\cdots+\varphi_n(x)\psi_n(z)$$

с ограниченными функциями φ_i и ψ_i на X и Z, измеримыми относительно $\mathcal{S}(X)$ и $\mathcal{S}(Z)$ соответственно. По теореме о монотонном классе $\mathcal{H}$ совпадает с пространством всех ограниченных $\mathcal{S}(X)\otimes\mathcal{S}(Z)$-измеримых функций (см. [42, теорема 2.12.9]). Во втором случае те же рассуждения применимы к классу $\mathcal{H}$ ограниченных измеримых по Борелю функций, для которых утверждение верно.

Далее, предположим, что имеются борелевские вероятностные меры ν_z^y на X такие, что отображение $(y,z)\mapsto\nu_z^y$ из $Y\times Z$ в пространство борелевских вероятностных мер на X измеримо по Борелю. Тогда множество

$$S=\{(y,z)\in Y\times Z\colon\ \nu_z^y(f_z^{-1}(y))=1\}$$

является борелевским. Действительно, принадлежность к этому множеству равносильна равенству

$$\nu_z^y\circ f_z^{-1}=\delta_y,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно равенству

$$\int_X \psi_j(f_z(x))\,\nu_z^y(dx)=\psi_j(y)$$

для счетного набора непрерывных функций ψ_j на X, разделяющих борелевские меры (такой набор существует в силу того, что Y — вполне регулярное суслинское пространство). В силу того, что правая часть измерима по Борелю по y, искомая измеримость следует из предыдущего утверждения (теперь применяемого к произведению $Y \times Z$).

Наш следующий шаг состоит в том, чтобы определить искомую версию условных мер, рассматривая множество, где последовательность мер $\mu^y_{z,n}$ сходится в подходящем смысле и предельная мера сосредоточена на множестве $f_z^{-1}(y)$. В силу того, что существует последовательность ограниченных непрерывных функций h_j на X, разделяющая точки, можно считать, что X непрерывно и инъективно отображено в $I := [0,1]^\infty$ (счетную степень отрезка $[0,1]$ с топологией произведения). Тем самым можно считать, что X — суслинское подмножество I (наделенное, разумеется, более сильной топологией). Пусть $\{\varphi_j\}$ — счетный набор многочленов от координатных функций, являющихся рациональными линейными комбинациями одночленов вида $x_{i_1}^{k_1} \cdots x_{i_m}^{k_m}$.

Пусть Ω — множество всех таких точек $(y,z) \in Y \times Z$, что последовательность

$$\int_X \varphi_j(x)\, \mu^y_{z,n}(dx)$$

имеет конечный предел (при $n \to \infty$) для каждой функции φ_j. Так как каждый интеграл задает измеримую по Борелю функцию на $Y \times Z$, то множество Ω является борелевским в $Y \times Z$.

Из компактности множества I следует, что для каждой пары (y,z) в Ω меры $\mu^y_{z,n}$ слабо сходятся к борелевской вероятностной мере ν^y_z на I (необязательно сосредоточенной на X).

Согласно доказанному выше, подмножество Ω_0 множества Ω, состоящее из всех пар (y,z) таких, что мера ν^y_z сосредоточена на множестве $f_z^{-1}(y)$, также является борелевским. Пусть

$$\Omega_1 = \{(y,z) \in Y \times Z\colon\ y \in f_z(X)\},$$

что представляет собой проекцию на $Y \times Z$ графика отображения f, тем самым является суслинским множеством в $Y \times Z$. Согласно теореме об измеримом выборе (см. [42, теорема 6.9.2]), существует отображение

$$g\colon\ (y,z) \mapsto g_z(y),\ \Omega_1 \to X,$$

измеримое относительно пары σ-алгебр $\mathcal{S}(Y)\otimes\mathcal{S}(Z)$ (точнее, ее сужения на Ω_1) и $\mathcal{B}(X)$, такое, что $g_z(y) \in f_z^{-1}(y)$ для всех $z \in Z$, $y \in f_z(X)$. Чтобы применить приведенную теорему, рассмотрим на множестве Ω_1 многозначное отображение $\Psi\colon\ (y,z) \mapsto f_z^{-1}(y)$ со значениями в классе непустых подмножеств множества X. График отображения Ψ есть множество

$$\{(y,z,u)\colon\ (y,z)\in\Omega_1,\ u\in f_z^{-1}(y)\} = \{(y,z,u)\colon\ (y,z)\in\Omega_1,\ f_z(u)=y\},$$

которое является суслинским, ибо отображения

$$(y,z,u)\mapsto f_z(u) \ \text{ и } \ (y,z,u)\mapsto y$$

измеримы по Борелю.

Для каждой пары (y,z), не лежащей в множестве Ω_0, положим

$$\nu_z^y := \delta_{g_z(y)}, \quad \text{если } y\in f_z(X),$$

что равносильно тому, что $(y,z)\in\Omega_1$, и

$$\nu_z^y := \delta_{x_0}, \quad \text{если } y\notin f_z(X),$$

где $x_0 \in X$ — какая-либо фиксированная точка, общая для всех y и z. Семейство мер ν_z^y измеримо относительно σ-алгебры $\mathcal{S}(Y\times Z)$, поскольку это верно для его сужения на Ω_0 (когда имеется даже измеримость относительно $\mathcal{S}(Y)\otimes\mathcal{S}(Z)$) и верно также для сужений на множества $(Y\times Z)\cap\Omega_1\backslash\Omega_0$ и $(Y\times Z)\backslash(\Omega_0\cup\Omega_1)$, входящие в $\mathcal{S}(Y\times Z)$. Измеримость на первом из этих множеств явствует из того факта, что интеграл от функции $f\in C_b(X)$ по мере $\delta_{g_z(y)}$ равен функции $f(g_z(y))$, которая измерима относительно $\mathcal{S}(Y\times Z)$ в силу измеримости отображения g.

Покажем, что полученное семейство мер ν_z^y можно взять в качестве регулярных условных вероятностей с искомыми свойствами измеримости.

В силу того, что по построению мера ν_z^y сосредоточена на f_z^{-1} для всех $y \in Y$ и $z \in Z$ и функция

$$(y, z) \mapsto \int_X \varphi_j(x)\, \nu_z^y(dx)$$

измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{S}(Y \times Z)$ для каждой функции φ_j, что означает искомую измеримость отображения $\{\nu_z^y\}$, достаточно проверить, что для всякого $z \in Z$ мы имеем

$$\nu_z^y = \mu_z^y \quad \text{для } \sigma_z\text{-почти всех } y,$$

где μ_z^y — какие-либо выбранные регулярные условные меры для μ_z (без условия измеримости по z). Действительно, пусть z фиксировано. Для доказательства нашего утверждения достаточно показать, что для всякой функции ψ из счетного набора ограниченных непрерывных функций на Y, разделяющих борелевские меры, интегралы от функции ψ по мерам ν_z^y и μ_z^y совпадают σ_z-почти всюду. Это действительно верно, поскольку мы знаем, что оба интеграла после подстановки $y = f_z(x)$ дают версии условного математического ожидания функции ψ относительно σ-алгебры $\mathcal{B}_z$ и меры μ_z. $\square$

Замечание 3.2.2. Следует отметить, что σ-алгебра $\mathcal{S}(X)$ несчетного польского пространства X, в отличие от борелевской σ-алгебры, не является счетно-порожденной (см. [42, пример 6.5.9]). Это вызывает очевидные технические трудности при попытке применить стандартные средства, связанные с теоремами об измеримом выборе. Следует также иметь в виду, что σ-алгебра $\mathcal{S}(X \times Y)$ не совпадает с $\mathcal{S}(X) \otimes \mathcal{S}(Y)$ для несчетных пространств.

Если пространства X, Y, Z — компактные метрические, отображения f_z непрерывны и существуют слабо непрерывные регулярные условные меры $y \mapsto \mu_z^y$, то можно рассмотреть многозначное отображение $z \mapsto M(z)$ со значениями в непустых подмножествах сепарабельного метрического пространства $C(Y, \mathcal{P}(X))$ непрерывных отображений из Y в $\mathcal{P}(X)$ (где $\mathcal{P}(X)$ со слабой топологией также становится компактным метрическим пространством). В этом случае можно применить теорему об измеримом выборе. Однако в общем случае возникает слишком много несепарабельных объектов.

Также необходимо заметить, что задача нахождения условных математических ожиданий, измеримых относительно параметра (когда и основная мера, и σ-алгебра зависят от параметра) проще, поскольку в этом случае не требуется заботиться о выполнении свойства 1) соответствующих условных мер. Кроме того, менее ограничительная задача построения дезинтегрирований (см. [42]), измеримо зависящих от параметра, может быть решена при более широких предположениях. Непрерывные модификации условных математических ожиданий были рассмотрены в работе [57].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации рассмотрена новая конструкция поверхностных мер в измеримых пространствах, получены новые условия абсолютной непрерывности распределений гладких функционалов на бесконечномерных пространствах с мерами, получены условия измеримой зависимости условных мер от параметра. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Разработана новая конструкция поверхностных мер в абстрактных измеримых пространствах, ориентированная на построение поверхностных мер в бесконечномерных пространствах для мер, обладающих векторными полями дифференцируемости в смысле А.В. Скорохода. Дано положительное решение задачи о непрерывной зависимости поверхностных мер от параметра.

2. Получены широкие достаточные условия абсолютной непрерывности распределений гладких функционалов на бесконечномерных пространствах с мерами. Дан положительный ответ на вопрос об абсолютной непрерывности распределений аналитических функционалов на пространствах с гауссовскими мерами.

3. Получены широкие достаточные условия измеримой зависимости условных мер от параметра в ситуации, когда от параметра зависит как базовая мера, для которой строятся условные меры, так и отображение, на множествах уровня которого сосредоточены условные меры.

Дальнейшее развитие методов диссертации имеет перспективы в аналитической теории меры и бесконечномерном анализе. Возможные применения результатов диссертации связаны со стохастическим анализом, теорией вероятностей и математической статистикой.

Литература

[1] Авербух В.И., Смолянов О.Г., Фомин С.В. Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. Тр. Моск. мат. об-ва. 1971. Т. 24. С. 133–174.

[2] Богачев В.И. Гауссовские меры. Наука, М., 1997.

[3] Богачев В.И., Колесников А.В. Задача Монжа–Канторовича: достижения, связи и перспективы. Успехи матем. наук. 2012. Т. 67, № 5. С. 3–110.

[4] Богачев В.И., Пилипенко А.Ю., Реброва Е.А. Классы функций ограниченной вариации на бесконечномерных областях. Докл. РАН. 2013. Т. 451, №4. С. 127–131.

[5] Богачев В.И., Смолянов О.Г. Аналитические свойства бесконечномерных распределений. Успехи матем. наук. 1990. Т. 45, № 3. С. 3–83.

[6] Го Х. Гауссовские меры в банаховых пространствах. Мир, М., 1979.

[7] Давыдов Ю.А., Лифшиц М.А. Метод расслоений в некоторых вероятностных задачах. Итоги науки и техн. Теория вероятн., мат. статист. Теор. киберн. ВИНИТИ. 1984. Т. 22. С. 61–157.

[8] Давыдов Ю.А., Лифшиц М.А., Смородина Н.В. Локальные свойства распределений стохастических функционалов. Физматлит, М., 1995.

[9] Далецкий Ю.Л. Стохастическая дифференциальная геометрия. Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, №3. С. 87–111.

[10] Далецкий Ю.Л., Парамонова С.Н. Об одной формуле теории гауссовских мер и оценке стохастических интегралов. Теория вероятн. и ее примен. 1974. Т. 19, №4. С. 844–849.

[11] Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. Наука, М., 1983.

[12] Евстигнеев И.В. Регулярные условные математические ожидания случайных величин, зависящих от параметров. Теория вероятн. и ее примен. 1986. Т. 31, № 3. С. 586–589.

[13] Ефимова Е.И., Угланов А.В. Формула Грина на гильбертовом пространстве. Матем. сб. 1982. Т. 119, №2. С. 225–232.

[14] Лифшиц М.А. Гауссовские случайные функции. ТВіМС, Киев, 1995.

[15] Пугачев О.В. Поверхностные меры в бесконечномерных пространствах. Матем. заметки. 1998 Т. 63, № 1. С. 106–114.

[16] Пугачев О.В. Формула Гаусса – Остроградского в бесконечномерном пространстве. Матем. сб. 1998. Т. 189, № 5. С. 115–128.

[17] Пугачев О.В. Построенние негауссовских поверхностных мер методом Маллявэна. Матем. заметки. 1999. Т. 65, № 3. С. 377–388.

[18] Пугачев О.В. Емкости и поверхностные меры в локально выпуклых пространствах. Теория вероятн. и ее примен. 2008. Т. 53, № 1. С. 178–188.

[19] Скороход А.В. Поверхностные интегралы и формула Грина в гильбертовом пространстве. Теория вероятн. и матем. статист. 1970. №2. С. 172–175.

[20] Скороход А.В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. Наука, М., 1975.

[21] Скороход А.В. Об обобщении стохастического интеграла. Теория вероятн. и ее примен. 1975. Т. 20. С. 219–223.

[22] Смолянов О.Г. Потоки Де Рама и формула Стокса в гильбертовом пространстве. Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, №3. С. 554–558.

[23] Смолянов О.Г., фон Вайцзеккер Х., Виттих О. Два типа поверхностных мер на траекториях в римановых подмногообразиях евклидовых пространств. Докл. РАН. 2011. Т. 436, №2. С. 174–178.

[24] Смородина Н.В. Дифференциальное исчисление на измеримых пространствах и условия гладкости плотностей распределений случайных величин. Докл. АН СССР. 1987. Т. 282, №5. С. 1053–1057.

[25] Смородина Н.В. Дифференциальное исчисление в пространстве конфигураций и устойчивые меры. I. Теория вероятн. и ее примен. 1988. Т. 33, № 3. С. 522–534.

[26] Смородина Н.В. Формула Гаусса – Остроградского на пространстве конфигураций. Теория вероятн. и ее примен. 1990. Т. 35, №4. С. 727–739.

[27] Угланов А.В. Поверхностные интегралы в банаховом пространстве. Матем. сб. 1979. Т. 110, № 2. С. 189–217.

[28] Угланов А.В. Поверхностные интегралы в пространствах Фреше. Матем. сб. 1998. Т. 189, № 11. С. 139–157.

[29] Угланов А.В. Поверхностные интегралы в локально выпуклых пространствах. Тр. Моск. матем. об-ва. 2001. Т. 62. С. 262–285.

[30] Хеннекен П.Л., Тортра А. Теория вероятностей и некоторые ее приложения. Наука, М., 1974.

[31] Яхлаков В.Ю. Поверхностные меры на поверхностях конечной коразмерности в банаховом пространстве. Матем. заметки 1990. Т. 47, № 4. С. 147–156.

[32] Airault H., Malliavin P. Intégration géometrique sur l’espace de Wiener. Bull. Sci. Math. (2). 1988. V. 112, № 1. P. 3–52.

[33] Ambrosio L., Di Marino S. Equivalent definitions of BV space and of total variation on metric measure spaces. J. Funct. Anal. 2014. V. 266. P. 4150–4188.

[34] Ambrosio L., Miranda M. (Jr.), Maniglia S., Pallara D. BV functions in abstract Wiener spaces. J. Funct. Anal. 2010. V. 258, № 3. P. 785–813.

[35] Belopol'skaya Ya.I., Dalecky Yu.L. Stochastic equations and differential geometry. Transl. from the Russian. Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1990.

[36] Blackwell D., Ryll-Nardzewski C. Non-existence of everywhere proper conditional distributions. Ann. Math. Statist. 1963. V. 34. № 1. P. 223–225.

[37] Bogachev V.I. Differential properties of measures on infinite dimensional spaces and the Malliavin calculus. Acta Univ. Carolinae, Math. et Phys. 1989. V. 30. № 2. P. 9–30.

[38] Bogachev V.I. Differentiable measures and the Malliavin calculus. J. Math. Sci. (New York). 1997. V. 87, №4. P. 3577–3731.

[39] Bogachev V.I. Gaussian measures. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1998.

[40] Bogachev V.I. Differentiable measures and the Malliavin calculus. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2010.

[41] Bogachev V.I. Gaussian measures on infinite-dimensional spaces. In: Real and Stochastic Analysis. Current Trends (M.M. Rao ed.), pp. 1–83. World Sci., Singapore, 2014.

[42] Bogachev V.I. Measure theory. V. 1, 2. Springer, Berlin, 2007.

[43] Bogachev V.I. Smooth measures, the Malliavin calculus and approximation in infinite dimensional spaces. Acta Univ. Carolinae, Math. et Phys. 1990. V. 31, № 2. P. 9–23.

[44] Bogachev V.I., Mayer-Wolf E. Absolutely continuous flows generated by Sobolev class vector fields in finite and infinite dimensions. J. Funct. Anal. 1999. V. 167, № 1. P. 1–68.

[45] Bogachev V.I., Pilipenko A.Yu., Shaposhnikov A.V. Sobolev functions on infinite-dimensional domains. J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 419. P. 1023–1044.

[46] Bouleau N., Hirsch F. Dirichlet forms and analysis on Wiener space. De Gruyter, Berlin – New York, 1991.

[47] Caselles V., Lunardi A., Miranda M. (jun.), Novaga M. Perimeter of sublevel sets in infinite dimensional spaces. Adv. Calc. Var. 2012. V. 5, № 1. P. 59–76.

[48] Celada P., Lunardi A. Traces of Sobolev functions on regular surfaces in infinite dimensions. J. Funct. Anal. 2014. V. 266, № 4. P. 1948–1987.

[49] Chaari S., Cipriano F., Kuo H.-H., Ouerdiane H. Surface measures on the dual space of the Schwartz space. Comm. Stoch. Anal. 2010. V. 4. P. 467–480.

[50] Cheeger J. Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces. Geom. Funct. Anal. 1999. V. 9. P. 428–517.

[51] Da Prato G., Lunardi A., Tubaro L. Surface measures in infinite dimension. Rendic. Lincei 2014. V. 25, № 3. P. 309–330.

[52] Feyel D., de La Pradelle A. Hausdorff measures on the Wiener space. Potential. Anal. 1992. V. 1, № 2. P. 177–189.

[53] Fukushima M., Hino M. On the space of BV functions and a related stochastic calculus in infinite dimensions. J. Funct. Anal. 2001. V. 183, № 1. P. 245–268.

[54] Goodman V. A divergence theorem for Hilbert space. Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 164. P. 411–426.

[55] Heinonen J. Nonsmooth calculus. Bull. Amer. Math. Soc. 2007. V. 44, № 2. P. 163–232.

[56] Hertle A. Gaussian surface measures and the Radon transform on separable Banach spaces. Lecture Notes in Math. 1980. V. 794. P. 513–531.

[57] Hille J., Plachky D., Roters J. Versions of conditional expectations depending continuously on parameters. Math. Methods Statist. 1999. V. 8, № 1. P. 99–108.

[58] Hino M. Sets of finite perimeter and the Hausdorff–Gauss measure on the Wiener space. J. Funct. Anal. 2010. V. 258, № 5. P. 1656–1681.

[59] Hino M. Dirichlet spaces on H-convex sets in Wiener space. Bull. Sci. Math. 2011. V. 135, № 6–7, P. 667–683; Erratum: ibid. 2013. V. 137, № 5. P. 688–689.

[60] Hoffmann-Jørgensen J. Existence of conditional probabilities. Math. Scand. 1971. V. 28, № 2. P. 257–264.

[61] Hoffmann-Jørgensen J. Probability with a view toward statistics. V. I, II. Chapman & Hall, New York, 1994.

[62] Guan H. An averaging theorem for perturbed linear Schrödinger equation. Preprint Ecole Polytechnique. Palaiseau, 2013.

[63] Guan H., Kuksin S. The KdV equation under periodic boundary conditions and its perturbations. Nonlinearity. 2014. V. 27, №9. P. R61–R88.

[64] Kechris A.S. Classical descriptive set theory. Springer, Berlin – New York, 1995.

[65] Keith S. A differentiable structure for metric measure spaces. Adv. Math. 2004. V. 183, № 2. P. 271–315.

[66] Malliavin P. Stochastic analysis. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[67] Norin N.V. The extended stochastic integral in linear spaces with differentiable measures and related topics. World Sci. Publ., River Edge, New Jersey, 1996.

[68] Pfanzagl J. Parametric statistical theory. Walter de Gruyter, Berlin, 1994.

[69] Pugachev O.V. Tightness of Sobolev capacities in infinite dimensional spaces. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probab. Relat. Topics. 1999. V. 2, № 3. P. 427–440.

[70] Rao M.M. Conditional measures and applications. 2nd ed. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2005.

[71] Ramachandran D. A note on regular conditional probabilities in Doob's sense. Ann. Probab. 1981. V. 9, № 5. P. 907–908.

[72] Röckner M., Schmuland B. Tightness of general $C_{1,p}$ capacities on Banach spaces. J. Funct. Anal. 1992. V. 108, № 1. P. 1–12.

[73] Röckner M., Zhu R.-Ch., Zhu X.-Ch. The stochastic reflection problem on an infinite dimensional convex set and BV functions in a Gelfand triple. Ann. Probab. 2012. V. 40, № 4. P. 1759–1794.

[74] Röckner M., Zhu R., Zhu X. BV functions in a Gelfand triple for differentiable measures and its applications. Forum Math. 2015. V. 27, № 3. P. 1657–1687.

[75] Savaré G. Self-improvement of the Bakry–Émery condition and Wasserstein contraction of the heat flow in RCD(K,∞) metric measure spaces. Discrete Contin. Dyn. Syst. 2014. V. 34, № 4. P. 1641–166.

[76] Schioppa A. On the relationship between derivations and measurable differentiable structures. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 2014. V. 39, № 1. P. 275–304.

[77] Shigekawa I. Absolute continuity of probability laws of Wiener functionals. Proc. Jap. Acad. Ser. A. 1978. V. 54, № 8. P. 230–233.

[78] Sidorova N.A., Smolyanov O.G., von Weizsacker H., Wittich O. The surface limit of Brownian motion in tubular neighborhoods of an embedded Riemannian manifold. J. Funct. Anal. 2004. V. 206, №2. P. 391–413.

[79] Stengle G. A divergence theorem for Gaussian stochastic process expectations. J. Math. Anal. Appl. 1968. V. 21. P. 537–546.

[80] Stroock D. The Malliavin calculus, a functional analytic approach. J. Funct. Anal. 1981. V. 44, № 2. P. 212–257.

[81] Sturm K.-T. On the geometry of metric measure spaces. I, II. Acta Math. 2006. V. 196, № 1. P. 65–131, 133–177.

[82] Tjur T. Conditional probability distributions. Lecture Notes, № 2. Institute of Mathematical Statistics, University of Copenhagen, Copenhagen, 1974.

[83] Uglanov A.V. Integration on infinite-dimensional surfaces and its applications. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[84] Villani C. Optimal transport, old and new. Springer, New York, 2009.

[85] Ziemer W. Weakly differentiable functions. Springer-Verlag, New York – Berlin 1989.

Работы автора по теме диссертации:

[86] Богачев В.И., Малофеев И.И. О распределениях гладких функций на бесконечномерных пространствах с мерами. Докл. РАН. 2014. Т. 454, № 1. С. 11–14.

[87] Малофеев И.И. Измеримая зависимость условных мер от параметра. Докл. РАН. 2016. Т. 470, № 1. С. 13–17.

[88] Bogachev V.I., Malofeev I.I. Surface measures generated by differentiable measures. Potential Anal. 2016. V. 44, №4. P. 767–792.

Тезисы конференций:

[89] Малофеев И.И. Конструкция поверхностных мер в бесконечномерных пространствах. «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы» (тезисы и тексты докладов международной конференции 15–18 декабря 2014 года). РУДН, М., 2014. С. 49–51.

[90] Малофеев И.И. Поверхностные меры, порождаемые дифференцируемыми мерами. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2015», МГУ, М., 2015.

[91] Малофеев И.И. Измеримая зависимость условных мер от параметра. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2016», МГУ, М., 2016.

[92] Malofeev I.I. Measurable dependence of conditional measures on a parameter. 4th International Workshop “Analysis, Geometry and Probability” (Moscow, September 26 – October 1, 2016), Book of Abstracts, p. 49.