

Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
Российская Федерация, 191023,
г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, д. 27
тел.: 312-40-58, факс: 310-53-77
от 18.02.2017 № 02-2171
на № _____ от _____



УТВЕРЖДАЮ

Директор ЦОМИ РАН, академик РАН

Кисляков С.В.

2017 г.

Отзыв ведущей организации

**Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В.А.Стеклова Российской академии наук**

на диссертацию Малофеева И. И.

Поверхностные меры в бесконечномерных пространствах

представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Диссертация Ильи Игоревича Малофеева посвящена одной из актуальных проблем современного математического анализа — изучению свойств мер в бесконечномерных пространствах. Теория меры в бесконечномерных (чаще всего функциональных) пространствах интенсивно используется во многих областях математики, так как через интегралы по мерам в функциональных пространствах (так называемые функциональные интегралы) выражаются решения важнейших уравнений математической физики и квантовой механики. Наиболее часто используемые меры в функциональных пространствах представляют из себя вероятностные меры в пространстве траекторий, порожденные каким-либо стохастическим процессом. Трудности в изучении мер в бесконечномерных пространствах в основном связаны с отсутствием в бесконечномерных пространствах естественного аналога меры Лебега (то есть σ -конечной меры, инвариантной относительно сдвигов), позволяющей задавать другие меры плотностями относительно нее. Использование в качестве такой «эталонной» меры какой-либо другой меры обычно оказывается невозможным так как меры в бесконечномерных пространствах чаще всего оказываются взаимно сингулярными.

Диссертация Малофеева посвящена определению понятия поверхностной меры на поверхностях конечной коразмерности в достаточно произвольных пространствах с конечной мерой. В различных конкретных функциональных пространствах с мерой такие объекты ранее строились и исследовались многими авторами, упомянем здесь только некоторых из них. Для гауссовской меры в банаховом пространстве понятие поверхностной меры было введено Гудменом, для дифференцируемых мер в банаховом пространстве соответствующая конструкция предложена Углановым, другая конструкция поверхностной меры предложена в работе Скорохода. На пространстве

конфигураций с пуассоновской мерой конструкция поверхностной меры предложена в работе Смородиной.

Во всех упомянутых случаях конструкция поверхностной меры предполагала наличие некоторой дифференциальной структуры на исходном пространстве. Конструкция, предложенная в диссертации Малофеева, существенно отличается по идеологии. Эта конструкция в определенном смысле является «инвариантной относительно отображений». Как известно, меры переносятся любым измеримым отображением – на пространстве-образе возникает новая мера, являющаяся образом исходной меры. Многие меры именно так и определяются – как образ такой-то меры под действием такого-то отображения. Проблема здесь в том, что эти отображения чаще всего не являются гладкими и, соответственно, та дифференциальная структура, которая имеется в пространстве-образе совершенно не подходит для изучения образа меры. Рассмотрим простейший пример. Возьмем отрезок $[0, 1]$ с мерой Лебега. Отобразим этот отрезок в пространство $L_2[0, 1]$, так, что точка $t \in [0, 1]$ перейдет в индикаторную функцию интервала $[0, t]$. С точки зрения теории меры ничего не изменилось, данное отображение является биекцией, на пространстве $L_2[0, 1]$ возникла новая мера, которая в естественном смысле изоморфна исходной. Но с точки зрения геометрии пространства $L_2[0, 1]$ эта мера устроена очень плохо – она сосредоточена на кривой, которая не дифференцируема ни в одной точке. И этот пример не является надуманным, именно с использованием такого приема строятся меры в пространстве траекторий, отвечающие, например, негауссовским процессам с независимыми приращениями.

Подход, предложенный в диссертации Малофеева, позволяет обойти упомянутую выше проблему. Определения (в частности, определение 1 на стр.10) устроены так, что на пространстве-образе можно использовать дифференциальную структуру исходного пространства. Это делает данный подход интересным и перспективным.

Диссертация состоит из введения и трех глав.

В первой главе вводится понятие поверхностной меры на множествах уровня функций (случайных величин), заданных на общих вероятностных пространствах. Приводятся достаточные условия существования поверхностной меры.

Во второй главе диссертации получены достаточные условия абсолютной непрерывности распределения гладкой функции на бесконечномерном локально выпуклом пространстве, наделенном вероятностной мерой Радона. В отличие от известных достаточных условий, которые включают требование невырожденности (с вероятностью один) производной функции по какому-либо направлению (зависящему от точки), в диссертации получены достаточные условия, содержащие требование невырожденности хотя бы какой-то из производных старшего порядка. Как следствие этого утверждения, показано, что аналитическая функция, заданная на пространстве с гауссовской мерой и не являющаяся константой, имеет абсолютно непрерывное распределение.

В третьей главе диссертации получены достаточные условия существования собственных условных вероятностей, измеримо зависящих от параметра в случае параметрических семейств мер и отображений.

К недостаткам данной диссертации следует отнести не всегда удачный выбор обозначений. В частности в определении 1 на стр.10 упоминание о векторном поле v только вводит в заблуждение – в этой конструкции вообще нет никаких векторов и векторных полей, там определяется только операция, называемая дифферен-

пированием, которая обозначается буквой δ . Другим недостатком является малое количество содержательных «негауссовских» примеров.

Приведенные выше замечания не влияют на окончательную положительную оценку данной диссертационной работы.

Все установленные И.И.Малофеевым результаты являются достоверными научными фактами, полученными впервые. Результаты работы несомненно привлекут внимание специалистов по стохастическому и бесконечномерному анализу.

Основные результаты работы опубликованы в 3-х статьях в журналах, входящих в список, рекомендованный ВАК России, а также докладывались на ряде научно-исследовательских семинаров и международных конференций. Изложение материала ясное и последовательное. Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

Диссертационная работа Малофеева Ильи Игоревича «Поверхностные меры в бесконечномерных пространствах» соответствует всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» ВАК России к кандидатским диссертациям, а ее автор Малофеев Илья Игоревич несомненно заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв подготовила доктор физико-математических наук Наталия Васильевна Смородина, 191023, г. Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27, тел. 8(812)312-40-58.

Электронная почта: smorodina@pdmi.gas.ru

ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова Российской академии наук, ведущий научный сотрудник лаборатории статистических методов.

17 февраля 2017 г.

Н.В. Смородина

Отзыв заслушан, обсужден и одобрен на заседании лаборатории статистических методов Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А.Стеклова РАН 17 февраля 2017 года, протокол №1. Результаты голосования по отзыву: «за» – 6, «против» – нет, воздержавшихся нет.

Заведующий лабораторией статистических методов, академик РАН, доктор физико-математических наук по специальности 01.01.05 Ильдар Абдуллович Ибрагимов, 191023, г. Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27, тел. 8(812)312-40-58.

Электронная почта: ibr32@pdmi.gas.ru

ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова Российской академии наук.

17 февраля 2017 г.

И.А.Ибрагимов

