

## ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации И.И. Малофеева  
«Поверхностные меры в бесконечномерных пространствах»,  
представленной на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук  
по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Представленная работа И.И. Малофеева является исследованием в области теории меры и функционального анализа. Ее цель — изучение поверхностных мер и условных мер в бесконечномерных пространствах с мерами и свойств распределений нелинейных функционалов на таких пространствах. Тематика диссертации относится к активно развивающемуся направлению функционального анализа на стыке с теорией меры и теорией вероятностей. Этим направлением в последние десятилетия интересуются многие специалисты по теории меры, нелинейному анализу и стохастическому анализу. Проблематикой теории условных мер в 1930–1970 годах занимались такие именитые ученые, как А.Н. Колмогоров, Дж. фон Нейман, Дж. Дуб, П. Халмош, Ж. Дьедонне, В.А. Рохлин, Р.Л. Добрушин, В.Н. Судаков, Я.Г. Синай, а близкие в идейном отношении поверхностные меры в бесконечномерных пространствах стали исследоваться позже, начиная с 1970-х, здесь можно упомянуть в первую очередь А.В. Скорохода, А.В. Угланова, П. Маллявэна, Э. Эро, Ю.А. Давыдова, М.А. Лифшица, Н.В. Смородину, О.Г. Смолянова, Л. Амброзио, М. Фукушиму. Интенсивное развитие бесконечномерного анализа в последние десятилетия выявило высокую актуальность исследования именно поверхностных мер: такие меры строятся при значительно более специальных условиях, чем условные меры (существующие при весьма широких условиях, выполняющихся во всех приложениях), однако по сравнению с условными мерами они обладают рядом важных преимуществ, в частности позволяют интегрировать по частям. Существенным фактором развития теории поверхностных мер в бесконечномерных пространствах стало появление теории дифференцируемых мер С.В. Фомин в конце 1960-х — начале 1970-х. Основные приложения теории поверхностных мер относятся к распределениям нелинейных функционалов от случайных процессов, дифференциальным уравнениям на бесконечномерных пространствах и экстремальным задачам. Исследования в близких к диссертации направлениях ведутся во многих крупных научных центрах по всему миру, велико число публикаций на близкие темы.

Диссертация состоит из введения, 3 глав и списка цитируемой литературы. Во введении дан исторический обзор по теме работы и сформулированы ее основные результаты.

Глава 1 посвящена построению поверхностных мер в абстрактных измеримых пространствах. Полученные здесь результаты подводят некоторый итог исследованиям многих авторов, на протяжении четырех десятилетий развивавшим методы построения поверхностных мер в бесконечномерных пространствах. Предложенная автором конструкция охватывает многие ранее известные подходы, причем она обладает большей гибкостью по сравнению с существовавшими определениями, а обоснование базовых свойств поверхностных мер в рамках этой конструкции технически заметно проще, чем в имевшихся ранее.

В главе 2 изучается абсолютная непрерывность распределений нелинейных функционалов на локально выпуклых пространствах с мерами. Основной результат главы, мотивированный вопросом С.Б. Куксина для гауссовских мер, дает эффективное достаточное условие абсолютной непрерывности распределения бесконечно дифференцируемой функции на локально выпуклом пространстве с мерой, обладающей направлениями непрерывности. Полученные условия и результаты охватывают значительное число конкретных примеров, возникающих в приложениях.

Глава 3 посвящена исследованию зависимости условных мер от параметра. Эта проблема почти не исследовалась ранее. Основной результат главы показывает, что если заданы борелевски зависящее от параметра  $z$  семейство борелевских вероятностных мер  $\mu_z$  на полном сепарабельном метрическом пространстве  $X$  и борелевские отображения  $f_z$  из  $X$  в полное сепарабельное метрическое пространство  $Y$ , для которых отображение  $f_z(x)$  измеримо по Борелю по совокупности переменных, то на множествах уровня  $f_z^{-1}(y)$  можно выбрать условные меры  $\mu_z^y$  для мер  $\mu_z$  так, что отображение  $(y, z) \mapsto \mu_z^y$  будет универсально измеримо (т.е. измеримо относительно всех борелевских мер). Фактически доказано даже больше: измеримость относительно  $\sigma$ -алгебры, порожденной суслинскими множествами.

Основные результаты диссертации состоят в следующем.

1. Разработана новая конструкция поверхностных мер в абстрактных измеримых пространствах, ориентированная на построение поверхностных мер в бесконечномерных пространствах с мерами, обладающими векторными полями дифференцируемости в смысле А.В. Скорохода. Дано положительное решение задачи М. Рёкнера о непрерывной зависимости поверхностных мер от параметра.

2. Получены широкие достаточные условия абсолютной непрерывности распределений гладких функционалов на бесконечномерных пространствах с мерами. Дан положительный ответ на вопрос, поставленный С.Б. Куксиным об абсолютной непрерывности распределений аналитических функционалов на пространствах с гауссовскими мерами.

3. Получены широкие достаточные условия измеримой зависимости условных мер от параметра в ситуации, когда от параметра зависит как базовая мера, для которой строятся условные меры, так и отображение, на множествах уровня которого сосредоточены условные меры.

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и обоснованы в виде строгих математических доказательств.

По теме диссертации имеются 3 публикации в журналах из списка ВАК, а также тезисы 4 международных конференций.

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались на научно-исследовательском семинаре «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В.И. Богачева, Н.А. Толмачева, С.В. Шапошникова (2012–2016 г.), на конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2015» и «Ломоносов-2016» (МГУ, Москва), на международной конференции «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы» (Российский университет дружбы народов, Москва, 2014 г.), на 4 Международной конференции «Анализ, вероятность и геометрия» (МГУ, Москва, 2016 г.).

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных вопросах теории меры, бесконечномерного анализа, теории вероятностей и стохастического анализа. Результаты и методы работы И.И. Малофеева будут востребованы в исследованиях, проводимых в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Институте проблем передачи информации РАН, Санкт-Петербургском государственном университете, Новосибирском государственном университете, Дальневосточном федеральном университете, Техническом университете им. Н.Э. Баумана, НИУ «Высшая школа экономики».

Таким образом, в диссертационной работе И.И. Малофеева «Поверхностные меры в бесконечномерных пространствах» решен ряд важных и трудных задач теории меры и функционального анализа. Эта работа удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» ВАК, а ее автор И.И. Малофеев заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Доктор физико-математических наук,  
профессор, профессор кафедры  
теории функций и функционального  
анализа механико-математического  
факультета

*Подпись профессора В.И. Богачева заверено*

19 сентября 2016 г.

Богачев Владимир Игоревич,  
e-mail: vivotach@mail.ru;  
тел. +7 (495) 939-36-80

119234, Москва, Ленинские горы, д. 1,  
Главное здание, механико-математический  
факультет, кафедра теории функций и функционального  
анализа

В.И. Богачев

