ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации **И.И. Малофеева "Поверхностные меры в бесконечномерных пространствах",** представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (специальность 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ)

Рассматриваемая диссертационная работа Ильи Игоревича Малофеева посвящена нескольким актуальным вопросам теории дифференцируемых мер на бесконечномерных пространствах: конструкция поверхностных мер в абстрактных измеримых пространствах, которую можно применить для построения поверхностных мер в бесконечномерных пространствах для мер, обладающих векторными полями дифференцируемости в смысле А.В. Скорохода, что бывает важно, например, для решения краевых задач в бесконечномерных пространствах; изучение абсолютной непрерывности распределений гладких функционалов на бесконечномерных пространствах с мерами, в частности, с гауссовскими мерами; изучение измеримой зависимости условных мер от параметра.

Диссертация полным объемом в 91 страницу состоит из введения, трех глав, разделенных на параграфы, заключения и списка литературы, включающего работы автора (7 наименований) и прочие работы по рассматриваемой теме (85 наименований).

Первая глава является самой объемной и посвящена конструкции поверхностных мер, связанных с мерами, дифференцируемыми вдоль векторных полей. Сначала эта конструкция вводится при максимально общих условиях, в абстрактных пространствах с мерами с некоторыми дополнительными структурами, позволяющими вводить дифференцирование мер вдоль векторных полей. Затем показано, как ее можно применить для построения поверхностных мер, связанных с гауссовскими мерами на локально выпуклых пространствах, а также для других мер Радона на локально-выпуклых пространствах, дифференцируемых вдоль векторных полей. Указаны случаи, в которых получающиеся поверхностные меры эквивалентны ранее известным поверхностным мерам из других конструкций. Пункт 1.5 целиком посвящен примерам, показывающим область применимости и практическую полезность предлагаемой конструции поверхностных мер.

Кроме поверхностных мер, в первой главе рассматриваются также тесно связанные с ними объекты — условные меры и емкости, а также поверхностные меры на поверхностях коразмерности большей, чем 1.

Во второй главе рассматриваются достаточные условия абсолютной непрерывности распределения гладкой функции f на бесконечномерном локально выпуклом пространстве X, наделенном вероятностной мерой Радона μ.

Основным результатом этой главы является следующая теорема.

Теорема 2.2.1. *Пусть μ — радоновская вероятностная мера на локально выпуклом пространстве X, непрерывная вдоль векторов из счетного множества S, и пусть f — μ-измеримая функция на X такая, что все частные* *производные* $\partial_{h_1}...\partial_{h_n} f$ *существуют всюду для всех* $h_1, ..., h_n$ *из линейной оболочки множества* S. *Пусть*

$$E = \{x : \exists h_1, ..., h_n \in S : \ \ \partial_{h_1}...\partial_{h_n} f(x) \neq 0\}.$$

Тогда мера $\mu|_E \circ f^{-1}$ *абсолютно непрерывна.*

Этот результат является новым даже в одномерном случае.

В третьей главе получены широкие достаточные условия существования собственных условных вероятностей, измеримо зависящих от параметра в ситуации, когда от параметра зависят и исходная мера, и отображение. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 3.2.1. *Пусть* X, Y, Z — *вполне регулярные суслинские пространства. Предположим, что дано борелевское отображение*

$$f : \ (x, z) \mapsto f_z(x), \quad X \times Z \to Y.$$

Предположим также, что для каждого $z \in Z$ *задана борелевская вероятностная мера* μ_z *на* X, *причем отображение*

$$z \mapsto \mu_z, \ \ Z \to \mathcal{P}(X)$$

измеримо по Борелю при условии, что пространство вероятностных мер $\mathcal{P}(X)$ *наделено слабой топологией. Тогда существуют такие собственные условные меры* $\{\mu_z^y\}_{y \in Y}$ *для всех пар* (μ_z, f_z), *что для каждого борелевского множества* B *в* X *функция* $(y, z) \mapsto \mu_z^y(B)$ *на* $Y \times Z$ *измерима относительно* σ*-алгебры* $\mathcal{S}(Y \times Z)$ *или, что равносильно, отображение*

$$(y, z) \mapsto \mu_z^y, \ \ Y \times Z \to \mathcal{P}(X)$$

измеримо, когда пространство $Y \times Z$ *наделено* σ*-алгеброй* $\mathcal{S}(Y \times Z)$ *и* $\mathcal{P}(X)$ *наделено борелевской* σ*-алгеброй.*

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы при исследовании различных проблем нелинейного анализа, теории меры, теории дифференциальных уравнений с частными производными, стохастических дифференциальных уравнений и диффузионных процессов и математической физики. Также результаты и методы диссертации могут найти применение в стохастическом анализе, теории вероятностей и математической статистике.

Конкретные результаты диссертации и ее общие методы могут найти применение в исследованиях, ведущихся в целом ряде отечественных университетов и математических институтов, в том числе в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Математическом институте РАН им. В.А. Стеклова, С.-Петербургском государственном университете, Новосибирском государственном университете, Техническом университете им. Н.Э. Баумана.

Особо хочется отметить стройность изложения и хороший язык автора, а также свободу, с которой он оперирует понятиями и фактами из столь разнообразных источников. В качестве замечания можно упомянуть незначительное количество опечаток.

Все вынесенные на защиту результаты являются новыми и оригинальными, своевременно опубликованы (в 3 статьях в журналах из Перечня ВАК РФ и 4 тезисах международных конференций) и снабжены детальными доказательствами. Содержание диссертационного исследования соответствует специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации. Диссертация снабжена обширным списком литературы, в котором представлен широкий ряд результатов по различным направлениям данной области.

На основании сказанного следует заключить, что в диссертации Ильи Игоревича Малофеева решены актуальные проблемы нелинейного функционального анализа и теории меры. Эта работа удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК РФ к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор, Малофеев Илья Игоревич, заслуживает присвоения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,
кандидат физико-математических наук,
(01.01.01 — вещественный, комплексный
и функциональный анализ)
старший научный сотрудник ОНИ ФПМ
ОНИ ПФМНиИТ ВИНИТИ РАН (Москва) Е.П. Кругова
27 февраля 2017 г.

math@viniti.ru; +7(499)1554419
Всероссийский Институт Научной и Технической Информации
Российской Академии Наук (Москва),
125190, Москва, ул. Усиевича, 20

Подпись Е.П. Круговой удостоверяю
И.о. ученого секретаря ВИНИТИ РАН,
канд. культурологии А.Э. Анисимова