МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 519.21

Чернавская Екатерина Александровна

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ТЯЖЕЛЫМИ ХВОСТАМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВРЕМЕН ОБСЛУЖИВАНИЯ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2016

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научные руководители:
доктор физико-математических наук,
профессор Афанасьева Лариса Григорьевна,
кандидат физико-математических наук,
доцент Баштова Елена Евгеньевна.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор Пресман Эрнст Львович,
ведущий научный сотрудник лаборатории стохастических моделей экономики Центрального экономико-математического института РАН;

кандидат физико-математических наук,
старший преподаватель Ткаченко Андрей Викторович,
Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", факультет экономических наук,
департамент прикладной экономики.

Ведущая организация:
Нижегородский государственный университет имени Н.И.Лобачевского(ННГУ).

Защита диссертации состоится 7 апреля 2017 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.
С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова и на сайте механико-математического факультета:http://mech.math.msu.su.

Автореферат разослан "   "марта 2017 г.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 на базе МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор Власов Виктор Валентинович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Предметом исследования диссертации являются бесконечноканальные системы массового обслуживания. На первый взгляд, бесконечноканальные системы кажутся нереалистичными, но на самом деле они могут быть использованы при описании многих существующих объектов. Например, в теории связи при изучении суммарного потока импульсов, при моделировании интернет трафика, при описании процессов образования очередей на неуправляемых перекрестках автомобильных дорог, в некоторых задачах страхования и т.д.

Кроме того, системы с бесконечным числом приборов могут быть рассмотрены в качестве мажорирующих для многоканальных систем, так как число заявок в бесконечноканальной системе оценивает снизу число заявок в системе с любым конечным числом приборов и неограниченной очередью. Также при изучении некоторых сложных систем, бывает полезно рассмотреть бесконечноканальную систему как более простую для анализа. Рассмотрение бесконечноканальных систем удобно в тех случаях, когда в изучаемой системе не образуется очередь по каким-либо причинам[1]. Отметим, что подходы, используемые для изучения бесконечноканальных систем, оказываются полезными для задач массового обслуживания в случае высокой загрузки[2].

Актуальность. Изучение бесконечноканальных систем началось с работы Риордана 1951 года[3] , где была рассмотрена телефонная станция, в которой ни один звонок не задерживался и не терялся терялся из-за отсутствия оборудования. Эта система является системой типа $M/G/\infty$. В 60-70-е публикуются результаты, касающиеся распределения числа занятых приборов, а также доказательство того, что выходящий поток из системы $M/G/\infty$ является пуассоновским. В 1980-е годы выходят статьи, посвященные изучению бесконечноканальных систем в случае высокой нагрузки ("heavy traffic"). Доказаны предельные теоремы для систем, интенсивность входящего потока в которых стремится к бесконечности, в то время как распределение времен обслуживания фиксировано. Отметим, что подобные предельные теоремы носят характер, отличный от рассматриваемых нами.

[1] M. Ya. Postan, “Flow of Serviced Requests in Infinite-Channel Queueing Systems in a Transient Mode”. *Probl. Peredachi Inf.*, 5(3):213-220, 1977.

[2] Боровков А.А., “Вероятностные процессы в теории массового обслуживания”, 1972.

[3] Riordan J., “Telephone traffic time averages”. *Bell Labs Technic. J.*, 30(4):1129-1144, 1951.

В нашем случае, распределение входящего потока не изменяется, но

$$\int_0^t (1 - B(x))dx \to \infty,\ t \to \infty, \tag{1}$$

где $B(x)$ – функция распределения времен обслуживания.

В связи с этим в предельных теоремах появляется не вполне традиционная нормировка $\sqrt{\int_0^t (1 - B(x))dx}$, а не $\sqrt{t}$. Стоит отметить, что нетрадиционная нормировка возникает и в случаях высокой загрузки[4].

Условие (1) выполнено для некоторого подкласса распределений, имеющих тяжелый хвост. В этом случае длинные события, приходящиеся на хвост распределения, происходят не достаточно редко, чтобы ими можно было пренебречь. Такое распределение имеют, например, аварийные события, размер файла в сети интернет, длительность передачи файла в сети и т.д. Подобные распределения естественным образом возникают в страховании, так как распределение страховых требований часто имеет тяжелые хвосты, а также в приложениях финансовой математики [5].

На рубеже 80-х и 90-х годов выходят работы, посвященные бесконечноканальным системам с групповым поступлением требований. В этом случае число занятых приборов, может быть смоделировано как процесс дробового шума, который вызван наложением случайности величины скачков входящего процесса и случайности моментов этих скачков. Далее эти результаты обобщаются для систем с групповым поступлением требований и разными типами входящих групп, например, времена обслуживания для разных групп могут иметь разные распределения, а также быть зависимыми.

Далее появляются работы с еще более сложной структурой обслуживания и входищим потоком. Например, системы с несколькими входящими потоками и разной процедурой обслуживания для разных потоков[6].

В литературе рассматриваются различные модели бесконечноканальных систем, например, системы с ограничениями, системы в случайной среде, сети бесконечноканальных систем, бесконечноканальные системы с прерыванием обслуживания и другие. Это обусловлено как широким кругом практических вопросов, в которых эти модели оказываются полезными, так и целым рядом возникающих здесь интересных математических задач. Для бес-

[4] Glynn P. W., Whitt W., “A new view of the heavy-traffic limit theorem for infinite-server queues”. *Advances in Applied Probability*, 188–209(1991).

[5] Asmussen S. et al., “Rare events simulation for heavy-tailed distributions”. *Bernoulli*, 6(2):303-322, 2000.

[6] Masuyama H., Takine T., “Analysis of an infinite-server queue with batch Markovian arrival streams”. *Queueing Systems*, 42(3):269-296, 2002.

конечноканальных систем изучается поведение разных процессов, например, период занятости (время в течение которого будет занят хоть один прибор в системе), число занятых приборов, длина C-перегруженного периода (length of the C-congested episode), высота C-перегруженного периода (height of the C-congested episode) и т.д.

Основная трудность при доказательстве предельных теорем для числа требований $q(t)$ в момент времени t состоит в определении условий на характеристики системы, описывающие входящий поток и процедуру обслуживания, при которых будет иметь место предел

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Dq(t)}{Eq(t)} = 1.$$

Доказательству этой сходимости для каждого из рассматриваемых нами входящих потоков и посвящена основная часть диссертации.

Естественным развитием теории массового обслуживания для бесконечноканальных систем является исследование систем с входными потоками все более общего вида. В настоящей работе приводятся результаты для систем с дважды стохастическим пуассоновским (ДСП) и регенерирующим входными потоками. Потоки переменной интенсивности интересны, поскольку могут быть использованы при построении моделей многих реальных объектов. В этом случае интенсивность может зависеть от времени, более того, быть случайным процессом.

ДСП потоки являются естественным обобщением пуассоновского потока, поскольку в данном случае интенсивность является случайным процессом. Регенерирующие потоки представляют интерес для анализа, поскольку такими являются большинство потоков, обычно используемых в теории очередей в качестве входных потоков (например, марковский поток, полумарковский поток и др.). Сразу отметим, что ДСП поток является регенерирующим только в том случае, когда его случайная интенсивность – регенерирующий процесс. Системы с таким входящим потоком сложны для анализа, поскольку здесь в общем случае не удается выписать явные формулы для характеристик системы.

В диссертации рассмотрены задачи, связанные с доказательством предельных теорем для одномерных распределений числа требований, находящихся на обслуживании в системе. А также более общая задача – доказательство функциональных теорем для этого процесса. Доказательство слабой сходимости в функциональном пространстве проводится в два этапа. Во-первых, доказывается слабая сходимость конечномерных распределений рассматриваемого процесса, во-вторых, проверяется условие плотности для этого процесса[7].

Цель и задачи исследования. Целью диссертации является получение новых результатов, касающихся предельного поведения процесса, равного числу требований $q(t)$ в системе, когда $t \to \infty$.

Среди задач исследования выделяются следующие.

— Доказательство предельных теорем для $q(t)$ в бесконечноканальных системах с ДСП и регенерирующим входными потоками при $t \to \infty$.

— Нахождение условий для слабой сходимости распределения последовательности процессов $q(tT)$ к распределению гауссовского процесса при $T \to \infty$, $t \in (0, h)$, $h > 0$.

Научная новизна. Представленные в диссертации результаты являются новыми, получены автором самостоятельно.

Основные результаты диссертации следующие.

— Для бесконечноканальной системы обслуживания с ДСП входящим потоком найдено выражение для характеристической функции процесса $q(t)$, приведены выражения для среднего и дисперсии этого процесса. Для случая бесконечного среднего времени обслуживания доказаны предельные теоремы (аналоги закона больших чисел и центальной предельной теоремы) для процесса $q(t)$ при $t \to \infty$. В качестве следствий рассмотрены частные случаи систем с входящим ДСП потоком, когда интенсивность входящего ДСП является регенерирующим или полумарковским марковски модулированным процессом.

— Для бесконечноканальной системы, в которую требования поступают группами случайного объема через независимые одинаково распределенные промежутки времени, найдено выражение для характеристической функции процесса $q(t)$, доказаны аналоги закона больших чисел и центральной предельной теоремы в случае бесконечного среднего времен обслуживания. С использованием этих результатов, доказаны предельные теоремы для $q(t)$ в бесконечноканальной системе с регенерирующим входящим потоком и бесконечным средним времен обслуживания.

— Для бесконечноканальной системы массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком и бесконечным средним времен обслуживания получены условия C-сходимости процесса $q(tT)$ при $T \to \infty$ к гауссовскому процессу, $t \in (0, h)$, $h > 0$.

Методика исследования. В диссертации используются различные методы и результаты математического анализа, теории вероятностей и теории случайных процессов: метод характеристических функций, результат об асимптотике свертки функций[8], теорема о неявной функции, теорема о слу-

[7] Billingsley P., “Convergence of probability measures”, 2013.

[8] Яровая Е. Б., “Модели ветвящихся блужданий и их применение в теории надежности”, *Автоматика*

чайной замене времени в предельных теоремах[9], максимальные неравенства теории демимартингалов[10], критерий сходимости в пространстве непрерывных функций[11].

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Её результаты могут найти применение в теории очередей, теории ветвящихся процессов.

Апробация работы.

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих семинарах механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

- Большом семинаре кафедры теории вероятностей под руководством действительного члена РАН, профессора А. Н. Ширяева (2016 г.),

- Спецсеминаре кафедры теории вероятностей под руководством д.ф.-м.н., профессора Л. Г. Афанасьевой (2013–2016 гг., неоднократно).

Результаты диссертации докладывались следующих конференциях:

- Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов-2014", г. Москва, Россия, 2014.

- XXXII International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Trondheim, Norway, 2014.

- Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов-2015", г. Москва, Россия, 2015.

- 16th Applied Stochastic Models and Data Analysis International Conference (ASMDA2015), Piraeus, Greece, 2015.

- Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов-2016", г. Москва, Россия, 2016.

- Международной конференции по стохастическим методам, Новороссийск, Россия, 2016.

- VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM 2016), Moscow, Russia, 2016.

и телемеханика, 7:29–46, 2010.

[9] Durrett, Richard T., and Sidney I. Resnick., "Weak convergence with random indices". *Stochastic Processes and their Applications*, 5(3):213-220, 1977.

[10] Christofides T. C., Hadjikyriakou M.,"Conditional demimartingales and related results". *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 398(1):380-391, 2013.

[11] Боровков, А.А., "Вероятностные процессы в теории массового обслуживания", 1972).

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в 12 работах, из которых три — в журналах из перечня ВАК. Список работ приведён в конце автореферата [1-11].

Структура и объём работы.

Диссертация изложена на 92 страницах и состоит из введения, трёх глав и списка литературы, включающего 102 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводится краткий обзор исследований, посвященных системам обслуживания с бесконечным числом приборов с различным входящим "потоком" и процедурой обслуживания, начиная с 50-х годов 20-го века. Историческая справка подкрепляется соответствующими ссылками на научные работы. Кроме того, во введении объясняется актуальность темы и научная новизна предпринятого автором исследования.

Во всех трех главах диссертации изучается предельное поведение процесса $q(t)$, равного числу требований в системе в момент времени t. Предполагается, что времена обслуживания требований представляют собой последовательность $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $B(x)$. Обозначаем $\overline{B}(x) = 1 - B(x)$, $\beta(t) = \int\limits_0^t \overline{B}(x)dx$.

В **первой главе** изучается бесконечноканальная система обслуживания с ДСП входящим потоком $A(t)$, с интенсивностью $\lambda(t)$ являющейся стационарным процессом. Используются следующие предположения.

1. Для некоторых положительных постоянных α, c_0 имеет место
$$|cov(\lambda(0), \lambda(x))| \leq \frac{c_0}{(1+x)^\alpha} \text{ для } x \geq 0. \tag{2}$$

2. Существуют положительные постоянные c_1, c_2 и $0 < \Delta < 1$ такие, что при всех $t \geq 0$
$$\frac{c_1}{(1+t)^\Delta} \leq \overline{B}(t) \leq \frac{c_2}{(1+t)^\Delta}. \tag{3}$$

В силу свойств ДСП процесса[12], формула для распределения вероятно-

[12] Grandell J. Doubly stochastic Poisson process. *Lecture Notes in Mathematics*, 529:1–276, 1976.

стей $q(t)$ при любом фиксированном t имеет вид

$$P(q(t)=k)=EP\left(q(t)=k|\Lambda(t),t\in[0,\infty)\right)=E\left(e^{-\rho(t)}\frac{(\rho(t))^k}{k!}\right), \quad (4)$$

где $\rho(t)=\int\limits_0^t \overline{B}(t-x)\lambda(x)dx$, $k=0,1,2,\ldots$.

Анализ предельного поведения $q(t)$ при $t\to\infty$ проводится методом характеристических функций. При этом оказывается, что определяющей является асимптотика $E\rho(t)$ и $D\rho(t)$ при $t\to\infty$. При этом

$$\frac{\lambda c_1}{1-\Delta}t^{1-\Delta}\le E\rho(t)\le\frac{\lambda c_2}{1-\Delta}t^{1-\Delta}. \quad (5)$$

Оценка для $D\rho(t)$ приведена в следующей лемме.

Лемма 1 *Пусть выполнены условия (2) и (3). Тогда для некоторой положительной константы C, при достаточно больших t имеет место следующее неравенство*

$$D\rho(t)\le C(t^{2-2\Delta-\alpha}+t^{-2\Delta}+t^{1-\alpha})\ln^2 t. \quad (6)$$

Основными результатами главы 1 являются следующие теоремы.

Теорема 1 *Если выполнены условия (2), (3) и $\alpha>2\Delta-1$, то*

$$\frac{q(t)}{\lambda\beta(t)}\xrightarrow{p}1 \text{ при } t\to\infty. \quad (7)$$

Теорема 2 *Если выполнены условия (2), (3) и $\alpha>\max(\Delta,1-\Delta)$, то при $t\to\infty$ имеет место слабая сходимость распределения величины*

$$\frac{q(t)-\lambda\beta(t)}{\sqrt{\lambda\beta(t)}}$$

к нормальному распределению, с параметрами (0,1).

Далее представлены несколько важных следствий теорем 1 и 2. В частности, рассматривается бесконечноканальная система, для которой выполнено условие (3), а интенсивность входящего ДСП потока является стационарным регенерирующим процессом. ДСП поток $A(t)$ является регенерирующим, если его случайная интенсивность $\lambda(t)$ – регенерирующий случайный процесс [13,14].

[13]Афанасьева Л.Г., Булинская Е. В. Случайные процессы в теории массового обслуживания и управления запасами. *Lecture Notes in Mathematics*, 113, 1980.

[14]Afanasyeva L. G., Bashtova E. E. Coupling method for asymptotic analysis of queues with regenerative input and unreliable server. *Queueing Systems.* 76(2):125-147, 2014.

Обозначим θ_j момент j-й регенерации процесса $\lambda(t)$, $(j \geq 0)$ и $\tau_j = \theta_j - \theta_{j-1}$, $(j \geq 0)$, $\theta_{-1} = 0$. Последовательность $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(t) = P(\tau_1 \leq t)$, $E\tau_1 = \mu < \infty$. Поскольку мы рассматриваем стационарный регенерирующий процесс, то τ_0 не зависит от последовательности $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $F_0(t) = P(\tau_0 < t) = \frac{1}{\mu}\int\limits_0^t \overline{F}(y)dy$.

Теорема 3 *Если $\lambda(t)$ стационарный регенерирующий процесс и $\sup\limits_t \lambda(t,\omega) \leq \lambda_M < \infty$ с вероятностью 1, то*

$$|cov(\lambda(0), \lambda(t))| \leq 4\lambda_M^2 P(\tau_0 > t) = 4\lambda_M^2 \overline{F_0}(t) \text{ при } t \geq 0. \tag{8}$$

Эта теорема позволяет задавать условие 2 через распределение первого периода регенерации процесса $\lambda(t)$.

В качестве следствий теорем 1 и 2 получены предельные теоремы для процесса $q(t)$ в бесконечноканальной системе с полумарковским марковски модулированным входящим потоком. Эти потоки являются подклассом ДСП потоков. Случайная интенсивность в данном случае представляется в следующем виде

$$\lambda(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \mathbb{I}(\{U(t) = k\}), \tag{9}$$

где $\{U(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$ – стационарный полумарковский процесс, принимающий значения $\{0, 1, 2, \dots\}$, а $\{\lambda_k, \lambda_k < C < \infty, k \geq 0\}$ – совокупность неотрицательных чисел. В таком случае интенсивность $\lambda(t)$ также является стационарным процессом. Распределение $U(t)$ определяется двумя матрицами $\mathbb{P} = (p_{ij})$ и $\mathbb{G} = (G_{ij}(x))$. Первая состоит из вероятностей перехода из (i) в (j), а вторая – из функций распределения времен нахождения $U(t)$ в состояниях $i = 0, 1, 2, \dots$ при условии, что следующим состоянием будет j. Пусть $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ – моменты скачков $U(t)$ и $U_n = U(t_n + 0)$. Тогда $\mathbb{P}$ является матрицей переходных вероятностей для вложенной цепи Маркова U_n. Заметим, что процесс $\lambda(t)$ является регенерирующим и в качестве его точек регенерации $\{\theta_i\}_{i=0}^{\infty}$ можно взять моменты попадания цепи U_n в некоторое фиксированное состояние, например, в нулевое. Положим

$$\theta_0 = \inf\{t \geq 0 : U(t) = 0\},\ \theta_i = \inf_{n\geq 1}\{t_n > \theta_{i-1} : U_n = 0\},\ i = 1, 2, \dots,$$

$$\tau_0 = \theta_0,\ \tau_i = \theta_i - \theta_{i-1},\ i = 1, 2 \dots.$$

Наша цель – выяснить условия, при которых для бесконечноканальной системы с полумарковским входящим потоком будут справедливы утверждения *теорем 1* и *2*. Для этого, как следует из *теоремы 3*, необходимо выяснить асимптотическое поведение при $t \to \infty$ вероятности

$$P(\tau_0 > t) = \frac{1}{E\tau_1} \int_t^\infty P(\tau_1 > y) dy.$$

Заметим, что период регенерации τ_j, $j \geq 1$, состоит из времени, которое процесс $U(t)$ проводит в нулевом состоянии после попадания в него, и времени возвращения в нулевое состояние после выхода из него.

Определим

$$\nu_{jk} = \min \{n > 0 : U_n = k, \text{ при условии } U_0 = j\}.$$

Теорема 4 *Пусть выполнены следующие условия.*

1. *Существует функция распределения $G(x)$ с конечным средним такая, что при достаточно больших x*

$$1 - G_{ij}(x) \leq 1 - G(x), \text{ для } i, j = 0, 1, \ldots.$$

2. *Найдутся $\beta \in (0, 1)$, постоянная $C > 0$ и целое n_0 такие, что*

$$P(\nu_{00} > n) \leq C(1 - \beta)^n \text{ при } n > n_0. \tag{10}$$

Тогда для любого $h \in (0, 1)$, некоторых постоянных C_1, C_2 и всех достаточно больших x выполняется неравенство

$$P(\tau_1 > x) \leq C_1(1 - G(x^{1-h})) + C_2 e^{-\gamma x^h}, \tag{11}$$

где $\gamma = -\ln(1 - \beta)$.

Следствие 1 *В условиях теоремы 4 для системы обслуживания с входящим потоком интенсивности $\lambda(t)$, определяемой соотношением (9), имеют место утверждения.*

1. *Если $1 - G(x) \leq e^{-qx}$ для некоторого $q > 0$, то выполняются теоремы 1 и 2.*

2. *Если $1 - G(x) \leq \frac{c}{x^\delta}$ для $\delta > 0$, $c > 0$ при $x \to \infty$, то теорема 1 выполнена при $\delta > 2\Delta$, а теорема 2 – при $\delta > |\Delta - 1/2| + 3/2$.*

Во **второй главе** рассматривается система с регенерирующим входящим потоком $X(t)$. В этом случае процесс $q(t)$ представляет собой сумму случайного числа случайных слагаемых, причем эти слагаемые, предел суммирования – зависимые случайные величины. Кроме того, в отличие от ситуации главы 1, нет инструментов, позволяющих выписать производящую функцию и провести ее исследование аналитическими методами. Вводятся две вспомогательные мажорирующие системы S_1 и S_2, отличающиеся от исходной структурой входящего потока. В систему S_1 все требования, которые пришли бы в систему S на данном периоде регенерации, поступают группой в его начале, а в систему S_2 – в конце. Если $\{\theta_i\}_{i=1}^{\infty}$ – моменты регенерации входящего потока, тогда $\tau_i = \theta_i - \theta_{i-1}$, $i \geq 1$ – независимые одинаково распределенные случайные величины.

Предполагаем, что функция распределения $B(t)$ – регулярно меняющаяся, т.е.

$$\overline{B}(t) \sim \frac{\mathcal{L}(t)}{t^{\Delta}},\ 0 < \Delta < 1 \tag{12}$$

при $t \to \infty$, где $\mathcal{L}(t)$ – медленно меняющаяся функция при $t \to \infty$.

Считается, что $X(t)$ – число требований, поступивших в систему обслуживания к моменту времени t, $X(0) = 0$. Обозначаем $\xi_i = X\left(\theta_i\right) - X\left(\theta_{i-1}\right)$ – число требований, пришедших за i-й период регенерации, $i \geq 1$, $\lambda = \frac{E\xi_1}{E\tau_1}$.

Пусть $q_i(t)$ число требований в системе S_i в момент времени t, $i = 1, 2$. Показано, что процессы $q_i(t)$, $i = 1, 2$ и $q(t)$ связаны следующим неравенством

$$q_1\left(\theta_{N(t)+1}\right) - \xi_{N(t)+1} \leq q(t) \leq q_2\left(\theta_{N(t)}\right) + \xi_{N(t)+1},\ t \geq 0, \tag{13}$$

где $N(t) = \max\{n : \theta_n \leq t\}$. Поскольку процесс $\xi_{N(t)+1}$ имеет собственное предельное распределение при $t \to \infty$, то для доказательства предельных теорем для $q(t)$, достаточно их получить для $q_i\left(\theta_{N(t)}\right)$. Таким образом, нужно доказать предельные теоремы для бесконечноканальной системы с групповым поступлением требований. Исследование подобных систем имеет и самостоятельный интерес, что подтверждается многочисленными статьями.

Характеристическая функция процесса $q_2(\theta_n)$, $n \geq 1$, имеет вид

$$\Phi_n(z) = E\exp\left(izq_2(\theta_n)\right) = E\prod_{k=1}^{n}\left(\overline{B}(\theta_n - \theta_k)e^{iz} + B(\theta_n - \theta_k)\right)^{\xi_k}. \tag{14}$$

Дифференцируя (14) и полагая $z = 0$, находим

$$Eq_2(\theta_n) = EM_n,\ Dq_2(\theta_n) = EM_n + DM_n,$$

где $M_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \overline{B}(\theta_n - \theta_k)$.

В доказательстве предельных теорем для $q_i(\theta_n)$, $i = 1, 2$ ключевую роль играет утверждение следующей леммы.

Лемма 2 *Пусть* $E\xi_1^2 < \infty$, $E\tau_1^2 < \infty$ *и выполнено (12). Тогда*

1.
$$\frac{M_n - EM_n}{\sqrt{\beta(nE\tau_1)}} \xrightarrow{p} 0 \text{ при } n \to \infty, \tag{15}$$

2.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{EM_n - \lambda\beta(nE\tau_1)}{\sqrt{\beta(nE\tau_1)}} = 0. \tag{16}$$

На основании (15) и (16), доказаны предельные теоремы для $q_i(\theta_n)$ при $n \to \infty$, $i = 1, 2$. Приведем их формулировки.

Теорема 5 *Пусть выполнено (12), а также*
$$E\xi_1^2 < \infty, \ E\tau_1^2 < \infty.$$
Тогда при $n \to \infty$ *имеют место сходимости по распределению*
$$\frac{q(\theta_n) - \lambda\beta(nE\tau_1)}{\sqrt{\lambda\beta(nE\tau_1)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \tag{17}$$
и по вероятности
$$\frac{q(\theta_n)}{\beta(nE\tau_1)} \xrightarrow{p} \lambda. \tag{18}$$

Для осуществления перехода к случайному индексу $N(t)$ в (17) и (18) используем теорему 5 статьи Durrett, Resnick 1977 года[15].

В нашем случае, ее условия выполнены, если установить
$$\lim_{c\to 0} \limsup_{n\to\infty} P\left(\max_{|m-n|<nc} |Y_m - Y_n| > \varepsilon \right) = 0. \tag{19}$$
где $Y_n = \frac{q_i(\theta_n) - \lambda\beta(nE\tau_1)}{\sqrt{\lambda\beta(nE\tau_1)}}$. Проверка этого условия основана на том факте, что последовательность
$$\{q(\theta_n) - E(q(\theta_n)|\mathcal{F})\}_{n\geq 1}$$
образует условный отрицательный демимартингал[16] относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$, а значит, имеют место максимальные неравенства для демимартингалов. Здесь $\mathcal{F}$ – σ-алгебра, порожденная случайной последовательностью $\{\xi_i, \tau_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Проверка условия (19) опирается на следующие леммы.

[15] Durrett, Richard T., and Sidney I. Resnick. Weak convergence with random indices. *Stochastic Processes and their Applications*, 5.3:213-220, 1977.

[16] Rao B. Associated sequences, demimartingales and nonparametric inference. *Springer*, 2012.

Лемма 3 *Пусть $E\tau_1^2 < \infty$, $E\xi_1^2 < \infty$ и выполнено (12). Тогда справедливы утверждения:*

1.
$$\lim_{c\to 0}\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{E_{\mathcal{F}}\left(Y_n - Y_{n(1-c)}\right)^2}{\beta(nE\tau_1)} > \varepsilon\right) = 0, \tag{20}$$

2.
$$\lim_{c\to 0}\lim_{n\to\infty} \frac{E_{\mathcal{F}}Y^2_{n(1-c)}}{\beta(nE\tau_1)} \leq 1, \text{ п.н.}, \tag{21}$$

3.
$$\lim_{c\to 0}\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{E_{\mathcal{F}}\left(Y_n - Y_{n(1+c)}\right)^2}{\beta(nE\tau_1)} > \varepsilon\right) = 0, \tag{22}$$

4.
$$\lim_{c\to 0}\lim_{n\to\infty} \frac{E_{\mathcal{F}}Y^2_{n(1+c)}}{\beta(nE\tau_1)} \leq 1, \text{ п.н.} \tag{23}$$

Лемма 4 *Пусть $M_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \overline{B}(\theta_n - \theta_i)$, $E\xi_1^4 < \infty$, $E\tau_1^2 < \infty$ и выполнено (12). Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{c\to 0}\lim_{n\to\infty} P\left(\max_{|m-n|<nc}\left|\frac{M_m - EM_m}{\sqrt{\beta(mE\tau_1)}} - \frac{M_n - EM_n}{\sqrt{\beta(mE\tau_1)}}\right| > \varepsilon\right) = 0. \tag{24}$$

С помощью лемм 3 и 4 получен следующий результат.

Теорема 6 *Пусть $E\tau_1^2 < \infty$, $E\xi_1^4 < \infty$ и выполнено условие (12). Тогда*

$$\frac{q(\theta_{N(t)}) - \lambda\beta(N(t)E\tau_1)}{\sqrt{\lambda\beta(N(t)E\tau_1)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \text{ при } t \to \infty,$$

$$\frac{q(\theta_{N(t)})}{\beta(N(t)E\tau_1)} \xrightarrow{p} \lambda \text{ при } t \to \infty.$$

Далее, для перехода к неслучайной нормировке используется следующая лемма.

Лемма 5 *Если $E\tau_1^2 < \infty$ и $\beta(t) \to \infty$, $t \to \infty$, то имеет место сходимость по вероятности*

$$\frac{\beta\left(N(t)E\tau_1\right) - \beta\left(t\right)}{\sqrt{\beta(t)}} \xrightarrow{p} 0, \ t \to \infty.$$

Итак, сформулируем основные результаты второй главы.

Теорема 7 *Пусть выполнено условие (12), $E\tau_1^2 < \infty$, $E\xi_1^4 < \infty$. Тогда*

$$\frac{q(t)}{\beta(t)} \xrightarrow{p} \lambda \text{ при } t \to \infty.$$

$$\frac{q(t) - \lambda\beta(t)}{\sqrt{\lambda\beta(t)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \text{ при } t \to \infty.$$

Стоит отметить, что параметры предельного распределения процесса $q(t)$, так же как в случае дважды стохастического пуассоновского входящего потока, выражены через простые характеристики входящего потока, такие как математическое ожидание периодов регенерации и математическое ожидание скачков входящего потока на периодах регенерации, что может быть удобно для приложений.

В **третьей главе** получена функциональная предельная теорема для процесса $q(t)$, равного числу требований в бесконечноканальной системе в момент времени t. Функциональные предельные теоремы интересны в тех случаях, когда изучается поведение не самого процесса, а некоторый функционал от него (в применении к процессу длины очереди, например, это может быть средняя длина очереди в системе, время до первого превышения уровня и т.д.).

Мы будем рассматривать тот вид сходимости, когда предельный процесс непрерывен с вероятностью 1, то есть C-сходимость.

Предполагается, что входящий в систему поток является пуассоновским с интенсивностью $\lambda(t)$, а для функции распределения времен обслуживания $B(t)$ выполнено условие 12.

Предполагаем, что для интенсивности $\lambda(t)$ входящего потока выполнено следующее

Условие 1 *Обозначим $\Lambda(t) = \int\limits_0^t \lambda(y)dy$. Найдется конечное число $\tau \geq 0$, $\lambda > 0$ и последовательность $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ такие, что $S_k \to \infty$ при $k \to \infty$ и*

$$0 < S_k - S_{k-1} \leq \tau \text{ и } \Lambda(S_k) = \lambda S_k,\ k \geq 1,\ S_0 = 0.$$

Сформулируем первый результат этой главы.

Теорема 8 *Предположим, что условие 1 и (12) выполнены, тогда конечномерные распределения процесса*

$$\frac{q(tT) - \rho(tT)}{\sqrt{\mathcal{L}(T)T^{1-\Delta}}}$$

слабо сходятся при $T \to \infty$ к конечномерным распределениям центрированного гауссовского процесса $\xi(t)$ с ковариационной функцией

$$R(t, t+u) = \frac{\lambda}{1-\Delta}\left((t+u)^{1-\Delta} - u^{1-\Delta}\right), \ (t \geq 0, u \geq 0).$$

Здесь $\rho(tT) = \int\limits_0^{tT} \overline{B}(Tt - x)\lambda(x)dx$, $t \in (0, h)$.

Для случая, когда интенсивность входящего пуассоновского потока не зависит от времени, получен следующий результат.

Теорема 9 *Предположим, что (12) выполнено. Тогда последовательность процессов*

$$\frac{q(tT) - \rho(tT)}{\sqrt{\mathcal{L}(T)T^{1-\Delta}}}$$

C-сходится при $T \to \infty$ к гауссовскому процессу с нулевым средним и ковариационной функцией

$$R(t, t+u) = \frac{\lambda}{1-\Delta}\left((t+u)^{1-\Delta} - u^{1-\Delta}\right), \ (t \geq 0, u \geq 0).$$

Здесь $\rho(tT) = \lambda \int\limits_0^{tT} \overline{B}(x)dx$, $t \in (0, h)$.

Доказательство функциональной сходимости проводится в два шага[17]. Это – доказательство слабой сходимости конечномерных распределений и проверка относительной компактности семейства вероятностных мер. Поскольку пространство C сепарабельно и полно, из теоремы Прохорова следует, что относительная компактность семейства вероятностных мер эквивалентна плотности этого семейства.

Доказательство этого результата получается объединением методов, использованных в первой и второй главах. Доказательство слабой сходимости конечномерных распределений происходит методом харакtристических функций с использованием свойств пуассоновского процесса. Доказательство плотности – с помощью метода мажорирования и максимальных неравенств для демимартнгалов.

[17]Боровков А.А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания, 1980.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации изучается процесс $q(t)$, равный числу требований в фиксированный момент времени t, в бесконечноканальной системе обслуживания. Рассмотрены случаи различных входящих потоков требований в систему. Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Доказательство предельных теорем для процесса $q(t)$ в системе с дважды стохастическим пуассоновским входящим потоком при $t \to \infty$.

2. Доказательство предельных теорем для процесса $q(t)$ в системе с регенерирующим входящим потоком при $t \to \infty$.

3. Нахождение условий функциональной сходимости процессов $q(tT)$ к гауссовскому процессу при $T \to \infty$, $t \in (0, h)$, $h > 0$.

В первой главе рассмотрена бесконечноканальная система обслуживания с дважды стохастический пуассоновским входящим потоком и бесконечным средним времени обслуживания требования. Для процесса $q(t)$ были доказаны аналоги закона больших чисел и центральной предельной теоремы. В качестве следствий были рассмотрены системы с регенерирующим входящим ДСП потоком, а также системы с входящим ДСП потоком, управляемым полумарковским марковски модулированным процессом. Известно, что если входящий поток – пуассоновский с интенсивностью λ, то процесс $\frac{q(t)-\lambda\beta(t)}{\sqrt{\lambda\beta(t)}}$ имеет предельное стандартное нормальное распределение, при условии, что

$$\beta(t) = \int_0^t \overline{B}(y)dy \to \infty,\ t \to \infty.$$

Таким образом, результаты главы 1 обобщают этот факт, на случай дважды стохастического пуассоновского входящего потока со стационарной интенсивностью, которая имеет корреляционную функцию достаточно быстро сходящуюся к нулю.

Во второй главе рассмотрена бесконечноканальная система массового обслуживания с регенерирующим входящим потоком и временами обслуживания требований хвост распределения которых является регулярно меняющейся функцией. Для процесса $q(t)$ доказаны аналоги закона больших чисел и центральной предельной теоремы. Заметим, что в первой главе была рассмотрена система с регенерирующим дважды стохастическим пуассоновским входящим потоком и показано, что предельные теоремы для $q(t)$ имеют место при некотором более слабом условии на ковариацию интенсивности входящего ДСП потока, чем то, что получено в этой главе (в случае ДСП входящего потока может требоваться менее одного момента у периодов регенерации). Но это и понятно, ведь дважды стохастический пуассоновский поток имеет более определенный вид, чем регенерирующий и поэтому проще для анализа.

В третьей главе была рассмотрена бесконечноканальная система обслуживания с пуассоновским входящим потоком, с интенсивностью зависящей от времени, и временами обслуживания хвост распределения которых является регулярно меняющейся функцией. В первой части этой главы показана сходимость конечномерных распределений нормированного и центрированного процесса $q(tT)$ к гауссовскому процессу при $T \to \infty$, $t \in (0, h)$, $h > 0$. Явно выписана ковариационная функция этого процесса. Во второй части главы делается попытка проверить условие плотности для нормированного и центрированного $q(tT)$. Для этого доказывается, что $q(tT)$, $T \geq 0$ является отрицательным условным демимартингалом в непрерывном времени. Благодаря этому можно использовать максимальные неравенства, известные для демимартингалов. Однако, при проверке плотности возникают некоторые сложности в оценках и до конца довести проверку этого условия, удается лишь в случае постоянной интенсивности.

Что касается развития и обобщения, полученных результатов, стоит сказать о функциональных предельных теоремах для систем с дважды стохастическим и регенерирующим входящими потоками. Доказательства таких теорем состоят из двух частей. Первая – доказательство сходимости конечномерных распределений, является обобщением сходимости одномерных распределений, которая и была доказана в диссертации. Вторая часть – проверка условия плотности распределений процесса. Его доказательство достаточно просто будет получаться, если использовать наблюдения о том, что исследуемый процесс обладает свойствами отрицательного демимартингала.

Автор выражает глубокую благодарность и признательность своим научным руководителям доктору физико-математических наук, профессору Афанасьевой Ларисе Григорьевне и кандидату физико-математических наук, доценту Баштовой Елене Евгеньевне за постановку задач и постоянное внимание к работе. Автор высоко ценит содействие, оказанное работе сотрудниками кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Чернавская Е. А. Предельные теоремы для системы обслуживания с бесконечным числом приборов и групповым поступлением требований. *Вестник МГУ*, 6:55-59, 2016.

[2] Chernavskaya E. A. Limit Theorems for Queuing Systems with Regenerative Doubly Stochastic Input Flow. *Journal of Mathematical Sciences*, 214(1):34-43, 2016.

[3] Chernavskaya E. A. Limit theorems for an infinite-server queuing system. *Mathematical Notes*, 98(3-4):653-666, 2015.

[4] Chernavskaya E. A. Limit theorems for $M(t)/G/\infty$ queuing system with a heavy tailed distribution of service times. *ASMDA 2015 Proceedings: 16th Applied Stochastic Models and Data Analysis International Conference with 4th Demographics 2015 Workshop / [ed] Christos H. Skiadas, ISAST: International Society for the Advancement of Science and Technology*, 37-52, 2015.

[5] Чернавская Е.А. Предельные теоремы для системы обслуживания с бесконечным числом приборов. *XXI Международная молодежная научная конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов»*, Тезисы докладов, МАКС Пресс, Москва, 2014.

[6] Чернавская Е.А. Предельные теоремы для систем с дважды стохастическим пуассоновским входящим потоком. *Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математики*, тезисы докладов, 2014.

[7] Чернавская Е.А. Функциональная предельная теорема для системы $M/G/\infty$. *XXII Международная молодежная научная конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов»*, Тезисы докладов, МАКС Пресс, Москва, 2015.

[8] Chernavskaya E.A. Functional limit theorem for $M/G/\infty$ queuing system. *16th Applied Stochastic Models and Data Analysis International Conference (ASMDA2015)*, Book of Abstracts, ISAST University of Piraeus, Greece, 25-26,

2015.

[9] Чернавская Е.А. Предельные теоремы для системы обслуживания с бесконечным числом приборов и регенерирующим входящим потоком. *Материалы международной конференции по стохастическим методам*, Тезисы докладов, ЮФУ, Ростов-на-Дону, 73-73, 2016.

[10] Чернавская Е.А. Предельные теоремы для вложенного процесса числа требований в бесконечноканальной системе обслуживания. *XXIII Международная молодежная научная конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов»*, Тезисы докладов, МАКС Пресс, Москва, 2016.

[11] Chernavskaya E.A., Limit theorems for queuing system with an infinite number of servers and regenerative input flow. *VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM 2016)*, Moscow, Conference Proceedings, 205-208, 2016.