ФГБОУ ВО «Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова»

На правах рукописи

Цветкова Анна Валерьевна

Геометрические свойства волнового уравнения на графах и сингулярных пространствах постоянной кривизны

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре Дифференциальной геометрии и приложений Механико–математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель:	доктор физико–математических наук, член-корреспондент РАН **Шафаревич Андрей Игоревич**
Официальные оппоненты:	**Тюрин Николай Андреевич,** доктор физико–математических наук, профессор, Объединенный институт ядерных исследований, начальник сектора **Перескоков Александр Вадимович,** кандидат физико–математических наук, НИУ «Московский энергетический институт», доцент
Ведущая организация:	**ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН»**

Защита диссертации состоится **17 февраля 2017 г.** в 16^{45} на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова, по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8й этаж и на сайте https://istina.msu.ru/dissertations/38758406/.

Автореферат разослан 17 января 2017 г.

Заместитель председателя
диссертационного совета Д 501.001.84 на базе
ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук,
профессор

Иванов Александр Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В последние несколько десятилетий появилось множество работ, посвященных дифференциальным уравнениям на геометрических объектах, не являющихся гладкими многообразиями. Дифференциальные уравнения на геометрических графах используются при моделировании различных задач естествознания, например, колебаний упругих сеток. Дифференциальные уравнения на сингулярных пространствах или, как их еще называют, декорированных графах, то есть топологических пространствах, полученных из плоских графов заменой вершин на многообразия размерности не выше трех, используются, например, для моделирования состояния электронов в молекулах. С математической точки зрения, указанное направление интересно, в первую очередь, нетривиальными связями геометрии сингулярных пространств со свойствами дифференциальных операторах на них.

Одна из первых математических работ, посвященных дифференциальным операторам на декорированных графах, — работа Б.С. Павлова и М.Д. Фаддеева[1], в которой к исследованию таких операторов применялся подход, основанный на теории самосопряженных расширений. Впоследствии этой тематике было посвящено много публикаций различных авторов; отметим, например, работы Й. Брюнинга и В. Гейлера[2], в которой изучались свойства операторов на многообразиях с присоединенными лучами, и А.А. Толченникова[3], в которой исследовались свойства ядра оператора Лапласа - Бельтрами на декорированных графах.

Также существует много работ, посвященных дифференциальным операторам и дифференциальным уравнениям на геометрических графах. Например, в книге[4] даны аналоги классических результатов теории дифференциальных уравнений на графах. Особый интерес представляют бесконечные графы; в качестве примера можно привести работу А. Соболева и М. Соломяка[5], посвященную спектральным свойствам оператора Шре-

[1]Б. С. Павлов, М. Д. Фаддеев. *Модель свободных электронов и задача рассеяния* // ТМФ. – 1983.– Т. 55, № 2. – С. 257–268.

[2]J. Bruning, V. A. Geyler. *Scattering on compact manifolds with infinitely thin horns* // J. Math. Phys. – 2003. – Vol. 44, № 2. – P. 371–405.

[3]А. А. Толченников. *О ядре операторов Лапласа – Бельтрами с потенциалом нулевого радиуса и на декорированном графе* // Математический сборник. – 2008. – Т. 199, № 7. – С. 123–138.

[4]Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабаров. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах* // М.: Физматлит, 2004.

[5]A. V. Sobolev, M. Solomyak. *Shrödinger operators on homogeneous metric trees: spectrum in gaps* //

дингера на однородном дереве, а также работу А.А. Толченникова, В.Л. Чернышева и А.И. Шафаревича[6], в которой, в частности, изучается распространение гауссовых пакетов на однородном дереве.

Задача о распространении гауссовых пакетов на графах и сингулярных пространствах отчасти близка к задаче Коши для волнового уравнения; в диссертации данная задача исследуется на простейших сингулярных пространствах постоянной кривизны и на однородном дереве. В частности, изучается влияние геометрии пространства на распределение энергии решения при стремлении времени к бесконечности.

Цель работы

Целью диссертационной работы является описание решения задачи Коши для волнового уравнения на простейших сингулярных пространствах постоянной кривизны и однородном дереве. В частности, изучается распределения энергии волны на данных геометрических объектах при стремлении времени к бесконечности.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Описание унитарных матриц, задающих неотрицательно определенный оператор Лапласа - Бельтрами на простейших сингулярных пространствах постоянной кривизны;

2. Описание решений задачи Коши для волнового уравнения на простейших сингулярных пространствах постоянной кривизны, содержащих двумерное и трехмерное евклидовы пространства, а также двумерную и трехмерную сферы;

3. Описание унитарных матриц, задающих полное отражение и полное прохождение волны для рассматриваемых сингулярных пространств;

Rev. Math. Phys. – 2002. – Vol. 14, № 5. – P. 421–468.

[6]А. А. Толченников, В. Л. Чернышев, А. И. Шафаревич. *Асимптотические свойства и классические динамические системы в квантовых задачах на сингулярных пространствах* // Нелинейная динамика. – 2010. – Т. 6, № 3. – С. 623–638.

4. Описание распределения энергии волны, являющейся решением задачи Коши, при стремлении времени к бесконечности на простейшем сингулярном пространстве постоянной кривизны, содержащем трехмерное евклидово пространство, а также на декорированном графе, состоящем из двух трехмерных евклидовых пространств, соединенных отрезком;

5. Описание спектра оператора Лапласа с обобщенными условиями Кирхгофа на однородном дереве;

6. Описание решения задачи Коши для волнового уравнения на однородном дереве;

7. Описание распределения энергии волны на однородном дереве при стремлении времени к бесконечности в зависимости от выбора оператора Лапласа.

Основные методы исследования

В диссертации применяются методы геометрии и топологии гибридных пространств, методы теории расширений и спектральной теории, а также используется теория специальных функций, связанных с пространствами постоянной кривизны.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа носит теоретических характер. Полученные результаты представляют интерес для специалистов в области геометрии и дифференциальных уравнений на геометрических объектах, а также могут быть использованы в математической физике.

Апробация результатов работы

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

(1) на Международной научной конференции «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ» (Уфа, 1-3 октября 2015);

(2) на 58-ой научной конференции МФТИ (Москва, 23-28 ноября 2015);

(3) на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов–2016» (МГУ, 11-15 апреля 2016);

(4) на Международной научной конференции «Александровские чтения –2016» (МГУ, 23-25 мая 2016);

(5) на Международной научной конференции «Дни дифракции –2016» (Санкт-Петербург, 27 июня - 1 июля 2016);

(6) на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 8-12 июля 2016);

(7) на Международной конференции «Анализ, вероятность и геометрия» (МГУ, 26 сентября - 1 октября 2016);

(8) на семинаре «Дифференциальные операторы на сингулярных пространствах, алгебраически интегрируемые системы и квантование» (мех.-мат. МГУ, 2016).

Публикации

Все основные результаты диссертации опубликованы в статьях [1]—[3] и тезисах [4] – [8], список которых приведен в конце автореферата, из них в журналах из перечня ВАК – 3 статьи.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка публикаций по теме диссертации, который включает в себя 8 наименований, и списка литературы, включающего в себя 18 наименований. Общий объем диссертации составляет 72 страницы.

Краткое содержание работы

Во **введении** к диссертации приводится историческая справка по исследуемым вопросам. Дается краткое содержание работы и описаны основные результаты. Также приведена информация об апробации работы.

Содержание главы 1

В первой главе даются предварительные сведения, вводятся необходимые определения и формулировки теорем, используемых в дальнейшем.

Содержание главы 2

Вторая глава диссертационной работы посвящена нахождению точного решения задачи Коши для волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = -c^2 A u, \\ u|_{t=0} = u_0(z), \\ u_t|_{t=0} = c u_0'(z) \end{cases} \tag{1}$$

на простейших сингулярных пространствах постоянной кривизны, а именнно, состоящих из поверхности постоянной кривизны с прикрепленным лучом. Здесь A – оператор Лапласа-Бельтрами на декорированном графе, а $u_0(z)$ – гладкая функция, которая имеет компактный носитель в окрестности точки z_0, лежащей на луче. В работе рассматриваются четыре поверхности: двумерное и трехмерное евклидовы пространства, а также двумерная и трехмерная сферы.

Оператором Лапласа - Бельтрами A на сингулярном пространстве называется любое самосопряженное расширение оператора A_0 – прямой суммы операторов Лапласа - Бельтрами на отрезках и многообразиях, из которых состоит сингулярное пространство, ограниченных на функции, зануляющиеся в точках склейки.

Каждое самосопряженное расширение может быть задано с помощью граничных условий в точках склейки многообразий и отрезков. Они должны удовлетворять некоторым уравнениям, которые определяются унитарной матрицей. Во второй главе дано описание тех унитарных матриц, которые задают неотрицательно определенный оператор Лапласа - Бельтрами на рассматриваемых сингулярных пространствах постоянной кривизны. Доказан следующий результат:

Теорема. *Унитарная матрица, определяющая самосопряженное расширение, задает неотрицательно определенный оператор Лапласа - Бельтрами на простейшем декорированном графе, содержащем трехмерное евклидово пространство, тогда и только тогда, когда она имеет один из следующих видов*

1. $U = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$, *где* $\alpha \in \mathbb{R}: \ \alpha^2 = 1$;

2. $U = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, *где* $A_3 \neq 0$ *и* $i\frac{A_4}{A_3} \geq 0, \ i\frac{\overline{A_1}}{\overline{A_3}} \geq 0$;

3. $U = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, *где* $A_2 \neq 0$ *и* $i\frac{A_4}{A_2} \geq 0$, $i\frac{\overline{A_1}}{\overline{A_2}} \geq 0$.

Здесь

$$\begin{cases} A_1 = 1 - e^{i\rho} - x_1 + x_4, \\ A_2 = 1 + e^{i\rho} + x_1 + x_4, \\ A_3 = 1 + e^{i\rho} - x_1 - x_4, \\ A_4 = 1 - e^{i\rho} + x_1 - x_4, \end{cases} \tag{2}$$

$e^{i\rho}$ *– определитель матрицы* $U = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$.

Для остальных простейших сингулярных пространств, рассматриваемых в данной главе, может быть сформулировано аналогичное утверждение.

Также во второй главе найдены аналоги классических формул Кирхгофа для решения задачи Коши для волнового уравнения на простейших сингулярных пространствах постоянной кривизны.

Теорема. *Решение задачи (1) на декорированном графе, состоящем из трехмерного евклидова пространства с присоединенным к нему лучом, имеет следующий вид:*

$$u(z,t) = u_0(z + ct) + v(z - ct)$$

– решение задачи на луче,

$$u(r,t) = \frac{f(r - ct)}{r}$$

– решение задачи на поверхности, где r *– сферическая координата.*

Функции f *и* v *удовлетворяют системе:*

$$\left\{ (I - U) \begin{pmatrix} f'(-ct) \\ v(-ct) + u_0(ct) \end{pmatrix} = i(I + U) \begin{pmatrix} 4\pi f(-ct) \\ -v'(-ct) - u_0'(ct) \end{pmatrix} \right.,$$

где U *– унитарная матрица, соответствующая самосопряженному расширению,* I *– единичная матрица.*

Теорема. *Решение задачи (1) на декорированном графе, состоящем из двумерного евклидова пространства с присоединенным к нему лучом, имеет следующий вид:*

$$u(z,t) = u_0(z+ct) + v(z-ct)$$

– решение задачи на луче,

$$u(r,t) = \frac{c}{4}\int\limits_0^{\infty} \varphi(\lambda)\left[\int\limits_0^{t} sin(c\lambda(t-\xi))a(\xi)d\xi\right] J_0(\lambda r)d\lambda$$

– решение задачи на поверхности, где r – полярная координата, J_0 – функция Бесселя первого рода, функция $\varphi(\lambda)$ определяется равенством

$$\varphi(\lambda) = \int\limits_0^{\infty}\left((1-\lambda^2)Y_0(r)f(r) - Y_0(r)f''(r) + 2f'(r)Y_1(r) - \frac{1}{r}Y_0(r)f'(r)\right)$$

$$J_0(\lambda r)rdr,$$

Y_0, Y_1 – функции Бесселя второго рода, а $f(r)$ – некоторая срезающая функция.

Функции a, b и v удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} (I-U)\begin{pmatrix} b(t) \\ v(-ct)+u_0(ct)\end{pmatrix} = i(U+I)\begin{pmatrix} a(t) \\ -v'(-ct)-u_0'(ct)\end{pmatrix}, \\ b(t) = \frac{a(t)}{2\pi}(\ln 2-\gamma) + \frac{a(t)}{4}\int_0^\infty \lambda\varphi_1(\lambda)J_0(\lambda r)d\lambda\Big|_{r=0} + \\ + \frac{c}{4}\int_0^t \left[\int_0^\infty \varphi(\lambda)\sin(c\lambda(t-\xi))J_0(\lambda r)d\lambda\right]\Big|_{r=0} a(\xi)d\xi, \end{cases}$$

где γ – постоянная Эйлера, U – унитарная матрица, соответствующая самосопряженному расширению, I – единичная матрица,

$$\varphi_1(\lambda) = \int\limits_0^{\infty} f(\xi)Y_0(\xi)J_0(\lambda\xi)\xi d\xi.$$

Теорема. *Решение задачи (1) на декорированном графе, состоящем из трехмерной сферы с присоединенным к ней лучом, имеет следующий вид:*

$$u(z,t) = u_0(z+ct) + v(z-ct)$$

– решение задачи на луче,

$$u(\chi,t)=$$

$$\frac{1}{2\pi^2 sin(\chi)}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{ck\sin(k\chi)}{\sqrt{k^2-1}}\int\limits_0^t \sin\left(c\sqrt{k^2-1}(t-\xi)\right)a(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{c^2}{2\pi^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^\xi a(\eta)d\eta d\xi.$$

– решение задачи на сфере, где координата χ отвечает за геодезическое расстояние.

Функции a, b и v удовлетворяют системе:

$$\begin{cases}(I-U)\begin{pmatrix}b(t)\\ v(-ct)+u_0(ct)\end{pmatrix}=i(U+I)\begin{pmatrix}a(t)\\ -v'(-ct)-u_0'(ct)\end{pmatrix},\\ b(t)=\frac{c^2}{2\pi^2}\int_0^t\int_0^\xi a(\eta)d\eta d\xi+\int_0^t\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{ck\sin(k\chi)}{2\pi^2\sqrt{k^2-1}}\sin\left(c\sqrt{k^2-1}(t-\xi)\right)\right)\Big|_{\chi=0}a(\xi)d\xi,\end{cases}$$

где U – унитарная матрица, соответствующая самосопряженному расширению, I – единичная матрица.

Теорема. *Решение задачи (1) на декорированном графе, состоящем из двумерной сферы с присоединенным к ней лучом, имеет следующий вид:*

$$u(z,t)=u_0(z+ct)+v(z-ct)$$

– решение задачи на луче,

$$u(\varphi,t)=\frac{c}{4\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)P_k(\cos\varphi)}{\sqrt{k(k+1)}}\int\limits_0^t\sin\left(c\sqrt{k(k+1)}(t-\xi)\right)a(\xi)d\xi-$$

$$-\frac{3c^2}{16\pi}\int\limits_{-1}^{1}Q_{\frac{1}{2}}(x)dx\int\limits_0^t\int\limits_0^\xi a(\eta)d\eta d\xi$$

– решение задачи на сфере, где координата φ отвечает за геодезическое расстояние, P_k – многочлены Лежандра, $Q_{\frac{1}{2}}$ – функция Лежандра второго рода.

Функции a, b и v удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} (I-U)\begin{pmatrix} b(t) \\ v(-ct)+u_0(ct) \end{pmatrix} = i(I+U)\begin{pmatrix} a(t) \\ -v'(-ct)-u_0'(ct) \end{pmatrix}, \\ \frac{c}{4\pi}\int_0^t \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)}{\sqrt{k(k+1)}}\sin\left(c\sqrt{k(k+1)}(t-\xi)\right)P_k\left(\cos\varphi\right)\right)\Big|_{\varphi=0} a(\xi)d\xi - \\ -\frac{3c^2}{16\pi}\int_{-1}^{1}Q_{\frac{1}{2}}(x)dx\int_0^t\int_0^{\xi}a(\eta)d\eta d\xi - \frac{a(t)}{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty}M_kP_k\left(\cos\varphi\right)\right)\big|_{\varphi=0} = \\ = \left(\gamma+\psi(\frac{3}{2})-\ln 2\right)\frac{a(t)}{2\pi}+b(t), \end{cases}$$

где γ – постоянная Эйлера, ψ – логарифмическая производная гамма - функции, U – унитарная матрица, соответствующая самосопряженному расширению, I – единичная матрица,

$$M_k = \begin{cases} \frac{2k+1}{(2k-1)(k+\frac{3}{2})}, \ k \neq 0, \\ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}Q_{\frac{1}{2}}(x)dx, \ k=0. \end{cases}$$

Далее рассматриваются особые случаи, а именно, случай полного отражения волны от поверхности и случай полного прохождения, характеризующийся тем, что волна не отражается от поверхности, а полностью уходит на нее. Для каждого из рассматриваемых сингулярных пространств описаны унитарные матрицы, для которых реализуются эти случаи.

Утверждение. *Для всех простейших декорированных графов, изученных во второй главе, случай полного отражения волны, т. е. случай, когда волна доходит до поверхности, полностью отражается от нее, а по самой поверхности не распространяется, реализуется для следующих унитарных матриц:*

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\rho_1} & 0 \\ 0 & e^{i\rho_2} \end{pmatrix}, \ \rho_1 \in [0,\pi], \ \rho_2 \in [\pi, 2\pi].$$

Утверждение. *Для простейшего декорированного графа, содержащего трехмерное евклидово пространство, случай полного прохождения волны, т. е. случай, когда волна доходит до поверхности, полностью распространяется по ней, а от поверхности ничего не отражается, реализуется для следующих унитарных матриц*

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1-4\pi}{1+4\pi} & x_2 \\ -\overline{x_2} & \frac{1-4\pi}{1+4\pi} \end{pmatrix}, \ |x_2| = \frac{4\sqrt{\pi}}{1+4\pi}.$$

Утверждение. *Для остальных простейших декорированных графов, рассмотренных во второй главе, случай полного прохождения волны, т. е. случай, когда волна доходит до поверхности, полностью распространяется по ней, а от поверхности ничего не отражается, не реализуется ни для каких унитарных матриц.*

Содержание главы 3

Третья глава настоящей диссертационной работы посвящена распределению энергии решения задачи Коши для волнового уравнения на двух видах декорированных графов постоянной кривизны, содержащих трехмерное евклидово пространство.

В первом параграфе рассматривается декорированный граф, состоящий из трехмерного евклидова пространства с прикрепленным лучом. Предполагается, что самосопряженное расширение оператора Лапласа задается унитарной матрицей

$$U = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда можно сформулировать теорему:

Теорема. *Энергия волны, являющейся решением задачи Коши* (1) *на сингулярном пространстве, состоящем из трехмерного евклидова пространства с вклеенным лучом, при стремлении времени к бесконечности распределяется следующим образом: энергия волны, которая остается на луче, равна*

$$E_{R_+} = \frac{c^2}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|A_1|^2|y|^4 + (16\pi^2|A_2|^2 + |A_3|^2)|y|^2 + 16\pi^2|A_4|^2 - 32\pi|y|^2|x_2|^2}{|A_1|^2|y|^4 + (16\pi^2|A_2|^2 + |A_3|^2)|y|^2 + 16\pi^2|A_4|^2 + 32\pi|y|^2|x_2|^2}$$

$$|y\hat{u}_0(y)|^2 dy,$$

энергия волны, которая распространяется по поверхности, равна

$$E_{R^3} = \frac{c^2}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{64\pi|yx_2|^2}{|A_1|^2|y|^4 + (16\pi^2|A_2|^2 + |A_3|^2)|y|^2 + 16\pi^2|A_4|^2 + 32\pi|y|^2|x_2|^2}$$

$$|y\hat{u}_0(y)|^2 dy,$$

здесь $\hat{u}_0(y)$ *– преобразование Фурье функции* u_0*. Коэффициенты* $A_1 - A_4$ *определены системой* (2).

Далее рассматривается декорированный граф, состоящий из двух трехмерных евклидовых пространств, соединенных отрезком. Матрицы

$$U_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},\ U_2 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$$

задают граничные условия в окрестности прикрепления отрезка соответственно к первой и второй поверхностям.

Теорема. *Энергия волны, являющейся решением задачи Коши* (1) *на сингулярном пространстве, состоящем из двух трехмерных евклидовых пространств, соединенных отрезком, при стремлении времени к бесконечности распределяется следующим образом: энергия волны, которая распространяется по отрезку, стремится к нулю. Предельная энергия, которая концентрируется на первой поверхности, равна*

$$\frac{c^2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|x_2|^2\left(|B_1|^2|y|^4+(16\pi^2|B_2|^2+|B_3|^2)|y|^2+16\pi^2|B_4|^2+32\pi|y|^2|y_2|^2\right)}{|y_2|^2\left(|A_1|^2|y|^4+(16\pi^2|A_2|^2+|A_3|^2)|y|^2+16\pi^2|A_4|^2\right)+|x_2|^2\left(|B_1|^2|y|^4+(16\pi^2|B_2|^2+|B_3|^2)|y|^2+16\pi^2|B_4|^2\right)}|y\hat{u}_0(y)|^2dy,$$

энергия, которая концентрируется на второй поверхности, равна

$$\frac{c^2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|y_2|^2\left(|A_1|^2|y|^4+(16\pi^2|A_2|^2+|A_3|^2)|y|^2+16\pi^2|A_4|^2-32\pi|y|^2|x_2|^2\right)}{|y_2|^2\left(|A_1|^2|y|^4+(16\pi^2|A_2|^2+|A_3|^2)|y|^2+16\pi^2|A_4|^2\right)+|x_2|^2\left(|B_1|^2|y|^4+(16\pi^2|B_2|^2+|B_3|^2)|y|^2+16\pi^2|B_4|^2\right)}|y\hat{u}_0(y)|^2dy,$$

здесь $\hat{u}_0(y)$ *– преобразование Фурье функции* u_0*,*

$$\begin{cases} A_1 = 1 - e^{i\phi} - x_1 + x_4,\ B_1 = 1 - e^{i\eta} - y_1 + y_4, \\ A_2 = 1 + e^{i\phi} + x_1 + x_4,\ B_2 = 1 + e^{i\eta} + y_1 + y_4, \\ A_3 = 1 + e^{i\phi} - x_1 - x_4,\ B_3 = 1 + e^{i\eta} - y_1 - y_4, \\ A_4 = 1 - e^{i\phi} + x_1 - x_4,\ B_4 = 1 - e^{i\eta} + y_1 - y_4. \end{cases}$$

Содержание главы 4

Четвертая глава посвящена нахождению решения задачи Коши для волнового уравнения на бесконечном однородном дереве, а также описанию распределения энергии при стремлении времени к бесконечности.

Однородным деревом называется бесконечное корневое дерево, из корня которого выходит ровно одно ребро, а из любой другой вершины выходит $b > 1$ ребер.

В данной главе диссертации вводится некоторое обобщение оператора Лапласа с условиями согласования Кирхгофа.

Определение. *Оператором Лапласа Δ с обобщенными условиями Кирхгофа на однородном дереве Γ с числом ветвления b называется самосопряженный оператор в $L^2(\Gamma)$, который определен на множестве функций из пространства Соболева $f(x) \in \oplus \sum_{e \in E(\Gamma)} H^2(e)$, удовлетворяющих следующим условиям:*

1. $f|_{e_v^-}(v) = \frac{1}{\gamma} f|_{e_v^1}(v) = \ldots = \frac{1}{\gamma} f|_{e_v^b};$
2. $f'|_{e_v^-}(v) = \gamma(f'|_{e_v^1}(v) + \ldots + f'|_{e_v^b}(v));$
3. $f(o) = 0.$

При этом на каждом ребре $e \in E(\Gamma)$

$$\Delta f(x) = -\frac{d^2 f(x)}{dx^2}.$$

Здесь "o" — корень дерева, $v \neq$ "o" — некорневая вершина, e_v^- — ребро, входящее в вершину v, $e_v^1,\ e_v^2, \ldots,\ e_v^b$ — ребра, выходящие из вершины v, $\gamma > 0$ — некоторая константа. Если $\gamma = 1$, то заданные условия совпадают с условиями Кирхгофа.

Вводится оператор Δ_0 в $L^2(\mathbb{R}_+)$, определенный на множестве функций $y \in H^2(0,1) \times H^2(1,2) \times \ldots \times H^2(n-1,n) \times \ldots$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $y(n+) = \gamma b^{1/2} y(n-),\ y'(n+) = \gamma^{-1} b^{-1/2} y'(n-),\ \forall n \in \mathbb{N};$
2. $y(0) = 0;$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1,n)} |y''(t)|^2 dt < \infty,$

и на каждом интервале $(n-1, n),\ n \in \mathbb{N}$ действующий следующим образом:

$$\Delta_0 y = -y''.$$

Теорема. *Ограничение оператора* Δ *на пространство функций, симметричных относительно корня дерева, унитарно эквивалентно оператору* Δ_0 *в* $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Также описан спектр оператора Δ_0.

Теорема. *Существенный спектр оператора* Δ_0 *состоит из интервалов* $b_l = [(\pi(l-1)+\theta)^2, (\pi l - \theta)^2],\ l \in \mathbb{N}$.

Здесь $\theta = \arccos(\frac{1}{R}),\ R = \frac{\gamma b^{1/2} + \gamma^{-1} b^{-1/2}}{2}$.

Теорема. *Если* $\gamma^2 b > 1$, *то дискретный спектр оператора* Δ_0 *состоит из простых собственных значений* $\lambda_l = (\pi l)^2,\ l \in \mathbb{N}$. *Соответствующие нормированные в* $L^2(\mathbb{R}_+)$ *собственные функции имеют вид*

$$y_l(x) = \sqrt{2(\gamma^2 b - 1)}\gamma^{-n} b^{-\frac{n}{2}} \sin(\pi l x),\ x \in (n-1, n),\ n \in \mathbb{N}.$$

Если $0 < \gamma^2 b \leq 1$, *то дискретный спектр оператора* Δ_0 *пуст.*

Далее описано решение задачи Коши для волнового уравнения

$$\begin{cases} u''_{tt} = -\Delta u, \\ u|_{t=0} = u_0(z), \\ u'_t|_{t=0} = u'_0(z), \end{cases}$$

в случае, когда начальное условие $u_0(z)$ является гладкой функцией с компактным носителем на ребре дерева, выходящем из корня. Эта задача может быть переформулирована с помощью оператора Δ_0, что приводит к теореме:

Теорема. *В случае* $\gamma^2 b > 1$ *решением задачи Коши для волнового уравнения на однородном дереве с числом ветвления* b *является следующая функция:*

$$y(x,t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2(\gamma^2 b - 1)}{\gamma^{n+1} b^{\frac{n+1}{2}}} \frac{\sin(\pi l x)}{\pi l} \int_0^1 u'_0(y) \cos(\pi l (t-y)) dy +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \int_{b_l} \zeta_l(x,\xi) \left(\frac{\sin(\mu_l(\xi) t)}{\mu_l(\xi)} \int_0^1 u'_0(y) \overline{\zeta_l(y,\xi)} dy + \right.$$

$$+\cos(\mu_l(\xi)t)\int\limits_0^1 u_0(y)\overline{\zeta_l(y,\xi)}dy\Bigg)\,d\mu_l^2(\xi),$$

$x\in(n-1,n),\ n\in\mathbb{N}$.

В случае $0<\gamma^2 b\leq 1$ решение задачи Коши имеет вид:

$$y(x,t)=$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}\int\limits_{b_l}\zeta_l(x,\xi)\left(\frac{\sin(\mu_l(\xi)t)}{\mu_l(\xi)}\int\limits_0^1 u_0'(y)\overline{\zeta_l(y,\xi)}dy+\right.$$

$$\left.+\cos(\mu_l(\xi)t)\int\limits_0^1 u_0(y)\overline{\zeta_l(y,\xi)}dy\right)d\mu_l^2(\xi),$$

$x\in(n-1,n),\ n\in\mathbb{N}$.

Здесь $\zeta_l(x,\xi)$ — обобщенные функции непрерывного спектра,

$$\mu_l(\xi)=\begin{cases}\pi(l-1)+\varphi(\xi),l=2k-1,\\ \pi l-\varphi(\xi),l=2k,\end{cases}\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

В параграфе 4.4 найдено распределение энергии волны, являющейся решением задачи Коши, при стремлении времени к бесконечности.

Теорема. *Если $0<\gamma^2 b\leq 1$, то для однородного дерева с числом ветвления b волна $y(x,t)$, являющаяся решением задачи Коши, "уйдет на бесконечность", то есть*

$$\lim_{t\to\infty}y(x,t)=0.$$

Теорема. *Если $\gamma^2 b>1$, то для однородного дерева с числом ветвления b доля энергии волны, являющейся решением задачи, которая остается на конечном участке графа, равна $\frac{\gamma^2 b-1}{\gamma^2 b}$. Для любого фиксированного $n\in\mathbb{N}$ доля энергии, которая остается на уровне n, равна $\frac{(\gamma^2 b-1)^2}{(\gamma^2 b)^{n+1}}$.*

В параграфе 4.5 рассматривается локальное поведение энергии в окрестности вершины. Оказывается, что после того, как волна достигает вершины, доля энергии, остающаяся на ребре, входящем в вершину, равна $\frac{(1-\gamma^2 b)^2}{(1+\gamma^2 b)^2}$. В зависимости от выбора константы γ данное выражение принимает любое значение из промежутка $[0;1)$. Таким образом, при надлежащем выборе константы рассматриваемый оператор Лапласа дает любое локальное поведение энергии, кроме полного отражения. Случай полного отражения реализуется, например, если самосопряженное расширение определяется диагональной матрицей $diag\{1,...,1\}$. В этом случае вся энергия остается на ребре дерева, выходящем из корня.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Шафаревичу Андрею Игоревичу за постановку задач, ценные советы и постоянное внимание к работе, а также всему коллективу кафедры дифференциальной геометрии и приложений за доброжелательную и творческую атмосферу.

Работы автора по теме диссертации

[1] A. I. Shafarevich, A. V. Tsvetkova. *Solutions of the wave equation on hybrid spaces of constant curvature* // Rus. J. Math. Phys. – 2014. – Vol. 21, № 4. – P. 509—520. (А. И. Шафаревичу принадлежат постановки задач, А. В. Цветковой принадлежат точные формулировки и доказательства утверждений.)

[2] А. В. Цветкова, А. И. Шафаревич. *Задача Коши для волнового уравнения на однородном дереве* // Математические заметки. – 2016. – Т. 100, № 6. – С. 923—931. (А. И. Шафаревичу принадлежат формулировки утверждений, А. В. Цветковой принадлежат доказательства утверждений.)

[3] A. V. Tsvetkova. *Distribution of energy of solutions of the wave equation on singular spaces of constant curvature and on a homogeneous tree* // Rus. J. Math. Phys. – 2016. – Vol. 23, № 4. – P. 536–550.

[4] А. В. Цветкова. *Спектр оператора Лапласа и решения волнового уравнения на декорированных графах постоянной кривизны* // Международная конференция «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ», тезисы докладов. – БашГУ, 2015. – С. 146.

[5] А. В. Цветкова. *Волновое уравнение на бесконечном однородном дереве* // Международная конференция «Ломоносов–2016» , тезисы докладов. – МГУ, Москва, 2016.

[6] A. I. Shafarevich, A. V. Tsvetkova. *The Laplacian on a homogeneous tree with general matching conditions. The wave equation* // International conference «Days on diffraction 2016», abstracts. – St. Petersburg, 2016. – P. 114.

[7] А. В. Цветкова, А. И. Шафаревич. *Оператор Лапласа с общими условиями согласования и волновое уравнение на однородном дереве* // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, тезисы докладов. – Суздаль, 2016. – С. 225.

[8] A. V. Tsvetkova. *The wave equation on hybrid spaces of constant curvature. The behavior of the energy* // 4-th international workshop «Analysis, Geometry and Probability», book of abstracts. – MSU, Moscow, 2016. – P. 62–63.