

Отзыв
научного руководителя о диссертационной работе
Цветковой Анны Валерьевны
«Геометрические свойства волнового уравнения на графах и
сингулярных пространствах постоянной кривизны»
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.04 – геометрия и топология

Диссертация Цветковой Анны Валерьевны «Геометрические свойства волнового уравнения на графах и сингулярных пространствах постоянной кривизны» посвящена геометрическим свойствам решений волнового уравнения на графах и простейших сингулярных пространствах постоянной кривизны. Под сингулярными пространствами (иногда их также называют гибридными пространствами или декорированными графами) понимаются клеточные комплексы, представляющие собой наборы гладких римановых многообразий малой размерности, которые соединены между собой некоторым количеством кривых. Дифференциальные операторы на таких пространствах и их связь с геометрией самих пространств стали интенсивно изучаться начиная с 80-х годов прошлого века после работ Б.С. Павлова, М.Д. Фаддеева, П.Экснера, О. Поста, Й. Брюнинга, В.А. Гейлера, Ю.В. Покорного, О.М. Пенкина и многих других. Основное внимание уделялось спектральным свойствам таких операторов и различным аспектам спектральной геометрии (например, формулам следов). Один из основных инструментов, помогающих исследовать такие свойства – теория расширений симметричных операторов; при помощи этой теории определяются и сами дифференциальные операторы на гибридных пространствах. В частности, могут быть описаны всевозможные условия в точках склейки, описывающие самосопряженные лапласианы.

В тоже время, эволюционные уравнения изучены существенно слабее, хотя, как показывают имеющиеся сравнительно немногочисленные примеры, характеристики различных решений таких уравнений могут отражать весьма нетривиальные геометрические и топологические свойства сингулярного пространства. Эволюционные уравнения интересны и с точки зрения приложений. В диссертации А.В. Цветковой систематически изучаются простейшие сингулярные пространства постоянной кривизны – евклидовы пространства и сферы, к которым приклеены лучи. Постоянство кривизны дает возможность получить достаточно явные формулы для решения задачи Коши – хотя они оказываются существенно более громоздкими, чем классические формулы Кирхгофа и Пуассона.

Геометрия и топология сингулярного пространства влияет на распределение энергии решения волнового уравнения – в отличие от евклидова пространства, энергия может концентрироваться на различных элементах гибридного пространства не только за счет кривизны, но и за счет топологии пространства, а также за счет различных типов краевых условий в точках склейки (отметим, что эти условия также носят геометрический характер – они параметризуются лагранжевыми плоскостями). Этот вопрос к настоящему времени почти совсем не изучен; в диссертации предельное распределение

энергии изучается для простейших гибридных пространств, состоящих из трехмерных пространств и отрезков (либо лучей).

Исследование распределения энергии весьма нетривиально даже для чисто одномерных структур – метрических графов. В частности, для другой задачи распределения энергии гауссовых пакетов – асимптотических решений уравнения Шредингера – в нашей с В.Л. Чернышевым работе была высказана гипотеза, согласно которой на однородном бесконечном дереве, растущем из корня степени 1, энергия распределяется в соответствии с геометрической прогрессией, знаменатель которой выражается через число ветвления дерева. Эта гипотеза подтверждалась численными экспериментами, однако так и не была доказана. В работе А.В. Цветковой аналогичный факт доказывается для решений волнового уравнения на однородном дереве. В качестве основного инструмента используется (весьма нетривиальное) спектральное разложение лапласиана на дереве, полученное изначально в работе А.В. Соболева и М.З. Соломяка 2002 года и затем обобщенное А.В. Цветковой.

Перечислим основные результаты диссертации.

1. Для гибридного пространства, полученного склейкой луча с евклидовым пространством или сферой размерности 2 или 3, найдены явные формулы для решения задачи Коши для волнового уравнения с начальным условием, локализованным на луче. Все четыре случая существенно различаются: трехмерный случай характеризуется наличием явной замены, позволяющей сразу избавиться от особенности решения (в двумерном случае приходится вводить срезающую функцию), а компактность сфер приводит к возникновению ряда по сферическим функциям.
2. Полностью описаны краевые условия (т.е. соответствующие лагранжевы плоскости), которые приводят к полному отражению или полному прохождению локализованного решения (последний эффект присутствует только в некомпактном случае).
3. Для гибридных пространств, состоящих из трехмерного пространства и луча или из отрезка и двух трехмерных пространств, получены явные формулы для распределения энергии по элементам гибридного пространства. В частности, во втором случае показано, что энергия на отрезке стремится к нулю (т.е. волна уходит в пространства).
4. Получено явное решение задачи Коши для волнового уравнения на однородном дереве с начальным условием, локализованным на первом ребре. Обобщены результаты работы А.В. Соболева и М.З. Соломяка о спектральном разложении лапласиана.
5. Исследовано распределение энергии решения задачи Коши для волнового уравнения на однородном дереве. Показано, что часть энергии остается на конечной части дерева, причем доли энергии на последовательных уровнях образуют геометрическую прогрессию.

При решении этих задач А.В. Цветкова использовала методы геометрии и топологии гибридных пространств, методы теории расширений, теорию специальных функций, связанных с пространствами постоянной кривизны,

спектральную теорию операторов. Все эти методы в диссертации Цветковой удачно сочетаются и приводят с нетривиальным и технически сложным результатам.

По теме диссертации опубликованы три научные статьи в журналах из списка ВАК, а также несколько тезисов. Результаты докладывались на российских и международных конференциях.

Считаю, что диссертационная работа А.В. Цветковой «Геометрические свойства волнового уравнения на графах и сингулярных пространствах постоянной кривизны» содержит существенные продвижения в теории дифференциальных операторов на гибридных пространствах и метрических графах. Работа выполнена на высоком математическом уровне, квалификация автора не вызывает сомнений. Диссертация удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к кандидатским диссертациям, а ее автор Цветкова Анна Валерьевна безусловно заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – «геометрия и топология».

Научный руководитель,
доктор физико-математических наук,
профессор

А.И. Шафаревич

27 сентября 2016 г.

Подпись А.И. Шафаревича удостоверяю

И.О. декана механико-математического факультета МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор

В.Н. Чубариков

